

REZONANS MECHANICZNY PRZY DRGANIACH SKRĘTNYCH PRĘTA LEPKOSPĘŻYSTEGO

ANNA FORYŚ i ANDRZEJ FORYŚ (KRAKÓW)

1. WSTĘP

Praca dotyczy zjawiska rezonansu w pręcie wykonanym z materiału lepkospężystego. Skorzystano z podanego w [1] równania drgań skrętnych pręta lepkospężystego i rozwiązano to równanie dla przypadku, gdy można pominąć bezwładność pręta w stosunku do bezwładności masy umocowanej na swobodnym jego końcu. W części doświadczalnej zbadano pełzanie pręta, drgania własne pręta oraz zależność amplitudy drgań wymuszonych od częstotliwości momentu wymuszającego. Następnie zestawiono wyniki teorii i doświadczenia.

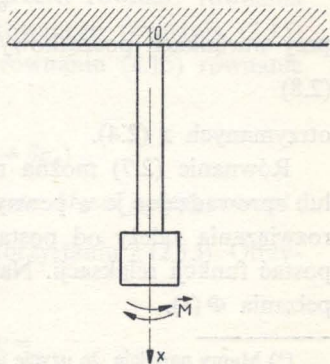
2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA I WYPROWADZENIE RÓWNIANIA

Rozważmy pręt z materiału lepkospężystego o stałym przekroju kołowym. Przy założeniu, że odkształcenie zachodzi bez zmiany objętości oraz że przekroje pozostają płaskie, równanie drgań skrętnych pręta ma zgodnie z [1] postać

$$(2.1) \quad J_0 \left[\psi(0) \varphi_{xx}(x, t) - \int_0^t \psi_\theta(t-\theta) \varphi_{xx}(x, \theta) d\theta \right] = \rho i^2 \varphi_{tt}(x, t),$$

gdzie $\varphi(x, t)$ oznacza kąt skręcenia przekroju o współrzędnej x w chwili t , R jest promieniem pręta, $J_0 = \pi R^4/2$ biegunowym momentem bezwładności pola przekroju, $\psi(t)$ funkcją relaksacji dla skręcania, $\psi(0) = G_0$ modułem sztywności natychmiastowej, ρ liniową gęstością pręta, $i = R/\sqrt{2}$ ramieniem bezwładności oraz $\varphi_x \equiv \partial\varphi/\partial x$.

Przyjmujemy, że górny koniec $x=0$ pręta (próbki) jest zamocowany nieruchomo, dolny jego koniec $x=l$, obciążony symetrycznie masą względem osi x , zwisa swobodnie i jest poddawany działaniu zmiennego sinusoidalnie w czasie momentu (rys. 1) siły. Wektor momentu siły ma kierunek osi x . Zakładamy, że moment bezwładności masy obciążającej jest znacznie większy od momentu bez-



Rys. 1

władności próbki względem osi obrotu oraz że naprężenia w pręcie spowodowane przez obciążenie są do pominięcia. Zatem przyjęcie $\rho=0$ w równaniu (2.1) daje równanie drgań skrętnych rozważanego pręta

$$(2.2) \quad G_0 \varphi_{xx}(x, t) - \int_0^t \psi_\theta(t-\theta) \varphi_{xx}(x, \theta) d\theta = 0.$$

Uwzględnienie zamocowanej na końcu pręta masy prowadzi zgodnie z [1] do warunków brzegowych ($t \geq 0$):

$$(2.3) \quad J_0 \left[G_0 \varphi_x(l, t) - \int_0^t \psi_\theta(t-\theta) \varphi_x(l, \theta) d\theta \right] + J \varphi_{tt}(l, t) = M_0 \sin \omega t, \quad \varphi(0, t) = 0,$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia: J oznacza moment bezwładności masy obciążającej, M_0 amplitudę momentu wymuszającego oraz ω częstość kołową momentu wymuszającego.

Przyjmujemy następujące warunki początkowe ($0 \leq x \leq l$):

$$(2.4) \quad \varphi(x, 0) = 0, \quad \varphi_t(x, 0) = 0.$$

Równanie (2.2) jest równaniem całkowym typu Volterry ze względu na funkcję $\varphi_{xx}(x, t)$. Na podstawie [2] równanie to ma jedyne rozwiązanie ograniczone $\varphi_{xx}(x, t) = 0$.

Stąd

$$(2.5) \quad \varphi(x, t) = x\varphi(t) + f(t),$$

gdzie $\varphi(t)$ i $f(t)$ są poszukiwanymi funkcjami czasu (¹). Zgodnie z warunkiem brzegowym (2.3) $f(t) = 0$ i dostajemy

$$(2.6) \quad \varphi(x, t) = x\varphi(t).$$

Warunek brzegowy (2.3) przy uwzględnieniu (2.6) wystarczy do opisu wymuszonych drgań skrętnych swobodnego końca pręta obciążonego masą. Należy zatem znaleźć rozwiązanie $\varphi(t)$ następującego równania różniczkowo-całkowego:

$$(2.7) \quad J_0 \left[G_0 \varphi(t) - \int_0^t \psi_\theta(t-\theta) \varphi(\theta) d\theta \right] + J I \ddot{\varphi}(t) = M_0 \sin \omega t$$

przy warunkach początkowych

$$(2.8) \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0,$$

otrzymanych z (2.4).

Równanie (2.7) można rozwiązać posługując się transformacją Laplace'a [3] lub sprowadzając je w pewnych przypadkach do równania różniczkowego. Metoda rozwiązania zależy od postaci funkcji $\psi_\theta(t-\theta)$. Należy więc znaleźć analityczną postać funkcji relaksacji. Natomiast doświadczalnie prościej otrzymuje się funkcję pełzania $\Phi(t)$.

(¹) Mamy nadzieję, że użycie jednego symbolu φ na oznaczenie dwóch różnych funkcji $\varphi(x, t)$ i $\varphi(t)$ nie utrudni Czytelnikowi przeczytania pracy.

Między funkcjami pełzania i relaksacji zachodzi następujący związek całkowy [4]:

$$(2.9) \quad \int_0^t \psi(t-\theta) \Phi(\theta) d\theta = t,$$

który możemy traktować jako równanie całkowe ze względu na funkcję relaksacji, gdy znamy funkcję pełzania.

Przypuścimy, że

$$(2.10) \quad \Phi(t) = A + Bt - Ce^{-Dt},$$

gdzie A , B , C i D są stałymi (taką postać funkcji pełzania daje przeprowadzone doświadczenie, por. p. 5). Z (2.10) wynika zależność

$$(2.11) \quad G_0 = \frac{1}{A-C}.$$

Równanie całkowe (2.9) z funkcją pełzania (2.10) rozwiązujemy stosując transformację Laplace'a oraz korzystając z twierdzenia o splocie [5]. Otrzymujemy wtedy

$$(2.12) \quad \psi(t) = G_0 \left(\frac{D+p_1}{p_1-p_2} e^{p_1 t} - \frac{D+p_2}{p_1-p_2} e^{p_2 t} \right) \equiv \alpha e^{p_1 t} - \beta e^{p_2 t},$$

gdzie

$$(2.13) \quad p_{1,2} = \frac{1}{2} G_0 [-(AD+B) \pm \sqrt{(AD-B)^2 + 4BCD}].$$

Zatem

$$(2.14) \quad \psi_\theta(t-\theta) = -\alpha p_1 e^{p_1(t-\theta)} + \beta p_2 e^{p_2(t-\theta)}.$$

Wstawiając (2.14) do równania (2.7) otrzymujemy następujące równanie różniczkowo-całkowe:

$$(2.15) \quad J_0 \left\{ G_0 \varphi(t) - \int_0^t [\beta p_2 e^{p_2(t-\theta)} - \alpha p_1 e^{p_1(t-\theta)}] \varphi(\theta) d\theta \right\} + J_0 \ddot{\varphi}(t) = M_0 \sin \omega t.$$

Równanie (2.15) daje się sprowadzić do równania różniczkowego. W tym celu dwukrotnie różniczkujemy się (2.15) względem czasu. Z trzech równań: równania (2.15), zróżniczkowanego (2.15) i dwukrotnie zróżniczkowanego równania (2.15) wyeliminowano całki. Otrzymujemy wtedy równoważne równaniu (2.15) równanie różniczkowe

$$(2.16) \quad J_0 \ddot{\ddot{\varphi}} - J_0(p_1+p_2) \ddot{\ddot{\varphi}} + (J_0 G_0 + J_0 p_1 p_2) \ddot{\varphi} + [J_0(\alpha p_1 - \beta p_2) - J_0 G_0(p_1+p_2)] \dot{\varphi} = M_0(p_1 p_2 - \omega^2) \sin \omega t - M_0 \omega(p_1+p_2) \cos \omega t.$$

Po wprowadzeniu pomocniczej funkcji $u(t) \equiv \dot{\varphi}(t)$ i po skorzystaniu z (2.13). Otrzymujemy

$$(2.17) \quad J_0 \ddot{\ddot{u}} + J_0 G_0(AD+B) \ddot{u} + G_0(J_0 + J_0 BD) \dot{u} + J_0 G_0 Du = M_0(G_0 BD - \omega^2) \sin \omega t + M_0 G_0 \omega(AD+B) \cos \omega t.$$

Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać

$$(2.18) \quad u(t) = u_0(t) + N \sin \omega t + P \cos \omega t,$$

gdzie $u_0(t)$ jest ogólnym rozwiązaniem równania jednorodnego, a N i P są stałymi, które należy obliczyć.

3. DRGANIA SWOBODNE

Najpierw zajmiemy się drganiami swobodnymi pręta lepkosprężystego. Równanie opisujące drgania swobodne otrzymamy wtedy, gdy w równaniu (2.17) przyjmiemy $M_0 \equiv 0$, czyli

$$(3.1) \quad JI \ddot{u}_0 + JIG_0(AD+B) \ddot{u}_0 + G_0(J_0 + JIBD) \dot{u}_0 + J_0 G_0 Du_0 = 0.$$

Rozwiązania tego równania poszukujemy w postaci $u_0(t) = e^{rt}$. Równanie charakterystyczne jest równaniem trzeciego stopnia o dodatnim wyróżniku [6]. Zatem równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek rzeczywisty r_1 i dwa zespolone sprzężone $r_2 = a + ib$ oraz $r_3 = a - ib$. Po skorzystaniu ze wzorów Cardana okazuje się, że pierwiastek rzeczywisty oraz że części rzeczywiste pierwiastków zespolonych są ujemne. Zgodnie z [6] równanie (3.1) ma następujące rozwiązanie:

$$(3.2) \quad u_0(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{at} \cos bt + C_3 e^{at} \sin bt,$$

gdzie C_1, C_2 i C_3 są stałymi.

Pamiętając, iż $u(t) \equiv \dot{\varphi}(t)$ oraz biorąc pod uwagę związek (2.6) otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie opisujące drgania swobodne dolnego końca pręta:

$$(3.3) \quad \varphi(l, t) = D_1 e^{r_1 t} + D_2 e^{at} \cos bt + D_3 e^{at} \sin bt + D_4,$$

gdzie D_i są stałymi, które można wyznaczyć, gdy znamy warunki początkowe dla drgań swobodnych. Rozwiązanie powyższe przedstawia drgania zanikające, odbywające się z częstością kołową b wokół położenia $D_1 e^{r_1 t} + D_4$.

4. DRGANIA WYMUSZONE

Obecnie zajmiemy się ustalonymi drganiami wymuszonymi rozważanego swobodnego końca pręta. Należy zatem pominąć rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, otrzymanego z równania (2.17). Pamiętając, że $u \equiv \dot{\varphi}$ i uwzględniając (2.18) oraz (2.6) otrzymujemy rozwiązanie przedstawiające drgania wymuszone pręta lepkosprężystego:

$$(4.1) \quad \varphi_{\text{ust}}(x, t) = \frac{P}{\omega} x \sin \omega t - \frac{N}{\omega} x \cos \omega t,$$

gdzie

$$(4.2) \quad N = \frac{M_0 J_0 G_0 \{ [G_0(AD+B) - D] \omega^2 + G_0 BD^2 \}}{[Jl\omega^2 - G_0(J_0 + JIBD)]^2 \omega^2 + G_0^2 [J_0 D - Jl(AD+B)\omega^2]^2},$$

$$P = \frac{M_0 \omega \{ -Jl\omega^4 + G_0 [2JIBD + J_0 - JIG_0(AD+B)] \omega^2 + G_0^2 D^2 (J_0 A - JIB^2) \}}{[Jl\omega^2 - G_0(J_0 + JIBD)]^2 \omega^2 + G_0^2 [J_0 D - Jl(AD+B)\omega^2]^2}.$$

Wprowadzamy w znany sposób amplitudę $A(x, \omega)$ drgań ustalonych i kąt δ przesunięcia fazowego:

$$(4.3) \quad A(x, \omega) = \frac{x}{\omega} \sqrt{N^2 + P^2}, \quad \operatorname{tg} \delta(\omega) = -\frac{N}{P}.$$

Wówczas rozwiązanie (4.1) przyjmuje postać

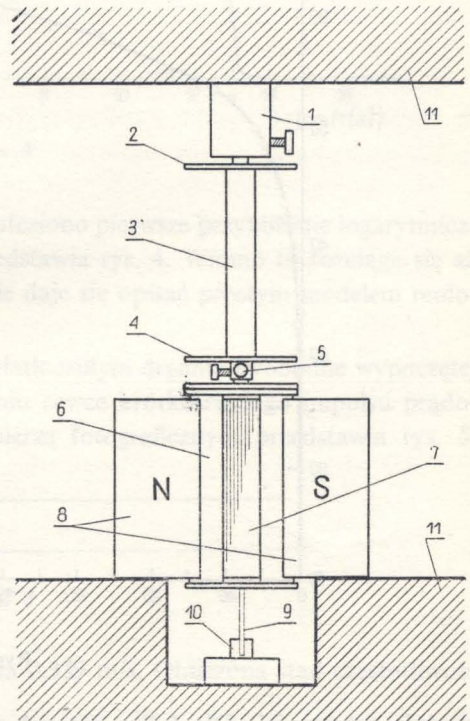
$$(4.4) \quad \varphi_{\text{ust}}(x, t) = A(x, \omega) \sin(\omega t + \delta).$$

Zatem wymuszone drgania ustalone są drganiami harmonicznymi o częstości równej częstości momentu wymuszającego o amplitudzie $A(x, \omega)$ i są przesunięte w fazie o kąt $\delta(\omega)$ względem momentu wymuszającego.

5. OPIS DOŚWIADCZENIA I WYNIKI POMIARÓW

Omawiane niżej doświadczenie ma na celu zbadanie przydatności przedstawionych rozważań teoretycznych do obliczenia częstości drgań swobodnych pręta lepkosprężystego oraz do znalezienia częstości rezonansowej drgań wymuszonych.

Próbka z miękkiej, czarnej gumy miała kształt walca o przekroju kołowym. Jej średnica $2R = 7,4 \cdot 10^{-3}$ m, długość $l = 5,0 \cdot 10^{-2}$ m, moment bezwładności względem osi geometrycznej $J_p = 2,05 \cdot 10^{-8}$ kg m². Górny koniec próbki był umocowany nieruchomo, na drugi koniec działał moment siły $M(t) = M_0 \sin \omega t$, $M_0 = \text{const}$. Wektor momentu siły $M(t)$ miał kierunek osi pręta. Warunki te zrealizowano następująco: do dwóch końców próbki (rys. 2) przyklejono mosiężne, kołowe płytki, górną płytkę przykręcono do sztywnego, pionowego pręta 1 umocowanego w masywnej ramie 11; dolną płytkę przykręcono do obudowy cewki 6. Cewka ta znajdowała się w radialnym, w obrębie ruchów cewki, symetrycznym polu magnesu stałego. Moment bezwładności (względem osi obrotu) cewki z dolną płytką $J = 3,75 \cdot 10^{-6}$ kg m². Wymuszenie sinusoidalne uzyskiwano doprowadzając do cewki prąd



Rys. 2

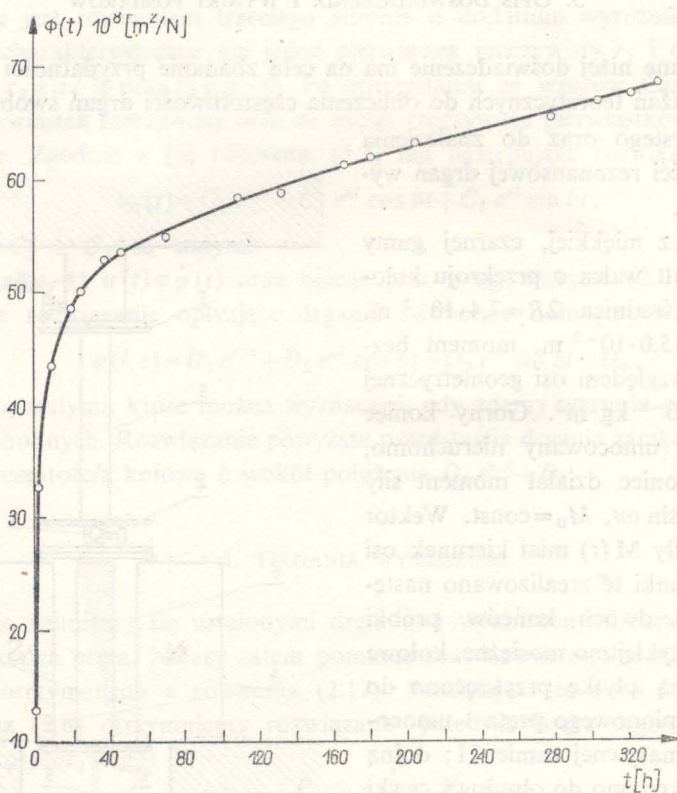
1 – pręt aluminiowy, umocowany nieruchomo, 2 – nieruchoma płytka mosiężna, 3 – próbka, 4 – płytka mosiężna ruchoma, 5 – lusterko, 6 – cewka (ruchoma), 7 – walec żelazny, nieruchomy, 8 – magnes stały, 9 – igła prowadząca, 10 – kolumna, 11 – rama drewniana,

z generatora drgań akustycznych. Dolny koniec cewki miał prowadzenie igłowe. Kąt skręcenia końca próbki mierzono metodą optyczną.

Najpierw przeprowadzono próbę pelzania próbki przy skręcaniu. W tym celu przepuszczano przez cewkę prąd stały o natężeniu i przez 14 dni. Kąt skręcenia $\varphi(l, t)$ dolnego końca pręta rejestrowano optycznie na papierze światłoczułym, nawiniętym na obracający się walec [7]. Funkcję pelzania $\Phi(t)$ otrzymujemy korzystając ze wzoru [7]

$$(5.1) \quad \Phi(t) = \frac{\pi R^4 \varphi(l, t)}{2lM},$$

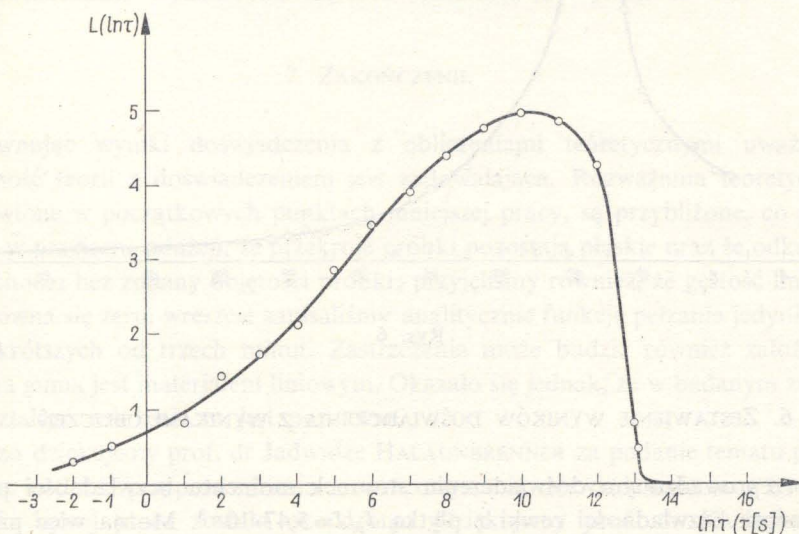
gdzie M jest stałym momentem siły, skręcającym próbkę, $M=ki$, przy czym k jest stałą, którą wyznaczono doświadczalnie, mianowicie zamiast próbki gumowej umocowano w opisanym urządzeniu drut stalowy o znanych wymiarach i znanym



Rys. 3

modułu sztywności. Dla kilku różnych wartości natężenia prądu odczytano kąt skręcenia cewki i skorzystano ze znanego wzoru $M = \pi G' r'^4 \varphi' / 2l'$, gdzie G' oznacza moduł sztywności stali, r' promień drutu, l' jego długość. Pomiar wykazał, że moment siły jest proporcjonalny do natężenia prądu elektrycznego, a stała $k = 1.85 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/A}$. Zatem znając natężenie prądu stałego można obliczyć moment

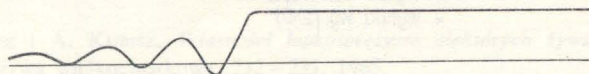
skręcający. W przeprowadzonym doświadczeniu $i=0,150 A$, a więc $M=2,78 \cdot 10^{-4}$ Nm. Otrzymaną na podstawie (5.1) funkcję pełzania przedstawia wykres na rys. 3. Obliczony na podstawie zapisu na papierze światłoczułym moduł sztywności natchmiastowej dla badanej gumy wynosi $G_0=7,8 \cdot 10^6$ N/m². Dla czasów dłuższych od około 180 godzin badany materiał pełza liniowo, a obliczony na podstawie prostoliniowej części wykresu współczynnik lepkości $\eta=8,3 \cdot 10^{12}$ Ns/m².



Rys. 4

Posługując się metodą podaną w [4] znaleziono pierwsze przybliżenie logarytmicznego widma czasów retardacji, które przedstawia rys. 4. Widmo to rozciąga się aż do e^{13} s, co wskazuje, że badana guma nie daje się opisać prostym modelem reologicznym.

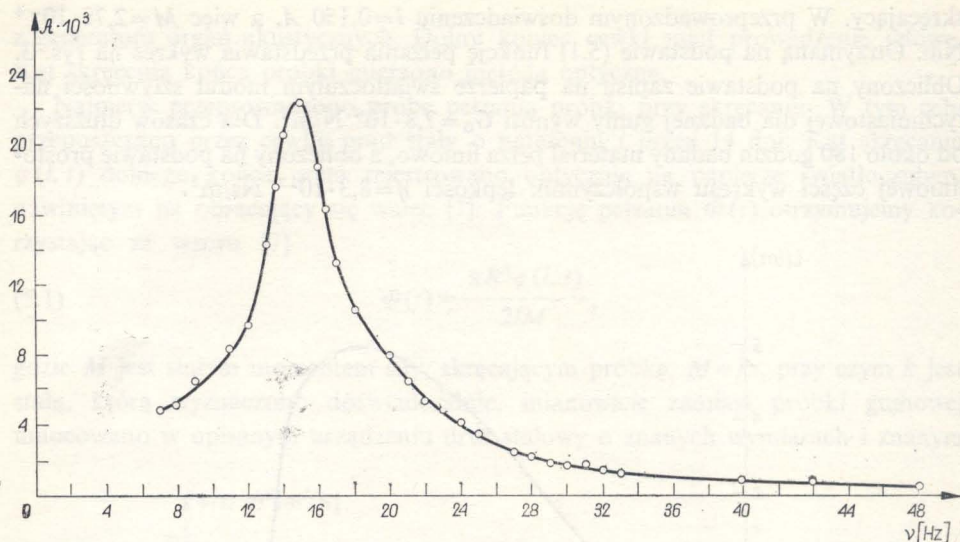
Następnie rejestrowano na papierze światłoczułym drgania swobodne wyciętej próbki. Pręt drgał swobodnie po udzieleniu cewce krótkotrwałego impulsu prądowego. Zapis drgań swobodnych na papierze fotograficznym przedstawia rys. 5.



Rys. 5

Prędkość przesuwania się papieru wynosiła 0,339 m/s. Obliczona stąd częstotliwość drgań swobodnych wynosi około 17 Hz.

W końcu zbadano zależność amplitudy drgań wymuszonych od częstotliwości momentu wymuszającego począwszy od 9 Hz. Amplitudowa krzywa rezonansu przedstawiona jest na rys. 6. Dla częstotliwości 15 Hz amplituda ma wyraźne maksimum.

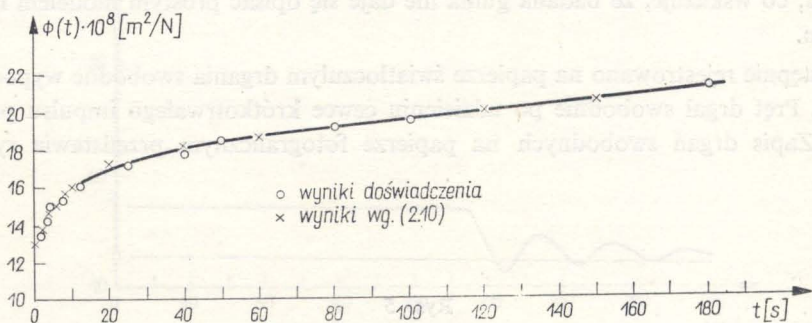


Rys. 6

6. ZESTAWIENIE WYNIKÓW DOŚWIADCZENIA Z WYNIKAMI OBLICZEŃ

W przeprowadzonym doświadczeniu stosunek momentu bezwładności próbki do momentu bezwładności cewki z płytką $J_p/J = 5,47 \cdot 10^{-3}$. Można więc przyjąć, że cała masa skupiona jest na końcu pręta, co założono w części teoretycznej.

Na rys. 7 przedstawiono funkcję pełzania dla czasu $t \leq 180$ s. Taki okres czasu wystarczał do wykonania pomiaru zależności amplitudy drgań wymuszonych od częstotliwości wymuszającej, a tym bardziej do zarejestrowania drgań swobodnych



Rys. 7

pręta. Wzór (2.10) dobrze przybliża (rys. 7) funkcję pełzania w rozpatrywanym przedziale czasu przy następująco dobranych stałych: $A = 17,2 \cdot 10^{-8}$ m²/N, $B = 2,38 \cdot 10^{-10}$ m²/Ns, $C = 4,29 \cdot 10^{-8}$ m²/N, $D = 1,17 \cdot 10^{-1}$ 1/s. Korzystając z tych wartości liczbowych oraz przytoczonej na wstępie teorii można obliczyć częstotliwość drgań swobodnych i częstotliwość rezonansową.

Rozwiązanie równania charakterystycznego dla (3.1) daje $r_1 = -0,12$ 1/s, $a = -0,020$ 1/s, $b = 100$ 1/s. Stąd po uwzględnieniu (3.3) wynika, że drgania swobodne są tłumione i zachodzą z częstotliwością 16 Hz. Częstotliwość drgań swobodnych wyznaczona doświadczalnie wynosi około 17 Hz.

Jeżeli chodzi o drgania wymuszone, to obliczenia numeryczne przeprowadzone na podstawie (4.4) wykazują, że amplituda ma maksimum dla częstotliwości 17,5 Hz. Doświadczalnie wyznaczona częstość rezonansowa wynosi 15 Hz.

7. ZAKOŃCZENIE

Porównując wyniki doświadczenia z obliczeniami teoretycznymi uważamy, że zgodność teorii z doświadczeniem jest zadowalająca. Rozważania teoretyczne, przedstawione w początkowych punktach niniejszej pracy, są przybliżone, co przejawia się w przyjęciu założeń, że przekroje próbki pozostają płaskie oraz że odkształcenie zachodzi bez zmiany objętości próbki; przyjęliśmy również, że gęstość liniowa próbki równa się zero, wreszcie zapisaliśmy analitycznie funkcję pełzania jedynie dla czasów krótszych od trzech minut. Zastrzeżenia może budzić również założenie, że badana guma jest materiałem liniowym. Okazało się jednak, że w badanym zakresie odkształceń założenie to jest poprawne.

Bardzo dziękujemy prof. dr Jadwidze HALAUNBRENNER za podanie tematu pracy za pomoc podczas przeprowadzania i opracowywania doświadczenia oraz za opiekę, dzięki której praca została ukończona. Dziękujemy prof. dr Kazimierzowi PI SZCZKOWI za cenne wskazówki w trakcie wykonywania pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. FORYSIOWA, A. FORYŚ, *Wymuszone drgania skrętne pręta z materiału lepkosprężystego*, Rozpr. Inżyn., 18, 4, 1970.
2. W. POGORZELSKI, *Równania całkowite i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1953.
3. K. W. WAGNER, *Rachunek operatorowy i przekształcenie Laplace'a*, PWN, Warszawa 1960.
4. A. J. STAVERMAN, F. SCHWARZL, *Linear deformation behaviour of high polymers*; rozdział I w *Die Physik der Hochpolymeren*, tom IV.
5. J. ANTONIEWICZ, *Tablice funkcji dla inżynierów*, Warszawa 1969.
6. I. N. BRONSZTEJN i K. A. SIEMIENDIAJEW, *Poradnik encyklopedyczny*, Matematyka, PWN, Warszawa 1959.
7. J. HALAUNBRENNER i A. KUBISZ, *Własności lepkosprężyste niektórych żywic utwardzalnych*, Polimery — Tworzywa wielkocząstkowe, 232 - 235, 1965.

Резюме

МЕХАНИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ПРИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Работа, касается явления резонанса, в стержне кругового цилиндра, изготовленного из вязкоупругого материала без старения. Цель работы состоит в исследовании пригодности приведенной теории, для определения частоты свободных колебаний и резонансной частоты

стержня. Верхний конец стержня неподвижен, на нижнем конце, находится масса с моментом инерции гораздо большим по сравнению с моментом инерции стержня. На нижний конец действует синусоидально переменный момент силы, вынуждающий крутильные колебания. Дается, также, уравнение колебаний и его решение, при данной функции ползучести.

В экспериментальной части исследуется получить стержня при кручений, собственные колебания стержня и зависимость амплитуды колебаний нижнего конца стержня от вынуждающей частоты. В заключение, сравниваются экспериментальные и теоретические результаты. Согласованность результатов удовлетворительная.

SUMMARY

MECHANICAL RESONANCE NEAR TWISTED VIBRATION IN A VISCOELASTIC ROD

This paper concerns the resonance phenomenon in a rod of circular diameter made of viscoelastic material without ageing. The object is to investigate the usefulness of a given theory for determination of the free intensity vibrations and resonance intensities of the rod.

The upper end of the rod is fixed; at the lower end the mass of the moment of inertia is greater than the moment of inertia of the rod. On the lower end acts a sinusoidally variable moment of a force compelling twisted vibrations. The equation of vibration and its solution for a given creep function is given. In the experimental part investigations were made of the creep of a rod during twisting, vibrations of a rod, and the dependences of the amplitude vibrations at the lower part of a rod caused by the intensity of the force.

In conclusion, experimental and theoretical results are compared. Agreement of these results is satisfactory.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1971 r.