

UGIĘCIA PŁYT NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU O ZMIENNYM WSPÓŁCZYNNIKU PODATNOŚCI

KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

Oznaczenia

- $\{f(x, y)\}$ funkcja liczbowa, $y \geq 0$,
 $f(x)$ funkcja operatorowa parametryczna, $x \in R$,
 s operator różniczkowy,
 h^{y_r} operator przesunięcia, $y_r \geq 0$,
 w ugięcie płyty,
 D sztywność płyty,
 $f^{(n)}(x)$ n -ta pochodna ciągła funkcji operatorowej,
 $\beta_m = \left\{ \frac{1}{2\alpha_m^2} \left(y \operatorname{ch} \alpha_m y - \frac{1}{\alpha_m} \operatorname{sh} \alpha_m y \right) \right\}$, $y \geq 0$,
 $\gamma_m = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\alpha_m} \operatorname{sh} \alpha_m y - y \operatorname{ch} \alpha_m y \right) \right\}$, $y \geq 0$,
 $\beta_\alpha = \left\{ \frac{1}{2\alpha^2} \left(y \operatorname{ch} \alpha y - \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha y \right) \right\}$, $y \geq 0$,
 $\beta_m^{(n)} = \frac{d^n}{dy^n} \beta_m$,
 $K(x, y)$ współczynnik podatności podłoża.

WSTĘP

W pracy zastosowano operatory MIKUSIŃSKIEGO [1], zwane także ilorazami splotowymi [2], do obliczania ugięć płyt na sprężystym podłożu. Rozpatrzono płyty prostokątne o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i dowolnych warunkach brzegowych na pozostałych, spoczywające na jednoparametrowym podłożu typu Winklera o zmiennym współczynniku podatności. Problem doprowadzono w sposób niezwykle prosty do postaci nieskończonego układu równań całkowych. Otrzymany układ ma pewne znaczenie praktyczne, gdyż w wielu szczególnych przypadkach może być stosowany z korzyścią.

1. PŁYTY PROSTOKĄTNE PODPARTE TYLKO WZDŁUŻ BRZEGÓW

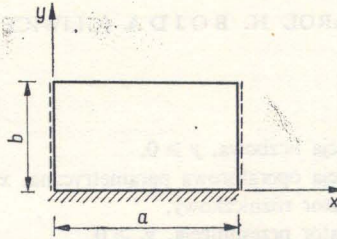
Operatorowe rozwiązanie płyty prostokątnej przedstawimy dla płyty o krawędziach $x=0$, $x=a$ swobodnie podpartych, krawędzi $y=0$ sztywno utwierdzonej i dowolnych warunkach brzegowych na krawędzi $y=b$ (rys. 1).

Równanie powierzchni ugięcia płyty

$$(1.1) \quad w_{x^4} + 2w_{x^2 y^2} + w_{y^4} = \frac{q}{D}$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} w(0, y) = 0, \quad w(a, y) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \\ w_{x^2}(0, y) = 0, \quad w_{x^2}(a, y) = 0, \quad w_y(x, 0) = 0 \end{aligned}$$



Rys. 1. Ugięcia płyt na sprężystym podłożu o zmiennym współczynniku podatności

sprowadza się do równania operatorowego

$$(1.2) \quad w^{(4)} + 2s^2 w'' + s^4 w = s w_{y^2}(x, 0) + w_{y^3}(x, 0) + \frac{q}{D}$$

z operatorowymi warunkami

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w(a) = 0, \quad w''(a) = 0.$$

Obciążenie rozwija się w pojedynczy szereg sinusowy

$$\{q(x, y)\} = \left\{ \sum_{m \geq 1} q_m(y) \sin \alpha_m x \right\},$$

gdzie $\alpha_m = m\pi/a$. Stąd funkcja operatorowa obciążenia ma kształt

$$q(x) = \sum_{m \geq 1} q_m \sin \alpha_m x.$$

Przyjmując

$$w_{y^2}(x, 0) = \sum_{m \geq 1} A_m \sin \alpha_m x,$$

$$w_{y^3}(x, 0) = \sum_{m \geq 1} B_m \sin \alpha_m x,$$

$$w = \sum_{m \geq 1} w_m \sin \alpha_m x,$$

z (1.2) otrzymujemy

$$w_m = \frac{A_m s + B_m + \frac{1}{D} q_m}{(s^2 - \alpha_m^2)^2},$$

a stąd

$$(1.3) \quad w = \sum_{m \geq 1} \frac{A_m s + B_m + \frac{1}{D} q_m}{(s^2 - \alpha_m^2)^2} \sin \alpha_m x.$$

W zwykłej, nie operatorowej postaci funkcja (1.3) wyraża się wzorem

$$(1.4) \quad w = \sum_{m \geq 1} \left(A_m \beta'_m + B_m \beta_m + \frac{1}{D} q_m * \beta_m \right) \sin \alpha_m x,$$

gdzie $q_m * \beta_m$ oznacza spłot q_m i β_m .

Stałe A_m i B_m wyznacza się z warunków brzegowych na krawędzi $y=b$, które nie zostały jeszcze uwzględnione.

Analogicznie otrzymuje się rozwiązanie dla płyty o krawędzi $y=0$ swobodnie podpartej. Równanie (1.2) przyjmuje postać

$$w^{(4)} + 2s^2 w'' + s^4 w = s^2 w_y(x, 0) + 2w_{yx^2}(x, 0) + w_{ys}(x, 0) + \frac{q}{D},$$

a rozwiązanie (1.3)

$$(1.5) \quad w = \sum_{m \geq 1} \frac{A_m (s^2 - 2\alpha_m^2) + B_m + \frac{1}{D} q_m}{(s^2 - \alpha_m^2)^2} \sin \alpha_m x;$$

stąd

$$(1.6) \quad w = \sum_{m \geq 1} \left(A_m \gamma_m + B_m \beta_m + \frac{1}{D} q_m * \beta_m \right) \sin \alpha_m x.$$

Gdy krawędź $y=0$ jest swobodna, to rozwiązanie ma kształt

$$(1.7) \quad w = \sum_{m \geq 1} \frac{A_m [s^3 + s\alpha_m^2(v-2)] + B_m (s^2 - \alpha_m^2 v) + \frac{1}{D} q_m}{(s^2 - \alpha_m^2)^2} \sin \alpha_m x$$

lub

$$(1.8) \quad w = \sum_{m \geq 1} \left(A_m [\beta_m''' + \beta_m' \alpha_m^2 (v-2)] + B_m (\beta_m'' - \beta_m \alpha_m^2 v) + \frac{1}{D} q_m * \beta_m \right) \sin \alpha_m x.$$

Znalezione rozwiązania są jedyne, albowiem równanie charakterystyczne

$$u^4 + 2s^2 u^2 + s^4 = 0$$

ma pierwiastki podwójne $-is, +is$, które nie są logarytmami. Po wyznaczeniu stałych A_m i B_m z warunków brzegowych na krawędzi $y=b$ rozwiązania (1.4), (1.6) i (1.8) spełniają wszystkie warunki brzegowe, gdyż

$$\frac{d^n}{dy^n} (q_m * \beta_m) = q_m * \beta_m^{(n)}, \quad n \leq 3.$$

Należy podkreślić, że niezależnie od charakteru obciążenia do wyznaczenia pozostają zawsze tylko dwie stałe. Metoda operatorowa łączy zatem zalety metody podwójnych szeregów trygonometrycznych, którymi łatwo wyraża się dowolne obciążenia, i metody Levy'ego, którą można rozwiązać prosto ogólniejsze zagadnienia brzegowe, stanowi więc istotne uzupełnienie tych metod klasycznych.

2. PASMA I PÓLPASMA PŁYTOWE PODPARTE TYLKO WZDŁUŻ BRZEGÓW

Pasma płytowe o dowolnych warunkach brzegowych na krawędziach $y=0$ i $y=b$ rozwiązuje się tak, jak płyty prostokątne, wyrażając obciążenia i ugięcia pojedynczymi całkami Fouriera. Na przykład dla pasma płytowego o krawędzi $y=0$ sztywno utwierdzonej i dowolnych warunkach brzegowych na krawędzi $y=b$, symetrycznie obciążonego otrzymujemy

$$(2.1) \quad w = \int_0^{\infty} \left(A_{\alpha} \beta'_{\alpha} + B_{\alpha} \beta_{\alpha} + \frac{1}{D} q_{\alpha} * \beta_{\alpha} \right) \cos \alpha x d\alpha.$$

Ugięcia półpasm płytowych o krawędzi $x=0$ swobodnie podpartej wyraża się całkami sinusowymi.

3. PŁYTY NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

Rozważania przeprowadzimy dla płyt o krawędziach $x=0$ i $x=a$ swobodnie podpartych, krawędzi $y=0$ sztywno utwierdzonej i o dowolnych warunkach brzegowych na krawędzi $y=b$. Otrzymane wyniki mogą być natychmiast uogólnione na płytę o innych warunkach brzegowych na krawędzi $y=0$. Należy w tym celu zamiast rozwiązania (1.3) wykorzystać rozwiązanie (1.5) lub (1.7).

Na płytę oprócz obciążenia działa jeszcze dodatkowo reakcja podłoża

$$q^*(x) = \sum_{m \geq 1} q_m^* \sin \alpha_m x.$$

Ugięcie takiej płyty można wyrazić wzorem

$$(3.1) \quad w = \sum_{m \geq 1} \frac{A_m s + B_m + \frac{1}{D} q_m - \frac{1}{D} q_m^*}{(s^2 - \alpha_m^2)^2} \sin \alpha_m x.$$

Nie znane na razie wielkości q_m^* wyznaczymy z warunku

$$(3.2) \quad \{q^*(x, y)\} = \{K(x, y) w(x, y)\}.$$

Rozwijając funkcję $K(x, y)$ w szereg kosinusowy

$$K(x, y) = \sum_{n \geq 0} K_n \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0} \right) \cos \alpha_n x$$

(gdzie δ_{n0} jest symbolem Kroneckera) i uwzględniając (3.2), dochodzimy do nieskończonego układu równań całkowych na q_m^* :

$$(3.3) \quad \frac{1}{2D} \sum_{n \geq 1} [K_{m-n}(y) - K_{m+n}(y)] \int_0^y q_n^*(u) \beta_n(y-u) du + q_m^*(y) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} [K_{m-n}(y) - K_{m+n}(y)] [A_n \beta_n'(y) + B_n \beta_n(y) + Q_n(y)],$$

gdzie

$$Q_n(y) = \frac{1}{D} q_n * \beta_n.$$

Gdy $K(x, y)$ jest funkcją tylko zmiennej y , układ (3.3) redukuje się do jednego równania całkowego

$$(3.4) \quad \frac{1}{D} K(y) \int_0^y q_m^*(u) \beta_m(y-u) du + q_m^*(y) = K(y) [A_m \beta_m'(y) + B_m \beta_m(y) + Q_m(y)].$$

Gdy $K(x, y)$ jest funkcją tylko zmiennej x , układ (3.3) sprowadza się do nieskończonego układu równań operatorowych

$$(3.5) \quad \frac{1}{2D} \sum_{n \geq 1} \frac{(K_{m-n} - K_{m+n}) q_n^*}{(s^2 - \alpha_n^2)^2} + q_m^* = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(K_{m-n} - K_{m+n}) \left(A_n s + B_n + \frac{1}{D} q_n \right)}{(s^2 - \alpha_n^2)^2}.$$

Gdy $K = \text{const}$, układ (3.3) sprowadza się do jednego równania operatorowego

$$(3.6) \quad \frac{1}{D} K \frac{q_m^*}{(s^2 - \alpha_m^2)^2} + q_m^* = K \frac{A_m s + B_m + \frac{1}{D} q_m}{(s^2 - \alpha_m^2)^2}.$$

Dla $K \neq 0$ można wprowadzić oznaczenie $\bar{K} = 1/K$, a równanie (3.6) zapisać w prostszej postaci

$$(3.7) \quad \frac{1}{D} q_m^* + (s^2 - \alpha_m^2)^2 \bar{K} q_m^* = A_m s + B_m + \frac{1}{D} q_m.$$

Otrzymany nieskończony układ równań całkowych typu Voltery jest złożony, a jego przybliżone rozwiązanie w przypadku ogólnym trudne. Niemniej układ (3.3) ma pewne znaczenie praktyczne, bowiem w wielu szczególnych przypadkach układ ten rozwiązuje się prosto. Ma to miejsce między innymi wtedy, gdy funkcja $K(x, y)$ ma kształt

$$(3.8) \quad K(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } y \neq y_r, \\ K_r(x), & \text{jeśli } y = y_r. \end{cases}$$

Odpowiada to płycie podpartej sprężystości wzdłuż prostych $y=y_r$ ($r=1, 2, \dots, k$). Z (3.8) oraz (3.2) wynika, że $q^*(x)$ wyraża się w tym przypadku wzorem

$$(3.9) \quad q^*(x) = \sum_{r=1}^k q_r^*(x) h^{y_r}.$$

Rozwijając (3.9) w szereg sinusowy oraz uwzględniając, że współczynniki rozwinięcia q_{rm}^* są operatorami liczbowymi, na podstawie (3.3) dochodzimy do układu równań

$$(3.10) \quad \frac{1}{2D} \sum_{n \geq 1} [K_{m-n}(y) - K_{m+n}(y)] \left[\sum_{r=1}^k q_{rn}^* \beta_n(y) h^{y_r} \right] + \sum_{r=1}^k q_{rm}^* h^{y_r} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} [K_{m-n}(y) - K_{m+n}(y)] [A_n \beta_n'(y) + B_n \beta_n(y) + Q_n(y)].$$

Wypisując równania (3.10) dla $y=y_t$ ($t=1, 2, \dots, k$) otrzymujemy układ algebraicznych równań liniowych

$$(3.11) \quad \frac{1}{2D} \sum_{n \geq 1} [K_{tm-n} - K_{tm+n}] \left[\sum_{r=1}^{t-1} q_{rn}^* \beta_n(y_t) h^{y_r} \right] + q_{tm}^* = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} [K_{tm-n} - K_{tm+n}] [A_n \beta_n'(y_t) + B_n \beta_n(y_t) + Q_n(y_t)].$$

Układ (3.11) można z korzyścią stosować do praktycznych obliczeń. Układ ten można w wielu przypadkach zredukować do skończonego układu liniowych równań algebraicznych. Na przykład przyjmując

$$K_r(x) = K_r = \text{const},$$

otrzymujemy

$$(3.12) \quad \frac{1}{D} K_t \sum_{r=1}^{t-1} q_{rm}^* \beta_m(y_t) h^{y_r} + q_{tm}^* = K_t [A_m \beta_m'(y_t) + B_m \beta_m(y_t) + Q_m(y_t)].$$

Dzieląc odpowiednio równania (3.12) przez K_t i przechodząc do granicy, gdy $K_t \rightarrow \infty$, otrzymujemy równania dla płyt ciągłych o niepodatnych podporach:

$$(3.13) \quad \frac{1}{D} \sum_{r=1}^{t-1} q_{rm}^* \beta_m(y_t) h^{y_r} = A_m \beta_m'(y_t) + B_m \beta_m(y_t) + Q_m(y_t).$$

Dla przykładu ułożmy równania (3.12) dla płyty trójprzęsłowej sprężystości podpartej wzdłuż prostych $y=y_1$ i $y=y_2$ o krawędziach $y=0$ i $y=b$ sztywno utwierdzonych:

$$q_{1m}^* = K_1 [A_m \beta_m'(y_1) + B_m \beta_m(y_1) + Q_m(y_1)],$$

$$\frac{1}{D} K_2 q_{1m}^* \beta_m(y_2 - y_1) + q_{2m}^* = K_2 [A_m \beta_m(y_2) + B_m \beta_m(y_2) + Q_m(y_2)].$$

Do tych równań należy dołączyć dwa inne, które można ułożyć wykorzystując warunki brzegowe na krawędzi $y=b$:

$$A_m \beta'_m(b) + B_m \beta_m(b) + Q_m(b) - \frac{1}{D} [q_{1m}^* \beta_m(b-y_1) + q_{2m}^* \beta_m(b-y_2)] = 0,$$

$$A_m \beta''_m(b) + B_m \beta'_m(b) + Q'_m(b) - \frac{1}{D} [q_{1m}^* \beta'_m(b-y_1) + q_{2m}^* \beta'_m(b-y_2)] = 0.$$

Z otrzymanego układu czterech liniowych równań algebraicznych wyznaczymy q_{1m}^* , q_{2m}^* , A_m i B_m . Rozwiązanie tych równań jest już elementarne.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
2. H. A. ZEMANIAN, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN, Warszawa 1969.

Резюме

ПРОГИБЫ ПЛАСТИНОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОДАТЛИВОСТИ

Рассматриваются прямоугольные пластинки с двумя противоположно свободно опертыми краями и произвольными краевыми условиями на остальных, покоящиеся на основании типа Винклера с переменным коэффициентом податливости. Задача доводится к бесконечной системе интегральных уравнений, показывая особые случаи, для которых эта система сводится к бесконечной системе операторных уравнений или к конечным системам. Полученное решение отличается большой общностью, которую получено благодаря применению операторов Микусинского. Для того, чтобы подчеркнуть этот факт, сплошные пластинки рассматриваются, в качестве особых случаев, пластинок на упругом основании, получая очень простое решение в виде конечных алгебраических уравнений.

SUMMARY

THE BENDINGS OF PLATES ON AN ELASTIC BASE WITH VARIABLE SUSCEPTIBILITY COEFFICIENT

Consideration is given to rectangular plates of two opposite borders, freely supported, and with the others having arbitrary boundary conditions resting on a single parameter Winkler type base with variable susceptibility coefficient. The problem was investigated to an infinite set of integral equations indicating certain particular cases for which this set leads to an infinite set or to finite sets of operating equations. The solution obtained is characterized by a considerable degree of generality. This was achieved by the application of Mikusiński's operators. To emphasize this fact, the continuous plates are considered as special cases of plates on an elastic base, yielding very simple solutions in the form of finite sets (systems) of algebraic equations.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 grudnia 1970 r.