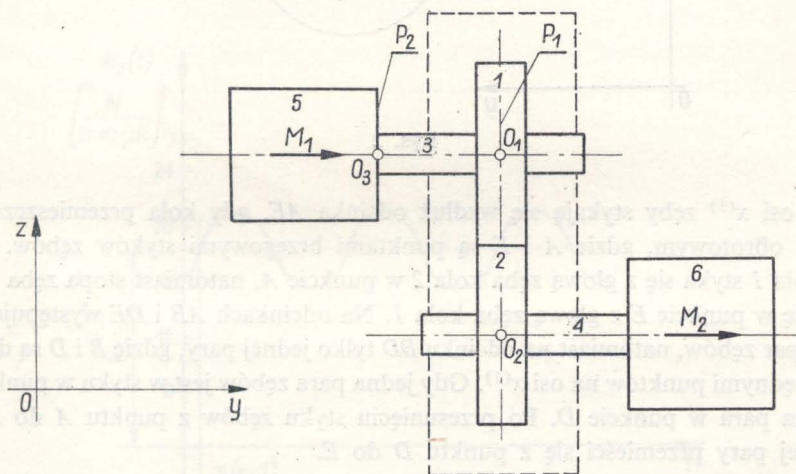


## SIŁY DYNAMICZNE WYSTĘPUJĄCE MIĘDZY ZĘBAMI KÓŁ PRZEKŁADNI JEDNOSTOPNIOWEJ O OSIACH RÓWNOLEGLYCH

WŁADYSŁAW NADOLSKI (WARSZAWA)

### 1. UWAGI WSTĘPNE I ZAŁOŻENIA

Rozpatrzmy przekładnię zębatą jednostopniową przedstawioną na rys. 1. Przekładnię taką rozpatrujemy jako układ mechaniczny, w skład którego wchodzi koła zębata 1, 2 połączone ważkami wałami 3, 4 z bryłami 5, 6 zwanymi «krążkami masowymi». Przyjmujemy, że odkształcenia obudowy (pokazanej liniami przerywanymi), tarcz, piast kół, wałów oraz «krążków masowych» są bardzo małe i mogą być pominięte w zagadnieniach technicznych. Zęby i ich utwierdzenia podstaw w wieńcach zębatych są sprężysto odkształcalne.

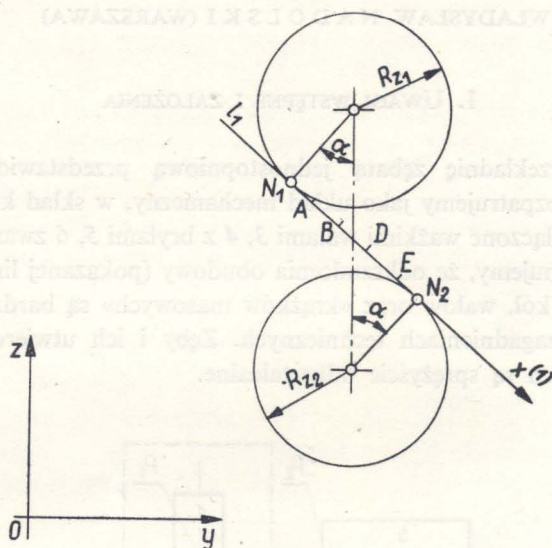


Rys. 1

Niech punkty  $O_1$  i  $O_3$  leżą na osi wału 3, a punkt  $O_2$  na osi wału 4 w płaszczyznach  $P_1$  i  $P_2$ . Punkt  $O_1$  i  $O_2$  leżą w płaszczyźnie symetrii  $P_1$  kół 1 i 2, a punkt  $O_3$  w płaszczyźnie wału 3. Przyjmujemy prostokątny układ kartezjański współrzędnych  $x, y, z$  związany z obudową sztywną. Oś  $y$  zwracamy zgodnie z osią wału 3 od punktu  $O_3$  do  $O_1$ , a oś  $z$  od punktu  $O_2$  do  $O_1$ . Zakładamy, że koła zębata charakteryzują następujące parametry geometryczne:

$R_1$  [m] promień centroidy koła 1,  $R_2$  [m] promień centroidy koła 2,  $b$  [m] szerokość wieńców kół zębatych 1 i 2,  $z_1$  liczba zębów koła 1,  $z_2$  liczba zębów koła 2 oraz  $\alpha$  kąt przyproru (w mierze łukowej).

Zakładamy również, że między zębami występują ciągłe styki zębów. Niech przy tych założeniach prosta  $l_1$  będzie styczna w punktach  $N_1$  i  $N_2$  do kół zasadniczych o promieniach  $R_{z_1}$  i  $R_{z_2}$  w płaszczyźnie symetrii  $P_1$ , jak to pokazano na rys. 2. Oś  $x^{(1)}$  obieramy na prostej  $l_1$ , przy czym zwracamy ją od punktu  $N_1$  do  $N_2$ , przyjmując początek w punkcie  $N_1$ .



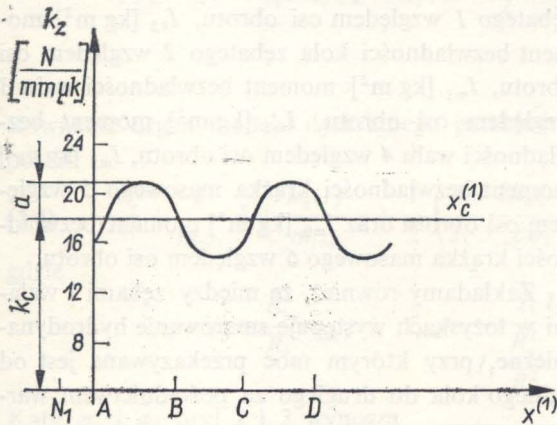
Rys. 2

Na osi  $x^{(1)}$  zęby stykają się wzdłuż odcinka  $AE$ , gdy koła przemieszczają się ruchem obrotowym, gdzie  $A$  i  $E$  są punktami brzegowymi styków zębów. Stopa zęba koła 1 styka się z głową zęba koła 2 w punkcie  $A$ , natomiast stopa zęba koła 2 styka się w punkcie  $E$  z głową zęba koła 1. Na odcinkach  $AB$  i  $DE$  występują styki dwóch par zębów, natomiast na odcinku  $BD$  tylko jednej pary, gdzie  $B$  i  $D$  są danymi współrzędnymi punktów na osi  $x^{(1)}$ . Gdy jedna para zębów jest w styku w punkcie  $A$ , to druga para w punkcie  $D$ . Po przesunięciu styku zębów z punktu  $A$  do  $B$  styk z drugiej pary przemieści się z punktu  $D$  do  $E$ .

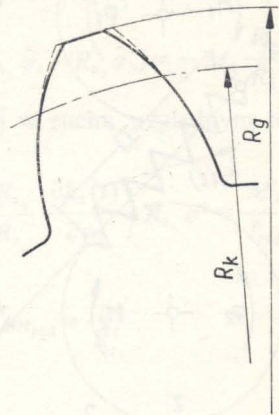
Przyjmujemy, że wykres sztywności zastępczej zębów i utwierdzenia ich podstaw w wieńcach zębatych w układzie  $Ak_z x^{(1)}$  wzdłuż osi  $x_{c(1)}^{(1)}$  jest sinusoidalny, jak to pokazano na rys. 3. Oś  $x_{c(1)}^{(1)}$  jest równoległa do osi  $x^{(1)}$  i przesunięta względem niej o średnią wartość zastępczą  $k_c$ . Wykres sztywności zastępczej (rys. 3) dotyczy zębów, których zarysy na pewnych wysokościach zawartych między promieniami  $R_g$  i  $R_k$  nieznacznie się różnią od zarysów ewolwentowych (rys. 4). Obecnie zarysy takich zębów są wyznaczone eksperymentalnie [1]. Należy nadmienić, że przy tak zmieniającej się zastępczej sztywności nie występują zderzenia zębów [1]. Zakładamy również, że amplituda  $a$  i średnia wartość sztywności zastępczej  $k_c$

nieznacznie różnią się od amplitudy i średniej sztywności zastępczej zębów prostych o zarysach ewolwentowych [2 i 3].

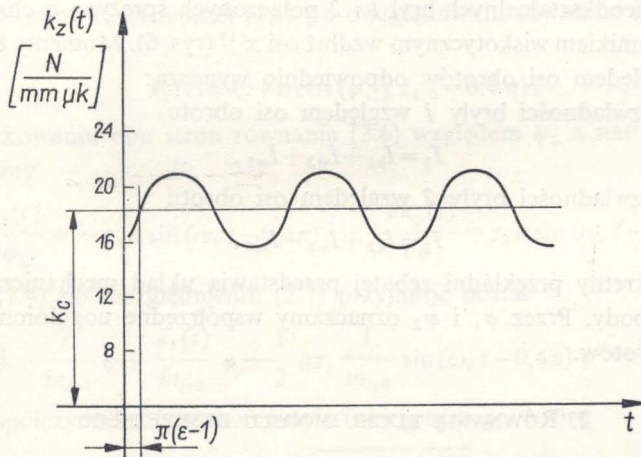
Zakładamy, że wykres sztywności zastępczej zębów i ich utwierdzenia podstaw w wieńcach zębatych w układzie  $A$ ,  $k_z, t$  jest funkcją harmoniczną o amplitudzie  $a$ , częstości  $\omega_c$  i fazie początkowej  $\pi(\varepsilon-1)$  (rys. 5). Oś pozioma sinusoidy jest przesunięta względem osi  $t$  o średnią wartość zastępczą  $k_c$ .



Rys. 3



Rys. 4



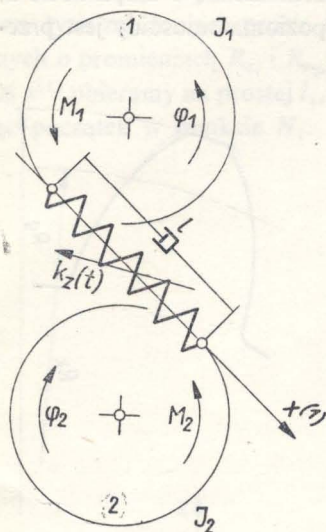
Rys. 5

Równanie sztywności zastępczej przedstawiamy w następującej postaci:

$$(1.1) \quad k_z(t) = k_c + a \cos [\omega_c t - \pi(\varepsilon - 1)]$$

dla  $t \geq t_0$  z przedziału  $\langle t_0, \infty \rangle$ , gdzie  $\omega_c = \omega_1 z_1 = \omega_2 z_2$  oraz gdzie  $\omega_1 s^{-1}$  oznacza prędkość kątową koła 1,  $\omega_2 s^{-1}$  prędkość kątową koła 2 oraz  $\varepsilon$  liczbę stałą.

Krażek masowy 5 jest obciążony momentem czynnym  $M_1$  o module  $|M_1| = \text{const}$ , natomiast krażek masowy 6 momentem biernym  $M_2$  o module  $|M_2| = \text{const}$ . Kierunki i zwroty momentów  $M_1$  i  $M_2$  są zgodne z osią  $y$ . Momenty bezwładności kół 1 i 2 wałów 3 i 4 oraz krażków masowych 5 i 6 względem osi obrotów oznaczamy w sposób następujący:



Rys. 6

$I_{k1}$  [kg m<sup>2</sup>] oznacza moment bezwładności koła zębatego 1 względem osi obrotu,  $I_{k2}$  [kg m<sup>2</sup>] moment bezwładności koła zębatego 2 względem osi obrotu,  $I_{w1}$  [kg m<sup>2</sup>] moment bezwładności wału 3 względem osi obrotu,  $I_{w2}$  [kg m<sup>2</sup>] moment bezwładności wału 4 względem osi obrotu,  $I_{m5}$  [kg m<sup>2</sup>] moment bezwładności krażka masowego 5 względem osi obrotu oraz  $I_{m6}$  [kg m<sup>2</sup>] moment bezwładności krażka masowego 6 względem osi obrotu.

Zakładamy również, że między zębami i wałami w łożyskach występuje smarowanie hydrodynamiczne, przy którym moc przekazywana jest od jednego koła do drugiego za pośrednictwem warstwy smaru.

Przy powyższych założeniach model dyskretny przekładni zębatej może być przedstawiony za pomocą dwóch nieodkształcalnych brył 1 i 2 połączonych sprężyną o charakterystyce nieliniowej i tłumikiem wiskotycznym wzdłuż osi  $x^{(1)}$  (rys. 6). Momenty bezwładności brył 1 i 2 względem osi obrotów odpowiednio wynoszą:

moment bezwładności bryły 1 względem osi obrotu

$$I_1 = I_{k1} + I_{w3} + I_{m5},$$

moment bezwładności bryły 2 względem osi obrotu

$$I_2 = I_{k2} + I_{w4} + I_{m6}.$$

Model dyskretny przekładni zębatej przedstawia układ mechaniczny o dwóch stopniach swobody. Przez  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  oznaczamy współrzędne uogólnione brył 1 i 2 wzdłuż osi obrotów.

## 2. RÓWNANIA RUCHU MODELU DYSKRETNEGO

Energia potencjalna zębów i utwierdzenia podstaw w wieńcach zębatych ma postać

$$(2.1) \quad V_z = \frac{1}{2} k_z(t) (R_{z1} \varphi_1 - R_{z2} \varphi_2)^2,$$

a energia dysypacyjna

$$(2.2) \quad F = \frac{1}{2} l (R_{z1} \dot{\varphi}_1 - R_{z2} \dot{\varphi}_2)^2,$$

gdzie  $l$  jest stałym współczynnikiem tłumienia.

Równania ruchu modelu dyskretnego przekładni zębatej są następujące:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_z(t) R_{z_1} (R_{z_1} \varphi_1 - R_{z_2} \varphi_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial k_z(t)}{\partial \varphi_1} (R_{z_1} \varphi_1 - R_{z_2} \varphi_2)^2 + \\ + I R_{z_1} (R_{z_1} \dot{\varphi}_1 - R_{z_2} \dot{\varphi}_2) = M_1, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - k_z(t) R_{z_2} (R_{z_1} \varphi_1 - R_{z_2} \varphi_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial k_z(t)}{\partial \varphi_2} (R_{z_1} \varphi_1 - R_{z_2} \varphi_2)^2 - \\ - I R_{z_2} (R_{z_1} \dot{\varphi}_1 - R_{z_2} \dot{\varphi}_2) = -M_1 \frac{R_{z_2}}{R_{z_1}}. \end{aligned}$$

Równanie drgań modelu dyskretnego przekładni zębatej w ruchu względnym ma postać

$$(2.4) \quad \ddot{\varphi} + \frac{l}{m_{\text{red}}} \dot{\varphi} + \frac{k_z(t)}{m_{\text{red}}} \varphi + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_1} \frac{\partial k_z(t)}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{I_2} \frac{R_{z_2}}{R_{z_1}} \frac{\partial k_z(t)}{\partial \varphi_2} \right) R_{z_1} \varphi^2 = \frac{M_1}{I_{\text{red}}},$$

gdzie

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{R_{z_2}}{R_{z_1}} \varphi_2, \quad I_{\text{red}} = \frac{I_1 I_2}{I_1 \frac{R_{z_2}^2}{R_{z_1}^2} + I_2}, \quad m_{\text{red}} = \frac{I_{\text{red}}}{R_{z_1}^2}.$$

Kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  brył 1 i 2 wynoszą

$$(2.5) \quad \varphi_1 = \omega_1 t = \frac{\omega_c}{z_1} t, \quad \varphi_2 = -\omega_2 t = -\frac{\omega_c}{z_2} t.$$

Równanie sztywności zastępczej (1.1) po uwzględnieniu równania (2.5) przy  $\varepsilon = 1,4$  ma postać

$$(2.6) \quad k_z(t) = k_c + a \cos(\varphi_{1,2} z_{1,2} - 0,4\pi).$$

Po zróżniczkowaniu obu stron równania (2.6) względem  $\varphi_1$  a następnie względem  $\varphi_2$  otrzymamy

$$(2.7) \quad \frac{\partial k_z(t)}{\partial \varphi_1} = -z_1 a \sin(\omega_c t - 0,4\pi), \quad \frac{\partial k_z(t)}{\partial \varphi_2} = z_2 a \sin(\omega_c t - 0,4\pi).$$

Równanie (2.4) po uwzględnieniu (2.7) przyjmuje postać

$$(2.8) \quad \ddot{\varphi} + \frac{l}{m_{\text{red}}} \dot{\varphi} + \frac{k_z(t)}{m_{\text{red}}} \varphi - \frac{1}{2} a z_1 \frac{1}{m_{\text{red}}} \sin(\omega_c t - 0,4\pi) \varphi^2 = \frac{M_1}{I_{\text{red}}}.$$

Wartość współczynnika  $l$  wyznaczamy z następującego wzoru

$$(2.9) \quad l = 2\psi \sqrt{m_{\text{red}} \sup k_z(t)}$$

dla  $t \geq t_0$  z przedziału  $\langle t_0, \infty \rangle$ , gdzie współczynnik  $\psi$  jest zależny od prędkości obwodowej kół. Po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej  $\tau = \omega_c t$  równanie (2.8) przyjmuje postać

$$(2.10) \quad \varphi'' + \frac{l}{m_{\text{red}} \omega_c} \varphi' + \frac{k_z(\tau)}{m_{\text{red}} \omega_c^2} \varphi - \frac{1}{2} a z_1 \frac{1}{m_{\text{red}} \omega_c^2} \sin(\tau - 0,4\pi) \varphi^2 = \frac{M_1}{I_{\text{red}} \omega_c^2}.$$

Przejdziemy z kolei do zbadania oscylacyjności i stabilności rozwiązań równania (2.10), opierając się o następujące prace [4 i 5].

## 3. OSCYLACYJNOŚĆ I STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ (2.10)

Równanie (2.10) przepiszemy w postaci

$$(3.1) \quad \varphi'' - 2a_1 \varphi' - \beta(\tau) \varphi - \delta \sin(\tau - 0,4\pi) \varphi^2 = \delta,$$

gdzie

$$(3.2) \quad a_1 = -\frac{1}{2} \frac{l}{m_{\text{red}} \omega_c}, \quad \beta(\tau) = -\frac{k(\tau)}{m_{\text{red}} \omega_c^2},$$

$$\delta = \frac{1}{2} a z_1 \frac{1}{m_{\text{red}} \omega_c^2}, \quad \delta = \frac{M_1}{I_{\text{red}}} \frac{1}{\omega_c^2}.$$

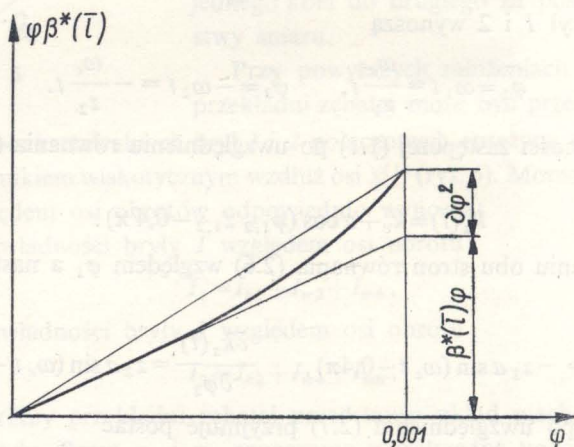
Równanie (3.1) przy bardzo małych wartościach (od 0,00001 do 0,001) może być przedstawione w postaci

$$(3.3) \quad \varphi'' - 2a_1 \varphi' - \beta^*(\tau) \varphi = \delta,$$

gdzie

$$(3.4) \quad \beta^*(\tau) = \beta(\tau) + \delta \sin(\tau - 0,4\pi) \varphi \leq \beta(\tau) + \delta \varphi$$

jest funkcją okresową i ciągłą dla wszystkich  $\tau \geq T^*$  w przedziale  $\langle T^*, \infty \rangle$ .



Rys. 7

Mówić będziemy, że równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu

$$(3.5) \quad \varphi'' = f(\tau, \varphi, \varphi') = 2a_1 \varphi' + \beta^*(\tau) \varphi + \delta$$

spełnia założenie  $W(a_1, b_1^*, b_2^*)$ , jeżeli: 1) funkcja  $f(\tau, \varphi, \varphi')$  jest zdefiniowana i ciągła dla wszystkich wartości  $\varphi, \varphi'$  i  $\tau \geq T^*$ , 2) równanie (3.5) jest jednostliwe oraz 3) istnieją stałe  $a_1, b_1^*, b_2^*, \delta$  takie, że dla  $\tau \geq T^*$  spełnione są następujące nierówności:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} 2a_1 \varphi' + b_2^* \varphi - \delta &\leq f(\tau, \varphi, \varphi') \leq 2a_1 \varphi' + b_1^* \varphi + \delta && \text{dla } \varphi \geq 0, \quad \varphi' \geq 0, \\ 2a_1 \varphi' + b_2^* \varphi - \delta &\leq f(\tau, \varphi, \varphi') \leq 2a_1 \varphi' + b_1^* \varphi + \delta && \text{dla } \varphi \geq 0, \quad \varphi' \leq 0, \\ 2a_1 \varphi' + b_1^* \varphi - \delta &\leq f(\tau, \varphi, \varphi') \leq 2a_1 \varphi' + b_2^* \varphi + \delta && \text{dla } \varphi \leq 0, \quad \varphi' \geq 0, \\ 2a_1 \varphi' + b_1^* \varphi - \delta &\leq f(\tau, \varphi, \varphi') \leq 2a_1 \varphi' + b_2^* \varphi + \delta && \text{dla } \varphi \leq 0, \quad \varphi' \leq 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.7) \quad b_1^* = \sup \beta^*(\tau), \quad b_2^* = \inf \beta^*(\tau).$$

Z ciągłości funkcji  $f(\tau, \varphi, \varphi')$  wynika, że dla  $\tau \geq T^*$  mamy

$$(3.8) \quad f(\tau, 0, 0) \leq \delta.$$

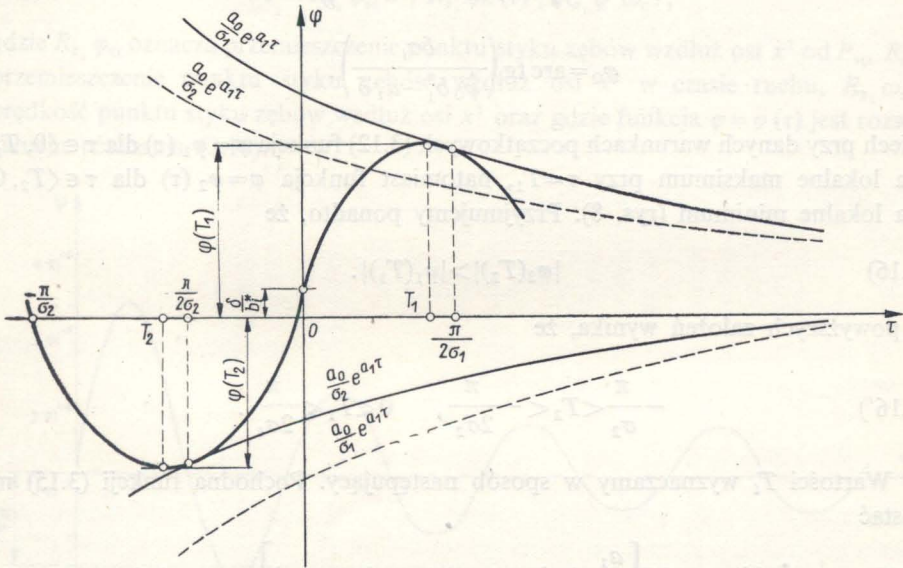
Oscylacyjność rozwiązań równania (2.10) określamy za pomocą następującego

**TWIERDZENIA.** Jeżeli równanie (3.5) spełnia założenie w  $(a_1, b_1^*, b_2^*, \delta)$  oraz warunki

$$(3.9) \quad \sigma^2 = -a_1^2 - b_{1,2}^* > 0,$$

$$(3.10) \quad a_1 < 0,$$

gdzie  $\sigma^2$  jest kwadratem częstości drgań równania (3.3), to wszystkie rozwiązania niebanalne równania (2.10) są oscylujące i czas przejścia przez dwa kolejne położenia zerowe nie przekracza  $2\pi/\sigma$ . Pochodne rozwiązań są też oscylujące. Między dwoma kolejnymi oscylacjami istnieje jedno ekstremum (rys. 8).



Rys. 8

Stabilność rozwiązań równania (2.11) badamy w sposób następujący.

Równanie (3.3) przy stałych współczynnikach ma postać

$$(3.11) \quad \varphi_i'' - 2a_1 \varphi_i' - b_i^* \varphi_i = \delta, \quad i = 1, 2.$$

Przyjmujemy następujące warunki początkowe:

$$(3.12) \quad \varphi_i(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = \dot{\varphi}_0 > 0, \quad i = 1, 2.$$

Częstości drgań równania (3.11) są następujące:

$$(3.13) \quad \sigma_i = \sqrt{-a_1^2 - b_i^*}, \quad i=1, 2;$$

dla  $b_2^* < b_1^* < 0$  mamy  $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ .

Rozwiązania równań (3.11) przy warunkach (3.12) mają postać

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= e^{a_1 \tau} \left[ \frac{1}{\sigma_1} \left( \dot{\varphi}_0 - \frac{a_1 \delta}{b_1^*} \right) \sin \sigma_1 \tau + \frac{\delta}{b_1^*} \cos \sigma_1 \tau \right] - \frac{\delta}{b_1^*}, \\ \varphi_2(\tau) &= e^{a_1 \tau} \left[ \frac{1}{\sigma_2} \left( \dot{\varphi}_0 - \frac{a_1 \delta}{b_2^*} \right) \sin \sigma_2 \tau + \frac{\delta}{b_2^*} \cos \sigma_2 \tau \right] - \frac{\delta}{b_2^*}. \end{aligned}$$

Funkcje (3.14) możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(3.15) \quad \varphi_i(\tau) = \frac{a_0}{\sigma_i} e^{a_1 \tau} \sin(\sigma_i \tau + \varphi_0) - \frac{\delta}{b_i^*}, \quad i=1, 2,$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 - (2a_1 \dot{\varphi}_0 + 1) \frac{\delta}{b_i^*}}, \\ \varphi_0 &= \arctg \left( \frac{\delta \sigma_i}{\dot{\varphi}_0 b_i^* - a_1 \delta} \right). \end{aligned}$$

Niech przy danych warunkach początkowych (3.12) funkcja  $\varphi = \varphi_1(\tau)$  dla  $\tau \in \langle 0, T_1 \rangle$  ma lokalne maksimum przy  $\tau = T_1$ , natomiast funkcja  $\varphi = \varphi_2(\tau)$  dla  $\tau \in \langle T_2, 0 \rangle$  ma lokalne minimum (rys. 8). Przyjmujemy ponadto, że

$$(3.16) \quad |\varphi_2(T_2)| > |\varphi_1(T_1)|.$$

Z powyższych założeń wynika, że

$$(3.16') \quad -\frac{\pi}{\sigma_2} < T_2 < -\frac{\pi}{2\sigma_2}, \quad 0 < T_1 < \frac{\pi}{2\sigma_1}.$$

Wartości  $T_i$  wyznaczamy w sposób następujący. Pochodna funkcji (3.15) ma postać

$$(3.17) \quad \dot{\varphi}_i(\tau) = a_0 e^{a_1 \tau} \left[ \frac{a_1}{\sigma_i} \sin(\sigma_i \tau + \varphi_0) + \cos(\sigma_i \tau + \varphi_0) \right], \quad i=1, 2.$$

Z równania (3.17) dla  $\tau = T_i$  po uwzględnieniu (3.13) i (3.16) oraz po dokonaniu przekształceń otrzymujemy

$$(3.18) \quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{\sigma_1} \arctg \frac{-\dot{\varphi}_0 \sigma_1}{a_1 \dot{\varphi}_0 + \delta}, \\ T_2 &= \frac{1}{\sigma_2} \arctg \frac{-\dot{\varphi}_0 \sigma_2}{a_1 \dot{\varphi}_0 + \delta} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Funkcje (3.15) po uwzględnieniu (3.18) i dokonaniu przekształceń mają postać

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \varphi_1(T_1) &= -\frac{\delta}{b_1^*} - \frac{1}{b_1^*} \sqrt{\delta^2 + 2a_1 \delta \dot{\varphi}_0 - b_1^* \dot{\varphi}_0^2} \exp \left[ \frac{a_1}{\sigma_1} \arctg \frac{-\dot{\varphi}_0 \sigma_1}{\delta + a_1 \dot{\varphi}_0} \right], \\ \varphi_2(T_2) &= -\frac{\delta}{b_2^*} - \frac{1}{b_2^*} \sqrt{\delta^2 + 2a_1 \delta \dot{\varphi}_0 - b_2^* \dot{\varphi}_0^2} \exp \left[ \frac{a_1}{\sigma_2} \arctg \frac{-\dot{\varphi}_0 \sigma_2}{\delta + a_1 \dot{\varphi}_0} - \pi \right]. \end{aligned}$$

Stabilność rozwiązania równania (2.10) podaje następujące

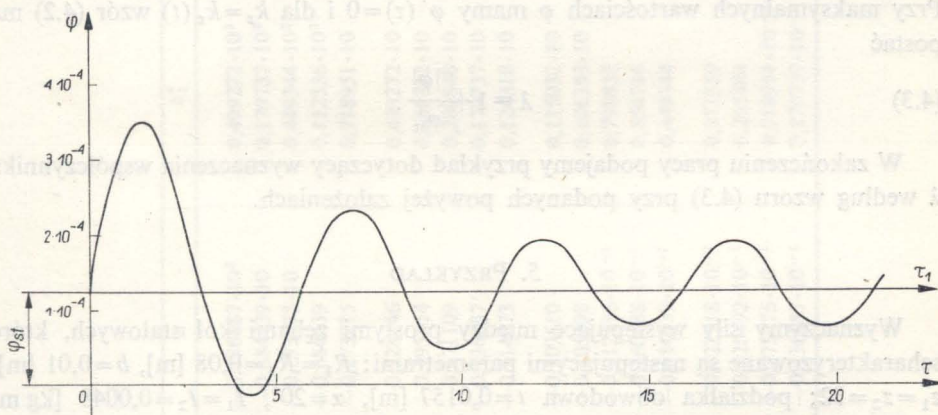
**TWIERDZENIE.** *Jeśli równanie (3.5) spełnia założenie  $W(a_1, b_1^*, b_2^*, \delta)$  dla każdej pary liczb  $a_1, b_1^*$  spełniającej warunki (3.9), (3.10) i (3.16), to każde rozwiązanie równania (2.10) dąży (wraz ze swą pierwszą pochodną) wykładniczo do  $\delta/b_1^*$  dla  $\tau \rightarrow \infty$ .*

#### 4. WYZNACZENIE SIŁ MIĘDZY ZĘBAMI KÓŁ PRZEKŁADNI

Siły (sprężyste oraz tłumienie) występujące między zębami wyznaczamy z następującego wzoru:

$$(4.1) \quad P = R_{z_1} \varphi_{st} k + R_{z_1} \varphi k(t) + R_{z_1} \varphi' \omega_c l,$$

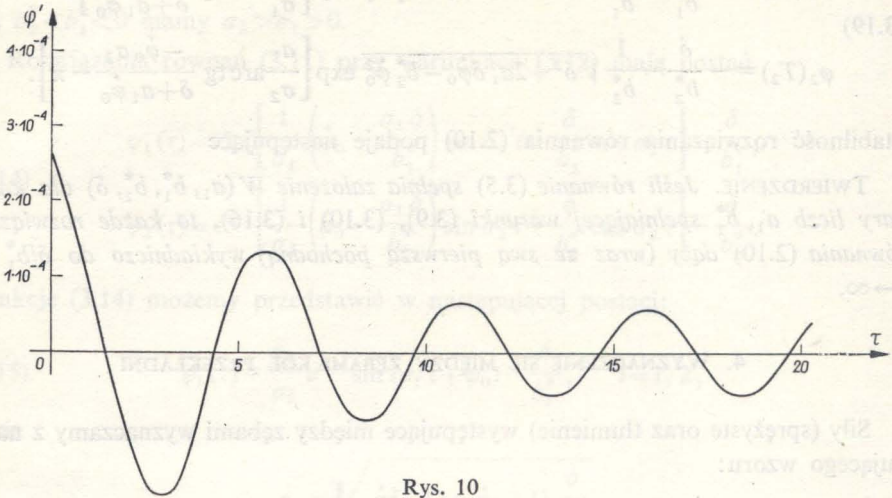
gdzie  $R_{z_1} \varphi_{st}$  oznacza przemieszczenie punktu styku zębów wzdłuż osi  $x^1$  od  $P_{st}$ ,  $R_{z_1} \varphi$  przemieszczenie punktu styku zębów wzdłuż osi  $x^1$  w czasie ruchu,  $R_{z_1} \omega_c \varphi'$  prędkość punktu styku zębów wzdłuż osi  $x^1$  oraz gdzie funkcja  $\varphi = \varphi(\tau)$  jest rozwiązaniem równania (2.10).



Rys. 9

Na rysunku 9 podany jest wykres funkcji  $\varphi = \varphi(\tau)$  przy dodatnich warunkach początkowych ( $\varphi(0) > 0$  i  $\varphi'(0) > 0$ ). Rozwiązanie równania (2.10) przeprowadzamy na maszynie cyfrowej po spełnieniu warunków (3.9), (3.10) i (3.16). Przy rozwiązywaniu równania (2.10) korzystamy z numerycznej metody Rungego-Kutta. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że drgania okresowe wzdłuż osi  $\tau_1$  są zbliżone do harmonicznnych przy dowolnych warunkach początkowych i po pewnej ilości

okresów. Oś  $\tau_1$  jest przesunięta względem osi  $\tau$  o wartości  $\varphi_{st}$ . Wykres pochodnej  $\varphi' = \varphi'(\tau)$  rozwiązania równania (2.10) jest przedstawiony na rys. 10. Przy jej wyznaczaniu korzystamy również z numerycznej metody Rungego-Kutta.



Rys. 10

W zagadnieniach praktycznych wygodniej jest korzystać ze współczynnika dynamiczności  $\lambda$  jako funkcji  $n$  (obr/min) koła 1 lub koła 2:

$$(4.2) \quad \lambda = \frac{P}{P_{st}} = 1 + \frac{\varphi k_z(t)}{\varphi_{st} k_z} + \frac{\varphi' \omega_c l}{\varphi_{st} k_z}.$$

Przy maksymalnych wartościach  $\varphi$  mamy  $\varphi'(\tau) = 0$  i dla  $k_z = k_z(t)$  wzór (4.2) ma postać

$$(4.3) \quad \lambda = 1 + \frac{|\varphi|}{\varphi_{st}}.$$

W zakończeniu pracy podajemy przykład dotyczący wyznaczenia współczynnika  $\lambda$  według wzoru (4.3) przy podanych powyżej założeniach.

## 5. PRZYKŁAD

Wyznaczymy siły występujące między prostymi zębami kół stalowych, które scharakteryzowane są następującymi parametrami:  $R_1 = R_2 = 0,08$  [m],  $b = 0,01$  [m],  $z_1 = z_2 = 32$ ; podziałka obwodowa  $t = 0,0157$  [m],  $\alpha = 20^\circ$ ,  $I_1 = I_2 = 0,0048$  [kg m] oraz  $P_{st} = 196,2$  [N/mm].

Wartości podane we wzorze (1.1) przyjmujemy następujące:

$$k_c = 18,639 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm } \mu\text{k}} \right], \quad a = \frac{\sup k_z(t) - \inf k_z(t)}{2} = \frac{21,582 - 15,696}{2} \approx 3 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm } \mu\text{k}} \right],$$

$$\varepsilon = 1,4.$$

Wartości współczynników  $a_1, b_1^*, b_2^*, \vartheta$  i  $\delta$  dla danych  $n$  (obr/min) koła 1 są podane w tabelicy 1.

Tablica 1

$n$	$a$	$b_2^*$	$b_1^*$	$\vartheta$	$\delta$
$0,300000 \cdot 10^3$	$-0,136887 \cdot 10^2$	$0,499272 \cdot 10^3$	$0,363106 \cdot 10^3$	$0,108932 \cdot 10^4$	$0,605795 \cdot 10^{-1}$
$0,500000 \cdot 10^3$	$-0,684439 \cdot 10$	$0,179737 \cdot 10^3$	$0,130718 \cdot 10^3$	$0,392155 \cdot 10^3$	$0,218086 \cdot 10^{-1}$
$0,100000 \cdot 10^3$	$-0,273775 \cdot 10$	$0,449344 \cdot 10^2$	$0,326796 \cdot 10^2$	$0,980388 \cdot 10^2$	$0,545216 \cdot 10^{-2}$
$0,200000 \cdot 10^4$	$-0,684439$	$0,112336 \cdot 10^2$	$0,816990 \cdot 10$	$0,245097 \cdot 10^2$	$0,136304 \cdot 10^{-2}$
$0,250000 \cdot 10^4$	$-0,273775$	$0,718951 \cdot 10$	$0,522874 \cdot 10$	$0,156862 \cdot 10^3$	$0,872345 \cdot 10^{-3}$
$0,300000 \cdot 10^4$	$-0,228146$	$0,499272 \cdot 10$	$0,363106 \cdot 10$	$0,108932 \cdot 10^3$	$0,605795 \cdot 10^{-3}$
$0,350000 \cdot 10^4$	$-0,195554$	$0,366812 \cdot 10$	$0,266772 \cdot 10$	$0,800317 \cdot 10$	$0,445074 \cdot 10^{-3}$
$0,400000 \cdot 10^4$	$-0,171109$	$0,280840 \cdot 10$	$0,204247 \cdot 10$	$0,612742 \cdot 10$	$0,340760 \cdot 10^{-3}$
$0,500000 \cdot 10^4$	$-0,136887$	$0,179737 \cdot 10$	$0,130718 \cdot 10$	$0,392155 \cdot 10$	$0,218086 \cdot 10^{-3}$
$0,600000 \cdot 10^4$	$-0,114073$	$0,124818 \cdot 10$	$0,907767$	$0,272330 \cdot 10$	$0,151448 \cdot 10^{-3}$
$0,625000 \cdot 10^4$	$-0,109510$	$0,115032 \cdot 10$	$0,836598$	$0,250979 \cdot 10$	$0,139575 \cdot 10^{-3}$
$0,650000 \cdot 10^4$	$-0,105298$	$0,106353 \cdot 10$	$0,773482$	$0,232044 \cdot 10$	$0,129045 \cdot 10^{-3}$
$0,750000 \cdot 10^4$	$-0,912586 \cdot 10^{-1}$	$0,798835$	$0,580971$	$0,174291 \cdot 10$	$0,969273 \cdot 10^{-4}$
$0,900000 \cdot 10^4$	$-0,760488 \cdot 10^{-1}$	$0,554746$	$0,403452$	$0,121035 \cdot 10$	$0,673106 \cdot 10^{-4}$
$0,100000 \cdot 10^5$	$-0,684439 \cdot 10^{-1}$	$0,449344$	$0,326796$	$0,980388$	$0,545216 \cdot 10^{-4}$
$0,110000 \cdot 10^5$	$-0,622218 \cdot 10^{-1}$	$0,371359$	$0,270079$	$0,810238$	$0,450591 \cdot 10^{-4}$
$0,130000 \cdot 10^5$	$-0,526492 \cdot 10^{-1}$	$0,265884$	$0,193370$	$0,580111$	$0,322613 \cdot 10^{-4}$
$0,250000 \cdot 10^5$	$-0,273775 \cdot 10^{-1}$	$0,718951 \cdot 10^{-1}$	$0,522874 \cdot 10^{-1}$	$0,156862$	$0,872345 \cdot 10^{-5}$
$0,500000 \cdot 10^5$	$-0,136887 \cdot 10^{-1}$	$0,179737 \cdot 10^{-1}$	$0,130718 \cdot 10^{-1}$	$0,392155 \cdot 10^{-1}$	$0,218086 \cdot 10^{-5}$

Wartości współczynnika tłumienia  $l$  dla danych  $n$  koła  $l$  są podane w tablicy 2.

Tablica 2

$n$	$\psi$	$l$
$0,30000 \cdot 10^3$	0,600000	$0,120000 \cdot 10^2$
$0,50000 \cdot 10^3$	0,500000	$0,100000 \cdot 10^2$
$0,10000 \cdot 10^4$	0,400000	$0,800000 \cdot 10$
$0,20000 \cdot 10^4$	0,200000	$0,400000 \cdot 10$
$0,25000 \cdot 10^4$	0,100000	$0,200000 \cdot 10$
$0,30000 \cdot 10^4$	0,100000	$0,200000 \cdot 10$
.....	.....	.....
0,500000	0,100000	$0,200000 \cdot 10$

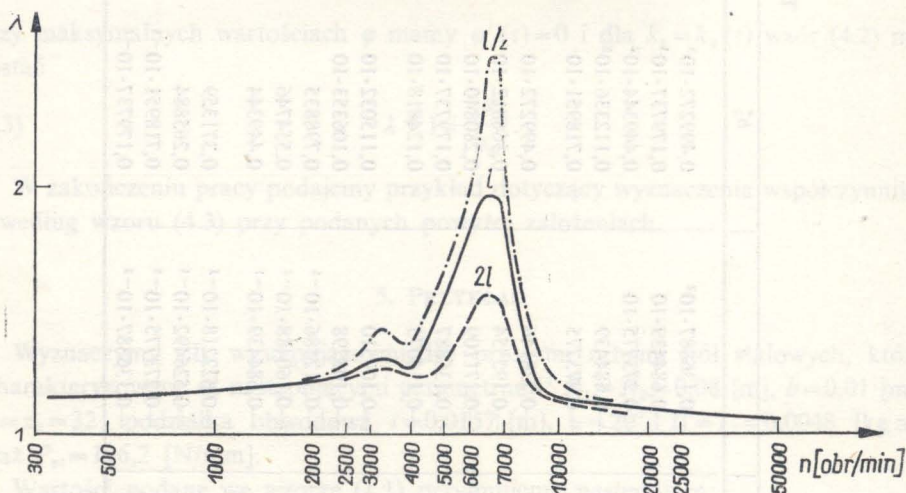
Wartości  $\sigma_1, \sigma_2, \varphi_1(T_1)$  i  $\varphi_2(T_2)$  dla danych  $n$  koła  $l$  są podane w tablicy 3. Wartość przemieszczenia  $\varphi_{st}$  wyznaczamy ze wzoru

$$\varphi_{st} = \frac{P_{st}}{R_{z_1} \sup k_z(t)} = \frac{196,2}{1000 \cdot 80 \cdot \cos 20^\circ \cdot 21,582} = 1,21 \cdot 10^{-4}$$

lub z wykresu podanego na rys. 9.

Wartości amplitud przy drganiach okresowych dla danych  $n$  koła  $l$  są podane w tablicy 4.

Wykres współczynnika dynamiczności obciążenia  $\lambda$  jako funkcji  $n$  (obr/min) koła  $l$  jest przedstawiony na rys. 11. Z przedstawionego wykresu wynika, że rezonans parametryczny przy danych wartościach  $l$  występuje między 4000 – 8000 obr/min,



Rys. 11

natomiast subharmoniczny między 2300 – 3000 obr/min. Największa wartość współczynnika  $\lambda = 1,98$  w obszarze rezonansu parametrycznego występuje przy  $n \approx 6250$  obr/min. Poniżej obszaru rezonansu subharmonicznego (tj. poniżej 2300 obr/min) wartość współczynnika  $\lambda$  maleje do 1,15 przy  $n = 300$  obr/min. Podobnie maleje wartość współczynnika  $\lambda$  powyżej 8000 obr/min.

Tablica 3

$n$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\varphi_1(T_1)$	$\varphi_2(T_2)$
$0,300000 \cdot 10^3$	$0,132601 \cdot 10^2$	$0,176572 \cdot 10^2$	$0,237684 \cdot 10^{-1}$	$-0,251259$
$0,500000 \cdot 10^3$	$0,916034 \cdot 10$	$0,115261 \cdot 10^2$	$0,437465 \cdot 10^{-1}$	$-0,260068$
$0,100000 \cdot 10^4$	$0,501937 \cdot 10$	$0,611795 \cdot 10$	$0,975739 \cdot 10^{-1}$	$-0,363391$
$0,200000 \cdot 10^4$	$0,277558 \cdot 10$	$0,328065 \cdot 10$	$0,252164$	$-0,432069$
$0,250000 \cdot 10^4$	$0,227054 \cdot 10$	$0,266702 \cdot 10$	$0,367215$	$-0,442729$
$0,300000 \cdot 10^4$	$0,189211 \cdot 10$	$0,222251 \cdot 10$	$0,440632$	$-0,531305$
$0,350000 \cdot 10^4$	$0,162181 \cdot 10$	$0,190501 \cdot 10$	$0,514048$	$-0,619881$
$0,400000 \cdot 10^4$	$0,141908 \cdot 10$	$0,166688 \cdot 10$	$0,587465$	$-0,708457$
$0,500000 \cdot 10^4$	$0,113527 \cdot 10$	$0,133351 \cdot 10$	$0,734298$	$-0,885609$
$0,600000 \cdot 10^4$	$0,946058$	$0,111125 \cdot 10$	$0,881131$	$-0,106276 \cdot 10$
$0,625000 \cdot 10^4$	$0,908216$	$0,106680 \cdot 10$	$0,917839$	$-0,110704 \cdot 10$
$0,650000 \cdot 10^4$	$0,873284$	$0,102577 \cdot 10$	$0,954547$	$-0,115133 \cdot 10$
$0,750000 \cdot 10^4$	$0,756846$	$0,889006$	$0,110138 \cdot 10$	$-0,132848 \cdot 10$
$0,900000 \cdot 10^4$	$0,630705$	$0,740838$	$0,132163 \cdot 10$	$-0,159421 \cdot 10$
$0,100000 \cdot 10^5$	$0,567635$	$0,666755$	$0,146846 \cdot 10$	$-0,177136 \cdot 10$
$0,110000 \cdot 10^5$	$0,516032$	$0,606140$	$0,161529 \cdot 10$	$-0,194852 \cdot 10$
$0,130000 \cdot 10^5$	$0,436642$	$0,512888$	$0,190896 \cdot 10$	$-0,230282 \cdot 10$
$0,250000 \cdot 10^5$	$0,227054$	$0,266702$	$0,367095 \cdot 10$	$-0,442864 \cdot 10$
$0,500000 \cdot 10^5$	$0,113527$	$0,133551$	$0,734178 \cdot 10$	$-0,885744 \cdot 10$

Tablica 4

$n$	$\varphi$
$0,300000 \cdot 10^3$	$0,220000 \cdot 10^{-4}$
$0,500000 \cdot 10^3$	$0,222500 \cdot 10^{-4}$
$0,100000 \cdot 10^4$	$0,230000 \cdot 10^{-4}$
$0,200000 \cdot 10^4$	$0,250000 \cdot 10^{-4}$
$0,250000 \cdot 10^4$	$0,270000 \cdot 10^{-4}$
$0,300000 \cdot 10^4$	$0,335000 \cdot 10^{-4}$
$0,350000 \cdot 10^4$	$0,335000 \cdot 10^{-4}$
$0,400000 \cdot 10^4$	$0,333500 \cdot 10^{-4}$
$0,500000 \cdot 10^4$	$0,340000 \cdot 10^{-4}$
$0,600000 \cdot 10^4$	$0,355000 \cdot 10^{-4}$
$0,625000 \cdot 10^4$	$0,630000 \cdot 10^{-4}$
$0,650000 \cdot 10^4$	$0,103000 \cdot 10^{-3}$
$0,750000 \cdot 10^4$	$0,111000 \cdot 10^{-3}$
$0,900000 \cdot 10^4$	$0,480000 \cdot 10^{-4}$
$0,100000 \cdot 10^5$	$0,190000 \cdot 10^{-4}$
$0,250000 \cdot 10^5$	$0,900000 \cdot 10^{-5}$
$0,500000 \cdot 10^5$	$0,850000 \cdot 10^{-5}$

## 6. ZAKOŃCZENIE

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że w zagadnieniach technicznych można wyznaczać analitycznie wartości sił występujące między prostymi zębami kół przekładni o osiach równoległych po spełnieniu warunków (3.9), (3.10), (3.11) w przypadku, gdy:

- 1) odkształcenia wałów i ich podparć oraz tarcz kół są bardzo małe w porównaniu z odkształceniami zębów,
- 2) między zębami nie występują praktycznie zderzenia.

Z charakteru krzywej przedstawionej na rys. 9 wynika, że wartości sił dynamicznych są największe w obszarach rezonansu parametrycznego i subharmonicznego. W obszarach tych są one zależne od wielkości tłumienia. Poza obszarami rezonansów wpływ tłumienia na wartości sił jest bardzo mały i w rozpatrywanym przypadku nie jest badany.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. FRONIUS, *Dynamische Kräfte, Geräusch und Qualitätssicherung bei Zahnradgetrieben*, VEB Wissenschaftlich-Technische Zentrum Ausrüstungen für die Schwerindustrie und Getriebebau, ASUG Mitteilungs, Heft 5, 1967.
2. H. OPITZ, *Einfluss der Verzahnungsgenauigkeit auf das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben*, VDJ-Berichte, Nr 127, 1969.
3. M. HORTEL, *Vynucenékmitání v slabé nelineárním parametrickém systému ozubených kol s vice stupni volnosti*, Strojnícky časopis, 14, 4, Bratislava 1968.
4. K. TATARKIEWICZ, *Sur les mouvements sous l'influence des forces élastiques généralisés*, Annales Univers. M. Curie-Skłodowska, Lublin, 13, 5, sectio A, 1959.
5. K. TATARKIEWICZ, *Sur une équation généralisant les équations linéaires avec second membre*, Annales Univers. M. Curie-Skłodowska, Lublin, 13, 4, sectio A, 1959.

## Резюме

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ ВОЗДЕЙСТВУЮЩИЕ  
НА ЗУБЬЯ ОДНОСТУПЕНЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ

В работе, дается дискретная модель зубчатой одноступенчатой передачи с параллельными осями, при следующих предположениях:

- 1) деформации валов и их подпор, а также дисков колес, по сравнению с деформациями зубов — очень малы,
- 2) зубья не соударяются с собой,
- 3) приведенные жесткости зубьев и из закреплений в зубчатых венцах колес, характеризуются синусоидальными графиками.

При помощи дискретной модели выводятся уравнения движения, а затем даются условия, касающиеся осцилляции и стабильности решений нелинейного дифференциального уравнения и нелинейного уравнения с переменными коэффициентами.

В заключение работы даются зависимости, на основе которых можно определять, значения сил между прямыми зубьями.

## SUMMARY

DYNAMIC FORCES OCCURRING BETWEEN THE TEETH OF SINGLE-STAGE  
TRANSMISSION WHEELS WITH PARALLEL AXES

A discrete model of single-stage tooth transmission with parallel axes is described in this paper with the following assumptions:

- 1) deformation of shafts and their supports, and of the wheel disks, are very small in comparison with the deformation of the wheels;
- 2) no collisions occur between the teeth;
- 3) the graph of the substitute rigidity of the wheels and the graph of the setting of the wheel supports in the tooth rim follows a sinusoidal course.

By means of the discrete model, the equations of motion are derived, and subsequently the conditions are given concerning the fluctuation and stability of the solutions of the nonlinear and nonhomogeneous differential equation with variable coefficients.

In conclusion, are given relationships on the basis of which the values of the forces between the straight lines can be determined.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 grudnia 1970 r.*