

## POSZUKIWANIE NIEJEDNORODNOŚCI PLASTYCZNEJ MATERIAŁU DLA CAŁKOWICIE UPLASTYCZNIONYCH CYLINDRÓW KOŁOWYCH, PODDANYCH DZIAŁANIU OBCIĄŻEŃ ZŁOŻONYCH

ANNA D O L L A R I Z D Z I S Ł A W A K O R D A S (KRAKÓW)

W pracy poszukuje się takiego rozkładu granicy plastyczności materiału, który umożliwi całkowite uplastycznienie przy wyczerpaniu nośności granicznej kołowych cylindrów grubościennych poddanych działaniu obciążeń złożonych (ciśnienie, niewielki moment zginający, siła podłużna i wpływ temperatury). Jest to ogólniejsze potraktowanie problemu analizowanego w pracy [5], gdzie uwzględniano jedynie ciśnienie wewnętrzne. Praca jest uzupełnieniem problematyki określenia kształtów elementów konstrukcyjnych podlegających całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia, która ma związek z optymalnym projektowaniem.

### 1. WSTĘP

Badanie kształtów elementów konstrukcyjnych, podlegających całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia ma bezpośredni związek z optymalnym projektowaniem. Pozwala mianowicie na dobranie takich kształtów, w których nie ma w stanie granicznym stref sprężystych (lub sztywnych, zależnie od przyjętej schematyzacji wykresu rozciągania). Istnienie takich stref, w myśl twierdzeń D.C.DRUCKERA, R.T.SHIELDA [2] oznacza na ogół niewłaściwe zaprojektowanie konstrukcji (niewłaściwe wykorzystanie materiału). Stąd też problematyka określania kształtów ciał wykazujących całkowite uplastycznienie w stadium zniszczenia wydaje się ważna nie tylko z poznawczego, ale też z utylitarnego punktu widzenia (niektóre rozwiązania mogą znaleźć zastosowanie w praktyce). Szersze omówienie tej problematyki można znaleźć w pracy [3].

Problem całkowitego uplastycznienia w stadium zniszczenia niekołowych cylindrów grubościennych jednorodnych badali Z.KORDAS i M.ŻYCZKOWSKI w pracy [6].

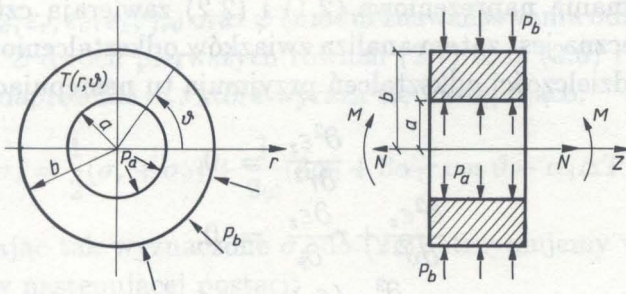
Wpływ niejednorodności plastycznej materiału na te kształty badała A.DOLLAR w pracy [1]. W pracy Z.KORDAS i A.WRÓBLEWSKIEGO [5] poszukuje się takiego rozkładu granicy plastyczności materiału, która umożliwi całkowite uplastycznienie przy wyczerpaniu nośności granicznej kołowych cylindrów grubościennych pod działaniem ciśnienia wewnętrznego.

Niniejsze opracowanie dotyczy również cylindrów o przekrojach kołowych. Jest jednak ogólniejsze, obejmuje bowiem obciążenia złożone, działające na cylinder. W szczególności, w obecnej pracy poszukuje się takiej niejednorodności plastycznej materiału, która zapewnia całkowite uplastycznienie w stadium zniszczenia kołowych przekrojów cylindrów grubościennych, poddanych jednoczesnemu działaniu ciśnienia, niewielkiego momentu zginającego, siły podłużnej i temperatury.

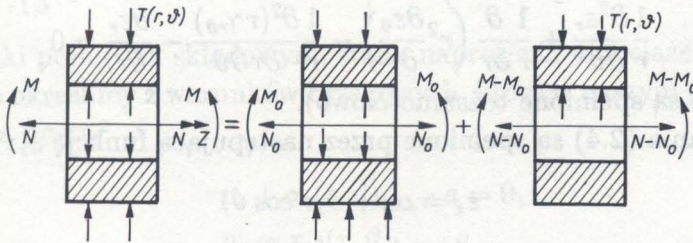
## 2. ZAŁOŻENIA I RÓWNANIA PODSTAWOWE

Rozważamy kołowy grubościenny cylinder o promieniach  $a$  i  $b$ , z materiału nieściśliwego, idealnie sprężysto-plastycznego, którego granica plastyczności jest zmienna w przekroju cylindra. Cylinder obciążony jest ciśnieniem wewnętrznym  $p_a$ , zewnętrznym  $p_b$ , momentem zginającym (czyste zginanie bez siły poprzecznej), siłą podłużną i znajduje się w polu temperatur  $T(r, \vartheta)$ . Uwzględnienie obok działania różnicy ciśnień dodatkowych obciążeń oraz pola temperatur jest istotne z uwagi na rzeczywiste warunki pracy rurociągu. Składowe stanu naprężenia (przy pominięciu siły poprzecznej) zależne są jedynie od  $r$  i  $\vartheta$  (niezależne od  $z$  (rys.1)). Podobnie jak w pracy Z.KORDAS i W.SKRABY [4], do określenia rozkładu naprężeń zastosujemy superpozycję rozwiązania płaskiego stanu odkształcenia elementu cylindra oraz krzywizny i wydłużenia tego elementu (rys.2). (Nie używa się tu terminów: zginanie i rozciąganie, ponieważ płaskiemu stanowi odkształcenia towarzyszy już pewien moment zginający  $M_0$  i siła podłużna  $N_0$ ).

Stan naprężenia w dowolnym punkcie cylindra określony jest czwórką składowych  $\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z, \tau_{r,\vartheta}$ , które są funkcjami  $r$  i  $\vartheta$ . Składowe te muszą



Rys. 1



Rys. 2

spełniać warunki równowagi wewnętrznej

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{r} = 0$$

oraz (wobec przyjętego kryterium kształtowania) warunek plastyczności Hubera Misesa - Hencky'ego w formie równości:

$$(2.2) \quad (\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + (\sigma_\vartheta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{r\vartheta}^2 = 2\sigma_0^2(r, \vartheta),$$

gdzie  $\sigma_0(r, \vartheta)$  oznacza zmienną na powierzchni przekroju granicę plastyczności. Napiżemy ją w postaci następującego szeregu:

$$(2.3) \quad \sigma_0(r, \vartheta) = \sigma_{00} + \sigma_{0i}(r, \vartheta)\alpha_1 + \sigma_{0ij}(r, \vartheta)\alpha_i\alpha_j + \dots,$$

w którym parametr  $\alpha_1$  jest odpowiednikiem parametru  $\alpha$  w pracy [1] oraz parametru  $\delta$  w pracy [5]. Parametry  $\alpha_i, \alpha_j$  będą uwzględniały wpływ obciążeń złożonych.

Trzy równania naprężeniowe (2.1) i (2.2) zawierają cztery niewiadome. Konieczna jest zatem analiza związków odkształceniowych. Równania nierozdzielczości odkształceń przyjmują tu następującą postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \vartheta^2} + r \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial_r \partial \vartheta} \left( \frac{\varepsilon_z}{r} \right) &= 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(2.5) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varepsilon_\vartheta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\vartheta})}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = 0$$

(pozostałe są spełnione tożsamościowo).

Równania (2.4) są spełnione przez następującą funkcję  $\varepsilon_z$ :

$$(2.6) \quad \varepsilon_z = \alpha_3 + \alpha_2 r \cos \vartheta,$$

gdzie  $\alpha_3$  i  $\alpha_2$  oznaczają parametry proporcjonalne odpowiednio do wydłużenia i krzywizny osi (układ osi jak na rys. 1). Prawo podobieństwa dewiatorów

$$D_\varepsilon = \varphi \cdot D_\sigma,$$

które można traktować bądź jako równania Hencky'ego - Iliuszyna, bądź też jako równania Levy'ego - Misesa (przy formalnym traktowaniu  $\varepsilon_{ij}$  jako prędkości odkształceń) przyjmuje postać:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r - \varepsilon_z &= \varphi(\sigma_r - \sigma_z), \\ \varepsilon_\vartheta - \varepsilon_z &= \varphi(\sigma_\vartheta - \sigma_z), \\ \gamma_{r\vartheta} &= 2\varphi\tau_{r\vartheta}. \end{aligned}$$

Przy założeniu nieściśliwości materiału, względna zmiana objętości ciała jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur  $\Delta T$  i prawo zmiany objętości przyjmuje postać

$$(2.8) \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\vartheta + \varepsilon_z = \alpha_4 \cdot \Delta T,$$

gdzie  $\alpha_4$  parametrem określającym współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału.

Rozważany problem jest zatem opisany układem dziewięciu równań (2.1), (2.2), (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) o dziewięciu niewiadomymi

$\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z, \tau_{r\vartheta}, \varepsilon_r, \varepsilon_\vartheta, \varepsilon_z, \gamma_{r\vartheta}$  oraz  $\varphi$  (moduł zaawansowania odkształceń plastycznych). Z dwóch pierwszych równań (2.7) oraz (2.6) i (2.8) można wyznaczyć naprężenie  $\sigma_z$ , które wyraża się następująco:

$$(2.9) \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\vartheta) + \frac{1}{2\varphi}(3\alpha_3 + 3\alpha_2 r \cos \vartheta - \alpha_4 \Delta T).$$

Wstawiając tak wyznaczone  $\sigma_z$  do (2.2) otrzymujemy warunek plastyczności w następującej postaci:

$$(2.10) \quad \varphi^2 \left\{ \frac{4}{3} \sigma_0^2 - [(\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + 4\tau_{r\vartheta}^2] \right\} = 3 \left( \alpha_3 + \alpha_2 r \cos \vartheta - \alpha_4 \frac{\Delta T}{3} \right)^2.$$

Związki pomiędzy składowymi stanu naprężenia a obciążeniem zewnętrznym określimy z warunków brzegowych, które w naszym przypadku przyjmują postać

$$(2.11) \quad \begin{aligned} p_a + \sigma_r(r, \vartheta)|_{r=a} \cdot a &= 0, \\ p_a &= \tau_{r\vartheta}(r, \vartheta)|_{r=a} \cdot a, \\ p_b + \sigma_r(r, \vartheta)|_{r=b} \cdot b &= 0, \\ p_b &= \tau_{r\vartheta}(r, \vartheta)|_{r=b} \cdot b. \end{aligned}$$

### 3. POSZUKIWANIE ROZWIĄZANIA PRZY ZASTOSOWANIU METODY PERTURBACJI ROZWIĄZANIA PODSTAWOWEGO

Rozwiązania tak postawionego problemu poszukuje się w postaci szeregu potęgowego czterech małych parametrów:

$\alpha_1$  - charakteryzuje niejednorodność materiału (odpowiada parametrowi  $\alpha$  z pracy [1] i  $\delta$  z pracy [5]).

$\alpha_2$  - charakteryzuje krzywiznę osi elementu cylindra (odpowiada parametrowi  $\beta$  z pracy [4]).

$\alpha_3$  - charakteryzuje wydłużenie osi elementu cylindra (odpowiada parametrowi  $\alpha$  z pracy [4]).

$\alpha_4$  - charakteryzuje wpływ pola temperatur.

Szereg ten możemy zapisać następująco:

$$(3.1) \quad x(r, \vartheta) = X_0 + X_i \alpha_i + X_{ij} \alpha_i \alpha_j + \dots, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie  $X = \sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z, \tau_{r\vartheta}, \varepsilon_r, \varepsilon_\vartheta, \varepsilon_z, \gamma_{r\vartheta}, \varphi, \sigma_0$ .

We wzorze (3.1) przyjęto konwencję sumacyjną Einsteina oraz  $X_{ij} = X_{ji}$ .

+5 Wielkości z indeksem 0 są składowymi stanu naprężenia i odkształcenia oraz  $\varphi$  dla jednorodnego cylindra kołowego o promieniach  $a$  i  $b$  obciążonego jedynie różnicą ciśnień:

$$(3.2) \quad p_b - p_a = \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \ln \frac{a}{b},$$

$$(3.3) \quad \varepsilon_{r_0} = -\frac{C}{r^2}, \quad \varepsilon_{\vartheta_0} = \frac{C}{r^2}, \quad \varepsilon_{z_0} = 0, \quad \gamma_{r\vartheta_0} = 0,$$

$$\sigma_{r_0} = \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b} - p_b, \quad \tau_{r\vartheta_0} = 0,$$

$$\sigma_{\vartheta_0} = \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \left( \ln \frac{r}{b} + 1 \right) - p_b, \quad \varphi_0 = \frac{\sqrt{3}C}{\sigma_{00}} \frac{1}{r^2},$$

$$\sigma_{z_0} = \frac{\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \left( 2 \ln \frac{r}{b} + 1 \right) - p_b,$$

gdzie  $C$  jest stałą, która przy pełnym uplastycznieniu pozostaje niewyznaczona (włącza się ją w parametry  $\alpha_i$ ).

Wprowadzając przyjętą postać rozwiązania (3.1) do równań podstawowych i porównując wyrazy przy odpowiednich potęgach  $\alpha_i^l \alpha_j^p$ , otrzymuje się układy dziewięciu równań, w których niewiadomymi są kolejne poprawki składowych stanu naprężenia i odkształcenia oraz  $\varphi$  w poszczególnych stopniach przybliżenia. Zastosowanie metody małego parametru prowadzi do linearyzacji warunku plastyczności (2.10) i do pseudowyznaczalnych układów równań naprężeniowych w kolejnych szczeblach przybliżenia. Rozwinięcie składowych stanu naprężenia w równaniach równowagi wewnętrznej (2.1) w szereg potęgowy (3.1) prowadzi do równań o postaci analogicznej do wyjściowej, tak dla pierwszych, jak i dla drugich stopni przybliżenia:

przybliżenie pierwsze

$$(3.4) \quad \frac{\partial \sigma_{r_i}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta_i}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{r_i} - \sigma_{\vartheta_i}}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\vartheta_i}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta_i}}{\partial \vartheta} + \frac{2\tau_{r\vartheta_i}}{r} = 0,$$

przybliżenie drugie

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rij}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta ij}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{rij} - \sigma_{\vartheta ij}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta ij}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta ij}}{\partial \vartheta} + \frac{2\tau_{r\vartheta ij}}{r} &= 0. \end{aligned}$$

W warunku plastyczności (2.10) występują wielkości  $X$  w kwadracie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} X^2 &= X_0^2 + (X_i \alpha_i) + 2X_0 X_i \alpha_i + 2X_0 X_{ij} \alpha_i \alpha_j + \dots = \\ &= X_0^2 + 2X_0 X_i \alpha_i + (X_i X_j + 2X_0 X_{ij}) \alpha_i \alpha_j + \dots \end{aligned}$$

Wstawiając szereg (3.6) na  $X^2$  do warunku plastyczności (2.10) otrzymuje się

$$(3.7) \quad \left[ \varphi^2 + 2\varphi_0 \varphi_i \alpha_i - (\varphi_i \varphi_j - 2\varphi_0 \varphi_{ij}) \alpha_i \alpha_j + \dots \right] \left\{ \left[ \frac{1}{3} \sigma_{00}^2 - (\sigma_{r_0} - \sigma_{\vartheta_0})^2 \right] + 2 \left[ \frac{1}{3} \sigma_{00} \sigma_{0i} - (\sigma_{r_0} - \sigma_{\vartheta_0})(\sigma_r - \sigma_{\vartheta_i}) \right] \alpha_i + \left[ \frac{1}{3} \sigma_{0i} \sigma_{0j} + \frac{8}{3} \sigma_{00} \sigma_{0ij} - (\sigma_{r_i} - \sigma_{\vartheta_i})(\sigma_r - \sigma_{\vartheta_j}) - 2(\sigma_{r_0} - \sigma_{\vartheta_0})(\sigma_{r_{ij}} - \sigma_{\vartheta_{ij}}) - 4\tau_{r\vartheta_i} \cdot \tau_{r\vartheta_j} \right] \alpha_i \alpha_j + \dots \right\} = 3 \left( \alpha_3 + \alpha_2 r \cos \vartheta + \alpha_4 \frac{\Delta T}{3} \right)^2.$$

Porównując współczynniki przy  $\alpha_i$  oraz przy  $\alpha_i$  i  $\alpha_j$  otrzymuje się zlinearyzowane warunki plastyczności w kolejnych stopniach przybliżenia: przybliżenie pierwsze

$$(3.8) \quad \sigma_{r_i} - \sigma_{\vartheta_i} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0i},$$

przybliżenie drugie

$$(3.9) \quad \sigma_{r_{ij}} - \sigma_{\vartheta_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_{00}} \tau_{r\vartheta_i} \tau_{r\vartheta_j} + R_{ij} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0ij},$$

gdzie funkcje  $R_{ij}$  określone są następująco:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} R_{22} &= \frac{\sqrt{3} \sigma_{00}}{4C^2} r^6 \cos^2 \vartheta, \\ R_{33} &= \frac{\sqrt{3} \sigma_{00}}{4C^2} r^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad R_{23} &= \frac{\sqrt{3}\sigma_{00}}{4C^2} r^5 \cos \vartheta, \\
 [cd.] \\
 R_{44} &= \frac{\sqrt{3}\sigma_{00}}{36C^2} r^4 [\Delta T(r, \vartheta)]^2, \\
 R_{34} &= -\frac{\sqrt{3}\sigma_{00}}{12C^2} r^4 \Delta T(r, \vartheta), \\
 R_{24} &= -\frac{\sqrt{3}\sigma_{00}}{4C^2} r^5 \Delta T(r, \vartheta) \cos \vartheta,
 \end{aligned}$$

pozostałe  $R_{ij} = 0$ .

Warunki brzegowe przyjmują postać:

w pierwszym szczeblu przybliżenia

$$(3.11) \quad \sigma_{r_i|_a} = \sigma_{r_i|_b} = \tau_{r\vartheta_i|_a} = \tau_{r\vartheta_i|_b} = 0,$$

w przybliżeniu drugim

$$(3.12) \quad \sigma_{r_{ij}|_a} = \sigma_{r_{ij}|_b} = \tau_{r\vartheta_{ij}|_a} = \tau_{r\vartheta_{ij}|_b} = 0.$$

#### 4. ROZWIĄZANIE W KOLEJNYCH SZCZEBŁACH PRZYBLIŻENIA

Warunek plastyczności w pierwszym przybliżeniu (3.8) napiszemy w postaci

$$(4.1) \quad \sigma_{r_i} - \sigma_{\vartheta_i} = K_i(r, \vartheta),$$

gdzie podobnie jak w pracy [1] przyjmiemy, że

$$(4.2) \quad K_i(r, \vartheta) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{0i}.$$

Układ równań wyjściowych w pierwszym przybliżeniu (3.4) i (4.1), z podstawieniem (4.2), sprowadza się do jednego równania różniczkowego, cząsteczkowego drugiego rzędu, niejednorodnego na poprawkę naprężenia stycznego  $\tau_{r\vartheta_i}$ .

Tak samo jak w pracy [1], funkcję  $K_i(r, \vartheta)$  rozwiniemy w szereg trygonometryczny

$$(4.3) \quad K_i(r, \vartheta) = \sum_n k_{ni}(r) \cos n\vartheta,$$



bowiem poszukuje się rozwiązań okresowych ze względu na  $\vartheta$ . Na podstawie równań umieszczonych w pracy [1] można stwierdzić, iż w pierwszym stopniu przybliżenia problem rozwiązują także funkcje  $\sigma_{0i}$ , w których współczynniki rozwinięcia spełniają następujące równości całkowe (wzory (4.6) w pracy [1]):

$$(4.4) \quad \int_a^b k_{n_i}(r) \sin(\sqrt{n^2 - 1} \ln \frac{r}{b}) dr = 0,$$

$$\int_a^b k_{n_i}(r) \cos(\sqrt{n^2 - 1} \ln \frac{r}{b}) dr = 0.$$

Pierwsze poprawki naprężeń stycznych są wtedy następującymi szeregami:

$$(4.5) \quad \tau_{r\vartheta i} = \sum_n n \int_r^a k_{n_i}(\rho) \cos(\sqrt{n^2 - 1} \ln \frac{\rho}{r}) d\rho \sin n\vartheta.$$

Po wstawieniu poprawek (4.5) do warunku plastyczności, dla drugiego stopnia przybliżenia otrzymuje się następującą jego postać:

$$(4.6) \quad \sigma_{r_{ij}} - \sigma_{\vartheta_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_{00}} \left[ \sum_n n \int_r^a k_{n_i}(\rho) \cos(\sqrt{n^2 - 1} \ln \frac{\rho}{r}) d\rho \sin n\vartheta \right] \times \\ \times \left[ \sum_n n \int_r^a k_{n_j}(\rho) \cos(\sqrt{n^2 - 1} \ln \frac{\rho}{r}) d\rho \sin n\vartheta \right] + R_{ij} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0ij}.$$

Prawą stronę tego warunku należałoby przedstawić w postaci szeregu Fouriera i dokonać analogicznych obliczeń jak w pracy [1] dla pierwszego stopnia przybliżenia, co doprowadziłoby do równości całkowych na współczynniki tego rozwinięcia, a tym samym do określenia drugich poprawek granicy plastyczności  $\sigma_{0ij}(r, \vartheta)$ .

Rozwiązanie tak postawionego zadania przedstawia jednak w ogólnym przypadku spore trudności rachunkowe i nie będzie w przedstawionej pracy rozważane. W sposób istotny upraszcza rozwiązanie problemu założenie kołowej symetrii (co może mieć miejsce np. przy uwzględnieniu wpływu samego rozciągania, czy też przy kołowo symetrycznym rozkładzie pola temperatury), które prowadzi do szerokiej klasy poszukiwanych funkcji  $\sigma_{0i}(r), \sigma_{0ij}(r)$ . W takich przypadkach, przy przyjęciu  $\sigma_{0i} = \sigma_{0i}(r)$ , pierwsze poprawki stanu naprężenia są następującymi funkcjami promienia  $r$ :

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \tau_{r\vartheta_i} &= 0, \\ \sigma_{r_i} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_a^r \frac{\sigma_{0i}(\rho)}{\rho} d\rho + B_i. \end{aligned}$$

Z warunków brzegowych (3.11) wynika, że

$$B_i = 0,$$

a pierwsza poprawka granicy plastyczności musi spełniać równość całkową

$$(4.8) \quad \int_a^b \frac{\sigma_{0i}(r)}{r} dr = 0.$$

Warunek plastyczności w drugim stopniu przybliżenia, wobec zerowych pierwszych poprawek naprężeń stycznych  $\tau_{r\vartheta_i}$ , upraszcza się do postaci

$$(4.9) \quad \sigma_{r_{ij}} - \sigma_{\vartheta_{ij}} = R_{ij}(r) - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0ij}(r).$$

Drugie poprawki składowych stanu naprężenia są następującymi funkcjami promienia  $r$ :

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \tau_{r\vartheta_{ij}} &= 0, \\ \sigma_{r_{ij}} &= - \int_a^r \frac{1}{\rho} \left[ R_{ij}(\rho) - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0ij}(\rho) \right] d\rho + B_{ij}. \end{aligned}$$

Z warunków brzegowych (3.12) wynika, iż

$$(4.11) \quad B_{ij} = 0,$$

a druga poprawka granicy plastyczności musi spełniać równość całkową

$$(4.12) \quad \int_a^b \frac{\sigma_{0ij}(r)}{r} dr = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_a^b \frac{R_{ij}(r)}{r} dr.$$

Przy braku kołowej symetrii, interesująca wydaje się klasa rozwiązań postawionego problemu, dla której stan naprężenia jest identyczny ze stanem naprężenia odpowiadającym jednorodnemu cylindrowi pod działaniem ciśnienia (przybliżeniu zerowemu stanu naprężenia). Inaczej mówiąc, gdy wpływ zginania, rozciągania i temperatury na naprężenia

byłby "kompensowany" wpływem niejednorodności granicy plastyczności.

Jeżeli zatem przyjąć, zerowe poprawki składowych stanu naprężenia, to w pierwszych przybliżeniach musi zachodzić

$$(4.13) \quad \sigma_{0i} = 0,$$

a w drugich stopniach przybliżenia

$$(4.14) \quad \sigma_{0ij} = \frac{\sqrt{3}}{2} R_{ij}.$$

Granica plastyczności (2.3), wobec przyjęcia jej pierwszych poprawek zgodnie z (4.13), a drugich zgodnie z (4.14), jest z dokładnością do drugiego przybliżenia następującą funkcją kąta  $\vartheta$  i promienia  $r$ :

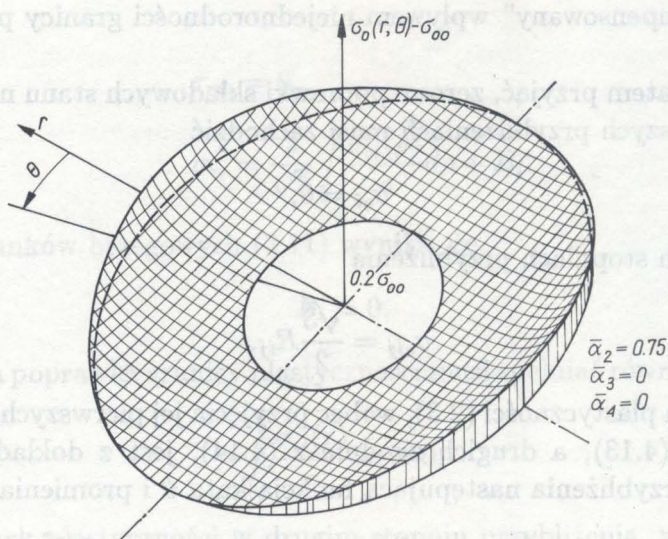
$$(4.15) \quad \sigma_0(r, \vartheta) = \sigma_{00} \left[ 1 + \bar{\alpha}_2^2 \cdot \frac{1}{2} r^6 \cos^2 \vartheta + \bar{\alpha}_3^2 \frac{1}{r} r^4 - \bar{\alpha}_1^2 \frac{\Delta T^2}{18} + \right. \\ \left. + \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 r^5 \cos \vartheta - \bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_4 \frac{\Delta T}{3} r^4 + \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_4 \frac{\Delta T}{3} r^5 \cos \vartheta \right],$$

gdzie  $\bar{\alpha}_i = \alpha_i(\sqrt{3}/2C)$  są nowymi małymi parametrami.

Oczywiście, funkcje (4.15) stanowią tylko jedną możliwość z szerokiej klasy rozwiązań wyżej postawionego problemu. Jej sens praktyczny widać na przykładzie cylindra pod działaniem ciśnienia i niewielkiego momentu zginającego. "Wzmacniając" granicę plastyczności (np. przez odpowiednią obróbkę termiczną) w obszarach największego wpływu zginania, można osiągnąć całkowite uplastycznienie zginanego rurociągu kołowego.

## 5. PRZYKŁADY

W przedstawionych przykładach przyjęto wartości parametrów  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{\alpha}_3$  i  $\bar{\alpha}_4$  i badano ich wpływ na wielkość granicy plastyczności opisanej funkcją (4.15). Przykłady zilustrowano wykresami funkcji  $[\sigma_0(r, \theta) - \sigma_{00}]$ . Wykresy te pokazują, jak należałoby "wzmocnić" granicę plastyczności, by uzyskać całkowite uplastycznienie kołowego cylindra poddanego działaniu ciśnienia oraz momentu zginającego, siły podłużnej i temperatury.



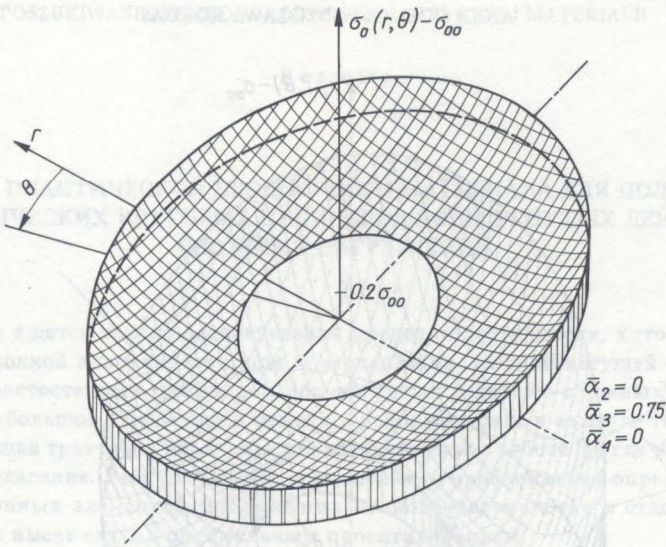
Rys. 3

Rysunek 3 pokazuje, jak należałoby "wzmocnić" granicę plastyczności dla cylindra, którego krzywizna osi scharakteryzowana jest parametrem  $\bar{\alpha}_2 = 0,75$ .

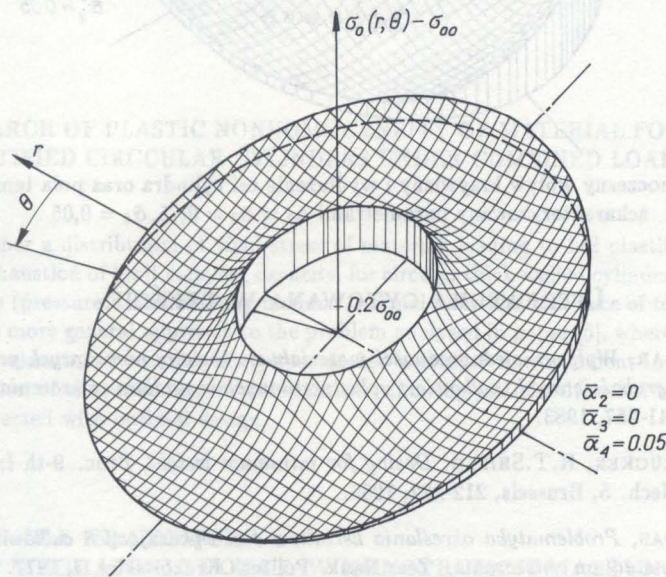
Rysunek 4 pokazuje, jak należy "wzmocnić" granicę plastyczności dla cylindra, o wydłużeniu osi scharakteryzowanym parametrem  $\bar{\alpha}_3 = 0,75$ .

Rysunek 5 pokazuje, jak należałoby "wzmocnić" granicę plastyczności dla cylindra znajdującego się w polu temperatury o wpływie scharakteryzowanym parametrem  $\alpha_4 = 0,05$ ; przyjęto następujące dane:  $\frac{y_0}{y_1} = \frac{b_0}{b_1} = \frac{1}{2}$ ;  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ;  $T_1 = -20^\circ\text{C}$ ;  $T_2 = 10^\circ\text{C}$ ;  $T_3 = 70^\circ\text{C}$ .

Rysunek 6 pokazuje jednoczesny wpływ krzywizny i wydłużenie osi cylindra oraz pola temperatury, scharakteryzowanych parametrami  $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_3 = 0,75$ ,  $\bar{\alpha}_1 = 0,05$ .

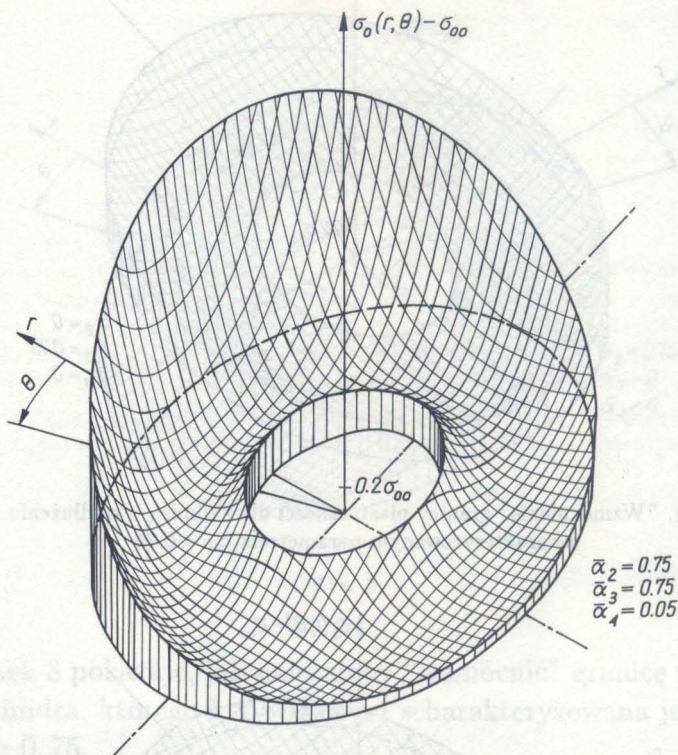


Rys. 4. "Wzmocnienie" granicy plastyczności dla cylindra o wydłużeniu osi scharakteryzowanym parametrem  $\bar{\alpha}_3 = 0.75$



Rys. 5. "Wzmocnienie" granicy plastyczności dla cylindra znajdującego się w polu temperatury o wpływie scharakteryzowanym parametrem  $\bar{\alpha}_4 = 0.05$ ; przyjęto następujące

$$\text{dane: } \frac{y_0}{y_1} = \frac{b_0}{y_1} = \frac{1}{2}; T_0 = 20^\circ\text{C}; T_1 = -20^\circ\text{C}; T_2 = 10^\circ\text{C}; T_3 = 70^\circ\text{C}$$



Rys. 6. Jednoczesny wpływ krzywizny i wydłużenie osi cylindra oraz pola temperatury scharakteryzowany parametrami  $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_3 = 0,75, \bar{\alpha}_4 = 0,05$

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A.DOLLAR, *Wpływ niejednorodności materiału na kształty niekołowych przekrojów cylindrów grubościennych, całkowicie uplastycznionych w stadium zniszczenia*, Rozpr.Inż., **31**, 2, 241-257, 1983.
2. D.C.DRUCKER, R.T.SHIELD, *Desing for minimum weight*, Proc. 9-th Intern Congr. Appl. Mech. 5, Brussels, 212-222, 1956.
3. Z.KORDAS, *Problematyka określania kształtów ciał wykazujących całkowicie uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Zesz.Nauk. Politech.Krakowskiej, 7, 1977.
4. Z.KORDAS, W.SKRABA, *Kształtowanie cylindrów grubościennych pod działaniem ciśnienia wewnętrznego i zginania z warunku całkowitego uplastycznienia w stadium zniszczenia*, Rozpr.Inż., **25**, 1, 37-52, 1977.
5. Z.KORDAS, A.WRÓBLEWSKI, *Problem całkowitego uplastycznienia cylindrów kołowych o niesymetrycznej niejednorodności*, Rozpr.Inż., **35**, 2, 327-340, 1987.
6. Z.KORDAS, M.ŻYCZKOWSKI, *Kształtowanie niekołowych cylindrów grubościennych wykazujących pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Rozpr.Inż., **18**, 3, 371-390, 1970.

## Резюме

## ПОИСКИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАТЕРИАЛА ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ПЛАСТИЧЕСКИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ ПОДВЕРГНУТЫХ ДЕЙСТВУЮ СЛОЖНЫМ НАГРУЖЕНИЯМ

В работе ищется такого распределения предела пластичности, который дает возможность полной пластичности, при исчерпании предельной несущей способности, круговых толстостенных цилиндров, подвергнутых действию сложных нагрузжений (давление, небольшой изгибающий момент, продольная сила и влияние температуры). Это более общая трактовка проблемы, анализированной в работе [5], где учтено только внутреннее давление. Работа является пополнением проблематики определения форм конструкционных элементов, подлежащих полной пластичности в стадии разрушения, которая имеет связь с оптимальным проектированием.

## SUMMARY

## THE SEARCH OF PLASTIC NONHOMOGENEITY OF MATERIAL FOR FULLY PLASTIFIED CIRCULAR CYLINDERS UNDER COMBINED LOADINGS

In the paper a distribution of yield stress of material, leading to full plastification at the moment of exhaustion of limit carrying capacity, for circular thick-walled cylinders, under combined loadings (pressure, small bending moment, normal force and influence of temperature) is sought. It is a more general approach to the problem analysed in paper [5], where only internal pressure was taken into account. The paper makes a further development in the problems of determination of shapes for structural elements, showing full plastification at the stage of collapse, connected with optimal design.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 listopada 1989 r.