

OPTIMALIZACJA PARAMETRYCZNA PRĘTA PRZY RÓŻNYCH SPOSOBACH ZAMOCOWANIA

ANDRZEJ F O R Y Ś (KRAKÓW)

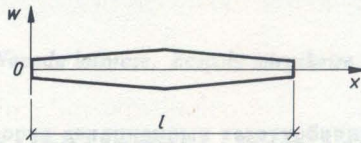
Przedmiotem pracy jest parametryczna optymalizacja pręta lepkosprężystego. Pręt o symetrii cylindrycznej, równomiernie zbieżny jest poddany działaniu okresowo zmiennej siły skupionej oraz tłumieniu wewnętrznemu i zewnętrznemu. Funkcją celu jest amplituda krytyczna oscylującego składnika siły. Rozważono cztery rodzaje zamocowania pręta. Wpływ sposobu zamocowania na optymalny kształt pręta jest bardzo wyraźny. Wyniki przykładowych obliczeń są przedstawione na wykresach.

1. WSTĘP

Parametryczną optymalizację kształtu pręta lepkosprężystego, ściskanego siłą śledzącą, która jest okresową funkcją czasu, omówiono w pracy [1]. Za funkcję celu przyjęto w tej pracy amplitudę krytyczną oscylującego składnika siły śledzącej. Zagadnienia optymalizacji parametrycznej dla układu trzech prętów są omówione w pracach [2, 3].

Niniejsza praca jest wzorowana na pracy [1]. Przedmiotem jej jest parametryczna optymalizacja kształtu pręta lepkosprężystego, ściskanego siłą okresowo zmienną w czasie, przy różnych rodzajach zamocowania końców pręta. Rozważono pręty o symetrii walcowej, równomiernie zbieżne. Poszukiwano optymalnego kształtu pręta ze względu na stateczność jego ruchu, przy czym rozpatrywano pierwszy obszar niestateczności. Wyniki przedstawiono na wykresach. Optymalny kształt pręta zależy od sposobu zamocowania pręta.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA



Rys. 1

Pręt prosty o przekroju kołowym (rys.1) jest wykonany z materiału lepkosprężystego typu Kelvina-Voigta i porusza się w ośrodku, który działa na pręt siłą oporu proporcjonalną do prędkości oraz do promienia przekroju pręta. Długość l pręta oraz jego objętość V są ustalone. Promień $r(x)$ przekroju pręta dany jest wzorami:

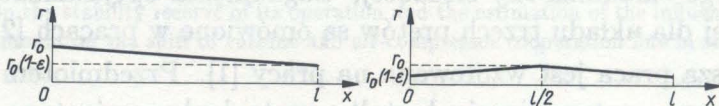
$$(2.1) \quad r(x) = r_0(1 - \varepsilon \frac{x}{l}) \equiv r_0 \varphi_1(x; \varepsilon), \quad x \in [0, l];$$

$$(2.2) \quad r(x) = \begin{cases} r_0(1 - \varepsilon + 2\varepsilon \frac{x}{l}), & x \in [0, \frac{l}{2}] \\ r_0(1 + \varepsilon - 2\varepsilon \frac{x}{l}), & x \in [\frac{l}{2}, l] \end{cases} \equiv r_0 \varphi_2(x; \varepsilon),$$

gdzie $r_0 > 0$ oraz ε są parametrami, które określają kształt pręta (rys.2). Ponieważ zachodzi związek (por. [1]):

$$(2.3) \quad r_0 = \sqrt{\frac{V}{\pi l(1 - \varepsilon + \varepsilon^2/3)}},$$

tylko jeden z nich jest niezależny. Przyjmujemy, że ε jest parametrem optymalizacji. Dla prętów przyzmatycznych $\varepsilon = 0$. Zakładamy, że $r(x) > 0$ dla $x \in (0, l)$; stąd $\varepsilon \in (-\infty, 1]$.



Rys. 2

Rozważamy cztery sposoby zamocowania pręta:

I. Dwa końce swobodnie podparte,

II. Jeden koniec zamocowany, drugi koniec swobodnie podparty,

III. Dwa końce zamocowane,

IV. Dwa końce swobodne.

Na pręt działa osiowa siła niezachowawcza

$$(2.4) \quad P(t) = P_0 + P_1 \cos \vartheta t,$$

gdzie t oznacza czas, a P_0, P_1 i ϑ oznaczają dodatnie stałe.

Badamy niestateczny ruch pręta, przy czym ograniczamy się do pierwszego obszaru niestateczności. Optymalizacja kształtu pręta, za pośrednictwem parametru ε , polega na poszukiwaniu maksimum funkcji celu, którą jest amplituda P_1 oscylującego składnika siły (2.4), przy której pręt traci stateczność (por. [1]).

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Równanie drgań poprzecznych pręta przyjmujemy w postaci:

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right] + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma r(x) \frac{\partial w}{\partial t} + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie $w(x, t)$ oznacza ugięcie przekroju o współrzędnej x w chwili t , $I(x)$ oraz $A(x)$ oznaczają odpowiednio moment bezwładności pola przekroju oraz pole powierzchni przekroju, E oznacza moduł Younga, λ oraz γ odpowiednio oznaczają współczynnik tłumienia wewnętrznego oraz zewnętrznego, ρ oznacza gęstość materiału.

Warunki brzegowe są dla rozważanych przypadków następujące:

I.

$$(3.2) \quad w(0, t) = 0, \quad \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) (0, t) = 0,$$

$$w(l, t) = 0, \quad \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) (l, t) = 0.$$

II.

$$(3.3) \quad w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0,$$

$$w(l, t) = 0, \quad \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) (l, t) = 0.$$

III.

$$(3.4) \quad \begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0, \\ w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0. \end{aligned}$$

IV.

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) (0, t) = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) \right] (0, t) = 0, \\ \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) (l, t) = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) \right] (l, t) = 0. \end{aligned}$$

Przybliżonego rozwiązania zagadnienia brzegowego danego równaniem (3.1) oraz jednym z warunków (3.2)-(3.5) poszukujemy w postaci (metoda Galerkinia):

$$(3.6) \quad w(x, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) v_n(x),$$

gdzie znane funkcje $v_n(x)$ spełniają odpowiednie warunki brzegowe, a funkcje $q_n(t)$ są szukanymi funkcjami czasu.

Przyjmujemy następujące funkcje $v_n(x)$ dla poszczególnych przypadków:

I.

$$(3.7) \quad v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

II.

$$(3.8) \quad v_n(x) = \sin \kappa_n \left(\cos \frac{\kappa_n x}{l} - \operatorname{ch} \frac{\kappa_n x}{l} \right) - \cos \kappa_n \left(\sin \frac{\kappa_n x}{l} - \operatorname{sh} \frac{\kappa_n x}{l} \right),$$

gdzie $\kappa_1 = 3,9266$, $\kappa_2 = 7,0686$; $\operatorname{th} \kappa_n = \operatorname{th} \kappa_n$.

III.

$$(3.9) \quad \begin{aligned} v_n(x) = (\sin \sigma_n - \operatorname{sh} \sigma_n) \left(\cos \frac{\sigma_n x}{l} - \operatorname{ch} \frac{\sigma_n x}{l} \right) + \\ + (\operatorname{ch} \sigma_n - \cos \sigma_n) \left(\sin \frac{\sigma_n x}{l} - \operatorname{sh} \frac{\sigma_n x}{l} \right), \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_1 = 4,7300$, $\sigma_2 = 7,8532$; $\cos \sigma_n \operatorname{ch} \sigma_n = 1$.

IV.

$$(3.10) \quad v_n(x) = (\sin \sigma_n - \operatorname{sh} \sigma_n) \left(\cos \frac{\sigma_n x}{l} + \operatorname{ch} \frac{\sigma_n x}{l} \right) + \\ + (\operatorname{ch} \sigma_n - \cos \sigma_n) \left(\sin \frac{\sigma_n x}{l} + \operatorname{sh} \frac{\sigma_n x}{l} \right).$$

Podstawienie wyrażenia (3.6) do równania (3.1), pomnożenie kolejno przez $v_m(x)$, $m = 1, 2, \dots, N$ i scałkowanie każdego z otrzymanych w ten sposób równań względem x w przedziale od 0 do l prowadzi do następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych (por. [1]):

$$(3.11) \quad \sum_{j=1}^N (A_{ij} \ddot{q}_j + B_{ij} \dot{q}_j + C_{ij} q_j + D_{ij} q_j \cos \theta \tau) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

gdzie zostały wprowadzone następujące oznaczenia:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad t_0 = 2l^2 \sqrt{\frac{\pi \rho l}{EV}}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \theta = t_0 \vartheta, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{Et_0}, \quad \Gamma = \sqrt{\frac{l}{\pi V}} \frac{t_0}{\rho} \gamma,$$

$$\beta_0 = \frac{4\pi l^4}{EV^2} P_0, \quad \beta_1 = \frac{4\pi l^4}{EV^2} P_1, \quad f(\varepsilon) = \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{3}\right)^{-1},$$

$$A_{ij} = f(\varepsilon) \int_0^1 v_i(\xi) v_j(\xi) \varphi^2(\xi; \varepsilon) d\xi, \quad (3.12)$$

$$B_{ij} = \Lambda f^2(\varepsilon) \int_0^1 v_i''(\xi) v_j''(\xi) \varphi^4(\xi; \varepsilon) d\xi + \Gamma \sqrt{f(\varepsilon)} \int_0^1 v_i(\xi) v_j(\xi) \varphi(\xi; \varepsilon) d\xi,$$

$$C_{ij} = f^2(\varepsilon) \int_0^1 v_i''(\xi) v_j''(\xi) \varphi^4(\xi; \varepsilon) d\xi + \beta_0 \int_0^1 v_i(\xi) v_j''(\xi) d\xi,$$

$$D_{ij} = \beta_1 \int_0^1 v_i(\xi) v_j''(\xi) d\xi.$$

W wyrażeniach (3.11), (3.12) kropka nad q_i oznacza różniczkowanie względem τ , przecinek nad v_i oznacza różniczkowanie względem ξ , a $\varphi(\xi; \varepsilon)$ oznacza funkcję $\varphi_1(\xi; \varepsilon)$ albo $\varphi_2(\xi; \varepsilon)$.

W dalszych obliczeniach pozostawiamy jedynie dwa pierwsze wyrazy sumy (3.6), zatem układ (3.11) składa się z dwóch równań ($N = 2$). Na ich podstawie wyznaczamy granice pierwszego obszaru niestateczności pręta. Obszar ten występuje w otoczeniu podwojonej najniższej częstości drgań własnych pręta [4, 5]. Aby wyznaczyć obszar niestateczności zakładamy rozwiązanie układu równań (3.11) w postaci:

$$(3.13) \quad q_j(\tau) = A_j \sin \frac{\theta \tau}{2} + B_j \cos \frac{\theta \tau}{2}, \quad j = 1, 2,$$

gdzie A_j, B_j są stałymi. Podstawienie (3.13) do równań (3.11) prowadzi do układu czterech liniowych, jednorodnych równań algebraicznych na stałe A_j, B_j . Nietrywialne rozwiązanie istnieje, jeżeli wyznacznik układu zeruje się:

$$(3.14) \quad \begin{vmatrix} -\frac{\theta^2}{4}A_{11} + C_{11} + \frac{D_{11}}{2}, & -\frac{\theta^2}{4}A_{12} + C_{12} + \frac{D_{12}}{2}, \\ -\frac{\theta^2}{4}A_{21} + C_{21} + \frac{D_{21}}{2}, & -\frac{\theta^2}{4}A_{22} + C_{22} + \frac{D_{22}}{2}, \\ -\frac{\theta}{2}B_{11}, & -\frac{\theta}{2}B_{12}, \\ -\frac{\theta}{2}B_{21}, & -\frac{\theta}{2}B_{22}, \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\theta}{2}B_{11}, & \frac{\theta}{2}B_{12} \\ \frac{\theta}{2}B_{21}, & \frac{\theta}{2}B_{22} \\ -\frac{\theta^2}{4}A_{11} + C_{11} - \frac{D_{11}}{2}, & -\frac{\theta^2}{4}A_{12} + C_{12} - \frac{D_{12}}{2} \\ -\frac{\theta^2}{4}A_{21} + C_{21} - \frac{D_{21}}{2}, & -\frac{\theta^2}{4}A_{22} + C_{22} - \frac{D_{22}}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

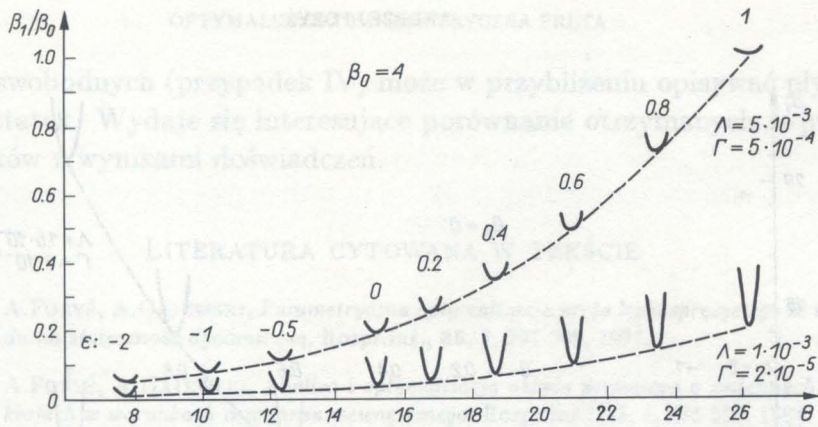
Na podstawie równania (3.14) obliczamy, w otoczeniu podwojonej najniższej częstości własnej, krytyczną amplitudę β_1 oscylującego składnika siły w zależności od bezwymiarowej częstości kołowej θ wymuszenia, przy pozostałych wielkościach ustalonych.

4. OPTIMALIZACJA KSZTAŁTU PRĘTA

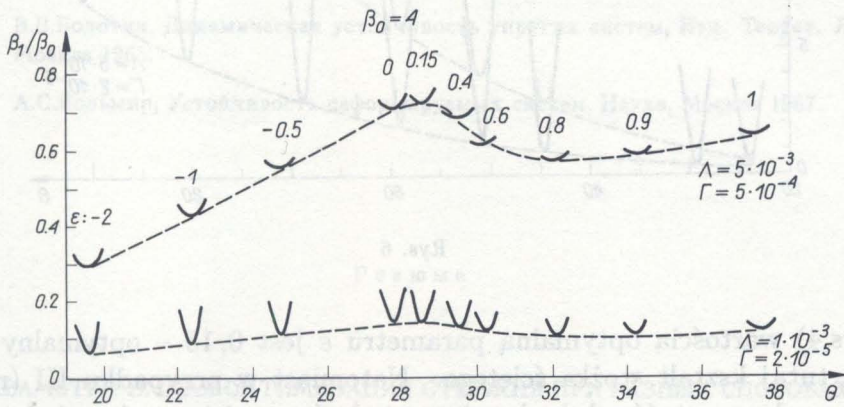
Krytyczne wartości wielkości β_1 zależą od wartości parametru optymalizacji ε , który opisuje kształt rozważanego pręta. Optymalnym jest taki pręt, dla którego wartość krytyczna β_1 jest maksymalna.

Dla przypadków I, III, IV kształt pręta określony jest za pomocą funkcji $\varphi_2(x; \varepsilon)$, dla przypadku II za pomocą funkcji $\varphi_1(x; \varepsilon)$ (wzory (2.2) i (2.1)). Dla przypadków I, II, III przyjęto wartości wielkości β_0 mniejsze od wartości stałej siły krytycznej. Dla przypadku IV przyjęto $\beta_0 = 0$.

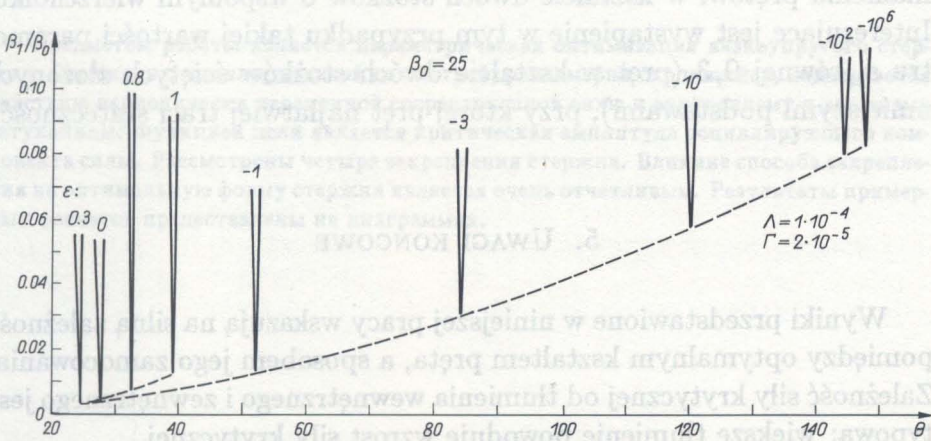
Wyniki przykładowych obliczeń przedstawiają wykresy zamieszczone na rysunkach 3, 4, 5, 6. Wykresy odzwierciedlają duży wpływ kształtu pręta na jego stateczność. W przypadkach I oraz IV (rys.3 oraz rys.6) optymalną wartością parametru ε jest jedynka, zatem optymalny pręt ma kształt dwóch stożków złożonych podstawami. W przypadku II



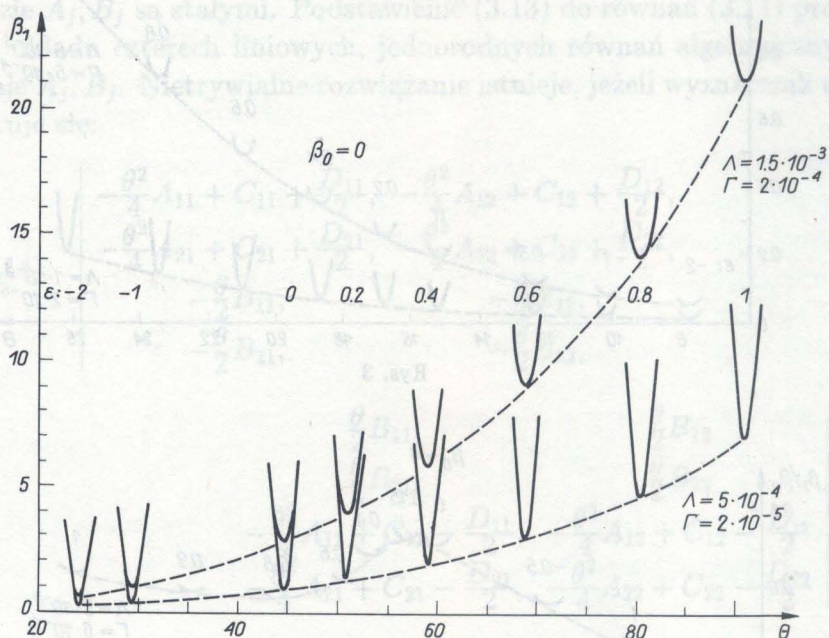
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

(rys.4) wartością optymalną parametru ε jest 0,15 – optymalny pręt ma tutaj kształt stożka ściętego. Natomiast w przypadku III (rys.5) optymalna wartość ε dąży do minus nieskończoności, co odpowiada optymalnemu prętowi w kształcie dwóch stożków o wspólnym wierzchołku. Interesujące jest wystąpienie w tym przypadku takiej wartości parametru ε , równej 0,3 (pręt w kształcie dwóch stożków ściętych złożonych mniejszymi podstawami), przy której pręt najłatwiej traci stateczność.

5. UWAGI KOŃCOWE

Wyniki przedstawione w niniejszej pracy wskazują na silną zależność pomiędzy optymalnym kształtem pręta, a sposobem jego zamocowania. Zależność siły krytycznej od tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego jest typowa: większe tłumienie powoduje wzrost siły krytycznej.

Trzy pierwsze rodzaje zamocowania pręta (przypadki I, II, III) występują w różnego rodzaju konstrukcjach. Natomiast pręt o obydwu koń-

cach swobodnych (przypadek IV) może w przybliżeniu opisywać pływający statek. Wydaje się interesujące porównanie otrzymanych w pracy wyników z wynikami doświadczeń.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A.FORYŚ, A.GAJEWSKI, *Parametryczna optymalizacja pręta lepkosprężystego ze względu na stateczność dynamiczną*, Rozpr.Inż., **35**, 2, 297-308, 1987.
2. A.FORYŚ, A.GAJEWSKI, *Analiza i optymalizacja układu prętowego o zmiennych przekrojach w warunkach rezonansu wewnętrznego*, Rozpr.Inż., **32**, 4, 575-598, 1984.
3. ANNA FORYŚ, A.FORYŚ, *Optymalizacja parametryczna układu prętów z uwzględnieniem nieliniowości*, Rozpr.Inż., **34**, 4, 399-418, 1986.
4. В.В.Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Изд. Теорет. Лит. Москва 1965.
5. А.С.Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, Москва 1967.

Резюме

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ РАЗНЫХ СПОСОБАХ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Предметом работы является параметрическая оптимизация вязкоупругого стержня. Стержень с цилиндрической симметрией, равномерно сходящийся, подвергается действию периодически переменной сосредоточенной силы и внутреннему и внешнему затуханиям. Функцией цели является критическая амплитуда осциллирующего компонента силы. Рассмотрены четыре закрепления стержня. Влияние способа закрепления на оптимальную форму стержня является очень отчетливым. Результаты примерных расчетов представлены на диаграммах.

SUMMARY

PARAMETRIC OPTIMIZATION OF A BAR UNDER DIFFERENT SUPPORT CONDITIONS

The paper is devoted to the problem of parametric optimization of a visco-elastic bar. The axially symmetric, uniformly tapered bar is subject to periodically variable concentrated force and exhibits internal and external damping. The objective function is the critical amplitude of the oscillating force component. Four types of support conditions of the bar are analyzed. The support conditions are of primary importance for the optimum form of the bar. Several numerical results are illustrated by graphs.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 listopada 1989 r.

Wyniki przedstawione w niniejszej pracy wskazują na silną zależność pomiędzy optymalnym kształtem pręta, a sposobem jego zamocowania. Zależność silnie krytycznej od tłumienia wewnątrzpręta i zewnętrznej jest typowa: większe tłumienie powoduje wzrost siły krytycznej.

Trzy pierwsze rodzaje zamocowania pręta (przypadki I, II, III) występują w różnego rodzaju konstrukcjach. Natomiast pręt o obydwu koń-