

# MODELOWANIE ROZKŁADÓW NAPRĘŻEŃ I PRZEMIESZCZEŃ W OTOCZENIU WIERZCHOŁKA KARBU TRÓJKĄTNEGO W PŁASKICH ZAGADNIENIACH TEORII SPRĘŻYSTOŚCI CZEŚĆ I

ANDRZEJ SEWERYN (BIAŁYSTOK)

Praca przedstawia sposób modelowania rozkładów przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w obszarach płaskich posiadających karby trójkątne o dowolnym kącie rozwarcia, za pomocą metody elementów skończonych. W części I wyprowadzone zostały wzory na naprężenia i przemieszczenia w pobliżu wierzchołka karbu trójkątnego oraz wyznaczone zależności współczynników asymptotyczności naprężeń od kąta rozwarcia karbu dla dwóch przypadków obciążenia: rozrywania ( $\lambda_I$ ) oraz ścinania wzdłużnego ( $\lambda_{II}$ ). Dokonano tego wprowadzając odpowiednią funkcję naprężeń we współrzędnych biegunowych związanych z wierzchołkiem karbu. Spełnia ona równanie biharmoniczne oraz warunki brzegowe na krawędziach karbu. Wprowadzono także uniwersalny współczynnik asymptotyczności naprężeń, który jest wystarczającym przybliżeniem dla celów inżynierskich i można go stosować przy numerycznym modelowaniu złożonych stanów obciążenia. W II części pracy omówiony został nowy element skończony AST (asymptotic strain triangle), którego funkcje interpolujące uwzględniają zmianę asymptotyczności naprężeń i odkształceń wraz ze zmianą kąta rozwarcia karbu.

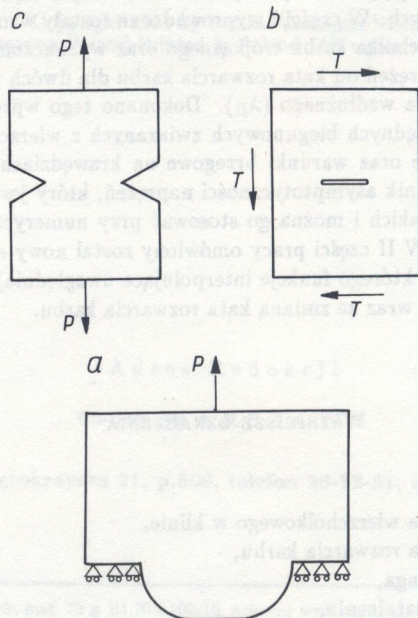
## WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

- $\alpha$  połowa kąta wierzchołkowego w klinie,  
 $\beta$  połowa kąta rozwarcia karbu,  
 $E$  moduł Younga,  
 $\varepsilon_{ij}$  tensor odkształcenia,  
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$  odkształcenia w układzie biegunowym,  
 $F$  funkcja naprężeń Airy'ego,  
 $G$  moduł odkształcenia postaciowego,  
 $K_I, K_{II}$  współczynniki intensywności naprężeń dla karbów trójkątnych,

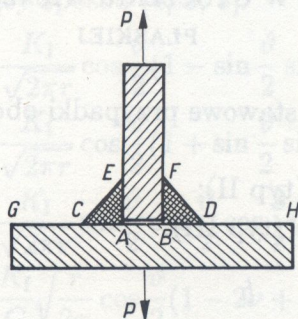
$\lambda$	współczynnik asymptotyczności naprężeń,
$\lambda_0$	uniwersalny współczynnik asymptotyczności naprężeń,
$\lambda_I, \lambda_{II}$	współczynniki asymptotyczności naprężeń dla I i II przypadku obciążenia karbu,
$\nu$	liczba Poissona,
$P_x, P_y, M_0$	obciążenia skupione,
$q_i$	tensor przemieszczenia,
$r, \vartheta$	współrzędne biegunowe,
$\sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}$	naprężenia w układzie biegunowym,
$\sigma_{ij}$	tensor naprężenia,
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	naprężenia w układzie kartezjańskim,
$u, v$	przemieszczenia w układzie kartezjańskim,
$u_r, u_\vartheta$	przemieszczenia w układzie biegunowym,
$W$	energia odkształcenia,
$\omega$	kąt wierzchołkowy w karbie trójkątnym (rys. 5),
$x, y$	współrzędne kartezjańskie.

## 1. WSTĘP

Zagadnienia mechaniki kruchej pęknięcia zajmują ważne miejsce we współczesnym konstruowaniu. Możliwość określenia warunków, w ja-



Rys. 1



Rys. 2

kich konstrukcja może ulec zniszczeniu pozwala nie tylko na zwiększenie bezpieczeństwa użytkowania, ale również wielokrotnie umożliwia przedłużenie okresu jej użytkowania.

Występowanie karbów trójkątnych, których szczególnym przypadkiem są szczeliny płaskie, spowodowane jest wadami materiałowymi lub niedoskonałą technologią wykonania konstrukcji. Ze względu na kąt rozwarcia ( $2\beta$ ) karby trójkątne można podzielić na następujące grupy:

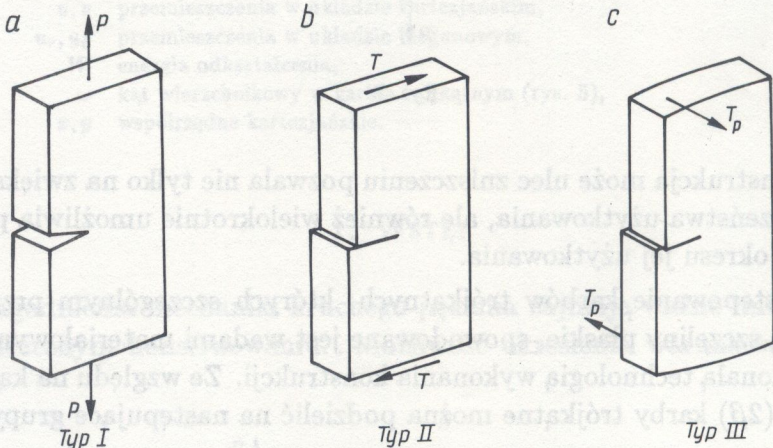
- $2\beta < 0$ ; karb o ujemnym kącie rozwarcia, może powstać w przypadku wystąpienia odpowiednich warunków podparcia (rys.1a);
- $2\beta = 0$ ; szczelina płaska (rys.1b);
- $0 < 2\beta < \pi$ ; karb o dodatnim kącie rozwarcia – rys.1c;
- $2\beta = \pi$ ; półpłaszczyzna – nie występuje wierzchołek karbu, stąd też brak osobliwości;
- $2\beta > \pi$ ; klin o nieobciążonym wierzchołku – zagadnienie bez większego znaczenia technicznego.

W rzeczywistych konstrukcjach mogą występować jednocześnie karby o różnych kątach rozwarcia. Przykładem tego może być szeroko zastosowany spaw pachwinowy (rys.2). Dużymi literami zaznaczone zostały wierzchołki karbów:  $A, B$  – szczelina płaska, ( $\beta = 0$ );  $C, D, E, F$  – karb rozwarty, ( $2\beta = \frac{3}{4}\pi$ );  $G, H$  – klin, ( $2\beta = \frac{3}{2}\pi$ ).

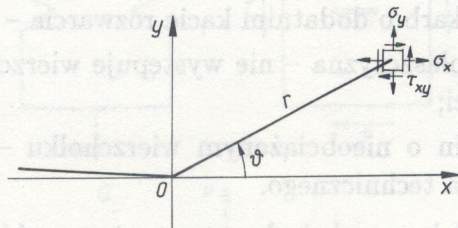
## 2. ELEMENTY LINIOWEJ MECHANIKI PĘKANIA. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ I PRZEMIESZCZEŃ W OTOCZENIU WIERZCHOŁKA SZCELINY PŁASKIEJ

Rozróżniamy trzy podstawowe przypadki obciążeń szczeliny (rys.3):

- a) rozrywanie (typ I);
- b) ścinanie wzdłużne (typ II);
- c) ścinanie poprzeczne (typ III).



Rys. 3



Rys. 4

W niniejszej pracy zajmiemy się dwoma przypadkami obciążeń dotyczącymi zagadnień płaskich (płaskiego stanu naprężenia lub płaskiego stanu odkształcenia).

Równania wyrażające naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  oraz przemieszczenia  $u$ ,  $v$  na froncie szczeliny płaskiej w układzie biegunowym  $(r, \vartheta)$  (rys.4),

dla I przypadku obciążenia w płaskim stanie odkształcenia możemy przedstawić w następujący sposób [4, 5, 8]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3}{2}\vartheta\right), \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3}{2}\vartheta\right), \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3}{2}\vartheta, \\
 u &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right), \\
 v &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Dla II przypadku obciążenia rozkłady naprężeń oraz przemieszczeń można przedstawić za pomocą następujących wzorów [4, 5, 8]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left(2 + \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3}{2}\vartheta\right), \\
 \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3}{2}\vartheta, \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3}{2}\vartheta\right), \\
 u &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right), \\
 v &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Dla płaskiego stanu naprężenia we wzorach na przemieszczenia należy liczbę Poissona  $\nu$  zamienić na wyrażenie  $\nu/(1 + \nu)$ .

Występujące we wzorach wartości  $K_I$  i  $K_{II}$  są współczynnikami intensywności naprężeń, odpowiednio dla I i II przypadku obciążeń. W przypadku szczeliny płaskiej zdefiniowane są one w następujący sposób [8]:

$$K_I + iK_{II} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0, r \rightarrow 0_+} [\sqrt{2\pi r}(\sigma_y + i\tau_{xy})].
 \tag{2.3}$$

Zależności między naprężeniami w układzie kartezjańskim ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) a naprężeniami w układzie biegunowym ( $\sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}$ ) są następujące:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \vartheta + \sigma_y \sin^2 \vartheta + 2\tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\
 \sigma_\vartheta &= \sigma_x \sin^2 \vartheta + \sigma_y \cos^2 \vartheta - 2\tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\
 \tau_{r\vartheta} &= \tau_{xy}(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \vartheta \cos \vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Zależność między przemieszczeniami w układzie kartezjańskim i biegunowym wyraża się wzorami:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u_r &= u \cos \vartheta + v \sin \vartheta, \\ u_\vartheta &= -u \sin \vartheta + v \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższe wyrażenia można otrzymać wzory opisujące rozkłady naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka szczeliny płaskiej w układzie biegunowym dla płaskiego stanu odkształceń:

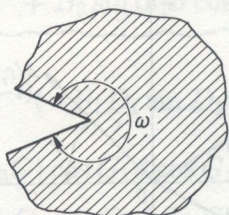
a) dla I przypadku obciążenia:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta \right), \\ \sigma_\vartheta &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta \right), \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2}, \\ u_r &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\vartheta}{2} (1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\vartheta}{2}), \\ u_\vartheta &= -\frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\vartheta}{2} (1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\vartheta}{2}); \end{aligned}$$

b) dla II przypadku obciążenia:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right), \\ \sigma_\vartheta &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{3}{2} \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2}, \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2} \left( \cos \frac{3}{2} \vartheta + \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta \right), \\ u_r &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\vartheta}{2} (2\nu + 2 \cos \vartheta - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}), \\ u_\vartheta &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\vartheta}{2} (-2 + 2\nu + 2 \cos \vartheta - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}). \end{aligned}$$

Wzory (2.6) i (2.7) posłużą do porównania z analogicznymi zależnościami dla karbu o dowolnym kącie rozwarcia otrzymanymi w dalszej części pracy.



Rys. 5

W przypadku karbu trójkątnego (rys.5) rozkład przemieszczeń może być otrzymany za pomocą przekształcenia Mellina [4, 5] i przyjmuje wówczas postać:

$$(2.8) \quad u(r, \vartheta) = C_1 r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega} \vartheta + C_2 r^{2\frac{\pi}{\omega}} \sin 2\frac{\pi}{\omega} \vartheta + \dots$$

Prosty i efektywny sposób otrzymania rozwiązania powyższego zagadnienia przedstawiony został w pracy [2]. Dobranie potencjałów Kołosa-Muscheliszwili [6, 7] typu:

$$\phi(z) = az^{1-\lambda}, \quad \psi(z) = bz^{1-\lambda}$$

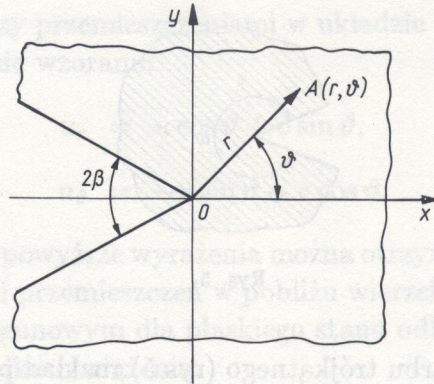
i spełnienie warunków brzegowych na krawędziach karbu prowadzi do otrzymania charakteru asymptotyczności rozkładu naprężeń ( $\sigma \sim r^{-\lambda}$ ) w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego:

$$(2.9) \quad \sin(\lambda - 1)\omega = \pm(\lambda - 1) \sin \omega,$$

zgodnym z równaniami przedstawionymi w pracach [3, 9]. W dalszej części niniejszej pracy otrzymano analogiczną postać asymptotyczności rozwiązania oraz jawny rozkład naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego w zależności od przypadku obciążenia.

### 3. OKREŚLENIE ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ I PRZEMIESZCZEŃ W POBLIŻU WIERZCHOŁKA KARBU TRÓJKĄTNEGO

Rozpatrzmy okolice wierzchołka karbu o kącie rozwarcia  $2\beta$ . Analiza zostanie przeprowadzona w układzie biegunowym przedstawionym na rys.6.



Rys. 6

Wprowadzamy funkcję naprężeń Airy'ego w postaci:

$$(3.1) \quad F(r, \vartheta) = Ar^{-(\lambda-2)}(B_1 \cos D_1\vartheta + B_2 \sin D_2\vartheta + \\ + B_3 \sin G_1\vartheta \cos G_2\vartheta + B_4 \sin G_3\vartheta \sin G_4\vartheta),$$

gdzie  $A, B_1, D_1, B_2, D_2, B_3, G_1, G_2, B_4, G_3, G_4$  są stałe. Spełniają one następujące warunki:

a) równanie biharmoniczne w układzie biegunowym [1, 7]

$$(3.2) \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\vartheta^2} \right] \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial F}{r\partial r} + \frac{\partial^2 F}{r^2\partial\vartheta^2} \right] = 0;$$

b) warunki brzegowe na krawędziach karbu

dla  $\vartheta = \pi - \beta$  oraz  $\vartheta = -\pi + \beta$ :

$$(3.3) \quad \sigma_\vartheta = 0, \text{ czyli } \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0,$$

$$(3.4) \quad \tau_{r\vartheta} = 0, \text{ czyli } \frac{\partial F}{r^2\partial\vartheta} - \frac{\partial^2 F}{r\partial r\partial\vartheta} = 0.$$

Pochodne funkcji naprężeń (3.1) po współrzędnych biegunowych mają postać:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = -(\lambda - 2)Ar^{-(\lambda-1)}(B_1 \cos D_1\vartheta + B_2 \sin D_2\vartheta + \\ + B_3 \sin G_1\vartheta \cos G_2\vartheta + B_4 \sin G_3\vartheta \sin G_4\vartheta),$$

$$(3.5) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)Ar^{-\lambda}(B_1 \cos D_1\vartheta + B_2 \sin D_2\vartheta +$$



$$(3.5) \quad + B_3 \sin G_1 \vartheta \cos G_2 \vartheta + B_4 \sin G_3 \vartheta \sin G_4 \vartheta),$$

[cd.]

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = Ar^{-(\lambda-2)}(-B_1 D_1 \sin D_1 \vartheta + B_2 D_2 \cos D_2 \vartheta +$$

$$+ B_3 G_1 \cos G_1 \vartheta \cos G_2 \vartheta - B_3 G_2 \sin G_1 \vartheta \sin G_2 \vartheta +$$

$$+ B_4 G_3 \cos G_3 \vartheta \sin G_4 \vartheta - B_4 G_4 \sin G_3 \vartheta \cos G_4 \vartheta),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta \partial r} = -(\lambda - 2)Ar^{-(\lambda-1)}(-B_1 D_1 \sin D_1 \vartheta + B_2 D_2 \cos D_2 \vartheta +$$

$$+ B_3 G_1 \cos G_1 \vartheta \cos G_2 \vartheta - B_3 G_2 \sin G_1 \vartheta \sin G_2 \vartheta +$$

$$+ B_4 G_3 \cos G_3 \vartheta \sin G_4 \vartheta - B_4 G_4 \sin G_3 \vartheta \cos G_4 \vartheta),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} = Ar^{-(\lambda-2)}[-B_1 D_1^2 \cos D_1 \vartheta - B_2 D_2^2 \sin D_2 \vartheta -$$

$$- B_3(G_1^2 + G_2^2) \sin G_1 \vartheta \cos G_2 \vartheta - 2B_3 G_1 G_2 \cos G_1 \vartheta \sin G_2 \vartheta -$$

$$- B_4(G_3^2 + G_4^2) \sin G_3 \vartheta \sin G_4 \vartheta - 2B_4 G_3 G_4 \cos G_3 \vartheta \cos G_4 \vartheta].$$

Wprowadzamy oznaczenie:

$$(3.6) \quad \alpha = \pi - \beta.$$

spełniając warunek (3.3) dla  $\vartheta = \alpha$  oraz  $\vartheta = -\alpha$  otrzymujemy równania:

$$(3.7) \quad (\lambda - 2)(\lambda - 1)Ar^{-\lambda}(B_1 \cos D_1 \alpha + B_2 \sin D_2 \alpha +$$

$$+ B_3 \sin G_1 \alpha \cos G_2 \alpha + B_4 \sin G_3 \alpha \sin G_4 \alpha) = 0,$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1)Ar^{-\lambda}(B_1 \cos D_1 \alpha - B_2 \sin D_2 \alpha -$$

$$- B_3 \sin G_1 \alpha \cos G_2 \alpha + B_4 \sin G_3 \alpha \sin G_4 \alpha) = 0.$$

Analizując równania (3.7) można dojść do wniosku, że są dwie możliwości rozwiązania tego zagadnienia:

a) gdy  $B_1 = 0$  i  $B_4 = 0$ , wówczas funkcja naprężeń  $F(r, \vartheta)$  jest nieparzysta względem zmiennej  $\vartheta$  - będzie modelowała ona II przypadek obciążenia;

b) gdy  $B_2 = 0$  i  $B_3 = 0$ , wówczas funkcja naprężeń  $F(r, \vartheta)$  jest parzysta względem zmiennej  $\vartheta$  - otrzymamy rozwiązanie dla I przypadku obciążenia.

Założmy na wstępie, że  $B_1 = 0$  i  $B_4 = 0$ .

Wykorzystując równania (3.5) do spełnienia warunku (3.4) dla  $\vartheta = \alpha$  oraz  $\vartheta = -\alpha$  otrzymujemy:

$$(3.8) \quad -Ar^{-\lambda}(\lambda+1)(B_2D_2 \cos D_2\alpha + B_3G_1 \cos G_1\alpha \cos G_2\alpha - \\ - B_3G_2 \sin G_1\alpha \sin G_2\alpha) = 0.$$

Po podstawieniu wyrażeń (3.5) warunek (3.2) przyjmie postać:

$$(3.9) \quad Ar^{-(\lambda+2)} [B_2[(\lambda-2)^2 - D_2^2][\lambda^2 - D_2^2] \sin D_2\vartheta + B_3 [(\lambda-2)\lambda^2 - \\ - (G_1^2 + G_2^2)[(\lambda-2)^2 + \lambda^2] + (G_1^2 + G_2^2) + 4G_1^2G_2^2] \sin G_1\vartheta \cos G_2\vartheta - \\ - 2B_3G_1G_2[(\lambda-2)^2 + \lambda^2 - 2(G_1^2 + G_2^2)] \cos G_1\vartheta \sin G_2\vartheta] = 0.$$

Wyrażenie (3.9) prowadzi do następującego układu równań:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} [(\lambda-2)^2 - D_2^2](\lambda^2 - D_2^2) &= 0, \\ (\lambda-2)^2 + \lambda^2 - 2(G_1^2 + G_2^2) &= 0, \\ (\lambda-2)\lambda^2 - (G_1^2 + G_2^2)[\lambda^2 + (\lambda-2)^2] + (G_1^2 + G_2^2)^2 + 4G_1^2G_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy następujące zależności na współczynniki  $D_2, G_1, G_2$ :

$$(3.11) \quad \begin{aligned} D_2 = \pm\lambda \quad \text{lub} \quad D_2 = \pm(\lambda-2), \\ G_1 = \pm(\lambda-1) \quad \text{i} \quad G_2 = \pm 1, \\ \text{lub} \\ G_1 = \pm 1 \quad \text{i} \quad G_2 = \pm(\lambda-1). \end{aligned}$$

Podstawiając do równań (3.7) i (3.8)  $D_2 = \lambda - 2, G_1 = 1, G_2 = \lambda - 1$  otrzymamy układ równań, rozwiązanie którego gwarantuje nam spełnienie wszystkich założonych warunków brzegowych:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} B_2 \sin(\lambda-2)\alpha + B_3 \sin \alpha \cos(\lambda-1)\alpha &= 0, \\ B_2(\lambda-2) \cos(\lambda-2)\alpha + B_3[\cos \alpha \cos(\lambda-1)\alpha - \\ - (\lambda-1) \sin \alpha \sin(\lambda-1)\alpha] &= 0. \end{aligned}$$

Wyznaczony z pierwszego równania współczynnik  $B_2$ ,

$$(3.13) \quad B_2 = -B_3 \sin \alpha \frac{\cos(\lambda-1)\alpha}{\sin(\lambda-2)\alpha},$$

podstawiamy do równania drugiego i otrzymujemy

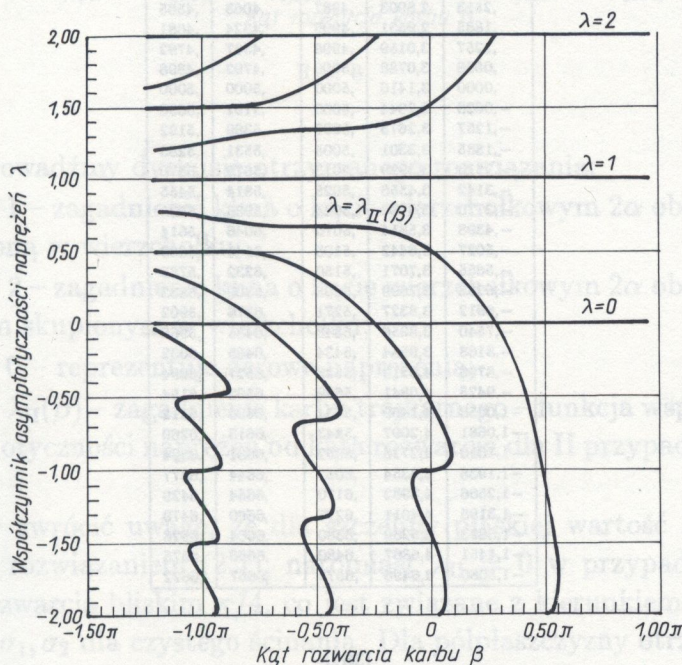
$$(3.14) \quad B_3[-(\lambda - 2) \sin \alpha \cos(\lambda - 1)\alpha \cos(\lambda - 2)\alpha + \cos \alpha \cos(\lambda - 1)\alpha \times \\ \times \sin(\lambda - 2) - (\lambda - 1) \sin \alpha \sin(\lambda - 1)\alpha \sin(\lambda - 2)\alpha] = 0.$$

Równanie to nie jest określone dla  $\alpha = 0$ , jednak przypadek taki nie ma sensu fizycznego. Warto zauważyć, że wybór stałych  $G_1, G_2$  i  $D_2$  nie wpływa na postać równania (3.14). Ponieważ nie oczekujemy rozwiązania trywialnego, stąd  $B_3 \neq 0$ .

Po prostych przekształceniach trygonometrycznych otrzymujemy następującą zależność:

$$(3.15) \quad -(\lambda - 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda - 1)\alpha = 0.$$

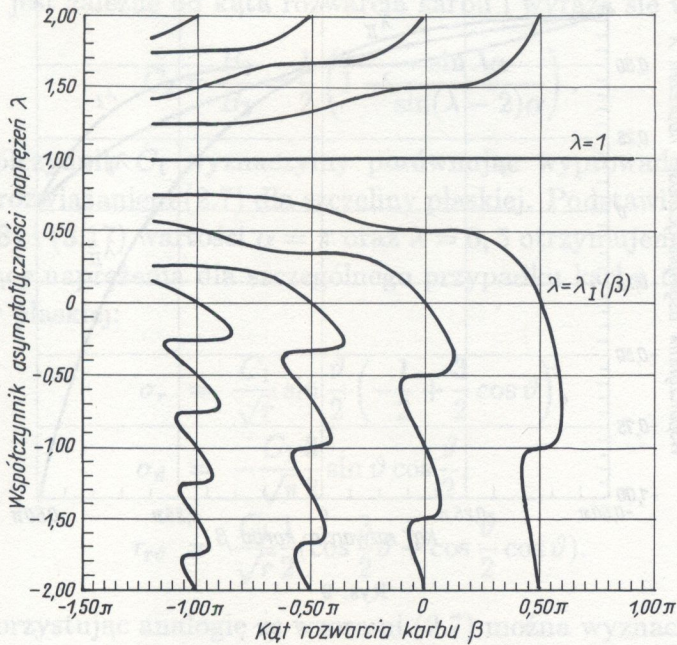
Równanie to można rozwiązać numerycznie. Wyznaczona w ten sposób zależność współczynnika asymptotyczności naprężeń od kąta rozwarcia karbu ( $\lambda(\beta)$ ) przedstawiona jest na wykresie (rys.7).



Rys. 7

Tablica 1. Wartości współczynników asymptotyczności naprężeń dla różnych kątów rozwarcia karbu.

$\beta$ (rad)	$\alpha$ (rad)	$\lambda_I$	$\lambda_{II}$	$\lambda_0$
1,5708	1,5708	,0000	-1,0000	,0000
1,5080	1,6336	,0741	-,8514	,0385
1,4451	1,6965	,1378	-,7215	,0741
1,3823	1,7593	,1929	-,6059	,1071
1,3195	1,8221	,2407	-,5021	,1379
1,2566	1,8850	,2822	-,4081	,1667
1,1938	1,9478	,3182	-,3223	,1935
1,1310	2,0106	,3493	-,2439	,2188
1,0681	2,0735	,3762	-,1717	,2424
1,0053	2,1363	,3992	-,1051	,2647
,9425	2,1991	,4189	-,0002	,2857
,8796	2,2619	,4355	,0133	,3056
,8168	2,3248	,4494	,0663	,3243
,7540	2,3876	,4610	,1156	,3421
,6912	2,4504	,4706	,1614	,3590
,6283	2,5133	,4783	,2042	,3750
,5655	2,5761	,4844	,2440	,3902
,5027	2,6389	,4892	,2812	,4048
,4398	2,7018	,4929	,3158	,4186
,3770	2,7646	,4956	,3482	,4318
,3142	2,8274	,4975	,3783	,4444
,2513	2,8903	,4987	,4063	,4565
,1885	2,9531	,4995	,4324	,4681
,1257	3,0159	,4998	,4567	,4792
,0628	3,0788	,5000	,4792	,4898
,0000	3,1416	,5000	,5000	,5000
-,0628	3,2044	,5000	,5192	,5098
-,1257	3,2673	,5002	,5369	,5192
-,1885	3,3301	,5005	,5531	,5283
-,2513	3,3929	,5013	,5679	,5370
-,3142	3,4558	,5025	,5814	,5455
-,3770	3,5186	,5044	,5936	,5536
-,4398	3,5814	,5070	,6046	,5614
-,5027	3,6442	,5105	,6145	,5690
-,5655	3,7071	,5150	,6232	,5763
-,6283	3,7699	,5205	,6309	,5833
-,6912	3,8327	,5271	,6376	,5902
-,7540	3,8956	,5348	,6435	,5968
-,8168	3,9584	,5434	,6485	,6032
-,8796	4,0212	,5528	,6527	,6094
-,9425	4,0841	,5629	,6562	,6154
-1,0053	4,1469	,5734	,6590	,6212
-1,0681	4,2097	,5843	,6613	,6269
-1,1310	4,2726	,5952	,6631	,6324
-1,1938	4,3354	,6062	,6644	,6377
-1,2566	4,3982	,6170	,6654	,6429
-1,3195	4,4611	,6277	,6660	,6479
-1,3823	4,5239	,6380	,6664	,6528
-1,4451	4,5867	,6480	,6666	,6575
-1,5080	4,6496	,6575	,6667	,6622



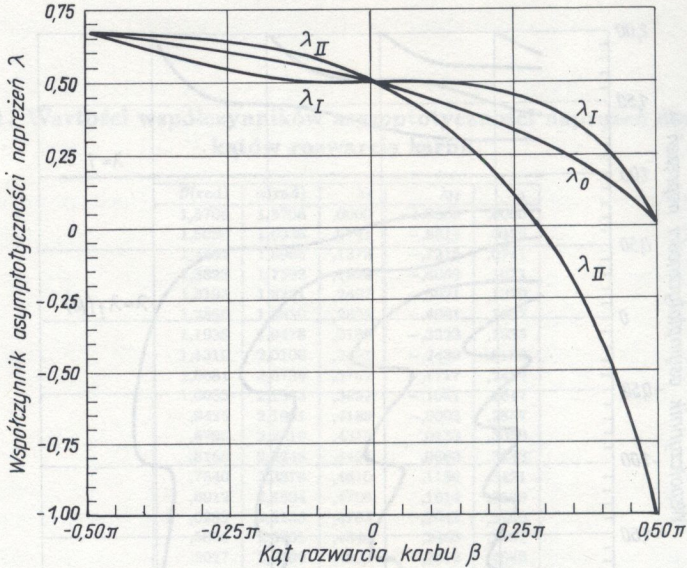
Rys. 8

Przeprowadźmy dyskusję otrzymanego rozwiązania:

- $\lambda = 1$  – zagadnienie klina o kącie wierzchołkowym  $2\alpha$  obciążonego siłą skupioną w wierzchołku;
- $\lambda = 2$  – zagadnienie klina o kącie wierzchołkowym  $2\alpha$  obciążonego momentem skupionym w wierzchołku;
- $\lambda = 0$  – reprezentuje zerowe naprężenia;
- $\lambda = \lambda_{II}(\beta)$  – zagadnienie karbu trójkątnego – funkcja współczynnika asymptotyczności naprężeń od kąta rozwarcia dla II przypadku obciążenia.

Należy zwrócić uwagę, że dla szczeliny płaskiej wartość  $\lambda_{II} = 0,5$  zgodnie z rozwiązaniem (2.7), natomiast  $\lambda_{II} = 0$  w przypadku karbu o kącie rozwarcia bliskim  $\pi/4$ , co jest związane z kierunkiem naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$  dla czystego ścinania. Dla półpłaszczyzny otrzymujemy liniowy rozkład naprężeń od swobodnego brzegu ( $\lambda_{II} = -1$ ).

Tablica 1 przedstawia wartości współczynnika  $\lambda_{II}$  dla kątów rozwarcia  $\pi/2 \geq \beta > -\pi/2$ . Graficznie zależność ta przedstawiona została na rys.9.



Rys. 9

Określmy teraz rozkład naprężeń w pobliżu wierzchołka karbu trójkątnego wynikających z wprowadzenia funkcji naprężeń Airy'ego. Wzory na naprężenia w układzie biegunowym mają postać [1, 7]:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2}, \\ \sigma_\vartheta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{\partial F}{r^2 \partial \vartheta} - \frac{\partial^2 F}{r \partial r \partial \vartheta}. \end{aligned}$$

Wykorzystując zależności (3.16), (3.13), (3.11) oraz (3.5) możemy otrzymać rozkład naprężeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= -C_1 r^{-\lambda} [C_2 (\lambda - 2) \sin(\lambda - 2)\vartheta + \lambda \sin \vartheta \cos(\lambda - 1)\vartheta + \\ &\quad + 2 \cos \vartheta \sin(\lambda - 1)\vartheta], \\ \sigma_\vartheta &= (\lambda - 2) C_1 r^{-\lambda} [C_2 \sin(\lambda - 2)\vartheta + \sin \vartheta \cos(\lambda - 1)\vartheta], \\ \tau_{r\vartheta} &= C_1 r^{-\lambda} [C_2 (\lambda - 2) \cos(\lambda - 2)\vartheta + \cos \vartheta \cos(\lambda - 1)\vartheta - \\ &\quad - (\lambda - 1) \sin \vartheta \sin(\lambda - 1)\vartheta], \end{aligned}$$

gdzie  $C_2$  jest zależne od kąta rozwarcia karbu i wyraża się wzorem:

$$(3.18) \quad C_2 = \frac{B_2}{B_3} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sin \lambda \alpha}{\sin(\lambda - 2)\alpha} \right).$$

Współczynnik  $C_1$  wyznaczymy porównując wyprowadzone wzory (3.17) z rozwiązaniem (2.7) dla szczeliny płaskiej. Podstawiając do wzorów (3.18) i (3.17) wartości  $\alpha = \pi$  oraz  $\lambda = 0,5$  otrzymujemy zależności określające naprężenia dla szczególnego przypadku karbu trójkątnego - szczeliny płaskiej:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{C_1}{\sqrt{r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right), \\ \sigma_\vartheta &= -\frac{C_1}{\sqrt{r}} \frac{3}{2} \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2}, \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{C_1}{\sqrt{r}} \frac{1}{2} \left( \cos \frac{3}{2}\vartheta + \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta \right). \end{aligned}$$

Wykorzystując analogię ze wzorami (2.7) można wyznaczyć wartość współczynnika  $C_1$  dla szczeliny płaskiej:

$$C_1 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Rozszerzając tę zależność na karby o dowolnym kącie rozwarcia można przyjąć:

$$(3.20) \quad C_1 = \frac{K_{II}}{C_3(2\pi)^{\lambda_{II}}},$$

przy czym współczynnik intensywności naprężeń dla II przypadku obciążenia (ściananie wzdłużne) będzie zdefiniowany dla dowolnego karbu trójkątnego w następujący sposób:

$$(3.21) \quad K_{II} = \lim_{\vartheta=0, r \rightarrow 0+} [(2\pi r)^{\lambda_{II}} \tau_{r\vartheta}].$$

Współczynnik  $C_3$  występujący w równaniu (3.20) wynika bezpośrednio z definicji współczynnika intensywności naprężeń (3.21) i wynosi:

$$C_3 = C_2(\lambda_{II} - 2) + 1.$$

Ostatecznie, naprężenia w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego dla II przypadku obciążeń można przedstawić w następujący sposób:

$$\sigma_r = \frac{-K_{II}}{C_3(2\pi r)^{\lambda_{II}}} [C_2(\lambda_{II} - 2) \sin(\lambda_{II} - 2)\vartheta + \lambda_{II} \sin \vartheta \cos(\lambda_{II} - 1)\vartheta - 1)\vartheta + 2 \cos \vartheta \sin(\lambda_{II} - 1)\vartheta],$$

$$(3.22) \quad \sigma_\vartheta = \frac{K_{II}}{C_3(2\pi r)^{\lambda_{II}}} (\lambda_{II} - 2) [C_2 \sin(\lambda_{II} - 2)\vartheta + \sin \vartheta \cos(\lambda_{II} - 1)\vartheta],$$

$$\tau_{r\vartheta} = \frac{K_{II}}{C_3(2\pi r)^{\lambda_{II}}} [C_2(\lambda_{II} - 2) \cos(\lambda_{II} - 2)\vartheta + \cos \vartheta \cos(\lambda_{II} - 1)\vartheta - (\lambda_{II} - 1) \sin \vartheta \sin(\lambda_{II} - 1)\vartheta].$$

Związki fizykalne dla płaskiego stanu naprężeń mają postać:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta), \\ \varepsilon_\vartheta &= \frac{1}{E}(\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r), \\ \gamma_{r\vartheta} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{r\vartheta} = \frac{\tau_{r\vartheta}}{G}. \end{aligned}$$

Związki geometryczne mamy dane wyrażeniami

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_\vartheta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta}, \\ \gamma_{r\vartheta} &= \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{r}. \end{aligned}$$

Korzystając z zależności (3.23), (3.24) i (3.22) obliczymy rozkład przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego dla II przypadku obciążeń w płaskim stanie naprężenia:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} u_r &= \frac{K_{II}r}{2(1-\lambda_{II})G(2\pi r)^{\lambda_{II}}C_3} [-C_2(\lambda_{II} - 2) \sin(\lambda_{II} - 2)\vartheta + \\ &+ \left(\frac{2\nu}{1+\nu} - \lambda_{II}\right) \sin \vartheta \cos(\lambda_{II} - 1)\vartheta - \frac{2}{1+\nu} \cos \vartheta \sin(\lambda_{II} - 1)\vartheta], \\ u_\vartheta &= \frac{K_{II}r}{2(1-\lambda_{II})G(2\pi r)^{\lambda_{II}}C_3} [C_2(\lambda_{II} - 2) \cos(\lambda_{II} - 2)\vartheta - \end{aligned}$$



$$(3.25) \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{1-\nu}{1+\nu} \cos \vartheta \cos(\lambda_{II} - 1)\vartheta - \left( \lambda_{II} - 1 - \frac{2}{1+\nu} \right) \sin \vartheta \sin(\lambda_{II} - 1)\vartheta \end{array} \right]_{[cd]}.$$

Wzory na przemieszczenia dla płaskiego stanu odkształceń można otrzymać przez zastąpienie liczby Poissona  $\nu$  wyrażeniem  $\nu/(1 - \nu)$ . Podstawiając do równań (3.25) wartości dla szczeliny płaskiej  $\alpha = \pi$  i  $\lambda_{II} = 0,5$  otrzymamy wyrażenia tożsame ze wzorami (2.7). Świadczy to o poprawności wyprowadzonych zależności. Należy jeszcze zaznaczyć, że postać równań (3.22) oraz (3.25) nie zależy od wyboru zestawu stałych  $D_2, G_1$  i  $G_2$  podanych zależnościami (3.11).

Założmy teraz, że w równaniu (3.1) stałe  $B_2 = 0$  i  $B_3 = 0$ . Spełnienie warunków brzegowych (3.3) i (3.4) dla  $\vartheta = \pm\alpha$  prowadzi do następujących równań:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} &(\lambda - 2)(\lambda - 1)Ar^{-\lambda}(B_1 \cos D_1\alpha + B_4 \sin G_3\alpha \sin G_4\alpha) = 0, \\ &(\lambda - 1)Ar^{-\lambda}[-B_1 D_1 \sin D_1\alpha + B_4(G_3 \cos G_3\alpha \sin G_4\alpha + \\ &\qquad\qquad\qquad + G_4 \sin G_3\alpha \cos G_4\alpha)] = 0. \end{aligned}$$

Po wstawieniu wyrażeń (3.5) do równania biharmonicznego (3.2) otrzymujemy:

$$(3.27) \quad Ar^{-(\lambda+2)} [B_1[(\lambda - 2)^2 - D_1^2][\lambda^2 - D_1^2] \cos D_1\vartheta + B_4 ([\lambda^2 - (G_3^2 + G_4^2)][(\lambda - 2)^2 - (G_3^2 + G_4^2)^2] + 4G_3^2 G_4^2) \sin G_3\vartheta \sin G_4\vartheta + 2B_4 G_3 G_4 [(\lambda - 2)^2 + \lambda^2 - 2(G_3^2 + G_4^2)] \cos G_3\vartheta \cos G_4\vartheta] = 0.$$

Stąd otrzymujemy zależności na współczynniki  $D_1, G_3$  i  $G_4$ :

$$(3.28) \quad \begin{aligned} &D_1 = \pm\lambda \quad \text{lub} \quad D_1 = \pm(\lambda - 2), \\ &G_3 = \pm(\lambda - 1) \quad \text{i} \quad G_4 = \pm 1, \\ &\qquad\qquad\qquad \text{lub} \\ &G_3 = \pm 1 \quad \text{i} \quad G_4 = \pm(\lambda - 1), \end{aligned}$$

analogiczne do wyrażeń (3.11).

Bez względu na dobór zestawu współczynników (3.28) wyrażenia (3.26) można przekształcić do następującej postaci uzależniającej współczynnik asymptotyczności naprężeń od kąta rozwarcia karbu dla I przypadku obciążenia:

$$(3.29) \quad \sin 2(\lambda - 1)\alpha + (\lambda - 1) \sin 2\alpha = 0.$$

Tak samo jak w przypadku zależności (3.15) równanie to rozwiązujemy numerycznie. Zależność współczynnika asymptotyczności naprężeń od kąta rozwarcia karbu ( $\lambda(\beta)$ ) graficznie przedstawiona jest na rys. 8. Można łatwo zauważyć, że wyrażenie (3.29) jest spełnione dla  $\lambda = 1$  (zagadnienie klina obciążonego siłą skupioną w wierzchołku) oraz  $\lambda = \lambda_I(\beta)$  - funkcji współczynnika asymptotyczności naprężeń od kąta rozwarcia dla I przypadku obciążenia (zagadnienie karbu trójkątnego). Wartości współczynnika asymptotyczności naprężeń w przypadku rozdzielania dla kątów rozwarcia karbu  $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$  zamieszczone zostały w tablicy 1, graficznie przedstawia je rys. 9. Należy zwrócić uwagę, że współczynnik  $\lambda_I$  przyjmuje wartość 0,5 dla szczeliny płaskiej (zgodnie ze wzorami 2.6) oraz zeruje się dla półpłaszczyzny (nie występuje wtedy osobliwość).

Korzystając z równań (3.5) oraz (3.16) obliczymy rozkład naprężeń we współrzędnych biegunowych dla I przypadku obciążenia:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -C_4 r^{-\lambda} [C_5(\lambda - 2) \cos(\lambda - 2)\vartheta + \lambda \sin(\lambda - 1)\vartheta \sin \vartheta - \\ &\quad - 2 \cos(\lambda - 1)\vartheta \cos \vartheta], \\ (3.30) \quad \sigma_\vartheta &= (\lambda - 2)C_4 r^{-\lambda} [C_5 \cos(\lambda - 2)\vartheta + \sin(\lambda - 1)\vartheta \sin \vartheta], \\ \tau_{r\vartheta} &= C_4 r^{-\lambda} [-C_5(\lambda - 2) \sin(\lambda - 2)\vartheta + \cos \vartheta \sin(\lambda - 1)\vartheta + \\ &\quad + (\lambda - 1) \sin \vartheta \cos(\lambda - 1)\vartheta], \end{aligned}$$

gdzie współczynnik  $C_5$  dany jest następującym wyrażeniem:

$$(3.31) \quad C_5 = \frac{B_1}{B_4} = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\cos \lambda \alpha}{\cos(\lambda - 2)\alpha} \right).$$

Współczynnik  $C_4$  określimy wykorzystując rozwiązanie (2.6) dla szczeliny płaskiej. Podstawiając do wzoru (3.31) wartości  $\alpha = \pi$  oraz  $\lambda = 0,5$  otrzymujemy wyrażenie nieokreślone. Obliczając wartość  $C_5$  w granicy, gdy  $\alpha \rightarrow \pi$ , korzystając przy tym z twierdzenia de l'Hospitala, otrzymujemy  $C_5 = -2/3$ . Tak więc w przypadku szczeliny płaskiej wzory (3.30) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{C_4}{\sqrt{r}} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta \right), \\ (3.32) \quad \sigma_\vartheta &= \frac{C_4}{\sqrt{r}} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta \right), \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{C_4}{\sqrt{r}} \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

Porównując powyższe wyrażenia ze wzorami (2.6) można określić współczynnik  $C_4$  w przypadku szczeliny płaskiej podanej rozdzielaniu:

$$C_4 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}$$

Rozszerzając tę zależność na dowolny karb trójkątny (a więc i uwzględniając zmienność współczynnika asymptotyczności naprężeń) można założyć:

$$(3.33) \quad C_4 = \frac{K_I}{C_6(2\pi)^{\lambda_I}},$$

gdzie współczynnik intensywności naprężeń od rozdzielania dotyczy karbów o dowolnym kącie rozwarcia. Można go zdefiniować w następujący sposób:

$$(3.34) \quad K_I = \lim_{\vartheta=0, r \rightarrow 0_+} [(2\pi r)^{\lambda_I} \sigma_\vartheta].$$

Współczynnik  $C_6$  występujący w równaniu (3.33) wynika bezpośrednio z definicji (3.34) i wynosi:

$$C_6 = (\lambda_I - 2)C_5.$$

Ostatecznie rozkład naprężeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego dla I przypadku obciążeń można przedstawić za pomocą następujących wyrażen:

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{K_I}{C_6(2\pi r)^{\lambda_I}} [C_5(\lambda_I - 2) \cos(\lambda_I - 2)\vartheta + \lambda_I \sin(\lambda_I - 1)\vartheta \sin \vartheta - \\ &\quad - 1)\vartheta \sin \vartheta - 2 \cos(\lambda_I - 1)\vartheta \cos \vartheta], \\ \sigma_\vartheta &= (\lambda_I - 2) \frac{K_I}{C_6(2\pi r)^{\lambda_I}} [C_5 \cos(\lambda_I - 2)\vartheta + \sin(\lambda_I - 1)\vartheta \sin \vartheta], \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{K_I}{C_6(2\pi r)^{\lambda_I}} [-C_5(\lambda_I - 2) \sin(\lambda_I - 2)\vartheta + \\ &\quad + \cos \vartheta \sin(\lambda_I - 1)\vartheta + (\lambda_I - 1) \sin \vartheta \cos(\lambda_I - 1)\vartheta]. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów fizykalnych (3.23) oraz związków geometrycznych (3.24) obliczymy rozkład przemieszczeń w pobliżu wierzchołka karbu trójkątnego dla I przypadku obciążenia w płaskim stanie naprężenia:

$$(3.36) \quad u_r = \frac{K_I r}{2(1 - \lambda_I)G(2\pi r)^{\lambda_I} C_6} [-C_5(\lambda_I - 2) \cos(\lambda_I - 2)\vartheta +$$

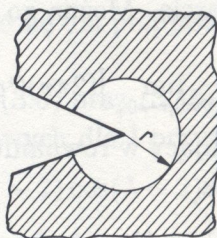
$$(3.36) \quad + \left( \frac{2\nu}{1+\nu} - \lambda_I \right) \sin \vartheta \sin(\lambda_I - 1)\vartheta + \frac{2}{1+\nu} \cos \vartheta \cos(\lambda_I - 1)\vartheta \Big],$$

[cd.]

$$u_\vartheta = \frac{K_I r}{2(1-\lambda_I)G(2\pi r)^{\lambda_I} C_6} \left[ -C_5(\lambda_I - 2) \sin(\lambda_I - 2)\vartheta - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos \vartheta \sin(\lambda_I - 1)\vartheta + \left( \lambda_I - 1 - \frac{2}{1+\nu} \right) \sin \vartheta \cos(\lambda_I - 1)\vartheta \right].$$

Równania dla płaskiego stanu odkształceń można otrzymać przez zastąpienie liczby Poissona  $\nu$  wyrażeniem  $\nu/(1-\nu)$ . Podstawienie  $\alpha = \pi$ ,  $\lambda = 0,5$  powoduje otrzymanie wyrażen na przemieszczenia dla szczeliny płaskiej, tożsamy z (2.6).



Rys. 10

Obliczmy teraz wypadkowe siły działające na wierzchołek karbu trójkątnego (klina). Ponieważ całkowanie odbywa się po wycinku okręgu o promieniu  $r$  i środku w wierzchołku (rys.10) wzory przyjmą postać:

$$(3.37) \quad P_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_r \cos \vartheta - \tau_{r\vartheta} \sin \vartheta) r d\vartheta,$$

$$P_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_r \sin \vartheta + \tau_{r\vartheta} \cos \vartheta) r d\vartheta,$$

$$M_0 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{r\vartheta} r^2 d\vartheta.$$

W II przypadku obciążenia otrzymujemy  $P_x = 0$ ,  $P_y = 0$ ,  $M_0 = 0$  dla  $\lambda \neq 1$  i  $\lambda \neq 2$ . Gdy  $\lambda = 1$  naprężenia wynoszą:

$$\sigma_r = -2 \frac{C_1}{r} \sin \vartheta, \quad \sigma_\vartheta = 0, \quad \tau_{r\vartheta} = 0.$$

Występuje wówczas niezerowa wartość siły pionowej:

$$P_y = -2C_1 \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right).$$

Potwierdza to poprzednie założenie, że jest to zagadnienie klina obciążonego pionową siłą skupioną w wierzchołku [1]. W przypadku gdy  $\lambda = 2$  naprężenia przyjmą postać:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -2\frac{C_1}{r^2} \sin 2\vartheta, \quad \sigma_\vartheta = 0, \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{C_1}{r^2} (\cos 2\vartheta - \cos 2\alpha).\end{aligned}$$

Mamy wówczas do czynienia z klinem obciążonym w wierzchołku skupionym momentem:

$$M_0 = C_1(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha).$$

W I przypadku obciążenia niezerowe wartości wyrażeń (3.37) otrzymujemy dla  $\lambda = 1$ . Jest to zagadnienie klina obciążonego poziomą siłą skupioną [1]:

$$P_x = 2C_4 \left( \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right).$$

Naprężenia wówczas wynoszą:

$$\sigma_r = -2\frac{C_4}{r} \cos \vartheta, \quad \sigma_\vartheta = 0, \quad \tau_{r\vartheta} = 0.$$

Oszacujemy wartość energii w obszarze wycinka koła w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego (rys.10):

$$W = \int_0^r \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} r d\vartheta dr.$$

Ponieważ wzory na naprężenia oraz odkształcenia są postaci  $r^{-\lambda} f(\vartheta)$  otrzymujemy:

$$W = \int_0^r r^{1-2\lambda} g(\alpha) dr,$$

gdzie  $f(\vartheta)$ ,  $g(\alpha)$  są odpowiednimi kombinacjami funkcji trygonometrycznych.

Wynika stąd wniosek, że dla  $\lambda < 1$  energia w okolicy wierzchołka karbu trójkątnego ma wartość ograniczoną – nie występuje tam obciążenie skupione.

## 4. PODSUMOWANIE

Współczynniki asymptotyczne naprężeń dla tych samych kątów rozwarcia karbów, ale dla różnych przypadków obciążenia znacznie się różnią. Celowe było więc wprowadzenie dwóch współczynników asymptotyczności naprężeń:

- a)  $\lambda_I$  – dla I przypadku obciążenia;
- b)  $\lambda_{II}$  – dla II przypadku obciążenia.

Wyrażenia określające rozkład naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka karbu trójkątnego można otrzymać wykorzystując superpozycję wcześniej otrzymanych rozwiązań:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= A_{ij}r^{-\lambda_I}a_{ij}(\vartheta) + B_{ij}r^{-\lambda_{II}}b_{ij}(\vartheta), \\ \varepsilon_{ij} &= C_{ij}r^{-\lambda_I}c_{ij}(\vartheta) + D_{ij}r^{-\lambda_{II}}d_{ij}(\vartheta), \\ q_i &= F_i r^{1-\lambda_I}f_i(\vartheta) + G_i r^{1-\lambda_{II}}g_i(\vartheta), \end{aligned}$$

gdzie  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, F_i, G_i$  - stałe;  $a_{ij}(\vartheta), b_{ij}(\vartheta), c_{ij}(\vartheta), d_{ij}(\vartheta), f_i(\vartheta), g_i(\vartheta)$  - kombinacje funkcji trygonometrycznych kąta  $\vartheta$ .

Do celów inżynierskich wskazane byłoby zastąpienie obu współczynników asymptotyczności naprężeń jednym o uniwersalnym znaczeniu. Po zsumowaniu stronami równań (3.15) i (3.29) otrzymamy wyrażenie:

$$(4.2) \quad \sin 2(\lambda_0 - 1)\alpha = 0.$$

Występujący w nim uniwersalny współczynnik asymptotyczności naprężeń  $\lambda_0$  można określić wzorem:

$$(4.3) \quad \lambda_0 = 1 - \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Wstawiając wyrażenie (3.6) otrzymujemy:

$$(4.4) \quad \lambda_0 = 1 - \frac{\pi}{2(\pi - \beta)}.$$

Przebieg zmienności funkcji  $\lambda_0(\beta)$  pokazany jest na rys.9 oraz w tabelicy 1, gdzie porównano ją z wartościami współczynników  $\lambda_I, \lambda_{II}$  dla różnych kątów rozwarcia karbu.

Przybliżone wzory modelujące rozkład naprężeń, odkształceń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka karbu trójkątnego mają wówczas następującą postać:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= A_{ij} r^{\frac{\pi}{2\alpha}-1} f_{ij}(\vartheta), \\ \varepsilon_{ij} &= B_{ij} r^{\frac{\pi}{2\alpha}-1} g_{ij}(\vartheta), \\ q_i &= C_i r^{\frac{\pi}{2\alpha}} h_i(\vartheta), \end{aligned}$$

gdzie  $A_{ij}, B_{ij}, C_i$  – stałe;  $f_{ij}(\vartheta), g_{ij}(\vartheta), h_i(\vartheta)$  – kombinacje funkcji trygonometrycznych kąta  $\vartheta$ .

Porównując je ze wzorami (2.8) można zauważyć, że charakter asymptotyczności pierwszego wyrazu sumy i wyrażeń przybliżonych jest analogiczny. Z powyższych rozważań wynika wniosek, że uniwersalny współczynnik asymptotyczności naprężeń jest wystarczającym przybliżeniem do celów inżynierskich. Stosowanie go jest uzasadnione przy złożonym stanie obciążenia, szczególnie podczas numerycznego modelowania rozkładów naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego, za pomocą metody elementów skończonych. Przy jednorodnym obciążeniu karbu (rozrywanie lub ścinanie wzdłużne) wskazane jest użycie odpowiedniego współczynnika  $\lambda_I$  lub  $\lambda_{II}$ .

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. BRUNARSKI, M. KWIECIŃSKI, *Wstęp do teorii sprężystości i plastyczności*, Wyd. Polit. Warszawskiej, Warszawa 1984.
2. А.И.Каландия, *Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов*, ПММ, 33, 1, 1969.
3. В.А.Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях*, ДАН СССР, 153, 1, 1963.
4. Н.Ф.Морозов, *Математические вопросы теории упругости*, Наука, Москва 1984.
5. Н.Ф.Морозов, *Избранные двумерные задачи теории упругости*, Наука, Изд. Ленингр. универ., Ленинград 1978.
6. Н.И.Мухелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Наука, Москва 1966.
7. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
8. В.З.Партон, Е.М.Морозов, *Механика упругопластического разрушения*, Наука, Москва 1985.
9. M.L.WILLIAMS, *Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners*, J.Appl.Mech., 19, 4, 1952.

## Резюме

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ОТКРЕСНОСТИ ВЕРШИНЫ УГЛОВОГО ВЫРЕЗА В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

## Часть I

Работа представляет способ моделирования распределений перемещений, деформаций и напряжений для плоских областей обладающим угловыми вырезами с произвольным углом раскрытия, при помощи метода конечных элементов. В I части выведены формулы для напряжений и перемещений вблизи вершины углового выреза, а также определены зависимости коэффициентов асимптотики напряжений от угла раскрытия выреза для двух случаев нагружения: разрыва ( $\lambda_I$ ) и продольного сдвига ( $\lambda_{II}$ ). Это проведено вводя соответствующую функцию напряжений в полюсных координатах, связанных с вершиной выреза. Она удовлетворяет бигармоническому уравнению и граничным условиям на берегах выреза. Введен также универсальный коэффициент асимптотики напряжений, который является достаточным приближением для инженерских расчетов и можно его применять при численном моделировании сложных напряженных состояний. Во II части работы обсужден новый конечный элемент AST (asymptotic strain triangle), которого интерполирующие функции учитывают изменение асимптотики напряжений и деформаций совместно с изменением угла раскрытия выреза.

## SUMMARY

## MODELLING OF STRESS AND DISPLACEMENT DISTRIBUTIONS IN VICINITY OF A V - NOTCH VERTEX IN PLANE ELASTICITY

## Part I

Modelling of stress, strain and displacement distributions is presented in the case of plane regions containing V - notches of arbitrary vertex angles. In Part I the formulae for stresses and displacements occurring at the V - notch are given, and the relations between stress asymptoticity coefficients and the notch vertex angle are derived for two cases of loading: normal tension ( $\lambda_I$ ) and longitudinal shear ( $\lambda_{II}$ ); this is achieved by introducing a suitable stress function expressed in polar coordinates centered at the notch vertex. The function satisfies the biharmonic equation and the boundary conditions along the boundary of the notch. A universal stress asymptoticity coefficient is also introduced, sufficient for approximate analysis



of engineering problems and suitable for numerical modelling of complex stress states. In Part II of the paper a novel finite element AST (Asymptotic Strain Triangle) is introduced which shape functions account for the stress and strain asymptoticity changes due to the notch angle variation.

**POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 maja 1989 r.*

ANDRZEJ S E W E R Y N (BIAŁYSTOK)

Praca przedstawia sposób modelowania rozkładów naprężeń pod kątem ostrym i krawędzi w obszarach płaskich powłokowych karbowanych. Wskazano na konieczność użycia nowych metody elementów skończonych. W części I wprowadzono nową formę trójkąta asymptotycznego w pobliżu wierzchołka karby odkształcenia oraz wyprowadzono zależności między trywiałkami asymptotycznymi karbowaniem od kąta rozwarcia karby. W II części pracy omówiono model nowo zaproponowany AST (asymptotic strain triangle). Jest to element sprężysty, którego kształt zmienia się w zależności od kąta rozwarcia karby. Wskazano na możliwość użycia modelu w analizach nieliniowych karbowania. Omówiono metody także sprężysto-plastyczne w pobliżu krawędzi karbowania i obliczenia metody elementów skończonych, umożliwiające analizę karbowania o dowolnym kącie rozwarcia. Na zakończenie podważono wyniki obliczeń przeprowadzonych z pomocą elementów AST oraz innych elementów skończonych.

WARIANTY ODCZYTAŃ:

- 1) podany kąt rozwarcia karby,
- 2) odległość węzła środkowego od wierzchołka w elemencie AST,
- 3) tensor odkształceń,
- 4) model odkształcenia postaciowego,
- 5) współczynniki nieliniowości sprężystości karbowanych,
- 6) współczynniki asymptotyczności sprężystości,
- 7) współczynniki asymptotyczności sprężystości dla II przypadku obciążenia,
- 8) długość karby elementu skończonego na krawędzi karbowanej,
- 9) pole powierzchni karby rozwarcia,
- 10) liczba węzłów elementu skończonego,
- 11) karba Polakowa.