

PRACA SPRĘŻYSTYCH SKRĘCANYCH ORTOTROPOWYCH POWŁOK WALCOWYCH PO UTRACIE STATECZNOŚCI

TADEUSZ GAŁKIEWICZ (ŁÓDŹ)

1. WSTĘP

Celem omawianej pracy jest zanalizowanie zachowania się sprężystej, skręcaanej powłoki po utracie stateczności. Zadanie rozwiązano dla przypadku kołowej powłoki walcowej, której krawędzie po utracie stateczności mają swobodę względnego przemieszczania się w kierunku wzdłużnym i dla przypadku, gdy to przemieszczenie jest niemożliwe.

W pracy określono dla obu rozpatrywanych przypadków związki istniejące między średnim naprężeniem stycznym a amplitudą fal, wyprowadzono wzór na względny kąt skręcania oraz obliczono całkowite skrócenie powłoki. Zadanie zostało rozwiązane w sposób przybliżony — metodą energetyczną przy pominięciu wielkości mało znaczących. Uzyskane wyniki stanowią wystarczające przybliżenie dla powłok cienkich i niezbyt krótkich. Przy powłokach bardzo krótkich zadanie można w przybliżeniu sprowadzić do przypadku pasma płytowego, obciążonego siłami stycznymi na krawędziach.

Uzyskane rozwiązania dotyczą powłok ortotropowych o ortotropii materiałowej i konstrukcyjnej. Przy ortotropii konstrukcyjnej założono możliwość istnienia żeber wzdłużnych i obwodowych, symetrycznych względem powierzchni środkowej ścianki powłoki. Rozwiązano przypadek powłoki, której żebra są gęsto rozmieszczone, dzięki czemu ścianka traci stateczność łącznie z żebrami.

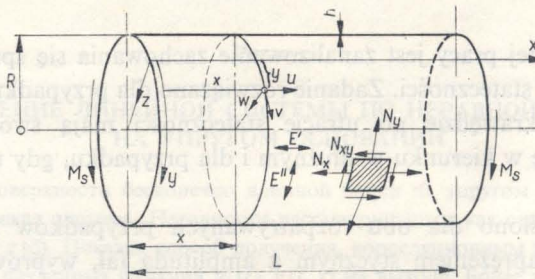
Rozpatrywane w pracy zadania dotyczą powłok w przybliżeniu swobodnie podpartych na obu swych krawędziach. Ponieważ ścianki badanych powłok mają bardzo małą sztywność zginania, przeto obciążenia krytyczne dla powłok podpartych swobodnie na krawędziach stosunkowo niewiele różnią się od obciążeń krytycznych dla tych samych powłok o ściankach sztywno utwierdzonych. Uzyskane tu obciążenie krytyczne dla powłok ortotropowych swobodnie podpartych na krawędziach jest tylko o 2,3% niższe (tym samym bezpieczniejsze) od obciążenia krytycznego uzyskanego przez Z. PARSZEWSKIEGO w pracy [5] przy sztywnym utwierdzeniu ścianek.

Ze względu na trudności zrealizowania w praktyce swobodnego podparcia brzegów większość prób skręcania powłok przeprowadza się przy umocowaniu zbliżonym raczej do utwierdzenia sztywnego brzegów. Porównywanie wyników takich prób z rozwiązaniami uzyskanymi w niniejszej pracy jest dopuszczalne i nie powinno

budzić zastrzeżeń. Badania na powłokach ortotropowych były już uprzednio przeprowadzane. Wyniki badań szeregu powłok podane zostały w publikacji [4]; próby te dotyczyły skręcanych powłok, których krawędzie po utracie stateczności mogły się swobodnie do siebie przybliżać.

2. RÓWNANIE NIEROZDZIELNOŚCI, SIŁY PRZEKROJOWE, ODKSZTAŁCENIA WZGLĘDNE I ENERGIA CAŁKOWITA POWŁOKI WALCOWEJ

Rozpatrzmy powłokę walcową o grubości ścianki h , dla której promień powierzchni środkowej wynosi R , długość L skręcaną momentem M_s . Osie x, y, z i odpowiednie składowe przemieszczenia u, v, w dowolnego punktu środkowej po-



Rys. 1

wierzchni przedstawione są na rys. 1. Dla rozpatrywanej powłoki przyjmujemy oznaczenia zestawione w tabelicy 1.

Dla ścianki ortotropowej zachodzi związek

$$(2.1) \quad \frac{v'}{E'} = \frac{v''}{E''},$$

dla ścianki zaś ortotropowej, żebrowanej

$$(2.2) \quad \frac{v_1}{E_1} = \frac{v_2}{E_2}.$$

W pracy [1] równanie nierozdzielności dla przypadku ortotropowych powłok walcowych ma postać następującą:

$$(2.3) \quad \frac{1}{E_2 h} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{Gh} - \frac{2\nu_1}{E_1 h} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1 h} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \\ = \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

gdzie Φ jest funkcją naprężeń Airy'ego.

Po przeprowadzeniu analizy wyników pracy [1] stwierdzono, że w przypadku skręcania powyższe równanie można w pierwszym przybliżeniu przedstawić prościej:

$$(2.4) \quad \frac{1}{E_1 h} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \approx \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Tablica 1

		W kierunku osi x	W kierunku osi y
Dla ścianki powłoki	grubość ścianki	h	h
	moduł Younga oraz odpowiednia liczba Poissona	E', ν'	E'', ν''
	moduł sprężystości postaciowej ścianki	G	G
Dla żeber	pole powierzchni przekroju poprzecznego jednego żebra	F'	F''
	moduł Younga	\bar{E}'	\bar{E}''
	zastępczy moduł Younga przy rozciąganiu	$E_1 = E' \alpha'$ gdzie	$E_2 = E'' \alpha''$ gdzie
		$\alpha' \approx 1 + \frac{\bar{E}' F'}{E' l' h}$	$\alpha'' \approx 1 + \frac{\bar{E}'' F''}{E'' l'' h}$
Dla powłoki żebrowanej	odległość między osiami żeber	wzdłużnych l' (mierzona po obwodzie powierzchni środkowej)	obwodowych l''
	zastępczy współczynnik Poissona	przy jednokierunkowym rozciąganiu w kierunku osi x	przy jednokierunkowym rozciąganiu w kierunku osi y
		$\nu_1 \approx \frac{\nu'}{\alpha'}$	$\nu_2 \approx \frac{\nu''}{\alpha''}$
Dla ścianki powłoki nieżebrowanej	szytywność zginania ścianki	$D' = \frac{E' h^3}{12(1-\nu' \nu')}$	$D'' = \frac{E'' h^3}{12(1-\nu'' \nu'')}$
	szytywność skręcania		$D''' = \frac{G h^3}{12}$
	zastępcza szytywność zginania	$D_1 = D' \bar{\alpha}'$ gdzie	$D_2 = D'' \bar{\alpha}''$ gdzie
		$\bar{\alpha}' = 1 + \frac{\bar{E}'}{E'} (1-\nu' \nu'') \frac{12J'}{l' h^3}$	$\bar{\alpha}'' = 1 + \frac{\bar{E}''}{E''} (1-\nu'' \nu'') \frac{12J''}{l'' h^3}$
Dla powłoki żebrowanej	moment bezwładności pola przekroju poprzecznego jednego żebra względem osi obojętnej	J' (pola przekroju poprzecznego jednego żebra wzdłużnego)	J'' (pola przekroju poprzecznego jednego żebra obwodowego)

[161]

W równaniach (2.3) i (2.4) wyrażenie w prostokątnym nawiasie pojawia się z powodu uwzględnienia dużych ugięć powłoki. Dla małych ugięć, czyli dla zagadnienia liniowego, wyrażenie to nie występuje.

Siły przekrojowe pokazane na rys. 1 określone są przez wzory:

$$(2.5) \quad N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Niżej podano wzory na odkształcenia jednostkowe ε_x , ε_y i γ dla powłoki walcowej:

a) dla zagadnienia liniowego:

$$(2.6) \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

b) przy uwzględnieniu dużych ugięć

$$(2.7) \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Na powierzchni środkowej powłoki występuje dwukierunkowy stan naprężenia, czyli że:

$$(2.8) \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E_1 h} (N_x - \nu_1 N_y) = \frac{1}{E_1 h} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right), \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E_2 h} (N_y - \nu_2 N_x) = \frac{1}{E_1 h} \left(-\nu_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right).$$

Energia całkowita U powłoki określona jest wzorem

$$(2.9) \quad U = (V_s + V_g) + W,$$

gdzie V_s oznacza energię odkształcenia powierzchni środkowej, V_g energię od zginania, W energię sił zewnętrznych, przy czym

$$(2.10) \quad U = \frac{1}{2} \int_F \int \left[\frac{1}{E_2 h} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{E_1 h} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\nu_1}{E_1 h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{Gh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \int_F \int \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D' \nu'' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 4D''' \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \tau h \int_F \int \left(\frac{1}{Gh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

Na podstawie przeprowadzonej analizy wyników pracy [1] stwierdzono, że dla powłok cienkich i niezbyt krótkich można w pierwszym przybliżeniu we wzorze na energię U pominąć szereg mało znaczących składników i wówczas powyższy wzór można przedstawić w następującej, znacznie uproszczonej postaci:

$$(2.11) \quad U \approx \frac{1}{2} \int_F \int \left[\frac{1}{E_1 h} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{Gh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ + \frac{1}{2} \int_F \int D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy + \tau h \int_F \int \left(\frac{1}{Gh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

3. STATECZNOŚĆ SKRĘCANEJ POWŁOKI WALCOWEJ, KTÓREJ KRAWĘDZIE PO WYBOCZENIU MOGĄ SIĘ DO SIEBIE PRZYBLIŻAĆ

Zadanie rozwiązano przy założeniu, że funkcja ugięcia jest następująca: dla zagadnienia liniowego

$$(3.1) \quad w = w_1 = f_1 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n}{R} (y - kx) = \frac{f_1}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \beta_1);$$

dla zagadnienia nieliniowego

$$(3.2) \quad w = w_1 + w_2 = f_1 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n}{R} (y - kx) + f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} = \\ = \frac{f_1}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \beta_1) + f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L},$$

gdzie

$$(3.3) \quad w_2 = f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L}, \quad \alpha_1 = \frac{n}{R} (a_1 x - y), \quad \beta_1 = \frac{n}{R} (b_1 x - y),$$

$$a_1 = k + \vartheta, \quad b_1 = k - \vartheta, \quad \vartheta = \frac{\pi R}{nL}$$

oraz gdzie f_1, f_2, k są to pewne parametry, które trzeba określić, a n jest liczbą fal na obwodzie.

Przyjęta funkcja ugięcia odpowiada w przybliżeniu swobodnemu podparciu ścianki powłoki na krawędziach. Postać obranej funkcji jest zbliżona do postaci, jaką rzeczywiście tworzy powierzchnia środkowa skręconej powłoki po utracie stateczności. Z doświadczeń wynika, że powłoka walcowa przy pewnym obciążeniu skręcającym fałuje się, a grzbiety fal układają się wzdłuż linii zbliżonych do linii śrubowych. Parametr k , który występuje we wzorze (3.1) i (3.2), jest tangensem kąta, jaki tworzą fale odkształconej powłoki z osią x .

Wstawiono następnie funkcję w do równania nierozdzielności (2.4) i po rozwiązaniu tego równania otrzymano wzory określające funkcję naprężeń:

dla zagadnienia liniowego

$$(3.4) \quad \Phi_1 = E_1 h f_1 \frac{R}{2n^2} (a_1 \cos \alpha_1 - b_1 \cos \beta_1) - (\tau h) xy;$$

dla zagadnienia nieliniowego

$$(3.5) \quad \Phi = \{\Phi_1\} + \Phi_2 = \left\{ E_1 h f_1 \frac{R}{2n^2} (a_1 \cos \alpha_1 - b_1 \cos \beta_1) - (\tau h) xy \right\} + \\ + E_1 h \left[f_1^2 \frac{\vartheta^2}{32} \left(\frac{1}{E_0 \vartheta^4} \cos \frac{2\pi x}{L} + \cos \frac{2n(kx - y)}{R} \right) + \right. \\ \left. + f_1 f_2 \frac{\vartheta^2}{2} (-\cos \alpha_1 + \cos \beta_1 + \cos \alpha_3 - \cos \beta_3) - f_2 \frac{R}{8n^2 \vartheta^2 E_0} \cos \frac{2\pi x}{L} \right],$$

gdzie

$$(3.6) \quad E_0 = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E'\alpha'}{E''\alpha''},$$

$$\alpha_3 = \frac{n}{R}(a_3 x - y), \quad \beta_3 = \frac{n}{R}(b_3 x - y),$$

$$a_3 = k + 3\vartheta, \quad b_3 = k - 3\vartheta.$$

W pracy [1] rozwiązane zostało zagadnienie liniowe omawianego zadania. Z rozwiązania tego wynika, że górne naprężenie krytyczne \bar{Y}_0 , wyrażone w wielkościach bezwymiarowych, wynosi

$$(3.7) \quad \bar{Y}_0 = 1,23\bar{X}^{3/4},$$

gdzie

$$(3.8) \quad \bar{Y}_0 = \frac{\tau_0(1-\nu'v'')L^2}{E''\bar{\alpha}''h^2}, \quad \bar{Y} = \frac{\tau(1-\nu'v'')L^2}{E''\bar{\alpha}''h^2},$$

$$\bar{X} = \frac{L^2}{2Rh} \sqrt{\frac{E'\alpha'}{E''\bar{\alpha}''}(1-\nu'v'')}.$$

Symbol τ_0 oznacza górne naprężenie krytyczne.

Wykorzystując związki (3.7) i (3.8) otrzymujemy

$$(3.9) \quad \tau_0 = 0,731 \frac{E'\alpha'}{\left[\frac{E'\alpha'}{E''\bar{\alpha}''}(1-\nu'v'')\right]^{5/8}} \frac{h}{R\sqrt{\frac{L}{Rh}}}.$$

Górny moment krytyczny M_{kr_0} znajdujemy ze wzoru

$$(3.10) \quad M_{kr_0} = 2R^2 h \tau_0 = 4,6 \frac{E'\alpha'}{\left[\frac{E'\alpha'}{E''\bar{\alpha}''}(1-\nu'v'')\right]^{5/8}} \frac{Rh^2}{\sqrt{\frac{L}{Rh}}}.$$

Z obliczeń wynika, że $\bar{Y} = \bar{Y}_0$ wtedy, gdy

$$(3.11) \quad k = 1,887\vartheta = 1,24\bar{X}^{-1/4}, \quad \vartheta = \frac{\pi R}{nL} = 0,6571\bar{X}^{-1/4},$$

$$n = \frac{\pi R}{\vartheta L} = 4,78\sqrt[4]{\bar{X}} \frac{R}{L} = 4,02 \sqrt{\frac{R^4}{L}} \sqrt{\frac{R}{h}} \sqrt{\frac{E'\alpha'}{E''\bar{\alpha}''}(1-\nu'v'')}.$$

W przypadku powłok nieźebrowanych należy podstawić

$$(3.12) \quad \alpha' = \bar{\alpha}'' = 1,$$

a dla powłok izotropowych

$$E' = E'' = E, \quad \nu' = \nu'' = \nu.$$

Dla tego przypadku przyjęto oznaczenia

$$(3.13) \quad Y_0 = \bar{Y}_0 \text{ izotrop} = \frac{\tau_0(1-\nu^2)L^2}{Eh^2}, \quad Y = \frac{\tau(1-\nu^2)L^2}{Eh^2},$$

$$X = \bar{X}_{\text{izotrop}} = \frac{L^2}{2Rh} \sqrt{1-\nu^2}.$$

Dla powłok izotropowych przyjmuje się często $\nu=0,3$ i wówczas

$$(3.14) \quad \tau_0 = 0,777 \frac{Eh}{R\sqrt{L/\sqrt{Rh}}}, \quad M_{kr_0} = 4,88 \frac{ERh^2}{\sqrt{L/\sqrt{Rh}}}, \quad n = 3,97 \sqrt{R/L} \sqrt[4]{R/h}.$$

W celu zbadania zachowania się powłoki po utracie stateczności rozwiązano omawiane tu zadanie w ujęciu nieliniowym. Wykorzystano warunek okresowości funkcji v :

$$(3.15) \quad \int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \pi \left(f_2 - f_1^2 \frac{n^2}{4R} \right) = 0,$$

z którego wynika następująca zależność między parametrami f_2 i f_1 :

$$(3.16) \quad f_2 = f_1^2 \frac{n^2}{4R}.$$

W pracy [1] wykazano, że dolne naprężenie krytyczne wynosi

$$(3.17) \quad \tau_{\min} = \beta \tau_0 = 0,855 \tau_0.$$

Związek między naprężeniem a parametrem f_1 , wyrażony w wielkościach bezwymiarowych, można określić następująco:

$$(3.18) \quad \frac{\bar{Y}}{\bar{Y}_0} = 1 + 1095 f^2 (f^2 - 0,023),$$

gdzie

$$(3.19) \quad f = \frac{f_1}{h} \delta_0 \sqrt{\bar{X}}, \quad \delta_0 = \frac{Rh}{L^2}.$$

Dzięki wprowadzonym podstawieniom udało się dla skręcanych powłok bezwymiarowe naprężenie względne (\bar{Y}/\bar{Y}_0) przedstawić w zależności od f w postaci jednej krzywej, którą podano na rys. 2.

Ekstrema funkcji (3.18) występują dla następujących wartości f :

maksimum dla

$$(3.20) \quad f = f_0 = 0;$$

minimum dla

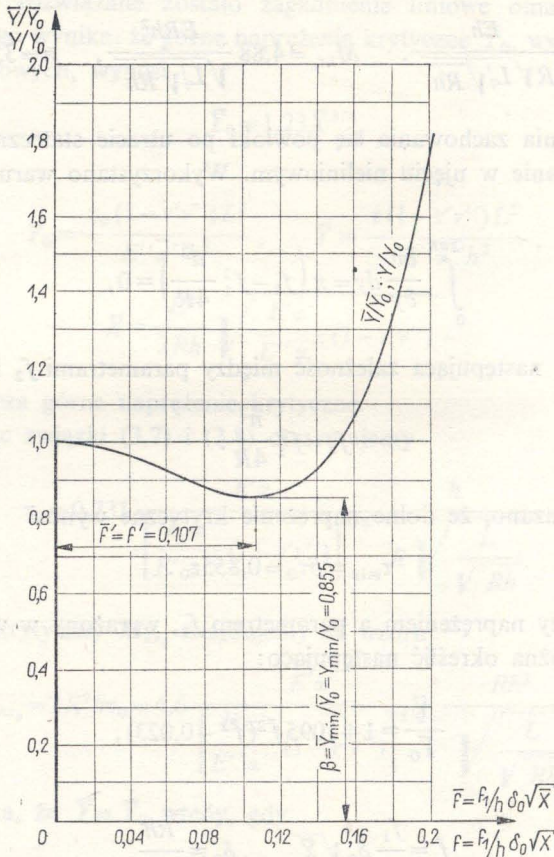
$$(3.21) \quad f = \pm f' = \pm 0,107.$$

Maksimum funkcji wynosi $[\bar{Y}/\bar{Y}_0]_{\max} = 1$, czyli dla naprężenia \bar{Y} równego naprężeniu krytycznemu \bar{Y}_0 , a $[\bar{Y}/\bar{Y}_0]_{\min}$ równe jest współczynnikowi β :

$$(3.22) \quad \beta = \frac{\bar{Y}_{\min}}{\bar{Y}_0} = \left[\frac{\bar{Y}}{\bar{Y}_0} \right]_{\min} = \left[\frac{\bar{Y}}{\bar{Y}_0} \right]_{f=\pm 0,107} = 0,855,$$

czyli

$$(3.23) \quad \bar{Y}_{\min} = \beta \bar{Y}_0 = 0,855 \bar{Y}_0.$$



Rys. 2

Dolne naprężenia krytyczne τ_{\min} określone są wzorem (3.17), natomiast dolny moment krytyczny

$$(3.24) \quad M_{\text{kr}_{\min}} = \beta M_{\text{kr}_0} = 0,855 M_{\text{kr}_0}.$$

Przed osiągnięciem naprężeń krytycznych (teoretycznie) powłoka się nie faluje, wobec tego w jej ścianie występuje czyste ścinanie, któremu towarzyszą naprężenia

$$(3.25) \quad \tau = \frac{M_s}{2\pi R^2 h}.$$

Kąt skręcenia powłoki jest proporcjonalny do wielkości tych naprężeń i wyraża się wzorem

$$(3.26) \quad \theta = \frac{\gamma L}{R} = \frac{\tau L}{GR}.$$

Kąt krytyczny, czyli kąt odpowiadający naprężeniu krytycznemu τ_0 , oznaczono symbolem θ_0 :

$$(3.27) \quad \theta_0 = \frac{\tau_0 L}{GR} = 0,3075 \frac{E'\alpha'}{G} \bar{X}^{-5/4} \left(\frac{L}{R}\right)^3.$$

Wzór na średni kąt skręcenia θ_{sr} dla powłoki po utracie stateczności wynosi

$$(3.28) \quad \theta_{sr} = -\frac{1}{2\pi R^2} \int \int_F \left(\frac{1}{Gh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

Dla zagadnienia nieliniowego podstawiono do powyższego wzoru funkcje (3.5) i (3.2) i otrzymano

$$(3.29) \quad \theta_{sr} = \frac{\tau L}{GR} + 7,09 \bar{X}^{-3/4} \left[\frac{f_1}{h} \delta_0 \sqrt{\bar{X}} \right]^2 \left(\frac{L}{R}\right)^3 = \frac{\tau L}{GR} + 7,09 \bar{X}^{-3/4} f^2 \left(\frac{L}{R}\right)^3.$$

Względny kąt skręcenia odniesiony do kąta krytycznego θ_0 wynosi

$$(3.30) \quad \frac{\theta_{sr}}{\theta_0} = \frac{\bar{Y}}{\bar{Y}_0} + 23,05 \frac{G}{E'\alpha'} \sqrt{\bar{X}} f^2.$$

W powyższym wzorze θ_{sr}/θ_0 zależy od \bar{Y}/\bar{Y}_0 i od ugięcia \bar{f} .

Ze wzoru (3.30) i wykresu na rys. 2 widać, że w obszarze pozakrytycznym istnieje zależność parametru \bar{f} od \bar{Y}/\bar{Y}_0 , więc kąt skręcenia θ_{sr}/θ_0 można uzależnić od względnego naprężenia stycznego \bar{Y}/\bar{Y}_0 .

Dla powłoki izotropowej nieźebrowanej mamy

$$(3.31) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \bar{f}_{izotrop} = f = \frac{f_1}{h} \delta_0 \sqrt{\bar{X}}, \quad \frac{\theta_{sr}}{\theta_0} = \frac{Y}{Y_0} + \frac{11,52}{1+\nu} \sqrt{\bar{X}} f^2.$$

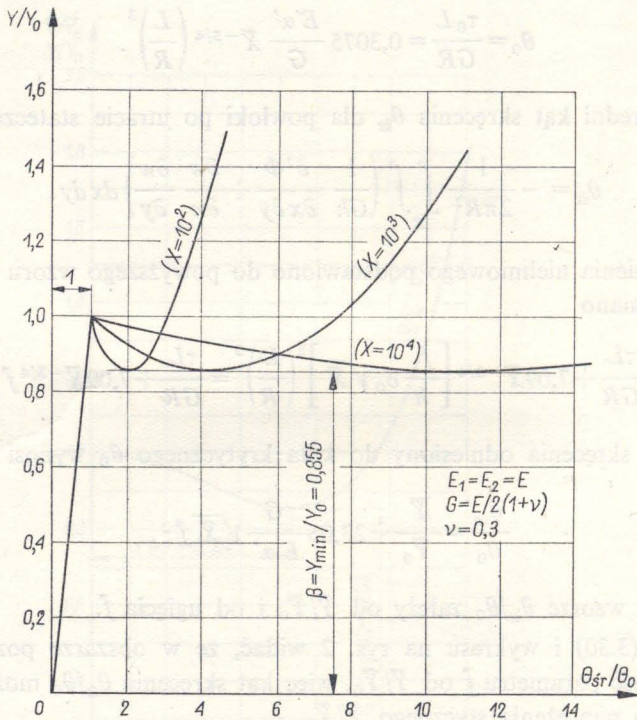
Gdy $\nu=0,3$, to

$$(3.32) \quad \left[\frac{\theta_{sr}}{\theta_0} \right]_{\nu=0,3} = \frac{Y}{Y_0} + 8,86 \sqrt{\bar{X}} f^2.$$

Poprzednio wykazano, że θ_{sr}/θ_0 zależy od Y/Y_0 . Korzystając więc z wyżej wprowadzonego wzoru oraz danych otrzymanych ze wzoru (3.18) lub rys. 2, wykonano wykresy naprężeń względnych Y/Y_0 jako funkcji kąta skręcenia powłoki (rys. 3). Naprężenia Y/Y_0 zależą nie tylko od f ale i od X . Wykresy dla powłoki izotropowej, dla której $\nu=0,3$, wykonano dla przykładu dla trzech wartości X , mianowicie 10^2 , 10^3 i 10^4 .

Średnie przemieszczenie osiowe przekroju poprzecznego powłoki, określonego współrzędną $x=x_1$, wynosi

$$(3.33) \quad [u_{sr}]_{x=x_1} = \frac{\int_0^{2\pi R} \left[\int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] dy}{2\pi R}.$$



Rys. 3

Wykorzystując (2.6) i (2.8)₁ mamy dla zagadnienia liniowego

$$(3.34) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{1}{E_1 h} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right).$$

Z rozwiązania zagadnienia liniowego wynika, że $u_{sr} = 0$, czyli że przy skręcaniu do chwili utraty stateczności dowolne przekroje poprzeczne powłoki nie przemieszczają się w kierunku wzdłużnym.

W przypadku uwzględnienia nieliniowości z (2.7) i (2.8) mamy natomiast

$$(3.35) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{E_1 h} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2;$$

$$(3.36) \quad u_{sr} = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \left[\int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] dy = \\ = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{x_1} dx \int_0^{2\pi R} \left[\frac{1}{E_1 h} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dy.$$

Do powyższego wzoru należy podstawić (3.5) i (3.2). Całkowite skrócenie powłoki ΔL określono przyjmując górną granicę całkowania $x_1 = L$:

$$(3.37) \quad \Delta L = [u_{sr}]_{x_1=L} = -\frac{L}{4} \left[f_1^2 \frac{n^2}{4R^2} (a_1^2 + b_1^2) + f_2^2 \frac{\pi^2}{L^2} \right],$$

a po wykorzystaniu wzoru (3.16) wynikającego z warunku okresowości i po przekształceniach otrzymano

$$(3.38) \quad \Delta L = -\frac{80,7}{\bar{X}} L \left(\frac{L}{R} \right)^2 f^2 (f^2 + 0,0698).$$

Do chwili utraty stateczności $f_1 = 0$ również $f^2 = 0$, a więc i skrócenie powłoki $\Delta L = 0$. W obszarze pozakrytycznym wzrost amplitudy fal powoduje wzrost skrócenia ΔL .

4. STATECZNOŚĆ SKRĘCANEJ POWŁOKI, KTÓREJ KRAWĘDZIE NIE MAJĄ MOŻLIWOŚCI WZDŁUŻNEGO PRZEMIESZCZANIA SIĘ WZGLĘDEM SIEBIE

Zadanie rozwiązano stosując analogiczną metodę do przedstawionej w p. 3.

Funkcję ugięcia określono związkami (3.1) i (3.2). Jak wynika ze wzorów (3.37) i (3.38) podczas skręcania do chwili utraty stateczności długość powłoki nie ulega zmianie, $\Delta L = 0$ ($f^2 = 0$).

Rozwiązania zagadnień liniowych dla zadań omawianych w p. 3 i 4 są identyczne, wobec tego górne naprężenia krytyczne \bar{Y}_0 , τ_0 , moment krytyczny $M_{k_{r_0}}$, parametr k i \mathcal{J} oraz liczba fal na obwodzie n określone są wzorami od (3.7) do (3.14).

Po utracie stateczności, na skutek niemożności występowania względnych, wzdlużnych przemieszczeń krawędzi, w powłoce pojawiają się dodatkowe siły rozciągające. Siły te odniesiono do jednostki obwodu powłoki, a średnią ich wartość oznaczono symbolem N'_x .

Funkcja naprężeń w stosunku do postaci (3.5) ulegnie zmianie, gdyż wzrośnie o składnik Φ' :

$$(4.1) \quad \Phi' = N'_x \frac{y^2}{2} \quad \left(\text{gdzie} \quad \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} = N'_x \right)$$

czyli

$$(4.2) \quad \Phi = \{\Phi_1\} + \Phi_2 + N'_x \frac{y^2}{2} = \left\{ E_1 h f_1 \frac{R}{2n^2} (a_1 \cos \alpha_1 - b_1 \cos \beta_1) - (\tau h) xy \right\} + \\ + E_1 h \left[f_1^2 \frac{\vartheta^2}{32} \left(\frac{1}{E_0 \vartheta^4} \cos \frac{2\pi x}{L} + \cos \frac{2n(kx-y)}{R} \right) + \right. \\ \left. + f_1 f_2 \frac{\vartheta^2}{2} (-\cos \alpha_1 + \cos \beta_1 + \cos \alpha_3 - \cos \beta_3) - f_2 \frac{R}{8n^2 \vartheta^2 E_0} \cos \frac{2\pi x}{L} \right] + N'_x \frac{y^2}{2}.$$

Z przyjętych założeń wynika, że $u=0$ dla $x_1=L$. Wykorzystując wzór (3.36) i przyjmując $x_1=L$, otrzymujemy

$$(4.3) \quad \frac{1}{2\pi R} \int_0^L dx \int_0^{2\pi R} \left[\frac{1}{E_1 h} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dy = 0.$$

Stąd po podstawieniu do powyższego równania funkcji (4.2) i (3.2) obliczono dodatkową, rozciągającą siłę przekrojową N'_x :

$$(4.4) \quad N'_x = \frac{E_1 h}{4} \left[f_1^2 \frac{n^2}{4R^2} (a_1^2 + b_1^2) + f_2^2 \frac{\pi^2}{L^2} \right].$$

Ze wzoru tego wynika, że siła N'_x zależy od amplitudy fal.

Mając funkcję naprężeń (4.2) i funkcję ugięcia (3.2), skorzystano ze wzoru (2.11) i znaleziono całkowitą energię układu:

$$(4.5) \quad U = A_0 \left\{ f_1^4 \left(\frac{1}{16E_0} + \frac{\vartheta^4}{16} \right) + f_1^2 f_2^2 4\vartheta^4 - f_1^2 f_2 \frac{2R\vartheta^2}{n^2} \left(a_1^2 + b_1^2 + \frac{1}{4E_0 \vartheta^2} \right) + \right. \\ \left. + f_2^2 \frac{R^2}{n^4} \left(\frac{1}{E_0} + \frac{16D_1 n^4 \vartheta^4}{E_1 h R^2} \right) + f_1^2 \frac{4R^2 k}{E' \alpha' n^2} (\tau_0 - \tau) + \left[f_1^2 \frac{\sqrt{2}}{8} (a_1^2 + b_1^2) + f_2^2 \vartheta^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^2 \right\} - \\ - \frac{\pi R L h}{G} \tau^2 = A_0 \vartheta^4 \left\{ f_1^4 0,5 + f_1^2 f_2^2 6,28 + f_1^4 \left(\frac{1}{16E_0 \vartheta^4} + 2,66 \right) + \right. \\ \left. + f_2^2 \frac{R^2}{n^4} \left(\frac{1}{E_0 \vartheta^4} + \frac{16D_1 n^4}{E_1 h R^2} \right) + f_1^2 f_2 \frac{R}{n^2} \left(-18,25 - \frac{1}{2E_0 \vartheta^4} \right) + \right. \\ \left. + f_1^2 \frac{4R^2 k}{E_1 n^2 \vartheta^4} (\tau_0 - \tau) \right\} - \frac{\pi R L h}{G} \tau^2,$$

gdzie

$$A_0 = \frac{\pi E_1 h L n^4}{8 R^3}.$$

Założono z kolei tak samo jak i w p. 3, że przy skręcaniu powłoki po utracie stateczności wielkości k i ϑ nie ulegają zmianie. Podstawiono $k=1,8879$ czyli $a_1 =$

$=2,8879$ i $b_1=0,8879$ [wynika to ze związków (3.3)]. Wykorzystany został następnie warunek okresowości funkcji $v \left(\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \right)$ oraz wzory (2.7)₂ i (2.8)₂:

$$(4.6) \quad \int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left[\frac{1}{E_2 h} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R} \right] dy = \\ = \pi \left\{ f_2 \left[1 - \frac{\pi^2}{2} \delta_0 \nu_1 \left(\frac{f_2}{h} \right) \right] - f_1^2 \frac{n^2}{4R} \left[1 + \frac{(a_1^2 + b_1^2)}{2} \nu_1 \right] \right\} = 0.$$

Można wykazać, że wyrażenie $(\pi^2/2) \delta_0 \nu_1 (f_2/h)$ jest pomijalnie małe w porównaniu z jednością, powyższy więc warunek ma postać

$$(4.6') \quad \int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy \approx \pi \left\{ f_2 - f_1^2 \frac{n^2}{4R} \left[1 + \frac{(a_1^2 + b_1^2)}{2} \nu_1 \right] \right\} = 0.$$

Stąd wynika następujący związek między parametrem f_2 i f_1 :

$$(4.7) \quad f_2 = f_1^2 \frac{n^2}{4R} \left[1 + \frac{(a_1^2 + b_1^2)}{2} \nu_1 \right] = f_1^2 \frac{n^2}{4R} \left(1 + \frac{1,97\nu_1}{\sqrt{X}} \right).$$

Wielkość $1,97\nu_1/\sqrt{X}$ jest mała w porównaniu z jednością, a więc

$$(4.7') \quad f_2^2 \approx \left(f_1^2 \frac{n^2}{4R} \right)^2 \left(1 + \frac{2 \cdot 1,97\nu_1}{\sqrt{X}} \right), \quad f_2^4 \approx \left(f_1^2 \frac{n^2}{4R} \right)^4 \left(1 + \frac{4 \cdot 1,97\nu_1}{\sqrt{X}} \right).$$

Wyrażenia (4.7) i (4.7') podstawiono do wzoru na całkowitą energię (4.5) i otrzymano

$$(4.8) \quad U = A_0 \vartheta^4 \left[\frac{f_1^8 n^8}{8R^4} \left(0,0156 + \frac{0,123\nu_1}{\sqrt{X}} \right) + \frac{f_1^6 n^4}{6R^2} \left(2,35 + \frac{9,25\nu_1}{\sqrt{X}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{f_1^4}{4} \left(-7,6 - \frac{36\nu_1}{\sqrt{X}} \right) + \frac{f_1^2}{2} \frac{8R^2 k}{E_1 n^2 \vartheta^4} (\tau_0 - \tau) \right] - \frac{\pi R L h}{G} \tau^2.$$

Warunek na ekstremum funkcji U ($\partial U / \partial f_1 = 0$) po przekształceniach doprowadzić można do postaci

$$(4.9) \quad \frac{\partial U}{\partial f_1} = 0,715 A_0 \vartheta^4 \left(\frac{h}{\delta_0 \sqrt{X}} \right)^3 f \left[- \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Y}_0} \right) + 1 - f^2 \left(10,62 + \frac{50,3\nu_1}{\sqrt{X}} \right) + \right. \\ \left. + f^4 \left(1730 + \frac{6800\nu_1}{\sqrt{X}} \right) + f^6 \left(6000 + \frac{47300\nu_1}{\sqrt{X}} \right) \right] = 0.$$

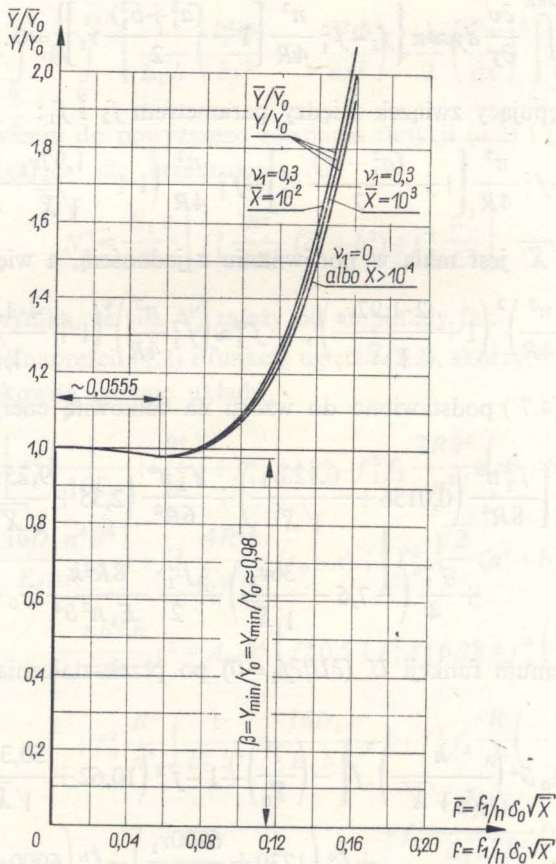
Równowaga powłoki występuje wtedy, gdy całkowita energia (4.8) osiąga ekstremum. Ze związku (4.9) wynika, że równowaga zachodzi, jeżeli

$$(4.10) \quad f = \frac{f_1}{h} \delta_0 \sqrt{X} = 0$$

oraz

$$(4.11) \quad \frac{\bar{Y}}{\bar{Y}_0} = 1 - f^2 \left(10,62 + \frac{50,3v_1}{\sqrt{\bar{X}}} \right) + f^4 \left(1730 + \frac{6800v_1}{\sqrt{\bar{X}}} \right) + f^6 \left(6000 + \frac{47300v_1}{\sqrt{\bar{X}}} \right).$$

W przypadku spełnienia zależności (4.10) mamy do czynienia z powłoką niepofalowaną. Po utracie stateczności związek między bezwymiarowym względnym naprężeniem \bar{Y}/\bar{Y}_0 i bezwymiarowym parametrem $f = (f_1/h)\delta_0 \sqrt{\bar{X}}$ określony jest wzorem (4.11). Ze wzoru tego widać, że naprężenie \bar{Y}/\bar{Y}_0 zależy nie tylko od parametru f , ale również od liczby Poissona v_1 i od \bar{X} . Funkcja \bar{Y}/\bar{Y}_0 przedstawiona została w postaci wykresów na rys. 4. Wykresy wykonano dla $v_1=0$ oraz dla $v_1=0,3$ i \bar{X} równego 10^2 , 10^3 i 10^4 .



Rys. 4

Z wykresów widać, że wpływ liczby Poissona v_1 i parametru \bar{X} na wartość \bar{Y}/\bar{Y}_0 jest nieduży, a gdy $\bar{X} \geq 10^4$ — pomijalnie mały. Stosunek \bar{Y}_{\min}/\bar{Y}_0 określono symbolem β . Jak wynika z obliczeń, współczynnik β w nieznacznym stopniu zależy od \bar{X} i v_1 i wynosi $\beta \approx 0,98$; zachodzi to dla $f \approx 0,0555$. Ostatecznie bezwymiarowe

dolne naprężenia krytyczne \bar{Y}_{\min} powłok walcowych, dla których $\bar{X} \geq 100$ i dla których krawędzie przy skręcaniu nie mają swobody względnych, wzdłużnych przemieszczeń, wynoszą

$$(4.12) \quad \bar{Y}_{\min} = \beta \bar{Y}_0 = 0,98 \bar{Y}_0.$$

Dolne naprężenia krytyczne są więc tylko o 2% niższe od górnych naprężeń:

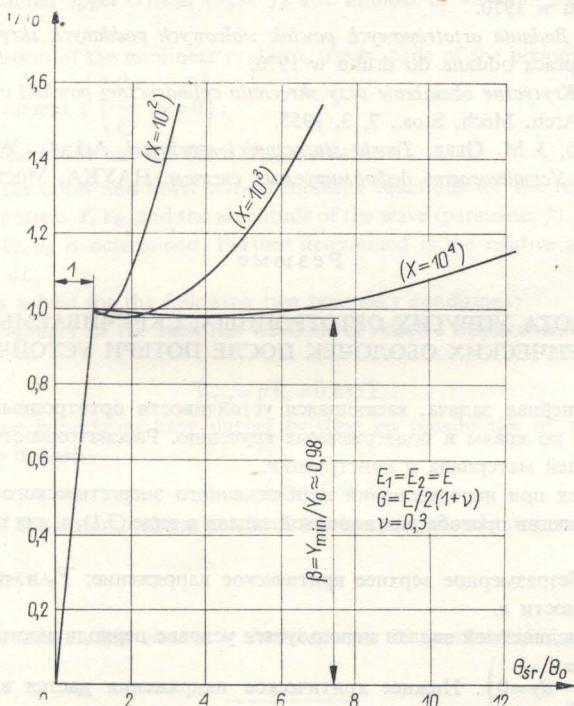
$$(4.13) \quad \tau_{\min} = \beta \tau_0 = 0,98 \tau_0.$$

Dolny moment krytyczny wynosi

$$(4.14) \quad M_{kr_{\min}} = \beta M_{kr_0} = 0,98 M_{kr_0}.$$

Wielkości τ_0 i M_{kr_0} określone są wzorami (3.9), (3.10) i (3.14)_{1,2}.

Względny kąt skręcenia powłoki θ_{sr}/θ_0 znajdujemy podobnie jak w p. 3; kąt ten określony jest wzorami: dla powłoki ortotropowej — wzorem (3.30), dla powłoki izotropowej nieźebrowanej — wzorem (3.31)₃ lub (3.32).



Rys. 5

Fakt, że wzory na θ_{sr}/θ_0 w p. 3 i 4 są identyczne, nie oznacza wcale, że kąty skręcenia powłok rozważanych w tych punktach są jednakowe. Względny kąt skręcenia θ_{sr}/θ_0 zależy od funkcji \bar{Y}/\bar{Y}_0 i f^* , a związek między tymi funkcjami po utracie stateczności w obu porównywanych przypadkach jest odmienny. Widać to z wykresów zamieszczonych na rys. 2 i 4.

W obszarze pozakrytycznym względny kąt skręcenia θ_{sr}/θ_0 zależy od stałych materiałowych, wymiarów geometrycznych powłoki, naprężeń względnych i od wielkości ugięcia (czyli od parametrów $G, E_1, \bar{X}, \bar{Y}/\bar{Y}_0$ i \bar{f}).

Korzystając ze wzoru (4.11) lub z wykresów na rys. 4 oraz ze wzorów (3.30), (3.31) i (3.32) można określić wykres funkcji \bar{Y}/\bar{Y}_0 lub Y/Y_0 w zależności od względnego kąta skręcenia powłoki. Wykresy funkcji Y/Y_0 zanalizowano dla przypadku powłok izotropowych przy $\nu=0,3$ dla $X=10^2, 10^3, 10^4$ i wyniki przedstawiono na rys. 5.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. GAŁKIEWICZ, *Nieliniowe zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki walcowej poddanej skręcaniu*, Arch. Budowy Maszyn, **12**, 4, 1965.
2. T. GAŁKIEWICZ, *Stateczność ortotropowej żebrowanej długiej powłoki walcowej*, Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej, Mechanika, z. 10, nr 51, 1963.
3. T. GAŁKIEWICZ, *Analiza wzorów dotyczących stateczności powłok walcowych i stożkowych, podpartych swobodnie na krawędziach i poddanych skręcaniu*, Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej, praca oddana do druku w 1970.
4. T. GAŁKIEWICZ, *Badania ortotropowych powłok walcowych poddanych skręcaniu*, Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej, praca oddana do druku w 1970.
5. Z. PARSEWSKI, *Krytyczne obciążenie przy skręcaniu cylindrycznej powłoki ortotropowej o skończonej długości*, Arch. Mech. Stos., **7**, 3, 1955.
6. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
7. A. C. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, НАУКА, Москва 1967.

Резюме

РАБОТА УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ, СКРУЧИВАЕМЫХ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Решается нелинейная задача, касающаяся устойчивости ортотропных цилиндрических оболочек, опертых по краям и подверженных кручению. Рассматриваются оболочки, обладающие ортотропией материала и конструкции.

Задача решается при использовании приближенного энергетического метода. Предполагается форму функции прогиба для линейной задачи в виде (3.1), а для нелинейной задачи в виде (3.2).

Определяется безразмерное верхнее критическое напряжение: \bar{Y}_0 и число волн, возникающих на окружности n .

При решении нелинейной задачи используется условие периодичности окружного перемещения $v \left(\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \right)$. Нижнее критическое напряжения дается в виде $\bar{Y}_{\min} = \beta \bar{Y}_0$.

Даются также формулы для верхнего и нижнего критических моментов и определяются зависимость между безразмерным относительным напряжениям \bar{Y}/\bar{Y}_0 и амплитудой волны (параметром \bar{f}) и относительным углом кручения оболочки θ_{sr}/θ_0 . Определяется также относительные приближение к себе обоих краев оболочки ΔL .

Задача решается для двух следующих краевых условий:

1) когда края оболочки имеют свободу относительного перемещения в продольном направлении, тогда

$$\bar{Y}_{\min} = \beta \bar{Y}_0 = 0,855 \bar{Y}_0;$$

2) когда оба края при кручении не имеют возможности относительного перемещения $\Delta L = 0$ тогда

$$\bar{Y}_{\min} = \beta \bar{Y}_0 = 0,98 \bar{Y}_0.$$

Решение линейной задачи для обоих рассматриваемых краевых условий является идентичным.

SUMMARY

THE WORK OF ELASTIC ORTHOTROPIC TWISTED CYLINDRICAL SHELLS AFTER LOSS OF STABILITY

In this paper consideration is given to a nonlinear problem of the stability of orthotropic cylindrical shells freely supported on the edges and subjected to twisting. Shells of material and constructed orthotropy are examined.

The problem is solved by the application of an approximate energetic method. The shape of the bending function is assumed to be for the linear problem of the form of (3.1) and for the nonlinear problem of the form of (3.2).

The nondimensional upper critical stress \bar{Y}_0 and number of waves in the n circumstance are marked.

During the solution of the nonlinear problem, use is made of the periodical condition of the circumferential movement $v \left(\frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \right)$.

The lower critical stress has the form $\bar{Y}_{\min} = \beta \bar{Y}_0$.

Also given are the upper and lower critical moment equations for the relation between non-dimensional relative stress Y/Y_0 , and the amplitude of the wave (parameter \bar{f}). The relative twisting angle of the shell θ_{st}/θ_0 is determined. Further determined is the relative approach of the two edges of the shell ΔL .

The problem is solved for the following two boundary conditions:

1) when the boundary of the shell has freedom of relative displacement in the longitudinal direction, then

$$\bar{Y}_{\min} = \beta \bar{Y}_0 = 0,855 \bar{Y}_0;$$

2) when the two boundaries have during twisting no possibilities of relative longitudinal displacement $\Delta L = 0$, then

$$\bar{Y}_{\min} = \beta \bar{Y}_0 = 0,98 \bar{Y}_0.$$

The solution of the linear problem for both the boundary conditions considered is identical.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 września 1970 r.