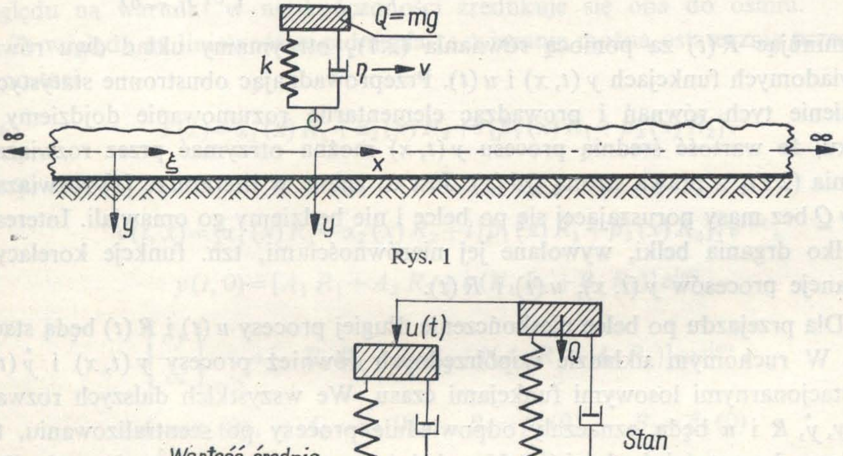
ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 19, 3, 381 – 388, 1971, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

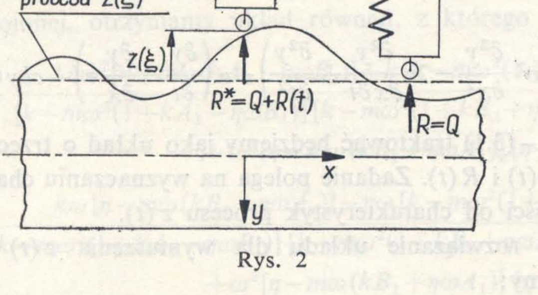
RUCH LINIOWEGO UKŁADU DYNAMICZNEGO PO LOSOWO NIERÓWNEJ BELCE NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ (GDAŃSK)

1. Dana jest nieskończenie długa sprężysta belka o stałej sztywności EJ, szerokości b i masie μ na jednostkę długości, spoczywająca na liniowym podłożu o współczynniku podatności c i lepkim tłumieniu określonym przez α. Górna krawędź belki jest nierówna (rys. 1) i określa ją funkcja $z(\xi)$ (rys. 2), traktowana jako realizacja ergodycznego stacjonarnego procesu o znanych charakterystykach probabili-



Rys. 1



Rys. 2

stycznych (w tym zerowej wartości średniej). Po górnej krawędzi porusza się ze stałą prędkością v układ o jednym stopniu swobody, stałej sprężynowej k i współczynniku tłumienia lepkiego η. Pomija się wpływ nierówności na sztywność belki. Zakłada się, że nierówności mają małe nachylenia i reakcja R jest pionowa.

2. W nieruchomym układzie współrzędnych ξ, y równanie linii ugięcia $y(t, \xi)$ belki ma postać następującą:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4}+\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial y}{\partial t}+cby(t,\xi)=[Q+R(t)]\,\delta(\xi-vt),$$

gdzie Q jest ciężarem masy zawieszonej na sprężynie, a $R(t)$ dodatkową siłą w sprężynie, powstającą wskutek ruchu układu.

Dla ruchomego układu współrzędnych $x=\xi-vt$, y związanego z pojazdem mamy układ równań

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad & EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\mu\left(v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2v\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)+\alpha\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial x}v\right)+cby\,(t,x)=\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=[Q+R(t)]\,\delta(x),\\ & m\frac{d^2u}{dt^2}+R(t)=0,\\ & R(t)=k\,[u(t)+z(t)-y(t,0)]+\eta\left\{\dot{u}(t)+\dot{z}(t)-\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t,\,x=0}\right\}.\end{aligned}$$

Eliminując $R(t)$ za pomocą równania $(2.1)_2$ otrzymamy układ dwu równań o niewiadomych funkcjach $y(t, x)$ i $u(t)$. Przeprowadzając obustronne statystyczne uśrednienie tych równań i prowadząc elementarne rozumowanie dojdziemy do wniosku, że wartość średnią procesu $y(t, x)$ można otrzymać przez rozwiązanie równania $(2.1)_1$ z prawą stroną $Q\delta(x)$. Jest to znane w literaturze [1] rozwiązanie dla siły Q bez masy poruszającej się po belce i nie będziemy go omawiali. Interesują nas tylko drgania belki, wywołane jej nierównościami, tzn. funkcje korelacyjne i wariancje procesów $y(t, x)$, $u(t)$ i $R(t)$.

3. Dla przejazdu po belce nieskończenie długiej procesy $u(t)$ i $R(t)$ będą stacjonarne. W ruchomym układzie współrzędnych również procesy $y(t, x)$ i $\dot{y}(t, x)$ będą stacjonarnymi losowymi funkcjami czasu. We wszystkich dalszych rozważaniach $y, \dot{y}, R$ i u będą oznaczały odpowiednie procesy po scentralizowaniu, tzn. mierzone od wartości średniej (1). Uwzględniając to przepiszemy równanie $(2.1)_1$ w postaci

$$(3.1)\qquad EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\mu\left(v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2v\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)+\alpha\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial x}v\right)+cby(t,x)=R(t)\,\delta(x).$$

Równania $(2.1)_2$ – (3.1) traktować będziemy jako układ o trzech niewiadomych funkcjach $y(t, x)$, $u(t)$ i $R(t)$. Zadanie polega na wyznaczaniu charakterystyk tych procesów w zależności od charakterystyk procesu $z(t)$.

Przeprowadzimy rozwiązanie układu dla wymuszenia $z(t)$ harmonicznego. W tym celu założymy:

$$(3.2)\qquad z=e^{i\omega t},\qquad u=u_0\,e^{i\omega t},\qquad R=R_0\,e^{i\omega t},$$

(1) Wartości średnie dadzą się otrzymać ze wzmiankowanego w p. 2 rozwiązania dla siły Q bez masy. W szczególności wartość średnia reakcji będzie równa Q.

gdzie u_0 i R_0 są liczbami zespolonymi:

(3.3) $$u_0=u_1+iu_2, \quad R_0=R_1+iR_2.$$

Niech prawa strona równania (3.1) będzie równa zeru; przyjmując $y(t, x)= = Y(x)\, e^{i\omega t}$, znajdziemy równanie różniczkowe

(3.4) $$EYJ^{IV}+\mu v^2 Y''-(\alpha v+2v\mu\omega i)\, Y'+(cb-\mu\omega^2+\alpha\omega i)\, Y=0.$$

Przyjmując dalej $Y(x)=Y_1(x)+iY_2(x)$, otrzymamy następujący układ dwu równań różniczkowych:

(3.5) $$\begin{aligned} &EJY_1^{IV}+\mu v^2 Y_1''-v\alpha Y_1'+2v\mu\omega Y_2'+(cb-\mu\omega^2)\, Y_1-\alpha\omega Y_2=0,\\ &EJY_2^{IV}+\mu v^2 Y_2''-v\alpha Y_2'-2v\mu\omega Y_1'+(cb-\mu\omega^2)\, Y_2+\alpha\omega Y_1=0. \end{aligned}$$

Znając całki ogólne tych równań, otrzymujemy rozwiązanie równania (3.1) stosując typowe dla siły skupionej warunki brzegowe, określone dla $x=0$. Dla funkcji Y_1 i Y_2 będą to odpowiednie warunki dla sił $R_1\,\delta(x)$ oraz $R_2\,\delta(x)$. Ze względu na niesymetrię rozwiązania ogólna liczba stałych do wyznaczania wyniesie szesnaście. Ze względu na warunki w nieskończoności zredukuje się ona do ośmiu.

Ze względu na liniowość zagadnienia rozwiązanie można ostatecznie przedstawić w postaci

(3.6) $$Y(x)=\alpha_1(x)\, R_1+\alpha_2(x)\, R_2+i\,[\beta_1(x)\, R_1+\beta_2(x)\, R_2].$$

Mamy więc:

(3.7) $$\begin{aligned} &y(t, x)=\{\alpha_1(x)\, R_1+\alpha_2(x)\, R_2+i\,[\beta_1(x)\, R_1+\beta_2(x)\, R_2]\}\, e^{i\omega t},\\ &y(t, 0)=[A_1 R_1+A_2 R_2+i\,(B_1 R_1+B_2 R_2)]\, e^{i\omega t},\\ &\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{x=0}=[-B_1 R_1-B_2 R_2+i(A_1 R_1+A_2 R_2)]\,\omega e^{i\omega t},\\ &A_1=\alpha_1(0), \quad A_2=\alpha_2(0), \quad B_1=\beta_1(0), \quad B_2=\beta_2(0). \end{aligned}$$

Podstawiając (3.2), (3.3) i (3.7) do $(2.1)_{2,3}$, skreślając $e^{i\omega t}$ i rozdzielając część rzeczywistą od urojonej, otrzymamy układ równań, z którego znajdziemy

(3.8) $$\begin{aligned} u_1&=-\frac{\eta\omega^2[\eta+m\omega(kA_2-\eta\omega B_2)]+k\,[k-m\omega^2(1+kB_2+\eta\omega A_2)]}{[k-m\omega^2(1+kA_1-\eta\omega B_1)]\,[k-m\omega^2(1+kB_2+\eta\omega A_2)]+ +\omega^2[\eta-m\omega(kB_1+\eta\omega A_1)]\,[\eta+m\omega(kA_2-n\omega B_2)]},\\ u_2&=\frac{k\omega\,[\eta-m\omega(kB_1+\eta\omega A_1)]-\eta\omega\,[k-m\omega^2(1+kA_1-\eta\omega B_1)]}{[k-m\omega^2(1+kA_1-\eta\omega B_1)]\,[k-m\omega^2(1+kB_2+\eta\omega A_2)]+ +\omega^2[\eta-m\omega(kB_1+\eta\omega A_1)]\,[\eta+m\omega(kA_2-\eta\omega B_2)]},\\ &R_1=m\omega^2 u_1, \quad R_2=m\omega^2 u_2. \end{aligned}$$

Podobnie oznaczając $Y(0)=Y_1(0)+iY_2(0)$ mamy wg (3.7) dla punktu $x=0$

3.9) $$Y_1(0)=m\omega^2(A_1 u_1+A_2 u_2), \quad Y_2(0)=m\omega^2(B_1 u_1+B_2 u_2),$$

a dla dowolnego punktu belki

$$
(3.10) \qquad \begin{aligned} Y_1(x) &= m\omega^2[\alpha_1(x)u_1+\alpha_2(x)u_2], \\ Y_2(x) &= m\omega^2[\beta_1(x)u_1+\beta_2(x)u_2]. \end{aligned}
$$

Wzory końcowe otrzymamy podstawiając do (3.9) i (3.10) u_1 i u_2 według (3.8).

4. Możemy teraz obliczyć charakterystykę częstościową układu jako stosunek odpowiedzi do wymuszenia przy wymuszeniu harmonicznym. Tak więc charakterystyka przy przejściu od wymuszenia $z(t)=e^{i\omega t}$ do procesu $u(t)$ będzie $\underset{z\to u}{K(i\omega)}\to u_0$. Zatem funkcja korelacyjna procesu $u(t)$ będzie określona wzorem([2])

$$
(4.1) \qquad R_u(\tau) = 2\int_0^\infty |\underset{z\to u}{K(i\omega)}|^2 G_z(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega =
$$

$$
= 2\int_0^\infty \frac{\{\eta\omega^2[\eta+m\omega(kA_2-\eta\omega B_2)]+k[k-m\omega^2(1+kB_2+\eta\omega A_2)]\}^2 + \{k\omega[\eta-m\omega(kB_1+\eta\omega A_1)]-\eta\omega[k-m\omega^2(1+kA_1-\eta\omega B_1)]\}^2}{\{[k-m\omega^2(1+kA_1-m\omega B_1)][k-m\omega^2(1+kB_2+\eta\omega A_2)+ +\omega^2[\eta-m\omega(kB_1+\eta\omega A_1)][\eta+m\omega(kA_2-\eta\omega B_2)]\}^2} \times G_z(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega,
$$

gdzie $G_z(\omega)$ jest gęstością widmową procesu $z(t)$. Wariancję otrzymamy przyjmując $\tau=0$. Funkcje korelacyjne pozostałych procesów na wyjściu otrzymamy w podobny sposób wykorzystując wzory (3.8) - (3.10), z których $\underset{z\to R}{K(i\omega)}\to R_1+iR_2$, $\underset{z\to y(x)}{K(i\omega)}\to Y_1(x)+iY_2(x)$. Formuł rozwiniętych nie podajemy, ponieważ są nadzwyczaj długie.

Wielkości A_1, A_2, B_1 i B_2, występujące pod całkami typu (4.1), są funkcjami parametru ω. Funkcji tych jednak nie da się określić w postaci analitycznej z powodu niemożności ogólnego rozwiązania równań (3.5). Dlatego równania te należy rozwiązywać dla dyskretnych wartości ω. Wówczas całki dadzą się obliczyć numerycznie. Dyskretne wartości ω wystarczy obrać w przedziale istotnym dla całkowania, co nie powinno sprawić trudności dla wąskopasmowej funkcji $G_z(\omega)$.

5. Korzystanie z wyprowadzonych wzorów wymaga znajomości gęstości widmowej $G_z(\omega)$ procesu $z(t)$, oznaczonej w tym punkcie przez $G_{z(t)}(\omega)$, podczas gdy zawsze będzie dana gęstość widmowa $G_{z(\xi)}(\omega)$ procesu $z(\xi)$. Między funkcjami korelacyjnymi tych procesów zachodzi oczywista zależność

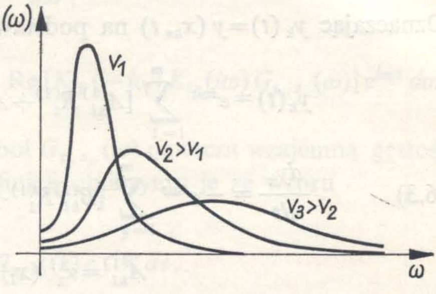
$$
R_{z(\tau)} = R_{z(\xi)}(v\tau),
$$

skąd według definicji

$$
G_{z(t)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{z(\xi)}(v\tau)e^{i\omega\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{z(\xi)}(\xi)e^{i\frac{\omega\xi}{v}}\frac{d\xi}{v} = \frac{1}{v}G_{z(\xi)}\left(\frac{\omega}{v}\right).
$$

([2]) Oznaczenia i wzory teorii procesów stochastycznych przyjęto wg [2], wprowadzając jedynie dodatkowe indeksy dla charakterystyk.

Dla uproszczenia zapisu nie wprowadzono pod drugą całkę nowej zmiennej analogicznej do zmiennej τ, występującej w funkcji $R_z(\tau)$. Charakter zależności gęstości widmowej $G_{z(t)}$ od prędkości v pojazdu pokazano na rys. 3.



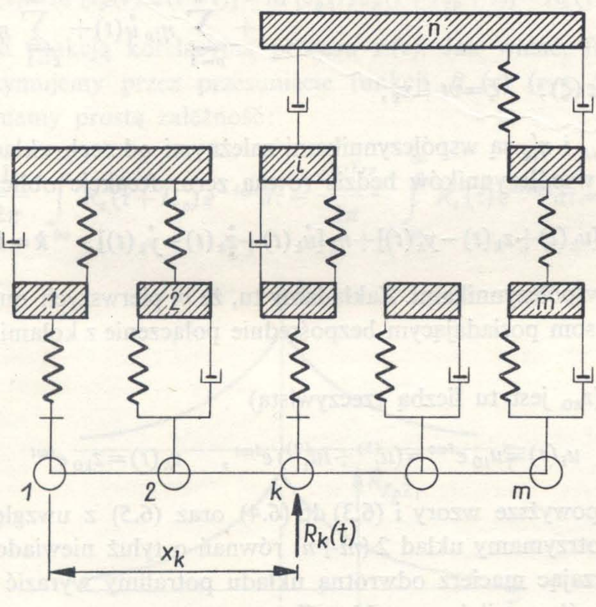
Rys. 3

6. Uogólnimy rozważania na dowolny dynamiczny układ liniowy, składający się z n mas na m kołach, z dowolnymi więzami sprężysto-lepkimi (rys. 4). Równanie ruchu i-tej masy będzie:

$$m_i\frac{d^2u_i}{dt^2}+S_i(t)=0, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{6.1}$$

gdzie $S_i(t)$ jest sumą sił przekazywanych z więzów.

Rozpatruje się (dla prostoty zapisu) przypadek, gdy masy mają tylko swobodę ruchu postępowego; z tych samych powodów zakładamy, że każda z mas związana jest bezpośrednio z co najwyżej jednym kołem, zatem $n \geqslant m$.



Rys. 4

Przyjmując $R_k(t)=R_{k0}\,e^{i\omega t}=(R_k^{(1)}+iR_k^{(2)})\,e^{i\omega t}$, $k=1,2,\ldots,m$, przedstawimy linię ugięcia belki w postaci

$$y(x,t)=e^{i\omega t}\sum_{k=1}^{m}[\alpha_k^{(1)}(x)\,R_k^{(1)}+\alpha_k^{(2)}(x)\,R_k^{(2)}+i(\beta_k^{(1)}(x)\,R_k^{(1)}+\beta_k^{(2)}\,R_k^{(2)})], \tag{6.2}$$

gdzie wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest rozwiązaniem równania (3.4) z prawą stroną równą $(R_k^{(1)}+iR_k^{(2)})\,\delta(x-x_k)$. Oczywiście wystarczy znać rozwiązanie dla $x_k=0$ dane za pomocą wzoru (3.6). Pozostałe rozwiązania otrzymamy przez przesunięcie

$$\alpha_k^{(1)}(x)=\alpha_1(x-x_k),\qquad \alpha_k^{(2)}(x)=\alpha_2(x-x_k),\qquad \beta_k^{(1)}=\beta_1(x-x_k),\qquad \beta_k^{(2)}=\beta_2(x-x_k).$$

Oznaczając $y_k(t)=y(x_k,t)$ na podstawie (6.2) mamy

$$y_k(t)=e^{i\omega t}\sum_{l=1}^{m}[A_{kl}^{(1)}R_l^{(1)}+A_{kl}^{(2)}R_l^{(2)}+i(B_{kl}^{(1)}R_l^{(1)}+B_{kl}^{(2)}R_l^{(2)})],$$

$$\frac{dy_k}{dt}=-e^{i\omega t}\sum_{l=1}^{m}[B_{kl}^{(1)}R_l^{(1)}+B_{kl}^{(2)}R_l^{(2)}-i(A_{kl}^{(1)}R_l^{(1)}+A_{kl}^{(2)}R_l^{(2)})],\tag{6.3}$$

$$A_{kl}^{(1)}=\alpha_k^{(1)}(x_l),\qquad A_{kl}^{(2)}=\alpha_k^{(2)}(x_l),$$

$$B_{kl}^{(1)}=\beta_k^{(1)}(x_l),\qquad B_{kl}^{(2)}=\beta_k^{(2)}(x_l).$$

W bardzo ogólnym przypadku $S_i(t)$ określone jest za pomocą wzoru

$$\begin{aligned}S_i(t)=&\sum_{p=1}^{n}k_{ip}u_p(t)+\sum_{k=1}^{m}k'_{ik}[y_k(t)-z_k(t)]+\\&+\sum_{p=1}^{n}\eta_{ip}\dot{u}(t)+\sum_{k=1}^{m}\eta'_{ik}[\dot{y}_k(t)-\dot{z}(t)],\end{aligned}\tag{6.4}$$

$$z_k(t)=z(\xi),\qquad \xi=vt+x_k,$$

gdzie k_{ip}, k'_{ik}, η_{ip} i η'_{ik} są współczynnikami zależnymi od cech układu. W praktyce większość tych współczynników będzie równa zeru. Reakcje obliczymy ze wzoru

$$R_k(t)=k_k[u_k(t)+z_k(t)-y_k(t)]+\eta_k[\dot{u}_k(t)+\dot{z}_k(t)-\dot{y}_k(t)],\qquad k=1,2,\ldots,m,\tag{6.5}$$

gdzie k_k i η_k są współczynnikami. Zakładamy tu, że m pierwszych numerów przyporządkowano masom posiadającym bezpośrednie połączenie z kołami o tych samych numerach.

Przyjmując (z_{k0} jest tu liczbą rzeczywistą)

$$u_i(t)=u_{i0}\,e^{i\omega t}=(u_i^{(1)}+iu_i^{(2)})\,e^{i\omega t},\qquad z_k(t)=z_{k0}\,e^{i\omega t}\tag{i6.6)}$$

i podstawiając powyższe wzory i (6.3) do (6.4) oraz (6.5) z uwzględnieniem (6.3) ((6.6) do (6.1) otrzymamy układ $2(m+n)$ równań o tyluż niewiadomych $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$, $R_k^{(1)}$ i $R_k^{(2)}$. Obliczając macierz odwrotną układu potrafimy wyrazić te niewiadome jako funkcje współczynników z_{k0}. Np. dla u_i otrzymamy

$$u_i^{(1)}=\sum_{k=1}^{m}\beta_{ik}^{(1)}z_{k0},\qquad u_i^{(2)}=\sum_{k=1}^{m}\beta_{ik}^{(2)}z_{k0}.$$

Zatem odpowiednie charakterystyki będą miały postać

$$K_{ik}(i\omega)\stackrel{\text{def}}{=}\underset{z_k\to u_i}{K(i\omega)}=\beta_{ik}^{(1)}+i\beta_{ik}^{(2)}.$$

Ponieważ $K(-i\omega)=\bar{K}(i\omega)=\beta_{ik}^{(1)}-i\beta_{ik}^{(2)}$, przeto potrafimy obliczyć funkcję korelacyjną procesu $u_i(t)$ [2]:

$$(6.7)\quad R_{u_i}(\tau)=\sum_{k=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}|K_{ik}(i\omega)|^2 G_{z_k}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega+ + \sum_{p,r=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\,[K_{ip}(-i\omega)K_{ir}(i\omega)G_{z_p z_r}(\omega)]\,e^{i\omega\tau}d\omega .$$

Wariancje otrzymamy przyjmując $\tau=0$. Symbol $G_{z_p z_r}(\omega)$ oznacza wzajemną gęstość widmową procesów $z_p(t)$, $z_r(t)$. Według definicji obliczymy je ze wzoru

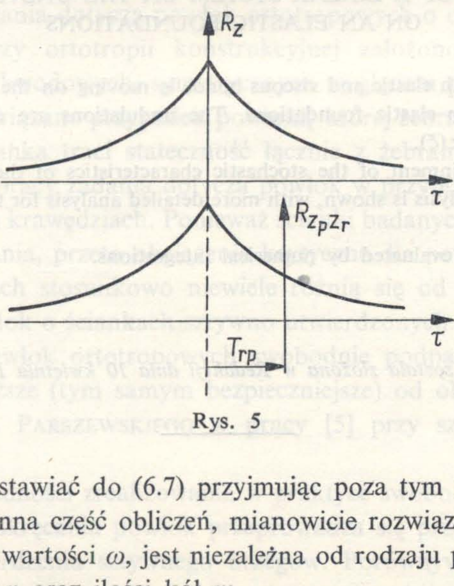
$$(6.8)\qquad G_{z_p z_r}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{z_p z_r}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,$$

w którym $R_{z_p z_r}(\tau)$ oznacza wzajemną funkcję korelacyjną tych procesów. W istocie wszystkie procesy $z_k(t)$ są realizacjami jednego procesu $z(t)$, mają więc te same charakterystyki. Zatem według definicji oraz biorąc pod uwagę, że $z_r(t)=z_p(t+T_{rp})$, $T_{rp}=(x_r-x_p)/v$, otrzymamy z uśrednienia statystycznego

$$(6.9)\qquad R_{z_p z_r}(\tau)=M[z_p(t)z_r(t+\tau)]=M[z_p(t)z_p(t+T_{rp}+\tau)]=R_z(\tau+T_{rp}),$$

gdzie $R_z(\tau)$ jest funkcją korelacyjną procesu $z(t)$. Jak widać, funkcje korelacj wzajemnej otrzymujemy przez przesunięcie funkcji $R_z(\tau)$ (rys. 5). Podstawiając (6.9) do (6.8) mamy prostą zależność:

$$G_{z_p z_r}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_z(\tau+T_{rp})e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{e^{i\omega T_{rp}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_z(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=e^{i\omega T_{rp}}G_z(\omega).$$



Rys. 5

Wzory te należy podstawiać do (6.7) przyjmując poza tym $G_{z_k z_k}=G_z$. Jak widać, najbardziej pracochłonna część obliczeń, mianowicie rozwiązanie układów równań (3.5) dla dyskretnych wartości ω, jest niezależna od rodzaju pojazdu, tzn. od ilości jego stopni swobody n oraz ilości kół m.

Widoczne jest, że przedstawiona metoda ma charakter ogólny i może być stosowana w przypadkach, gdy nierówności znajdują się na dowolnym układzie (płyty, powłoki) niekoniecznie sprężystym. Istotną trudnością będzie zawsze rozwiązanie równań różniczkowych analogicznych do (3.5) rządzących określonym problemem.

Literatura cytowana w tekście

1. J. T. Kenney, *Steady-state vibrations of beams of elastic foundations for moving load*, J. Appl. Mech., No 4, 1954.
2. Н. А. Лившиц, В. И. Пугачев, *Вероятностный анализ систем автоматического управления*, Москва 1963.

Резюме

ДВИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПО НЕРАВНОЙ БАЛКЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

По неравной поверхности бесконечно длинной балки на упругом основании, движется линейная динамическая система. Неравности рассматриваются как стационарная случайная функция (на входе) $z(\xi)$. Показан способ получения, корреляционным методом, вероятностных характеристик случайных функций $u_i(t)$, $y(t, x)$ на выходе. Более подробно рассмотрен случай системы с одной степенью свободы. Интегрирование можно провести численными методами.

Summary

MOTION OF A LINEAR SYSTEM ON THE UNEVEN BEAM ON AN ELASTIC FOUNDATIONS

A dynamic system with elastic and viscous bonds is moving on the undulated surface of an indefinitely long beam on elastic foundations. The undulations are defined as the stationary stochastic input process $z(\xi)$.

The manner of obtainment of the stochastic characteristics of the output processes $u_i(t)$, $y(t, x)$ by correlation analysis is shown, with more detailed analysis for the one-degree-of-freedom system.

The solution can be evaluated by numerical integrations.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 kwietnia 1970 r.