

ÓŚRODEK WŁÓKNISTY JAKO MODEL CIĄGŁY SIATEK RAMOWYCH

C. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI (ŁÓDŹ)

Wstęp

Zajmiemy się podaniem drogi rozwiązywania gęstych siatek ramowych, których modelem będzie pewien ośrodek włóknisty. W oparciu o prace [1 i 2] wyprowadzimy związki pozwalające wyznaczać poszukiwane wielkości statyczne. Rozważania przeprowadzimy dla przypadku siatek nieściśliwych.

Rozpatrujemy ośrodek płaski, złożony z dwóch rodzin włókien. Przyjmujemy, że linie parametryczne pokrywają się z włóknami. Rozważania przeprowadzimy w ramach teorii liniowej (małe gradienty odkształceń) przy założeniu sprężystości i jednorodności ośrodka.

1. Ośrodek włóknisty jako model siatek ramowych. Równania podstawowe

Ogólne równania ośrodka włóknistego zostały wyprowadzone i szczegółowo omówione w pracach [1 i 2]. Tutaj podamy podstawowe równania korzystając z założeń upraszczających, podanych we wstępie.

Równania równowagi dla ośrodka płaskiego przedstawiają się następująco:

$$(1.1) \quad p^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + f^{\beta} = 0, \quad m^{\alpha}{}_{;\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} + h^{\beta} = 0.$$

Wariacja gęstości energii odkształcenia spełnia związek

$$(1.2) \quad \delta\epsilon = p^{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta} + m^{\alpha} \delta\kappa_{\alpha},$$

gdzie

$$(1.3) \quad \gamma_{\alpha\beta} = w_{\beta;\alpha} + \epsilon_{\beta\alpha} \nu, \quad \kappa_{\alpha} = \nu_{,\alpha}.$$

W powyższych oraz dalszych równaniach średnikiem oznaczono pochodną kowariantną, a przecinkiem pochodną cząstkową.

Wprowadzając warunek nieściśliwości włókien

$$(1.4) \quad \gamma_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha = \beta$$

do wzoru (1.2) otrzymujemy

$$(1.5) \quad \delta\epsilon = p^{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta} + m^{\alpha} \delta\kappa_{\alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \beta.$$

Dla ośrodków włóknistych jako modeli ciągłych siatek prętowych mamy

$$(1.6) \quad \epsilon = \frac{1}{2} A^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2} C^{\pi\varrho} \kappa_{\pi} \kappa_{\varrho} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \beta, \quad \mu \neq \nu,$$

gdzie w teorii małych odkształceń dla materiałów podlegających prawu Hooke'a

$$(1.7) \quad A^{\alpha\beta\mu\nu} = \sum_{\Delta} T^{\alpha} T^{\beta} (D_{\Delta}^{\mu} D_{\Delta}^{\nu} R^{\text{II}} + D_{\Delta}^{\mu} D_{\Delta}^{\nu} R^{\text{II}}), \quad C^{\alpha\beta} = \sum_{\Delta} T^{\alpha} T^{\beta} S^{\text{III III}}.$$

Stąd znajdziemy

$$(1.8) \quad A^{1221} = A^{2112} = 0, \quad C^{12} = C^{21} = 0.$$

Z (1.5) wynikają związki fizyczne

$$(1.9) \quad p^{\alpha\beta} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma_{\alpha\beta}}, \quad m^{\alpha} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \kappa_{\alpha}},$$

a następnie

$$(1.10) \quad \begin{aligned} p^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} & \text{dla} \quad \alpha \neq \beta, \quad \mu \neq \nu. \\ m^{\alpha} &= C^{\alpha\varrho} \kappa_{\varrho} \end{aligned}$$

Ostatnie wzory możemy przedstawić w następującej postaci rozwiniętej:

$$(1.11) \quad \begin{aligned} p^{12} &= A^{1212} \gamma_{12} + A^{1221} \gamma_{21}, \\ p^{21} &= A^{2121} \gamma_{21} + A^{2112} \gamma_{12}, \\ m^1 &= C^{11} \kappa_1 + C^{12} \kappa_2, \\ m^2 &= C^{22} \kappa_2 + C^{21} \kappa_1. \end{aligned}$$

Równania fizyczne (1.11) ze względu na (1.8) sprowadzą się do postaci

$$(1.12) \quad \begin{aligned} p^{12} &= A^{1212} \gamma_{12} = A^{1212} (w_{2;1} + \epsilon_{21} v), \\ p^{21} &= A^{2121} \gamma_{21} = A^{2121} (w_{1;2} + \epsilon_{12} v), \\ m^1 &= C^{11} \kappa_1 = C^{11} v_{;1}, \\ m^2 &= C^{22} \kappa_2 = C^{22} v_{;2}. \end{aligned}$$

Ze względu na to, że gęstość energii odkształcenia jest formą kwadratową dodatnio określoną,

$$(1.13) \quad \epsilon = \frac{1}{2} [A^{1212} (\gamma_{12})^2 + A^{2121} (\gamma_{21})^2 + C^{11} (v_{;1})^2 + C^{22} (v_{;2})^2] > 0,$$

spełnione są następujące warunki:

$$(1.14) \quad A^{1212} > 0, \quad A^{2121} > 0, \quad C^{11} > 0, \quad C^{22} > 0.$$

Warunek nieściśliwości włókien (1.4) oraz postać wzorów (1.3) prowadzi do układu równań

$$(1.13) \quad w_{1;1} = 0, \quad w_{2;2} = 0.$$

Z równań równowagi (1.1) otrzymujemy

$$(1.14) \quad (C^{11}v_{;1})_{;1} + (C^{22}v_{;2})_{;2} - \epsilon_{12}\epsilon_{12}(A^{1212} + A^{2121})v = -h - \epsilon_{12}A^{1212}w_{2;1} - \epsilon_{21}A^{2121}w_{1;2}$$

oraz

$$(1.15) \quad \begin{aligned} p^{11}_{;1} + [A^{2121}(w_{1;2} + \epsilon_{12}v)]_{;2} &= -f^1, \\ p^{22}_{;2} + [A^{1212}(w_{2;1} + \epsilon_{21}v)]_{;1} &= -f^2. \end{aligned}$$

W przypadku gdy ośrodek składa się z włókien tworzących krzywoliniową siatkę ortogonalną układ równań (1.13) przyjmuje postać

$$(1.16) \quad \partial_1 w^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \partial_2 \sqrt{a_{11}} w^{(2)} = 0, \quad \partial_2 w^{(2)} + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \partial_1 \sqrt{a_{22}} w^{(1)} = 0,$$

gdzie

$$w^{(1)} \stackrel{df}{=} \sqrt{a_{11}} w^1, \quad w^{(2)} \stackrel{df}{=} \sqrt{a_{22}} w^2$$

są fizycznymi składowymi wektora przemieszczenia w , a a_{ij} są składowymi tensora metrycznego.

Zagadnienie obliczeń dla ośrodka o włóknach nieściśliwych sprowadza się do rozwiązania zagadnienia brzegowego dla układu równań (1.13)–(1.15).

2. Siatki prostokątne

W dalszym ciągu rozważać będziemy ośrodek składający się z włókien tworzących jednorodną siatkę prostokątną. Afinory sztywności A^{1212} , A^{2121} , C^{11} i C^{22} takiej siatki mają wartości stałe.

Dla siatki prostokątnej układ równań (1.16) uprości się:

$$(2.1) \quad w^{(1)}_{;1} = 0, \quad w^{(2)}_{;2} = 0.$$

Jako rozwiązanie otrzymamy

$$(2.2) \quad w^1 = w^{(1)} = \varphi_2(x^2), \quad w^2 = w^{(2)} = \varphi_1(x^1).$$

Równania równowagi (1.1) przyjmą postać

$$(2.3) \quad p^{11}_{;1} + p^{21}_{;2} + f^1 = 0, \quad p^{22}_{;2} + p^{12}_{;1} + f^2 = 0, \quad m^1_{;1} + m^2_{;2} + p^{12} - p^{21} = 0,$$

a związki fizyczne (1.12) sprowadza się do postaci:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} p^{12} &= A^{1212}(\varphi_{1,1} - v), & p^{21} &= A^{2121}(\varphi_{2,2} + v), \\ m^1 &= C^{11}v_{;1}, & m^2 &= C^{22}v_{;2}. \end{aligned}$$

Równanie różniczkowe (1.14), określające niezależny obrót o wektorze prostopadłym do płaszczyzny ośrodka płaskiego, upraszcza się

$$(2.5) \quad C^{11}v_{,11} + C^{22}v_{,22} - (A^{1212} + A^{2121})v = A^{2121}\varphi_{2,2} - A^{1212}\varphi_{1,1}.$$

Z równań równowagi (2.3) wynikają następujące wzory:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} p^{11}_{,1} &= -p^{21}_{,2} - f^1 = -A^{2121}(\varphi_{2,22} + v_{,2}) - f^1, \\ p^{22}_{,2} &= -p^{12}_{,1} - f^2 = -A^{1212}(\varphi_{1,11} - v_{,1}) - f^2; \end{aligned}$$

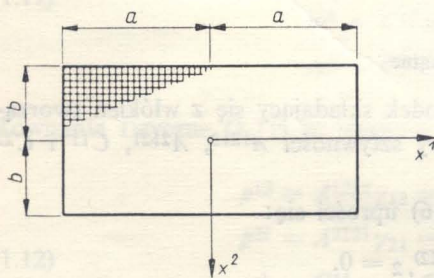
stąd dla $f^1 = f^2 = 0$ otrzymamy

$$(2.7) \quad \begin{aligned} p^{11} &= -A^{2121}[\varphi_{2,22}x^1 + \int v_{,2} dx^1 + \Psi_1(x^2)], \\ p^{22} &= -A^{1212}[\varphi_{1,11}x^2 - \int v_{,1} dx^2 + \Psi_2(x^1)]. \end{aligned}$$

Zagadnienie jednorodnej siatki prostokątnej sprowadza się więc do zagadnienia Helmholtza z odpowiednimi warunkami brzegowymi przemieszczeniowymi i naprężeniowymi.

3. Niektóre rozwiązania dla siatki prostokątnej

W poniższych rozważaniach ograniczymy się do poszukiwania rozwiązań równania różniczkowego (2.5) w postaci iloczynu dwu funkcji jednej zmiennej, a następnie do zbadania, jakiego typu warunki brzegowe możemy spełnić za pomocą tej



Rys. 1

klasy rozwiązań. Zakładamy, że w siatce pojawiły się przemieszczenia $w = \text{const}$ oraz dowolne przemieszczenia $w^2 = \varphi(x^1)$ w kierunku x^2 . Przyjmujemy, że funkcja $\varphi(x^1)$ jest rozwijalna w szereg Fouriera. Ze względów rachunkowych zmieniamy zmienne oraz przesuwamy układ współrzędnych zgodnie z rys. 1 i 2. Równanie różniczkowe (2.5) przyjmuje teraz postać

$$(3.1) \quad v_{,\xi\xi} + v_{,\eta\eta} - \lambda^2 v = \alpha\varphi_{,\xi}(\xi),$$

gdzie

$$(3.2) \quad x^1 = \sqrt{C^{11}}\xi, \quad x^2 = \sqrt{C^{22}}\eta.$$

Stąd

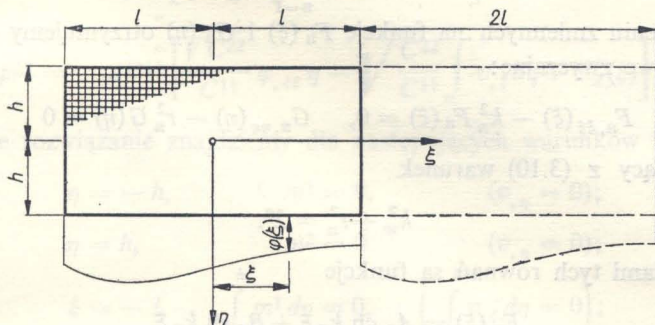
$$a = \sqrt{C^{11}}l, \quad b = \sqrt{C^{22}}h$$

oraz

$$(3.3) \quad \lambda^2 = A^{1212} + A^{2121} > 0, \quad \alpha = -A^{1212} \frac{\partial \xi}{\partial x^1} = -A^{1212} \frac{1}{\sqrt{C^{11}}} < 0.$$

Poszukiwać będziemy rozwiązań w postaci szeregu

$$(3.4) \quad v(\xi, \eta) = \bar{v}(\xi) + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\xi) G_n(\eta).$$



Rys. 2

Ponieważ prawa strona równania różniczkowego (3.1) jest funkcją tylko zmiennej ξ , to całkę szczególną szukamy w postaci $\bar{v} = \bar{v}(\xi)$, a więc jako całki szczególnej równania różniczkowego

$$(3.5) \quad v_{,\xi\xi} - \lambda^2 v = \alpha \varphi_{,\xi}(\xi).$$

Funkcja przemieszczeń $\varphi(\xi)$ niech będzie wyrażona za pomocą szeregu Fouriera

$$(3.6) \quad \varphi(\xi) = w^2(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos p_n \xi + b_n \sin p_n \xi),$$

gdzie

$$p_n = \frac{n\pi}{l} = \frac{n\pi \sqrt{C^{11}}}{a},$$

a współczynniki rozkładu otrzymuje się ze związków

$$(3.7) \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi(\xi) \cos p_n \xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi(\xi) \sin p_n \xi d\xi.$$

Całka szczególna równania (3.5) ma postać

$$(3.8) \quad \bar{v}(\xi) = \alpha \int_{\xi}^{\xi} \varphi(u) \operatorname{ch} \lambda(u - \xi) du + E \operatorname{ch} \lambda \xi + F \operatorname{sh} \lambda \xi.$$

Za pomocą (3.6) otrzymamy

$$(3.9) \quad \bar{v}(\xi) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\lambda^2 + p_n^2} (a_n \sin p_n \xi - b_n \cos p_n \xi) + E \operatorname{ch} \lambda \xi + F \operatorname{sh} \lambda \xi.$$

Całkę ogólną równania jednorodnego

$$(3.10) \quad v_{,\xi\xi} + v_{,\eta\eta} - \lambda^2 v = 0$$

poszukujemy w klasie rozwiązań $v(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\xi) G_n(\eta)$.

Po rozdzieleniu zmiennych na funkcje $F_n(\xi)$ i $G_n(\eta)$ otrzymujemy dwa równania różniczkowe zwyczajne:

$$(3.11) \quad F_{n,\xi\xi}(\xi) - k_n^2 F_n(\xi) = 0, \quad G_{n,\eta\eta}(\eta) - r_n^2 G_n(\eta) = 0$$

oraz wynikający z (3.10) warunek

$$(3.12) \quad k_n^2 + r_n^2 = \lambda^2.$$

Rozwiązaniami tych równań są funkcje

$$(3.13) \quad \begin{aligned} F_n(\xi) &= A_n \operatorname{ch} k_n \xi + B_n \operatorname{sh} k_n \xi, \\ G_n(\eta) &= C_n \operatorname{ch} r_n \eta + D_n \operatorname{sh} r_n \eta. \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku pierwiastki k_n i r_n mogą być zespolone. Możemy więc napisać

$$(3.14) \quad k_n = \alpha_n + i\beta_n, \quad r_n = \gamma_n - i\delta_n.$$

Ze związku (3.12) otrzymujemy dwa następujące równania:

$$(3.15) \quad \alpha_n \beta_n - \gamma_n \delta_n = 0 \quad \alpha_n^2 + \gamma_n^2 - \beta_n^2 - \delta_n^2 = \lambda^2.$$

Z pierwszego z nich wynika

$$(3.16) \quad \delta_n = \frac{\alpha_n \beta_n}{\gamma_n} \quad \text{lub} \quad \beta_n = \frac{\gamma_n \delta_n}{\alpha_n}.$$

Wprowadzając ten związek do drugiego równania otrzymamy

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \gamma_n &= \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 - (\alpha_n^2 - \beta_n^2) \pm \sqrt{\lambda^4 - 2\lambda^2(\alpha_n^2 - \beta_n^2) + (\alpha_n^2 + \beta_n^2)^2}}{2}} \\ \text{lub} \\ \alpha_n &= \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 - (\gamma_n^2 - \delta_n^2) \pm \sqrt{\lambda^4 - 2\lambda^2(\gamma_n^2 - \delta_n^2) + (\gamma_n^2 + \delta_n^2)^2}}{2}}. \end{aligned}$$

Do dalszych rozważań przyjmiemy rozwiązanie równania różniczkowego (3.1) w postaci

$$(3.18) \quad v(\xi, \eta) = \bar{v}(\xi) + \sum_n K_n \operatorname{ch} k_n \xi \operatorname{ch} r_n \eta.$$

Wzory (2.4) oraz (2.7) na składowe wektora naprężenia momentowego oraz na składowe tensora naprężenia mają postać

$$\begin{aligned}
 m^1 &= \sqrt{C^{11}} v_{,\xi}, & m^2 &= \sqrt{C^{22}} v_{,\eta}, \\
 p^{12} &= A^{1212} \left(\frac{1}{\sqrt{C^{11}}} \varphi_{,\xi} - v \right), & p^{21} &= A^{2121} v, \\
 (3.19) \quad p^{11} &= -A^{2121} \left[\sqrt{\frac{C^{11}}{C^{22}}} \int v_{,\xi} d\xi + \Psi_1(\eta) \right], \\
 p^{22} &= -A^{1212} \left[\frac{\sqrt{C^{22}}}{C^{11}} \varphi_{,\xi\xi} \eta - \sqrt{\frac{C^{22}}{C^{11}}} \int v_{,\xi} d\eta + \Psi_2(\xi) \right].
 \end{aligned}$$

Szczególne rozwiązanie znajdziemy dla następujących warunków brzegowych

$$\begin{aligned}
 (3.20) \quad \eta &= -h, & m^2 &= 0, & (v_{,\eta} &= 0); \\
 \eta &= h, & m^2 &= 0, & (v_{,\eta} &= 0); \\
 \xi &= -l, & \int_{-h}^h m^1 d\eta &= 0, & \left(\int_{-h}^h v_{,\xi} d\eta = 0 \right); \\
 \xi &= l, & \int_{-h}^h m^1 d\eta &= 0, & \left(\int_{-h}^h v_{,\xi} d\eta = 0 \right)
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 (3.21) \quad \eta &= -h, & \int_{-l}^l p^{21} d\xi &= 0, & \left(\int_{-l}^l v d\xi = 0 \right), \\
 p^{22} &= 0, & \left(\frac{\sqrt{C^{22}}}{C^{11}} \varphi_{,\xi\xi} \eta - \sqrt{\frac{C^{22}}{C^{11}}} \int v_{,\xi} d\eta + \Psi_2(\xi) = 0 \right), \\
 \eta &= h, & \int_{-l}^l p^{21} d\xi &= 0, & \left(\int_{-l}^l v d\xi = 0 \right); \\
 \xi &= -l, & \int_{-h}^h p^{11} d\eta &= 0, & \left(\int_{-h}^h \left[\sqrt{\frac{C^{11}}{C^{22}}} \int v_{,\eta} d\xi + \Psi_1(\eta) \right] d\eta = 0 \right); \\
 \xi &= l, & \int_{-h}^h p^{11} d\eta &= 0, & \left(\int_{-h}^h \left[\sqrt{\frac{C^{11}}{C^{22}}} \int v_{,\eta} d\xi + \Psi_1(\eta) \right] d\eta = 0 \right).
 \end{aligned}$$

Z warunku (3.20)_{1,2} otrzymujemy:

$$(3.22) \quad \text{sh } r_n h = \text{sh } (\gamma_n - i\delta_n) = 0,$$

stąd

$$(3.23) \quad \gamma_n = 0, \quad \delta_n = \frac{n\pi}{h},$$

a więc

$$r_n = -i\delta_n.$$

Ze wzorów (3.16) i (3.17) wynika

$$(3.24) \quad a_n = \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 + \delta_n^2}{0}}, \quad \beta_n = 0, \quad k_n = a_n,$$

przy czym $a_n = 0$ wyklucza się, jako sprzeczne z warunkiem (3.12).

Warunek (3.20)_{3,4} prowadzi do postaci

$$(3.25) \quad \bar{v}_{,\xi}(l) = 0, \quad \bar{v}_{,\xi}(-l) = 0,$$

a stąd otrzymujemy

$$(3.26) \quad E = \frac{\alpha}{\lambda \operatorname{ch} \lambda l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n p_n^2}{\lambda^2 + p_n^2} a_n, \quad F = 0.$$

Natomiast warunek (3.21)_{4,5} spełniony jest, gdy

$$(3.27) \quad \Psi_1(\eta) = 0.$$

Z warunku (3.21)₂ otrzymujemy

$$(3.28) \quad \Psi_2(\xi) = - \sqrt{\frac{C_{22}}{C_{11}}} h \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^2 (\lambda^2 + p_n^2 + \alpha \sqrt{C_{11}})}{\lambda^2 + p_n^2} (a_n \cos p_n \xi + b_n \sin p_n \xi) + \lambda E \operatorname{ch} \lambda \xi \right].$$

Całkowy warunek (3.21)_{1,3} wyznacza stałą K_n

$$(3.29) \quad K_n = - \frac{\alpha}{\lambda^2} \operatorname{th} \lambda l \frac{p_n^2 k_n}{(\lambda^2 + p_n^2) \operatorname{sh} k_n l} a_n.$$

Dla rozważanych powyżej warunków brzegowych (3.20) i (3.21) rozwiązanie na funkcję niezależnego obrotu v przyjmuje postać

$$(3.30) \quad v(\xi, \eta) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\lambda^2 + p_n^2} (a_n \sin p_n \xi - b_n \cos p_n \xi) + E \operatorname{ch} \lambda \xi + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \operatorname{ch} a_n \xi \cos \delta_n \eta,$$

gdzie kolejne stałe wyznacza się ze związków (3.23), (3.24), (3.26) i (3.29).

Składowe wektora naprężenia momentowego oraz tensora naprężenia obliczamy z (3.19) korzystając z funkcji niezależnego obrotu.

W przypadku gdy $r_n = 0$ ($\gamma_n = 0$, $\delta_n = 0$) ze związku (3.12) i (3.14) wynika

$$(3.31) \quad k_n = a_n = \lambda, \quad \beta_n = 0.$$

W tym przypadku zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego (3.5).

Zgodnie z (3.9) rozwiązanie to przyjmuje postać

$$(3.32) \quad v = v(\xi) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\lambda^2 + p_n^2} (a_n \sin p_n \xi - b_n \cos p_n \xi) + E \operatorname{ch} \lambda \xi + F \operatorname{sh} \lambda \xi.$$

Stąd wynika, że

$$(3.33) \quad m^2 = \sqrt{C^{22}} v_{,\eta} \equiv 0.$$

Przyjmujemy następujące warunki brzegowe:

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \xi = -l, \quad m^1 = 0 \quad (v_{,\xi} = 0), \quad p^{11} = 0 \quad & \left(\sqrt{\frac{C^{11}}{C^{11}}} \int v_{,\eta} d\xi + \Psi_1(\eta) = 0 \right); \\ \xi = l, \quad m^1 = 0 \quad (v_{,\xi} = 0), \quad p^{11} = 0 \quad & \left(\sqrt{\frac{C^{11}}{C^{22}}} \int v_{,\eta} d\xi + \Psi_1(\eta) = 0 \right); \\ \eta = -h, \quad p^{22} = 0 \quad \left(\sqrt{\frac{C^{22}}{C^{11}}} \varphi_{,\xi\xi} \eta - \sqrt{\frac{C^{22}}{C^{11}}} \int v_{,\xi} d\eta + \Psi_2(\xi) = 0 \right); \\ \int_{-l}^l p^{21} d\xi = 0 \quad \left(\int_{-l}^l v d\xi = 0 \right); \\ \eta = h, \quad p^{22} = 0 \quad \left(\sqrt{\frac{C^{22}}{C^{11}}} \varphi_{,\xi\xi} \eta - \sqrt{\frac{C^{22}}{C^{11}}} \int v_{,\xi} d\eta + \Psi_2(\xi) = 0 \right), \\ \int_{-l}^l p^{21} d\xi = 0 \quad \left(\int_{-l}^l v d\xi = 0 \right). \end{aligned}$$

Z warunków tych otrzymujemy

$$(3.35) \quad F = -\frac{\alpha}{\lambda \operatorname{ch} \lambda l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n p_n^2}{\lambda^2 + p_n^2} a_n, \quad E = 0$$

oraz

$$(3.36) \quad \begin{aligned} \Psi_1(\eta) &= 0, \\ \Psi_2(\xi) &= -\sqrt{\frac{C^{22}}{C^{11}}} h \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^2 (\lambda^2 + p_n^2 + \alpha \sqrt{C^{11}})}{(\lambda^2 + p_n^2) \sqrt{C^{11}}} (a_n \cos p_n \xi + b_n \sin p_n \xi) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda F \operatorname{sh} \lambda \xi \right]. \end{aligned}$$

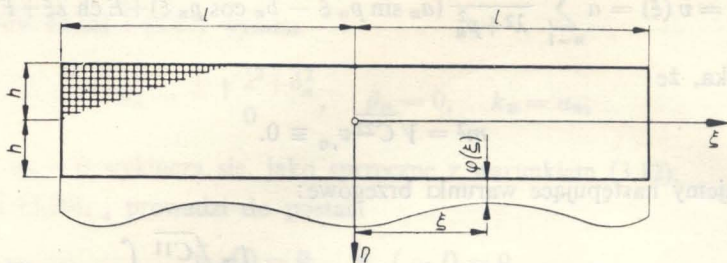
Dla podanych powyżej warunków brzegowych otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie w postaci

$$(3.37) \quad v(\xi) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\lambda^2 + p_n^2} (a_n \sin p_n \xi - b_n \cos p_n \xi) + F \operatorname{sh} \lambda \xi,$$

gdzie F obliczamy z (3.35).

Składowe wektora m i tensora p otrzymujemy ze związków (3.19).

Przedstawione powyżej rozwiązanie może służyć do obliczania długich siatek ramowych poddanych np. osiadaniu. Rysunek 3 przedstawia model takiej siatki,



Rys. 3

która doznała przemieszczenia w kierunku pionowym (kierunek η). Na dłuższych bokach ($\eta = \pm h$) warunki brzegowe spełnione są ściśle, natomiast na bokach krótszych ($\xi = \pm l$) w sposób całkowity. Otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem dokładnym dla obszaru środkowego siatki, oddalonego dostatecznie od brzegów $\xi = -l$ oraz $\xi = l$.

4. Przypadek szczególny. Zagadnienie jednowymiarowe

Rozpatrujemy przypadek, gdy niezależny obrót jest funkcją tylko jednej zmiennej, np. x^1 , $v = v(x^1)$, a składowe wektora przemieszczenia w , $w^1 = \text{const}$, $w^2 = \varphi(x^1)$. Zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania

$$(4.1) \quad v_{,11} - k^2 v = a \varphi_{,1},$$

gdzie

$$(4.2) \quad k^2 = \frac{A^{1212} + A^{2121}}{C^{11}} = \frac{12}{l_{(1)}^2} + \frac{12}{l_{(2)}^2} \frac{C^{22}}{C^{11}}, \quad a = -\frac{A^{1212}}{C^{11}} = -\frac{12}{l_{(1)}^2}$$

wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Rozwiązanie przyjmujemy w postaci

$$(4.3) \quad v(x^1) = C e^{kx^1} + D e^{-kx^1} + \bar{v}(x^1),$$

gdzie $\bar{v}(x^1)$ jest całką szczególną równania różniczkowego (4.1):

$$(4.4) \quad \bar{v}(x^1) = \frac{a}{2k} \left[e^{kx^1} \int e^{-k\xi} \varphi_{,1} d\xi - e^{-kx^1} \int e^{k\xi} \varphi_{,1} d\xi \right] = \frac{a}{2} \int_0^{x^1} \varphi(\xi) \operatorname{ch} k(\xi - x^1) d\xi.$$

Dla kolejnych składowych stanu naprężenia otrzymujemy następujące wzory:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} m^1 &= C^{11} v_{,1}, & m^2 &= C^{22} v_{,2} \equiv 0; \\ p^{12} &= A^{1212} (\varphi_{,1} - v), & p^{21} &= A^{2121} v; \\ p^{11} &= -A^{2121} \Psi_2(x^2), & p^{22} &= -A^{1212} [(\varphi_{,11} - v_{,1}) x^2 + \Psi_1(x^1)]. \end{aligned}$$

Podajemy rozwiązanie dla następujących warunków brzegowych: dla obrotu v

$$(4.6) \quad \begin{aligned} x^1 = -a, \quad m^1 = 0 & \quad (v_{,1} = 0); \\ x^1 = a, \quad m^1 = 0 & \quad (v_{,1} = 0); \\ x^2 = 0, \quad m^2 = 0 & \quad (v_{,2} = 0); \\ x^2 = b, \quad m^2 = 0 & \quad (v_{,2} = 0) \end{aligned}$$

oraz dla składowych tensora naprężenia p

$$(4.7) \quad \begin{aligned} x^1 = -a, \quad p^{11} = 0; \\ x^1 = a, \quad p^{11} = 0; \\ x^2 = 0, \quad p^{22} = 0. \end{aligned}$$

Zakładamy przy tym, że $w^2 = \varphi(x^1)$ jest funkcją parzystą.

Z warunków brzegowych (4.6)_{1,2} wynika, że

$$(4.8) \quad C = D = -\frac{\bar{v}'(a)}{k \operatorname{ch} ka}.$$

Ze względu na (4.8) rozwiązanie przyjmuje postać

$$(4.9) \quad v(x^1) = -\frac{2\bar{v}'(a)}{k \operatorname{ch} ka} \operatorname{sh} kx^1 + a \int_{-x^1}^{x^1} \varphi(\xi) \operatorname{ch} k(\xi - x^1) d\xi.$$

Z warunku (4.7)_{1,2} otrzymujemy

$$(4.10) \quad E = 0, \quad \text{a więc} \quad p^{11} \equiv 0,$$

a z (4.7)₃

$$(4.11) \quad \Psi_1(x^1) = 0.$$

Stąd na podstawie (4.5)₆ otrzymamy

$$(4.12) \quad p^{22} = -A^{1212} \left[\varphi_{,11} - 2kC \operatorname{ch} kx^1 + a\varphi(x^1) - ak \int_{-x^1}^{x^1} \varphi(\xi) \operatorname{sh} k(\xi - x^1) d\xi \right].$$

Spełniony jest tu również warunek całkowy dla naprężenia p^{12} :

$$(4.13) \quad \int_{-a}^a p^{12} dx^1 = 0 \quad \left(\int_{-a}^a v(x^1) dx^1 = 0 \right),$$

gdyż $v(x^1) = -v(-x^1)$.

Dla szczególnego przypadku osiadania siatki ramowej

$$(4.14) \quad w^1 = 0, \quad w^2 = \varphi(x^1) = A(a \cos px^1),$$

gdzie $p = \pi/2a$ otrzymamy

$$(4.15) \quad C = 0$$

i rozwiązanie ma postać

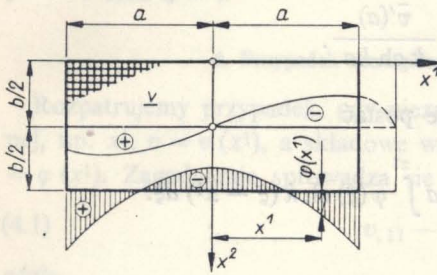
$$(4.16) \quad v(x^1) = \bar{v}(x^1) = -A \frac{ap}{k^2 + p^2} \sin px^1.$$

Dla składowych stanu naprężenia zachodzą związki

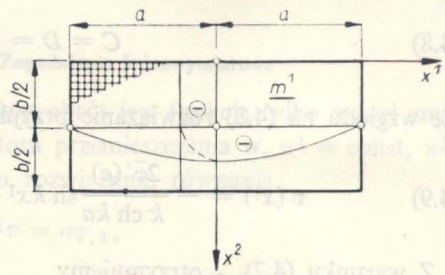
$$m^1 = C^{11}v_{,1} = -A \frac{C^{11}ap}{k^2 + p^2} \cos px^1, \quad m^2 \equiv 0,$$

$$(4.17) \quad p^{21} = -AA^{2121} \frac{ap}{k^2 + p^2} \sin px^1, \quad p^{12} = -AA^{1212} \frac{p(k^2 + p^2 - a)}{k^2 + p^2} \sin px^1,$$

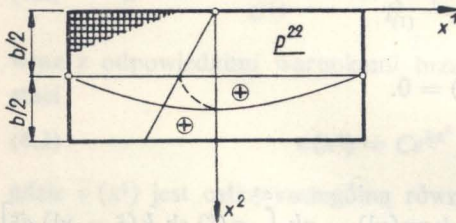
$$p^{11} \equiv 0, \quad p^{22} = AA^{1212} \left[\frac{p^2(a - k^2 - p^2)}{k^2 + p^2} \cos px^1 \right] x^2.$$



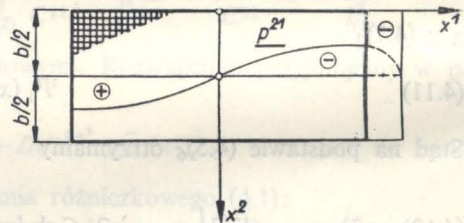
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Wykresy obrazujące rozkład obrotów oraz gęstość sił i momentów w powyższej siatce ramowej przedstawiono kolejno na rys. 4, 5, 6 i 7. Na rys. 4 zaznaczono ponadto rozkład osiadań.

Literatura cytowana w tekście

1. C. WOŹNIAK, *Teoria ośrodków włóknistych (I)*, Arch. Mech. Stos., 5, 17 (1965).
2. C. WOŹNIAK, *Teoria ośrodków włóknistych (II)*, Arch. Mech. Stos., 6, 17 (1965).

Резюме

ВОЛОКНИСТАЯ СРЕДА В КАЧЕСТВЕ СПЛОШНОЙ МОДЕЛИ РАМНЫХ СЕТОК

Рассматривается волокнистая среда в качестве модели густых рамных сеток. Принимается, что однородная сетка состоит из двух семейств кривых. В качестве частных случаев предполагается ортогональная сетка и прямоугольная сетка. Вопрос рассматривается для несжимаемых сеток, которые кроме перемещений, подвергаются независимым оборотам.

При использовании обще применяемых, предположений о несжимаемости стержней, дифференциальных уравнений для составляющих вектора получается система несопряженных перемещений и на функцию независимого вращения, вектор которого перпендикулярен плоскости стенки. Решение рамных сеток сводится к задаче Гельмгольца с соответствующими краевыми условиями.

Рассматриваются решения, в которых независимый оборот выражается с помощью произведения функции первой и второй переменной. При этом принимается, что сетка подверглась, в одном направлении, перемещению (напр. оседанию), выраженным рядом Фурье.

Детально рассматривается решение для прямоугольной сетки в случае, когда независимое вращение является функцией только одной переменной.

Summary

THE FIBROUS MEDIUM AS A CONTINUOUS REPRESENTATION OF FRAME LATTICES

The plane case is considered. It is assumed that a homogeneous lattice is composed of two families of curves. The particular cases under consideration are those of orthogonal and rectangular lattice. The problem is considered for incompressible lattices which undergo rotation in addition to translation.

Owing to the usual assumption of incompressibility of bars, the differential equations are disjointed for the coordinates of the vectors and the rotation function of which the vector is normal to the plane of the network. The solution is reduced to that of the Helmholtz problem with appropriate boundary conditions.

The solutions under consideration are those in which the rotation is expressed as a product of functions of each of the two variables. For this, it is assumed that the network has undergone, in one direction, a translation (subsidence, for instance) expressed by a Fourier series.

The solution of a rectangular network is considered in detail in the case in which the rotation is a function of a single variable.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 marca 1965 r.
