

## DUŻE UGIĘCIA SPRĘŻYŚCIE NIELINIOWYCH MEMBRAN KOŁOWYCH

ZBIGNIEW BYCHAWSKI (KRAKÓW)

## 1. Uwagi wstępne

Zagadnienie dużych ugięć<sup>(1)</sup> nieliniowej sprężystości membrany rozważane było w pracy ODQVISTA [1] oraz w pracach autora [2] i [3]. W pracy [2] zagadnienie to rozważane było w związku z analogią sprężystą dla membran pełzających, podaną przez autora, w pracy [3] zaś stanowiło fragment bardziej ogólnych rozwiązań dla membran sprężysto-pełzających z materiału o złożonym prawie fizykalnym. W związku z tym przedstawioną pracę uważać należy za uzupełnienie wyżej wymienionych.

W pracy [1] ODQVIST rozważał w zasadzie błonowe pełzanie płyt kołowych, jednak stosowane przez niego formalne związki geometryczne dla odkształceń odpowiadają, w istocie rzeczy, stanom natychmiastowym odkształcenia. Utożsamianie w tych związkach odkształceń i przemieszczeń z prędkościami odkształceń i prędkościami przemieszczeń, jak to czyni ODQVIST, prowadzi do niezgodności wymiarowej ze względu na czas, co wynika z nieliniowości tych związków. Oczywiście, dopuszczalna jest w tym przypadku interpretacja odkształceń natychmiastowych jako odkształceń pełzania w stanie przejściowym, sam jednak przebieg procesu pozostaje nieokreślony; znany jest jedynie jego efekt końcowy.

ODQVIST stosował do rozwiązania omawianego zagadnienia metodę szeregów potęgowych, podobnie jak dla liniowego zakresu sprężystości membrany uczynił to HENCKY [4]. ODQVIST nie spełnił jednak równania nierozdzielności w sposób wyraźny, nie wprowadzając do rozważań tego równania w ogóle, a jedynie wyznaczając współczynniki rozwinięcia w szereg potęgowy na podstawie porównania odpowiednich wyrażeń dla odkształceń.

W świetle powyższych spostrzeżeń autora porównanie wyników rozwiązania Odqvista z istniejącymi i wielokrotnie sprawdzonymi rozwiązaniami innych autorów dla naprężeń w zakresie sprężystości liniowej jest utrudnione. Zgodność wyników dla tego szczególnego przypadku uzyskana przez autora stanowić może sprawdzian poprawności rozwiązania. Mowa tutaj o współczynnikach rozwinięcia w szereg potęgowy rozwiązania dla naprężeń. Rozwiązania dla liniowej sprężystości i ściśliwej membrany znajdują się w pracy WOLMIRA [5].

(1) Duże ugięcia w sensie teorii Kármána zwane również umiarkowanymi.

## 2. Równania nieliniowej membrany kołowej

Rozważamy duże ugięcia membrany kołowej wykonanej z materiału nieściśliwego, nieliniowo-sprężystego, dla którego słuszny jest związek pomiędzy składowymi tensora odkształcenia  $\varepsilon$  a składowymi dewiatora naprężeń  $s$  w postaci

$$(2.1) \quad \varepsilon_{ij} = \Phi(\sigma_e) s_{ij}.$$

Tutaj  $\Phi$  jest funkcją określającą nieliniowość związku i wyraża się w postaci potęgowej poprzez intensywność naprężeń  $\sigma_e$ :

$$(2.2) \quad \Phi = \frac{3}{2} A \sigma_e^{m-1},$$

gdzie  $A$  i  $m$  są stałymi. Przyjmujemy  $m$  za liczbę naturalną większą od 1. Dla  $m = 1$ ,  $\Phi = \text{const} = 3A/2$ , a prawo (2.1) określa liniową sprężystość.

Zakładamy, że membrana jest utwierdzona na brzegu  $r = R$ , gdzie  $R$  jest promieniem membrany, i obciążona stałym ciśnieniem normalnym o intensywności  $p$ . Ze względu na kołową symetrię związku geometryczne dla odkształceń odpowiednio w kierunku promieniowym i kierunku obwodowym mają postać

$$(2.3) \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r},$$

gdzie  $u$ ,  $w$  są odpowiednio składowymi przemieszczeniami w kierunkach promieniowym i poprzecznym (ugięcia). Z warunku nieściśliwości otrzymujemy odkształcenie poprzeczne

$$(2.4) \quad \varepsilon_z = -(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi).$$

Zmiany grubości  $h$  membrany nie uwzględnia się w naszych rozważaniach. Jest to uzasadnione tym, że w rozważanej teorii zakłada się, iż tensor odkształcenia jest mały. Warunek nieściśliwości nie wprowadza tutaj istotnej zmiany, a nawet wpływa na zmniejszenie ogólnej deformacji membrany (ugięcia są mniejsze aniżeli dla membrany ściśliwej).

Równanie fizyczne (2.1) daje odkształcenie w postaci

$$(2.5) \quad \varepsilon_r = \Phi s_r, \quad \varepsilon_\varphi = \Phi s_\varphi$$

lub też w formie

$$(2.6) \quad \varepsilon_r = \frac{1}{3} \Phi (2\sigma_r - \sigma_\varphi), \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{3} \Phi (2\sigma_\varphi - \sigma_r),$$

jeśli wprowadzimy składowe tensora naprężeń  $\sigma$ .

Równania równowagi membrany kołowej sprowadzają się do następującego układu:

$$(2.7) \quad \frac{d}{dr} (r\sigma_r) - \sigma_\varphi = 0,$$

$$(2.8) \quad \sigma_r \frac{dw}{dr} = -\frac{pr}{2h},$$

gdzie  $h$  jest grubością membrany.



Wprowadzając bezwymiarowe wielkości

$$(2.9) \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \varrho = \left(\frac{r}{R}\right)^2, \quad z = \varrho \frac{\sigma_r}{C}, \quad C = \frac{p}{4} \left(\frac{R}{h}\right)^2,$$

otrzymamy (przy wykorzystaniu równania (2.7)) naprężenia

$$(2.10) \quad \sigma_r = C \frac{z}{\varrho}, \quad \sigma_\varphi = C \left(2z' - \frac{z}{\varrho}\right), \quad z' = \frac{dz}{d\varrho},$$

a równanie (2.8) przyjmie postać

$$(2.11) \quad \frac{d\bar{w}}{d\varrho} = -\frac{\varrho}{z}.$$

Intensywność naprężeń wyrażoną przez naprężenia można zapisać w formie

$$(2.12) \quad \sigma_i^2 = \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2 = C^2 \Omega,$$

gdzie oznaczono

$$(2.13) \quad \Omega = 3 \left(\frac{z}{\varrho}\right)^2 - 6 \frac{z}{\varrho} z' + 4 z'^2.$$

Na podstawie wzorów (2.12) i (2.13) wyrazimy funkcję  $\Phi$  jak następuje:

$$(2.14) \quad \Phi = \frac{3}{2} AC^{m-1} \Omega^{\frac{1}{2}(m-1)},$$

a wprowadzając ją do wyrażeń dla odkształceń (2.6), otrzymamy

$$(2.15) \quad \varepsilon_r = \frac{1}{2} AC^m \Omega^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(3 \frac{z}{\varrho} - 2z'\right), \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{2} AC^m \Omega^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(4z' - 3 \frac{z}{\varrho}\right).$$

Spełniając warunek nierozdzielności odkształceń membrany

$$(2.16) \quad \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\varphi) - \varepsilon_r = -\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2,$$

przedstawimy go za pomocą (2.8) w postaci

$$(2.17) \quad 2 \frac{d\varepsilon_\varphi}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho} (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) = -\frac{p}{2C} \left(\frac{\bar{w}}{d\varrho}\right)^2,$$

a następnie wprowadzając odkształcenia według wzorów (2.15) otrzymujemy ostatecznie

$$(2.18) \quad \Omega^{\frac{1}{2}(m-3)} \left[ 8\Omega z'' + (m-1) \Omega' \left(4z' - 3 \frac{z}{\varrho}\right) \right] = -\gamma \left(\frac{\varrho}{z}\right)^2, \quad \gamma = \frac{p}{AC^{m+1}}.$$

Układ równań (2.11) i (2.18) formułuje problem stanu naprężenia i przemieszczenia nieliniowo-sprężystej membrany kołowej wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

### 3. Metoda rozwiązania. Warunki brzegowe. Rozwiązanie dla naprężeń

Rozwiązanie równania (2.18) przedstawiamy w postaci szeregu potęgowego

$$(3.1) \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i \varrho^{i+1}.$$

Podstawiając powyższy szereg do równania (2.18) otrzymujemy warunek, który musi być spełniony dla każdego  $\varrho$ . Daje to z kolei układ równań algebraicznych liniowych o postaci rekurencyjnej, z którego wyrazić można wszystkie współczynniki przez pierwszy współczynnik szeregu. Ten ostatni wyznaczamy z warunku brzegowego.

Rozwiązanie problemu wymaga sprecyzowania warunków brzegowych dla membrany. Mamy do dyspozycji trzy takie warunki:

1) na brzegu membrany, tzn. dla  $\varrho = 1$ , przemieszczenie promieniowe

$$(3.2) \quad u(1) = 0 \quad \text{lub} \quad \left[ \Omega^{\frac{1}{2}(m-1)} \left( 4z' - 3 \frac{z}{\varrho} \right) \right]_{\varrho=1} = 0,$$

2) na brzegu membrany, tzn. dla  $\varrho = 1$ , ugięcie

$$(3.3) \quad \bar{w}(1) = 0,$$

3) w środku membrany, tzn. dla  $\varrho = 0$ , naprężenia powinny być sobie równe:

$$(3.4) \quad [\sigma_r - \sigma_\varphi]_{\varrho=0} = 0 \quad \text{lub} \quad \left[ z' - \frac{z}{\varrho} \right]_{\varrho=0} = 0.$$

Podstawiając szereg (3.1) do równania (2.18), otrzymujemy następujący warunek, który musi być spełniony dla każdego  $\varrho$ :

$$(3.5) \quad \sum_{i=0}^{\infty} [8a_i + (m-1)b_i + \gamma c_i \varrho] \varrho^i = 0,$$

gdzie oznaczono

$$(3.6) \quad \begin{aligned} a_k &= \sum_{i=0}^k i(i+1) z_i \Omega_{k-1}^1, & \Omega_0^1 &= z_0^{m-1}, & \Omega_k^1 &= \frac{1}{2kz_0^2} \sum_{i=1}^k [i(m+1) - 2k] \Omega_i \Omega_{k-1}^1, \\ \Omega_k &= 3a_k^0 - 6a_k^1 + 4a_k^2, & a_k^0 &= \sum_{i=0}^k z_i z_{k-i}, \\ a_k^1 &= \sum_{i=0}^k (i+1) z_i z_{k-i}, & a_k^2 &= \sum_{i=0}^k (i+1)(k-i+1) z_i z_{k-i}, \\ b_k &= \sum_{i=0}^k (4i+1) z_i \Omega_{k-i}^*, & \Omega_k^* &= \sum_{i=0}^k \Omega_i^3 \Omega'_{k-1}, & \Omega'_k &= k\Omega_k, \\ \Omega_0^3 &= z_0^{m-3}, & \Omega_k^3 &= \frac{1}{2kz_0^2} \sum_{i=1}^k [i(m-1) - 2k] \Omega_i \Omega_{k-i}^3, \end{aligned}$$



$$c_k = \frac{1}{c_0^0} c_k^1, \quad c_0^1 = 1, \quad c_k^1 + \frac{1}{c_0^0} \sum_{i=1}^k c_i^0 c_{k-i}^1 = 0,$$

$$c_0^0 = z_0^2, \quad c_k^0 = \frac{1}{kz_0} \sum_{i=1}^k (3i - k) z_i c_{k-i}^0.$$

Przyrównując do siebie współczynniki szeregu (3.5) przy tych samych potęgach zmiennej  $\varrho$  otrzymujemy kolejno

$$(3.7) \quad \begin{aligned} z_1 &= - \frac{\gamma}{2 [8 + 2(m-1)] z_0^{m+1}}, \\ z_2 &= - \gamma^2 \frac{16 + (m-1)(4m+25)}{24(m+3) [8 + 2(m-1)]^2 z_0^{2m+3}}, \\ z_3 &= - \gamma^3 \frac{\{8(9m+43) + (m-1)[(m-1)(36m^2 + 437m + 1325) - (12m^3 + 111m^2 - 113m - 1502)]\}}{288(m+3)^2 [8 + 2(m-1)]^3 z_0^{3m+5}} \\ &\dots \end{aligned}$$

W ten sposób szereg (3.1) stanowi rozwiązanie rozważanego problemu dla na-  
przeżeń.

Jako szczególny przypadek rozważymy membranę liniowo-sprężystą. Dla niej  $m = 1$  ( $\Phi = \text{const}$ ); na podstawie wzorów (3.7) otrzymujemy

$$(3.8) \quad z_1^0 = - \frac{\gamma}{2 \cdot 8 z_0^3}, \quad z_2^0 = - \frac{\gamma^2}{6 \cdot 8^2 z_0^5}, \quad z_3^0 = - \frac{13\gamma^3}{144 \cdot 8^3 z_0^8},$$

Wartości powyższych współczynników są zgodne z podanymi przez WOLMIRA [4].

Współczynnik  $z_0$  znajdujemy z warunku brzegowego (3.2), który po podstawieniu szeregu (3.1) można napisać w postaci

$$(3.9) \quad \left[ \sum_{i=0}^{\infty} d_i \varrho^i \right]_{\varrho=1} = 0,$$

gdzie oznaczono

$$(3.10) \quad d_k = \sum_{i=0}^k (4i+1) z_i \Omega_{k-i}^1.$$

Z warunku (3.9) otrzymujemy

$$(3.11) \quad \begin{aligned} 2(z_0 + 5z_1 + 9z_2 + 13z_3 + \dots) z_0^{m-1} + (m-1)[6z_1 z_0^{m-1} + \\ + (9m+10) z_1^2 z_0^{m-2} + 6z_2 z_0^{m-1} + 18(m+3) z_1 z_2 z_0^{m-2} + \\ + (9m^2 - 6m - 28) z_1^3 z_0^{m-3} + 8z_3 z_0^{m-1} + \dots] = 0, \end{aligned}$$

skąd, podstawiając wartości współczynników  $z_1, z_2, z_3, \dots$  według (3.7), obliczyć możemy  $z_0$  z dowolną dokładnością.

Szczególny przypadek liniowej sprężystości ( $m = 1$ ) daje na podstawie wzoru (3.11) warunek brzegowy w postaci

$$(3.12) \quad z_0 + 5z_1 + 9z_2 + 13z_3 + \dots = 0.$$

#### 4. Przesunięcia membrany

Mając określony stan naprężenia nieliniowej membrany przejdziemy z kolei do wyznaczenia przesunięcia  $\bar{w}$  z równania (2.11). Podstawiając szereg (3.1) do tego równania otrzymujemy

$$(4.1) \quad \frac{d\bar{w}}{d\rho} = -\frac{1}{z_0} \sum_{i=0}^{\infty} e_i \rho^i,$$

gdzie oznaczono

$$(4.2) \quad e_0 = 1, \quad e_k + \frac{1}{z_0} \sum_{i=1}^k z_i e_{k-i} = 0.$$

Całkując równanie (4.1) mamy

$$(4.3) \quad \bar{w} = F - \frac{1}{z_0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_i}{i+1} \rho^{i+1},$$

gdzie  $F$  jest stałą. Stałą tę wyznaczamy z warunku brzegowego (3.3):

$$(4.4) \quad F = \frac{1}{z_0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_i}{i+1}.$$

Rozwiązanie (4.3) można przedstawić zatem ostatecznie w postaci

$$(4.5) \quad \bar{w} = \frac{1}{z_0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_i}{i+1} (1 - \rho^{i+1}).$$

Maksymalne ugięcie membrany otrzymamy podstawiając do rozwiązania (4.5)  $\rho = 0$ . Jak widać, ugięcie to określa stała  $F$ .

Naprężenia panujące w membranie obliczamy na podstawie formuł (2.10):

$$(4.6) \quad \sigma_r = C \sum_{i=0}^{\infty} z_i \rho^i, \quad \sigma_\varphi = C \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) z_i \rho^i,$$

a stąd naprężenia w środku dla  $\rho = 0$  wynoszą

$$(4.7) \quad \sigma_r^0 = \sigma_\varphi^0 = Cz_0.$$



5. Formuły dla przybliżeń współczynnika  $z_0$ 

Pełne określenie rozwiązania rozważanego problemu wymaga wyznaczenia pierwszego współczynnika szeregu (3.1), mianowicie stałej  $z_0$ . Stałą tę wyznaczamy z żadaną dokładnością z równań algebraicznych, wynikających z warunku brzegowego (3.9). Rozważymy kolejne przybliżenia stałej  $z_0$ .

Ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów szeregu (3.9) otrzymujemy równanie

$$(5.1) \quad z_0^{m+2} - aa = 0,$$

gdzie

$$(5.2) \quad a = 5 + 2(m - 1), \quad \alpha = \frac{\gamma}{2[8 + 2(m - 1)]};$$

stąd obliczamy

$$(5.3) \quad z_0 = (aa)^{\frac{1}{m+2}} = \left\{ \frac{\gamma [5 + 2(m - 1)]}{2[8 + 2(m - 1)]} \right\}^{\frac{1}{m+2}}.$$

W szczególnym przypadku membrany liniowo-sprężystej otrzymujemy ze wzoru (5.3)

$$(5.4) \quad z_0^3 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{5}{2} \gamma} = \frac{h}{R} \sqrt[3]{\frac{5}{Ap} \frac{h}{R}}.$$

Ograniczając się do trzech pierwszych wyrazów szeregu (3.9) mamy równanie

$$(5.5) \quad x^2 - aax - (b\beta - ca^2) = 0,$$

gdzie

$$(5.6) \quad x = z_0^{m+2}, \quad b = 3[3 + (m - 1)], \quad c = \frac{1}{2}(m - 1)(4m + 15),$$

$$\beta = \gamma^2 \frac{16 + (m - 1)(4m + 25)}{24(m + 3)[8 + 2(m - 1)]^2}.$$

Wyróżnik równania (5.5)

$$(5.7) \quad \Delta = (aa)^2 + 4(b\beta - ca^2),$$

jest dodatni dla dowolnej wartości wykładnika  $m$ , a zatem otrzymujemy dwa pierwiastki rzeczywiste, z których ujemny odrzucamy (naprężenia są dodatnie jako naprężenia rozciągające). Tak więc mamy ostatecznie

$$(5.8) \quad x = z_0^{m+2} = \frac{1}{2} aa \left[ 1 + \sqrt{1 + 4 \frac{b\beta - ca^2}{(aa)^2}} \right],$$

a stąd

$$(5.9) \quad z_0 = \left\{ \frac{\gamma [5 + 2(m - 1)]}{4[8 + 2(m - 1)]} \right\} \left[ 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{48 - (m - 1)(4m^2 - 15m - 46) + (m - 1)^2(4m + 25)}{(m + 3)[5 + 2(m - 1)]^2}} \right]^{\frac{1}{m+2}}.$$

W szczególnym przypadku membrany liniowo-sprężystej otrzymujemy z powyższego wzoru (dla  $m = 1$ )

$$(5.10) \quad z_0^0 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{3\gamma} = \frac{h}{R} \sqrt[3]{\frac{6}{Ap} \frac{h}{R}}$$

## 6. Formuły przybliżenia dla przemieszczenia i naprężeń w środku membrany

Rozważymy wpływ nieliniowości fizycznej na stan przemieszczenia i stan naprężenia membrany kołowej. Wpływ ten określimy w sposób przybliżony w zależności od wielkości wykładnika nieliniowości  $m$  ograniczając się do charakterystycznego punktu membrany, jakim jest jej środek.

Na podstawie wzoru (4.4) mamy ugięcie w środku

$$(6.1) \quad \bar{w}(0) = F = \frac{1}{z_0} \left( e_0 + \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{3} e_2 + \frac{1}{4} e_3 + \dots \right).$$

Wyrażając powyższe rozwinięcie przez współczynniki szeregu (3.1) otrzymujemy

$$(6.2) \quad F = \frac{1}{z_0} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{z_1}{z_0} + \frac{1}{3} \frac{z_1^2}{z_0^2} - \frac{1}{3} \frac{z_2}{z_0} - \frac{1}{4} \frac{z_1^3}{z_0^3} + \frac{1}{2} \frac{z_1 z_2}{z_0^2} - \frac{1}{4} \frac{z_3}{z_0} + \dots \right).$$

Jeżeli uwzględnimy trzy wyrazy rozwinięcia (6.1), to po podstawieniu współczynników (3.7) do (6.1) dostaniemy następujące wyrażenie dla ugięcia w środku membrany:

$$(6.3) \quad F_3 = \frac{1}{72(m+3)[8+2(m-1)]^2 z_0^{2m+5}} \{ 72(m+3)[8+2(m-1)]^2 z_0^{2(m+2)} + 18\gamma(m+3)[8+2(m-1)] z_0^{m+2} + \gamma^2 [2(3m+17) + (m-1)(4m+25)] \}.$$

Uwzględnienie czterech kolejnych wyrazów rozwinięcia (6.1) daje następne przybliżenie w postaci

$$(6.4) \quad F_4 = \frac{1}{3456(m+3)^2 [8+2(m-1)]^3 z_0^{3m+7}} \{ 3456(m+3)^2 [8+2(m-1)]^3 z_0^{3(m+2)} + 864\gamma(m+3)^2 [8+2(m-1)]^2 z_0^{2(m+2)} + 48\gamma^2(m+3)[8+2(m-1)][2(3m+17) + (m-1)(4m+25)] z_0^{m+2} + \gamma^3 \{ 12(9m^2 + 120m + 230) + (m-1)[3(m-1) \times (36m^2 + 437m + 1325) - (36m^3 + 189m^2 - 1671m - 7206)] \} \}.$$

W szczególnym przypadku membrany liniowo-sprężystej otrzymamy z wyrażeń (6.3) oraz (6.4) odpowiednio ( $m = 1$ )

$$(6.5) \quad F_3^0 = \frac{1}{2304z_0^7} (2304z_0^6 + 72\gamma z_0^3 + 5\gamma^2),$$

$$(6.6) \quad F_4^0 = \frac{1}{777888z_0^{10}} (777888z_0^9 + 221159\gamma z_0^6 + 15360\gamma^2 z_0^3 + 1320\gamma^3).$$



Podstawiając do wzoru (6.3) przybliżoną wielkość  $z_0$  (5.3) oraz biorąc pod uwagę wartości stałych  $\gamma$  i  $C$  według formuł (2.9) i (2.18), możemy napisać przybliżoną wielkość ugięcia w postaci

$$(6.7) \quad F_3 = \frac{1}{18(m+3)} \left\{ \left( \frac{p}{B} \right)^m \frac{2[8+2(m-1)]}{\left( 2 \frac{h}{R} \right)^{2(m+1)} [5+2(m-1)]^{2m+5}} \right\}^{\frac{1}{m+2}} [(501m +$$

$$+ 1519) + (382m + 1159)(m-1) + 72(m+3)(m-1)^2]$$

oraz

$$(6.8) \quad F_3^0 = \frac{101}{90} \frac{R}{h} \sqrt[3]{\frac{1}{5} \frac{R}{h} \frac{p}{B}}.$$

Postępując podobnie jak wyżej i wykorzystując z kolei przybliżenie dla  $z_0$  według wzoru (5.9) oraz przybliżenie dla ugięcia (6.4), otrzymujemy

$$(6.9) \quad F_4 = \frac{1}{54(m+3)^2} \left\{ \left( \frac{p}{B} \right)^m \frac{4[8+2(m-1)]}{\left( 2 \frac{h}{R} \right)^{2(m+1)} \{\varphi [5+2(m-1)]\}^{3m+7}} \right\}^{\frac{1}{m+2}} \times$$

$$\times \{ 54(m+3)^2 [5+2(m-1)]^3 \varphi^3 + 54(m+3)^2 [5+2(m-1)]^2 \varphi^2 +$$

$$+ 12(m+3) [5+2(m-1)] [2(3m+17) + (m-1)(4m+25)] \varphi +$$

$$+ 12(9m^2 + 120m + 230) + (m-1) [3(m-1)(36m^2 + 437m + 1325) -$$

$$- (36m^3 + 189m^2 - 1671m - 7206)] \}$$

oraz

$$(6.10) \quad F_4^0 = \frac{25703}{23328} \frac{R}{h} \sqrt[3]{\frac{1}{6} \frac{R}{h} \frac{p}{B}}.$$

Stosunek  $F_3^0/F_4^0 = 1,08$ , a więc kolejne przybliżenie  $F_4^0$  zmniejsza wielkość ugięcia o około 7,5%. Jest rzeczą charakterystyczną, że ugięcia dla membrany nieściślej są mniejsze, aniżeli odpowiednie ugięcia membrany ściślej. Wielkość ich wzrasta w miarę zmniejszania się współczynnika Poissona. W powyższych wzorach oznaczono przez  $B$  stałą sprężystości

$$(6.11) \quad B = A^{-\frac{1}{m}},$$

$$\varphi = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{48 - (m-1)(4m^2 + 15m - 46) + (m-1)^2(4m+25)}{(m+3)[5+2(m-1)]^2}}$$

Przybliżone wartości naprężeń w środku membrany przy przyjęciu wielkości  $z_0$  według wzoru (5.3) będą wynosiły

$$(6.12) \quad \sigma_r^{03} = \sigma_\varphi^{03} = \left\{ \frac{1}{A} \left( \frac{p}{2} \right)^2 \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{5+2(m-1)}{2[8+2(m-1)]} \right\}^{\frac{1}{m+2}},$$

a dla membrany liniowo-sprężystej

$$(6.13) \quad \sigma_{r0}^3 = \sigma_{\varphi 0}^3 = \frac{1}{4} \sqrt[3]{5 \frac{p^2 R}{A h}}.$$

Analogicznie dla przybliżenia  $z_0$  (5.9) otrzymujemy

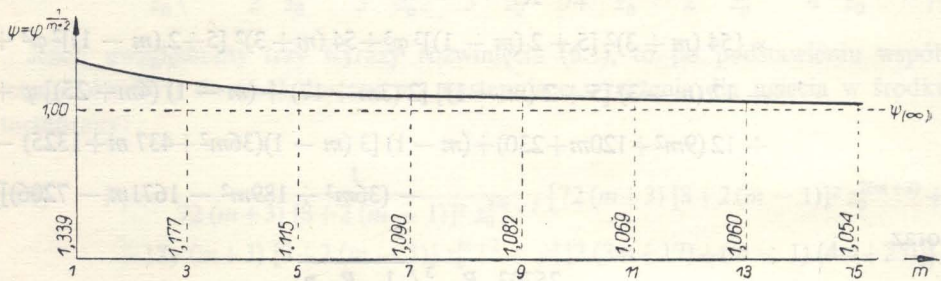
$$(6.14) \quad \sigma_r^{04} = \sigma_{\varphi}^{04} = \left\{ \frac{1}{A} \left( \frac{p}{2} \right)^2 \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{5+2(m-1)}{4[8+2(m-1)]} \varphi \right\}^{\frac{1}{m+2}}$$

oraz dla membrany liniowo-sprężystej

$$(6.15) \quad \sigma_{r0}^4 = \sigma_{\varphi 0}^4 = \frac{1}{4} \sqrt[3]{6 \frac{p^2 R}{A h}}.$$

Oznaczając we wzorach (6.7) oraz (6.9) odpowiednio

$$(6.16) \quad \kappa_3 = \frac{1}{18(m+3)} \left\{ \frac{8+2(m-1)}{2^{2m+1} [5+2(m-1)]^{2m+5}} \right\}^{\frac{1}{m+2}} [(501m+1519) + \\ + (382m+1159)(m-1) + 72(m+3)(m-1)^2],$$



Rys. 1

$$(6.17) \quad \kappa_4 = \frac{1}{54(m+3)^2 \varphi^3} \left\{ \left( \frac{p}{B} \right)^m \frac{8+2(m-1)}{2^{2m} \varphi [5+2(m-1)]^{3m+7}} \right\}^{\frac{1}{m+2}} \times \\ \times \{ 54(m+3)^2 [5+2(m-1)]^3 \varphi^3 + 54(m+3)^2 [5+2(m-1)]^2 \varphi^2 + \\ + 12(m+3) [5+2(m-1)] [2(3m+17) + (m-1)(4m+25)] \varphi + \\ + 12(9m^2 + 120m + 230) + (m-1) [3(m-1)(36m^2 + 437m + \\ + 1325) - (36m^3 + 189m^2 - 1671m - 7206)] \},$$

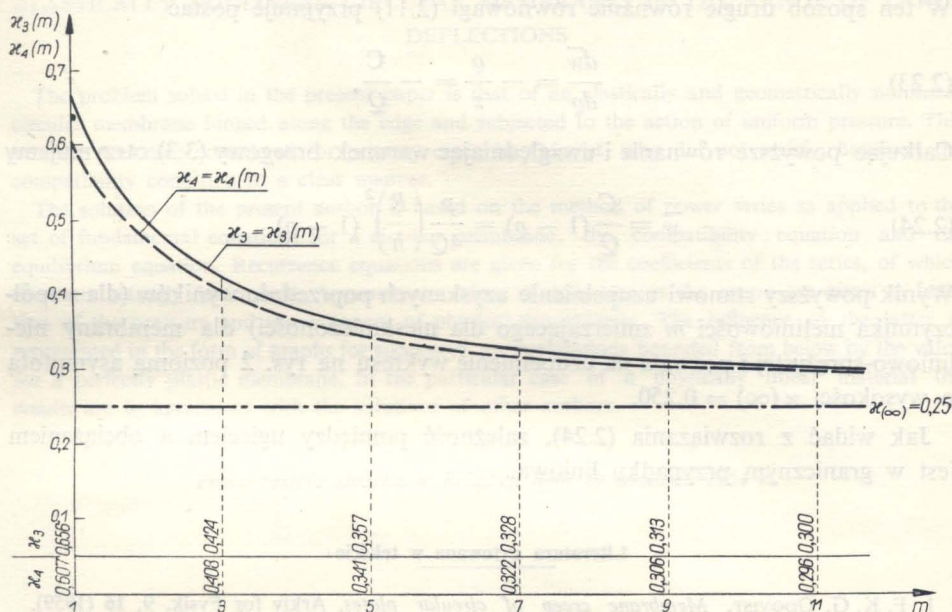
otrzymujemy je w postaci

$$(6.18) \quad F_3 = \left( \frac{p}{B} \right)^{\frac{m}{m+2}} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{m+1}{m+2} \kappa_3,$$

$$(6.19) \quad F_4 = \left( \frac{p}{B} \right)^{\frac{m}{m+2}} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{m+1}{m+2} \kappa_4.$$



Na rysunku 1 przedstawiono wykres zależności funkcji  $\psi = \varphi^{\frac{1}{m+2}}$  [ $\varphi$  według wzoru (6.11)]. Wykres ten posiada poziomą asymptotę na wysokości  $\psi(\infty) = 1$ . Na rysunku 2 pokazano wykresy funkcji  $\kappa = \kappa(m)$  wraz z obliczonymi rzędnymi, które jako kolejne przybliżenia wykazują dużą zgodność dla dostatecznie dużych  $m$ . Korzystając z tych wykresów możemy wyznaczyć dla danych wartości  $m$  wielkości bezwymiarowych ugięć w środku membrany według formuł (6.18) i (6.19).



Rys. 2

Warto zwrócić uwagę na fakt, że dla  $m = 1$  ugięcie  $F$  jest proporcjonalne do  $p^{1/3}$ , co jest rezultatem otrzymanym przez Hencky'ego dla sprężycie liniowej membrany. W tym ostatnim przypadku otrzymujemy dla nieściśliwej membrany

$$\kappa_3 = 0,656, \quad \kappa_4 = 0,607,$$

które nie odbiegają daleko od wielkości uzyskanej przez Hencky'ego dla współczynnika Poissona  $\nu = 0,3$  i równej 0,662. Należy podkreślić, że w analogicznym jak rozważany tutaj przypadek ODQVIST podaje wielkość 0,600<sup>(2)</sup>.

Dla przypadku granicznego  $m = \infty$ , o którym wspomina w swojej pracy ODQVIST, otrzymujemy na podstawie (2.12) zależność

$$(6.20) \quad \sigma_i = Q,$$

gdzie  $Q$  jest granicą plastyczności materiału membrany, rozważanego jako ciało sztywno-plastyczne. Założenie to pozwala na uzyskanie rozwiązania w prostej postaci.

<sup>(2)</sup> ODQVIST nie podaje, z jaką dokładnością wartość powyższa została obliczona.

Z równania równowagi wynika według (2.7)

$$(2.21) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = Q$$

oraz na podstawie (2.9)

$$(2.22) \quad z = \varrho \frac{Q}{C}.$$

W ten sposób drugie równanie równowagi (2.11) przyjmuje postać

$$(2.23) \quad \frac{d\bar{w}}{d\varrho} = -\frac{\varrho}{z} = -\frac{C}{Q}.$$

Całkując powyższe równanie i uwzględniając warunek brzegowy (3.3) otrzymujemy

$$(2.24) \quad \bar{w} = \frac{C}{Q} (1 - \varrho) = \frac{p}{4Q} \left( \frac{R}{h} \right)^2 (1 - \varrho).$$

Wynik powyższy stanowi uzupełnienie uzyskanych poprzednio wyników (dla współczynnika nieliniowości  $m$  zmierzającego dla nieskończoności) dla membrany nieliniowo-sprężystej i pozwala na uzupełnienie wykresu na rys. 2 poziomą asymptotą o wysokości  $\varkappa(\infty) = 0,250$ .

Jak widać z rozwiązania (2.24), zależność pomiędzy ugięciem a obciążeniem jest w granicznym przypadku liniowa.

#### Literatura cytowana w tekście

1. F. K. G. ODQVIST, *Membrane creep of circular plates*, Arkiv for Fysik, 9, 16 (1959).
2. Z. BYCHAWSKI, *O stosowalności analogii sprężystej w zakresie nieliniowej geometrycznej teorii pełzania membran kołowych*, Rozpr. Inżyn., 3, 13 (1965).
3. Z. BYCHAWSKI, *Nonlinear problems of elastic-creep deformation of circular membranes*, Referat na Konferencję Naukową ZMOC w Zakopanem, 1964.
4. H. HENCKY, *Über den Spannungszustand in kreisrunden Platten*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 3, 63 (1915).
5. A. C. Волмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Москва 1956.

#### Резюме

#### УПРУГО НЕЛИНЕЙНЫЕ КРУГОВЫЕ МЕМБРАНЫ В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ

В работе решается задача упруго и геометрически нелинейной круговой мембраны, защемленной на краю и подверженной действию постоянного давления. Задача рассматривалась также Одквистом, с точки зрения представления первого периода ползучести. Одквист, однако, не удовлетворяет ясно условию неразрывности.

Решение автора основано на методе степенных рядов, примененной к системе основных уравнений круговой мембраны, а именно к уравнению неразрывности и равновесия. Даются рекуррентные формулы для коэффициентов ряда, а эффективно определяются три коэффициента ряда. Приводятся также приближенные значения прогибов в центре мембраны



как функции давления и показателя физической нелинейности. Влияние этого последнего представлено в виде диаграмм для последовательных приближений, ограниченных снизу значением для идеально пластической мембраны. Результаты согласуются с решением других авторов в особом случае физической линейности материала мембраны.

### Summary

## ELASTICALLY NONLINEAR CIRCULAR MEMBRANES IN THE RANGE OF LARGE DEFLECTIONS

The problem solved in the present paper is that of an elastically and geometrically nonlinear circular membrane hinged along the edge and subjected to the action of uniform pressure. This problem was also considered for primary creep by Odqvist, who did not satisfy, however, the compatibility condition in a clear manner.

The solution of the present author is based on the method of power series as applied to the set of fundamental equations for a circular membrane: the compatibility equation and the equilibrium equation. Recurrence equations are given for the coefficients of the series, of which three are actually determined. Approximate values of deflection at the centre are given in function of the pressure and the exponent of physical nonlinearity. The influence of the latter is represented in the form of graphs for successive approximations bounded from below by the value for a perfectly plastic membrane. In the particular case of a physically linear material the results are in agreement with the solutions of other authors.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 września 1964 r.*

(1.2)

przy wyznaczaniu jak wartościach  $w$  i  $u$ . W pracy obecnej pobawia, metode otrzymania wzorów tego typu prostych, a zakłada o dokładności dalszej dokładności na przykładzie szarych powłok walcowych kołowych. Po zastosowaniu analogicznych warunków mechanicznych rozwiązywane są równania przez wprowadzenie nieograniczonych szeregów potęgowej postaci parametrów, charakteryzujących stopień zakrzywienia powłoki, a więc jej cienkościerności. Dzięki działaniom na uogólnionych szeregach potęgowych będzie można również prostymi wyrażeniami określić inne parametryczne wielkości, jak np. niezbędną grubość powłoki przy danym obciążeniu, granicę stosowności rozwiązania z uwagi na wywołanie sprężysto-plastyczne itp.

Problem stateczności promieniowo ściskanych powłok walcowych kołowych został w zakresie sprężystym rozważany po raz pierwszy przez R. LORANZA [6], następnie przez R. SCOTTURILLA [13], oraz R. MISESI [9]; rozwiązania te użytkowo w sensie wzorów typu [1.1], w oparciu o liniową teorię stateczności powłok (badanie „ściędnego” położenia równowagi). Pewne próby uzyskania wzorów typu (1.2) podjął P. F. PĄKOWICZ [12], następnie D. F. WINSTEENKO i C. TRILLEN [16] oraz H. BENK [3]; dalsze rozwiązania można znaleźć w monografii [7]. Granicę stosowności wzorów tego typu badał A. S. AWDOBIN [2]. Otrzymane wyniki są jednak mało dokładne wobec pominięcia znacznej liczby wyrazów.