

DEFORMACJA PLASTYCZNA WOKÓŁ OSIOWO-SYMETRYCZNEJ SZCZELINY
PRZEDSTAWIONEJ MODELEM DUGDALE'A

ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA) i MIŁOSZ WNUK (KRAKÓW)

1. Wstęp

Zagadnienie określenia rozkładu naprężeń, pola odkształceń i przemieszczeń oraz wyznaczenia wartości ciśnień krytycznych w przypadku szczeliny w ośrodku idealnie sprężystym dla dwu lub trójwymiarowych stanów naprężenia doczekało się wielu opracowań. Były one rozpatrywane niezależnie przez wielu autorów i stanowią bogatą dziedzinę literatury technicznej. Natomiast to samo zagadnienie w przypadku ośrodków niesprężystych, a w szczególności ośrodków sprężysto-plastycznych, jest przedmiotem zainteresowania bardzo nielicznej grupy badaczy.

Problem rozprzestrzeniania się szczelin w ośrodkach, dla których nie można pominąć efektów plastycznych, jest obecnie rozpatrywany z różnych punktów widzenia. Zasadniczo można tu wyróżnić dwa kierunki: pierwszy z nich należy do «makroskopowych» teorii ciał sprężysto-plastycznych, a więc tzw. «polowych» teorii, zakładający istnienie kontinuum materialnego (klasyczna teoria sprężystości i klasyczna teoria plastyczności). Drugi natomiast wchodzi w zakres metod stosowanych w młodszej dziedzinie badań, jaką jest teoria dyslokacji. Wyniki uzyskane na obydwu drogach różnią się na ogół liczbowo (niekiedy dość znacznie), tym niemniej zgodność jakościowa jest dobra, a wnioski wynikające z otrzymanych wyników są zbieżne.

W teoriach makroskopowych modelem szczeliny jest zazwyczaj elipsa, której mała półoś zmierza do zera lub też ma wartość skończoną. Pierwszym przypadkiem zajmowali się następujący autorzy: GRIFFITH [18], WESTERGAARD [48], SNEDDON [41] (płaski problem sprężysty) oraz JACOBS⁽¹⁾ [26], HULT i McCLINTOCK [22], STIMPSON i EATON⁽¹⁾ [45] (płaski problem sprężysto-plastyczny). W drugim przypadku dla płaskiego problemu sprężystego rozwiązania można znaleźć u INGLISA [23], TIMOSHENKI i GOODIERA [47], DONNELLA [9], MUSCHELISZWILEGO [34], NEUBERA [35], COOKA i GORDONA⁽¹⁾ [7]; natomiast dla problemu sprężysto-plastycznego brak opracowań. Wiele interesujących rozwiązań problemu sprężystego przy różnych schematach obciążenia podał M. L. WILLIAMS [49, 50 i 51]. Szczegółowy przegląd prac dotyczących szczelin w matematycznej teorii sprężystości zawierają prace IRWINA [24 i 25], BUECKNERA [5], BARENBLATTA [2], a także SNEDDONA [43 i 44].

(1) Rozwiązanie uzyskane na drodze numerycznej.

W ośrodku idealnie sprężysto-plastycznym intensywność naprężeń $\sigma_e = \sqrt{2/3} \times \sqrt{s_{ij} s_{ij}}$ nie może osiągać wartości nieskończenie dużych w pobliżu punktów końcowych szczeliny (jak to ma miejsce w rozwiązaniach sprężystych problemu), lecz może być co najwyżej równa pewnej stałej materiałowej. Przyjęcie takiego modelu prowadzi do podziału rozpatrywanego obszaru na dwa podobszary: sprężystego i plastycznego; w każdym z nich są spełnione inne prawa fizyczne. Istnienie niewielkiego choćby obszaru odkształceń trwałych ma wpływ na rozkład naprężeń w pozostałej części materiału, co znacznie komplikuje rozwiązanie. Komplikacja ta jest jednak zrozumiała, jeśli wziąć pod uwagę, że uplastycznienie w pobliżu końców szczeliny powstaje wtedy, gdy przyłożone ciśnienie p_0 dowolnie mało różni się od zera: nie istnieje więc czysto sprężyste rozwiązanie zagadnienia. Model proponowany przez teorię dyslokacji dotyczy przypadku szczeliny o zerowej szerokości (płaski problem sprężysto-plastyczny: BILBY, COTTRELL i SWINDEN [3], WITWICKI i LEONOW [52]). Autorzy korzystający z tego modelu zakładają, że na odcinku równym długości szczeliny opór przeciw ruchowi dyslokacji jest równy zeru, natomiast poza szczeliną, na jej symetrycznych przedłużeniach, odpowiadających pasmom plastycznych poślizgów, opór ten jest mniejszy niż naprężenie wywołujące ruch dyslokacji. W pozostałym obszarze ruch dyslokacji jest niemożliwy. Obraz taki jest równoważny modelowi ciała idealnie sprężysto-plastycznego, przyjmowanego przez teorię makroskopową, jeżeli założyć a priori, że wymiar poprzeczny pasm poślizgów jest równy zeru. Ponadto WITWICKI i LEONOW [52] wykazali, że tak postawiony problem sprężysto-plastyczny można sprowadzić do problemu czysto sprężystego z określoną nieciągłością przemieszczeń na odcinkach utożsamianych z pasmami plastycznych poślizgów. Z warunku ograniczoności funkcji opisującej rozkład gęstości i dyslokacji wzdłuż szczeliny oraz wzdłuż towarzyszących jej pasm deformacji plastycznej (funkcja ta spełnia pewne równania całkowe) określa się (BILBY, COTTRELL i SWINDEN [3], WITWICKI i LEONOW [52]) zależność

$$(1.1) \quad \text{długość strefy plastycznej} \sim \text{przyłożone obciążenie.}$$

W 1964 r. RUSINKO [39] rozszerzył ów prosty model na przypadek ośrodków niejednorodnych, których budowa jest scharakteryzowana wielkością ϱ , zwaną parametrem strukturalnym materiału i utożsamiana zazwyczaj ze średnicą ziarna w ośrodku polikrystalicznym lub ze stałą siatki krystalicznej dla sieci idealnej ($\varrho \approx 10^{-8}$ cm). Uogólnienie to pozwoliło na lepszy opis zjawisk związanych z końcową fazą lawinowego wzrostu pasm poślizgów i łączenia się ich w obszary deformacji plastycznej (potwierdzone doświadczalnie przez JAREMĘ [27] oraz KORNIŁOWA i JAREMĘ [29]). Podstawowy wzór (1.1) jednakże nie uległ zmianie na skutek wprowadzenia niejednorodności określonej parametrem ϱ (pozostałe wzory przechodzą odpowiednio we wzory odnoszące się do ośrodka jednorodnego, gdy $\varrho \rightarrow 0$). Możemy zatem przypuszczać, że wzór analogiczny do (1.1), jaki wyprowadzimy w niniejszej pracy dla szczeliny kołowo-symetrycznej, odnosić się będzie także do ciał o budowie ziarnistej, podobnie jak podaje RUSINKO [39].

Wszystkie wymienione powyżej prace dotyczą płaskich stanów odkształcenia lub naprężenia lub czystego ścinania, jak prace HULTA i McCLINTOCKA [22] oraz u BILBYE'GO, COTTRELLA i SWINDENA [3]. W niniejszej pracy przedstawimy uogólnienie hipotezy DUGDALE'A, której chcemy poświęcić osobny rozdział, na przypadek trójwymiarowego stanu naprężenia dla szczeliny osiowo-symetrycznej.

2. Hipoteza Dugdale'a

Sformułowanie hipotezy Dugdale'a (1960) poprzedziło kilkanaście ciekawych doświadczeń, spośród których wymienimy tutaj tylko najistotniejsze. W pracach doświadczalnych (HEAD [19 i 20]) nad wzrostem szczeliny zmęczeniowej w płaskiej tarczy wykonanej z ciągliwej stali i poddanej działaniu cyklicznie zmiennym naprężeniom rozciągającym zwrócono uwagę na charakterystyczny wykładniczy związek między długością szczeliny zmęczeniowej l a ilością cykli N , mianowicie na związek

$$(2.1) \quad l = l_0 \exp(kN),$$

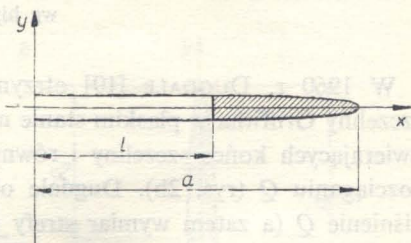
gdzie l_0 jest początkową długością połówkową szczeliny, a k odpowiednio dobraną stałą, zależną od wielkości przyłożonych naprężeń.

Podobny rezultat ($\Delta a/\Delta N \approx a$) otrzymał HULT [21] dla szczeliny zmęczeniowej w stanie naprężenia zbliżonym do czystego ścinania (szczelina rozprzestrzeniła się wzdłuż osi symetrii ostrego nacięcia wykonanego w cylindrycznym przecię skręcanym na maszynie zmęczeniowej, jako materiał użyte było aluminium oraz stopy aluminium). Równocześnie HEAD [19 i 20] obserwował zmianę długości strefy plastycznej $s = a - l$, wyprzedzającej oba końce szczeliny i dającej się zauważyć gołym okiem na powierzchni dobrze wypolerowanej tarczy, wykonanej ze stali nisko-węglowej (w strefie pasm poślizgów dyslokacje «wychodzą» na powierzchnie, tworząc charakterystyczne schodki, które powodują zmętnienie gładko wypolerowanej próbki) lub też jeszcze lepiej widocznej po wytrawieniu powierzchni odpowiednio dobranym odczynnikiem. Strefa ta posiadała kształt wąskiego pasma, którego wymiar poprzeczny, zwłaszcza w początkowym stadium narastania poślizgów plastycznych, można było zaniedbać. HEAD [20] znalazł następujący związek między szybkością wzrostu szczeliny a wymiarami a oraz l :

$$(2.2) \quad \frac{dl}{dN} = (l^{3/2}/a^{1/2})f(\sigma)$$

gdzie $f(\sigma)$ jest pewną funkcją zależną tylko od przyłożonego naprężenia. Porównując wyrażenia (2.1) i (2.2) można łatwo zauważyć, że pierwsze z nich da się otrzymać z drugiego, jeśli założyć, że stosunek długości strefy plastycznej do długości szczeliny jest stały, przy danej wielkości naprężenia: $a/l = \text{const}$, natomiast $f(\sigma) \equiv k$.

Założenie takie potwierdziły także badania nad rozprzestrzenianiem się szczelin wykonane przez FROSTA [12] oraz przez FROSTA i DUGDALE'A [13]. Według danych

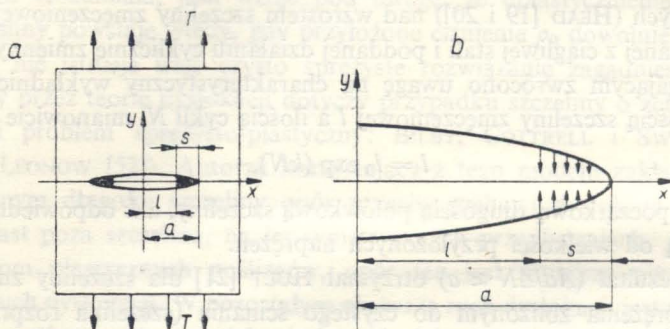


Rys. 1

tej ostatniej pracy autorzy rozciągali płaską tarczę (rys. 2a), mierząc w pierwszej serii badań stosunek a/l , przy różnych długościach początkowych szczeliny, a stałej wartości naprężeń rozciągających T (rezultat: $a/l = \text{const}$). W drugiej natomiast serii badań zmierzono zależność

$$(2.3) \quad s/l \approx T,$$

przy czym l oznacza tutaj albo połowę długości szczeliny naciętej w pośrodku tarczy, albo długość szczeliny naciętej na brzegu tarczy.



Rys. 2. Szczelina w płaskim stanie naprężenia oraz towarzyszące jej pasma poślizgów plastycznych wg hipotezy Dugdale'a

W 1960 r. DUGDALE [10] otrzymał zależność $s = s(T)$, modyfikując model szczeliny Griffitha w płaskim stanie naprężenia przez przyjęcie dodatkowych ciśnień zwierających końce szczeliny i równych granicy plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu Q (rys. 2b). Dugdale obliczył długość odcinka s , na którym działa ciśnienie Q (a zatem wymiar strefy plastycznej), żądając ograniczoneści naprężeń

$$(2.4) \quad \sigma_y(T, Q) = \sigma_y(T) + \sigma_y(Q)$$

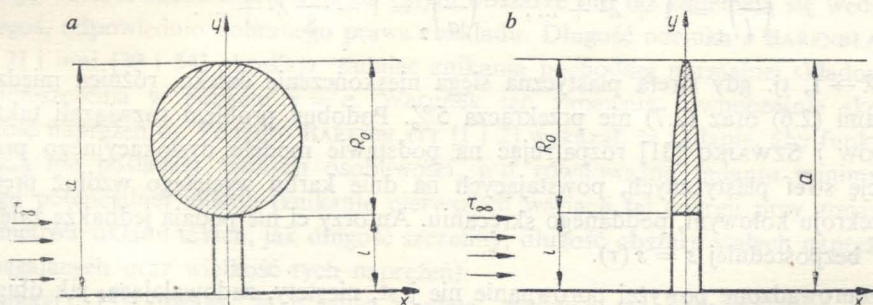
w najbardziej skrajnym punkcie strefy plastycznych poślizgów, $x = a$. Otrzymany w ten sposób prosty wzór końcowy [10]

$$(2.5) \quad s = l \left(\sec \frac{\pi T}{2 Q} - 1 \right)$$

nadspodziewanie dobrze zgadza się z doświadczeniem. Co więcej, wzór ten jest identyczny z wyprowadzonymi później związkami typu (1.1), wynikającymi z teorii dyslokacji: BILBY, COTTRELL i SWINDEN [3] dla przypadku czystego ścinania oraz WITWICKI, LEONOW [52] i RUSINKO [39] dla płaskiego stanu naprężenia.

Możemy zatem przypuszczać, że rozwiązania uzyskane za pomocą metody wykorzystującej hipotezę Dugdale'a są równoważne rozwiązaniom otrzymywanym przy zastosowaniu metod teorii dyslokacji. Nie od rzeczy będzie więc poświęcić tutaj nieco uwagi porównaniu wyników, przynajmniej jeśli idzie o problemy płaskie, jakie otrzymano na dwóch odmiennych drogach, tj. 1) w teorii dyslokacji, 2) w teorii makroskopowych ciał sprężysto-plastycznych.

Najistotniejszą różnicą, która rzuca się w oczy, jest różnica kształtu strefy odkształcenia plastycznego: rozmyty obszar w przypadku rozwiązań otrzymanych przy użyciu teorii polowych i wąskie pasmo, którego wymiar poprzeczny teoretycznie powinien być równy zero, jak tego chce dyslokacyjny model szczeliny. Inne jest również pole naprężeń i odkształceń w obu przypadkach. Doświadczenie zdaje się potwierdzać, o ile idzie o problem płaski i materiał ciągliwy bez wzmocnienia ⁽²⁾ [o charakterystyce $\sigma = \sigma(\epsilon)$ zbliżonej do tej, którą przyjmuje się dla ciała idealnie sprężysto-plastycznego], drugi spośród wymienionych kształtów strefy plastycznych poślizgów, przypominający «stępione ostrze» (rys. 1). Ten wynik potwierdzają również i nowsze badania (DIXON i VISSER [8] oraz JAREMA [27] i KORNIŁOW, JAREMA [29] przynajmniej w początkowym stadium narastania plastycznych odkształceń. W przypadku bardzo dużych obciążeń (gdy $T/Q \rightarrow 1$), powodujących uplastycznienie o dalekim zasięgu ($a/l \rightarrow \infty$), występują ponadto ukośne pasma poślizgów, które łączą się z pasmem poziomym w pewien obszar rozmyty na znacznej części powierzchni rozciąganej tarczy [29]. Być może ta faza uplastycznienia mogłaby być lepiej opisana przez teorie makroskopowe. Ogólnie można powiedzieć, że im większe jest wzmocnienie materiałów, tym bardziej rozmyty otrzymuje się obszar odkształceń plastycznych (i niekoniecznie zorientowany w kierunku wzrostu szczeliny; por. prace doświadczalne GERBERICHA [15] oraz SWEDŁOWA i GERBERICHA [46]).



Rys. 3. Strefa plastyczna w pobliżu nacięcia (szczeliny brzegowej) w stanie czystego ścinania: a) wg makroskopowej teorii ośrodka idealnie sprężysto-plastycznego; Hult, McClintock [22], b) wg teorii dyslokacji, Bilby, Cottrell, Swinden [3]

Różnice kształtu strefy odkształceń plastycznych, powstałej około końca szczeliny, przedstawia rys. 3, na którym pokazano przykład identycznego problemu sprężysto-plastycznego (czyste ścinanie) rozwiązanego w różny sposób: przy użyciu teorii makroskopowej plastyczności (rys. 3a, wg HULT, McCLINTOCK [22]) oraz przez teorię dyslokacji (rys. 3b, wg BILBY, COTTRELL, SWINDEN [3]). Warto zauważyć, że zasięg strefy plastycznej w kierunku wzrostu szczeliny R_0 jest w obydwu przy-

⁽²⁾ LEONOW [30] nazywa takie ciało «rzeczywistym ciałem kruchym», natomiast BARENBLATT [2] i GERBERICH [15] używają określenia «ciało quasi-kruche».

padkach nieomal taki sam. Hult i McClintock nie podali wzoru $R_0 = R_0(\tau_\infty)$ explicite poza przedziałem małych obciążeń, gdzie

$$\lambda = \frac{\sqrt{3} \tau_\infty}{Q} \ll 1.$$

Odpowiednie rachunki dokończyli BILBY, COTTRELL, SWINDEN [3] i podali obydwie wzory, odnoszące się do dowolnych wartości λ w postaci jawnej:

$$(2.6) \quad \left(\frac{a}{l}\right)_1 = \frac{2}{\pi} \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}\right)$$

oraz (3)

$$(2.7) \quad \frac{a}{l} = \sec \frac{\pi}{2} \lambda,$$

gdzie $a = l + R_0$. Pierwszy z tych wzorów wynika z rozwiązania Hulta i McClintocka (teoria makroskopowa), drugi natomiast należy do Bilby'ego, Cottrella, Swindena (teoria dyslokacji). Dla niewielkich λ różnica między wzorami jest znikoma, mianowicie

$$(2.8) \quad \left(\frac{a}{l}\right)_1 = 1 + \lambda^2 + \dots, \quad \left(\frac{l}{a}\right)_2 = 1 + \frac{\pi^2}{8} \lambda^2 + \dots$$

Dla $\lambda \rightarrow 1$, tj. gdy strefa plastyczna sięga nieskończenie daleko, różnica między wzorami (2.6) oraz (2.7) nie przekracza 5%. Podobny problem rozwiązali także LEONOW i SZWAJKO [31] rozpatrując na podstawie modelu dyslokacyjnego propagację stref plastycznych, powstających na dnie karbu wyciętego wzdłuż pręta o przekroju kołowym, poddanego skręcaniu. Autorzy ci nie podają jednakże zależności bezpośredniej $s = s(\tau)$.

Przeprowadzone powyżej porównanie nie jest, niestety, zadowalające, jak długo nic nie można powiedzieć o ilości energii dyssyponowanej w obszarze odkształceń trwałych w jednym i drugim przypadku. Zjawisko tzw. «relaksacji plastycznej» gra podstawową rolę w mechanizmie pęknięcia materiałów ciągliwych, dla których ciśnienie krytyczne, powodujące otwarcie szczeliny i związane z wytworzeniem nowej powierzchni (rozerwanie próbki), nie może być wyrażone⁽⁴⁾ (por. OROWAN [37], IRWIN [24 i 25]) tylko poprzez swobodną energię powierzchniową γ , zwaną też często napięciem powierzchniowym. Niestety, wartość dyssyponowanej energii

(3) Łatwo zauważyć, że wzór ten jest identyczny ze wzorem Dugdale'a (2.5), choć tamten dotyczył innego problemu (płaski stan naprężenia). Oczywiście, parametr obciążenia dla przypadku jednoosiowego rozciągania $\lambda = T/Q$.

(4) W niektórych przypadkach mechanizm wzrostu szczeliny może być jeszcze bardziej skomplikowany: prócz napięcia powierzchniowego oraz pracy zużytej na deformację plastyczną znaczny przyczynnik może też pochodzić od sił elektrostatycznych, jakie działają między naelektryzowanymi powierzchniami, por. Bowden i Tabor [4].

w strefie odkształceń plastycznych nie daje się łatwo obliczyć. Zupełnie niedawno GOODIER i FIELD [16] uogólnili hipotezę Dugdale'a na przypadek wolno rosnącej szczeliny w płaskim stanie naprężenia, co umożliwiło oszacować dyssypację energii, która dla szczeliny o długości kilku centymetrów okazała się o trzy rzędy większa od gęstości energii powierzchniowej γ , natomiast niemal równa wartości γ dla bardzo krótkich szczelin o długości rzędu 10^{-3} cm. Obliczenia te potwierdzone doświadczeniami wykonanymi w MIT (USA) dotyczą stali, dla której $E = 2 \cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2} , $\nu = 0,3$ oraz $Q/E = 10^{-3}$. Równie interesujący jest drugi problem rozwiązany przez GOODIERA i FIELDA, którzy w tej samej pracy [16] zastosowali hipotezę Dugdale'a dla przypadku dynamicznego, mianowicie dla ruchu szczeliny w rozciąganej nieskończonej tarczy.

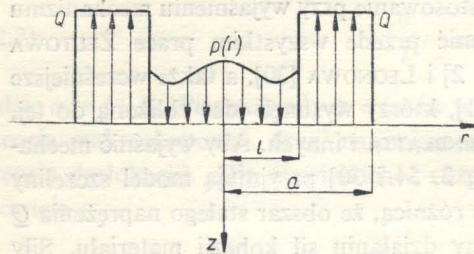
Na zakończenie niniejszego punktu wypada wspomnieć o hipotezach analogicznych do hipotezy Dugdale'a, a mających zastosowanie przy wyjaśnieniu mechanizmu pęknięcia ciał kruchych. Trzeba tu wymienić przede wszystkim prace ŻELTOWA i CHRISTIANOWICZA [54], BARENBLATTA [1 i 2] i LEONOWA [30], a także wcześniejsze prace fizyków MOTTA [32] i FRENKIELA [11], którzy wysunęli ideę zbliżoną do tej, opracowanej potem szczegółowo przez BARENBLATTA i innych. Aby wyjaśnić mechanizm pęknięcia ciał kruchych, autorzy ci [1, 2, 54 i 30] przyjmują model szczeliny podobny do modelu Dugdale'a z tą jedynie różnicą, że obszar stałego naprężenia Q jest tutaj zastąpiony przez obszar poddany działaniu sił kohezji materiału. Siły te mają wartość skończoną i stałą na całym obszarze lub też zmieniają się według jakiegoś, odpowiednio dobranego prawa rozkładu. Długość odcinka s BARENBLATT [1 i 2] i inni [30 i 54] określają żądając znikania pochodnej normalnej składowej przemieszczenia w punkcie $x = a$. Warunek ten zapewnia równocześnie skończoność naprężeń σ_y . Ponadto BARENBLATT [1 i 2] wykazał, że żądanie, aby funkcja $[\sigma_y]_{y=0}$ nie posiadała żadnych osobliwości, jest równoważne żądaniu minimum energii potencjalnej układu (znikanie pierwszych wariacji tej energii przy zmianie parametrów układu takich, jak długość szczeliny, długość obszaru stałych naprężeń rozciągających oraz wielkość tych naprężeń).

MURRELL [33] uważa, że obydwie modele, zarówno ten proponowany przez Barenblatta (szczelina, której wymiar poprzeczny jest równy zeru, a poza punktami końcowymi szczeliny znajdują się strefy stałych naprężeń) jak i model szczeliny eliptycznej o skończonym promieniu krzywizny w punktach skrajnych elipsy, są równie dobre dla opisu zjawiska pęknięcia ciał kruchych za pomocą rozszczepiania. Ten ostatni model jest poprawny, o ile, jak sądzi Murrell, promień krzywizny elipsy w jej skrajnych punktach nie jest mniejszy niż $\rho_{\min} = 0,81 b$, gdzie b oznacza stałą sieci krystalicznej ($b \approx 10^{-8}$ cm).

W 1964 r. ONYSZKO [36], korzystając z modelu Barenblatta i zakładając rozmaite rozkłady sił kohezji (schodkowo zmienne), pokazał, że ciśnienie krytyczne p_{kr} otwierające szczelinę o danej długości przy płaskim stanie naprężenia jest dane za pomocą wyrażenia identycznego ze znanym klasycznym wzorem Griffitha. Świadczy to o tym, że modyfikacje teorii Griffitha (Barenblatt i inni), dotyczące mechanizmu pęknięcia ciał kruchych, nie prowadzą do poważniejszych zmian, jeśli idzie o istotne wnioski fizyczne.

3. Szczelina osiowo symetryczna. Problem sprężysto-plastyczny i równoważny mu problem sprężysty

Obecnie przyjmiemy hipotezę, że potwierdzone doświadczalnie założenie Dugdale'a odnosi się również do szczeliny osiowo-symetrycznej. Założymy więc, że nasza szczelina posiada średnicę $2l$ i że w jej płaszczyźnie na pewnym obszarze $l < r < a$ powstaje pierścień poślizgów plastycznych o nieznanym na razie zasięgu $s = a - l$. W pozostałej części przestrzeni naprężenia mają charakter sprężysty. Podobnie jak to zrobił Dugdale dla dwuwymiarowego stanu naprężenia, sprowadzamy zagadnienie sprężysto-plastyczne do równoważnego mu zagadnienia sprężystego. Spośród czterech nieznikających składowych tensora naprężeń σ_r , σ_θ , σ_z i τ_{rz} wyróżniamy



Rys. 4

naprężenie normalne σ_z , wiążąc je z dekohezją materiału i żądając, aby nie przekraczało pewnej stałej wartości Q (granicy plastyczności lub też jej wielokrotności określonej za pośrednictwem tzw. współczynnika skrępowania plastycznego; por. [36, 2 i 16]) na pierścieniu otaczającym rozpatrywaną szczelinę. W wyniku takich założeń otrzymujemy następujący problem sprężysty: szczelina osiowo-symetryczna o średnicy $2a$ (a nie jak poprzednio $2l$) obciążona wewnątrz ciśnieniem $-q$ na kole o promieniu l oraz ciągnięciem siłą $+Q$ na pierścieniu $l < r < a$. Jak zwykle zamiast całej przestrzeni rozpatrymy jedynie półprzestrzeń sprężystą $z \geq 0$ (rys. 4). Problem «zwykłej» szczeliny osiowo-symetrycznej obciążonej ciśnieniem $-q$ na całej jej powierzchni został rozpatrzony przez szereg autorów, a rozwiązania otrzymano na różnych drogach (SACK [40], SNEDDON [41], GREEN [17], COLLINS [6], PAYNE [38] i KOBAYASHI [28]). W niniejszej pracy będziemy korzystać z metody transformacji całkowej HANKELA prowadzącej w danym przypadku do dualnych równań całkowych zbadanych przez TITCHMARSHA i BUSBRIDGE'A [42].

Warunki brzegowe ($z = 0$) naszego zagadnienia możemy sformułować następująco:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \tau_{rz} = 0, & \text{jeśli } \varrho \geq 0, \\ \sigma_z = -q(\varrho) = \begin{cases} -p(\varrho), & \text{jeśli } 0 \leq \varrho < m, \\ Q, & \text{jeśli } m < \varrho < 1, \end{cases} \\ w = 0, & \text{jeśli } \varrho > 1. \end{cases}$$

Wprowadziliśmy tutaj współrzędną bezwymiarową i parametr bezwymiarowy m , mianowicie $\varrho = r/a$, $m = l/a$; w oznacza składową pola przemieszczeń w kierunku osi z .

Zagadnienie brzegowe z warunkami (3.1) możemy sprowadzić do układu następujących dualnych równań całkowych (SNEDDON [41]), gdzie poszukiwaną wielkością jest funkcja $\psi(\eta)$:

$$(3.2) \quad \int_0^{\infty} \eta \psi(\eta) J_0(\varrho \eta) d\eta = \frac{1-\nu}{\mu a} q(\varrho), \quad \text{jeśli } 0 \leq \varrho < 1;$$

$$\int_0^{\infty} \psi(\eta) J_0(\varrho \eta) d\eta = 0, \quad \text{jeśli } \varrho > 1.$$

W równaniach tych symbol μ oznacza moduł odkształcenia postaciowego oraz $-q(\varrho)$ ciśnienie na powierzchni szczeliny. Rozwiązanie powyższego układu dualnych równań całkowych ma postać

$$(3.3) \quad \psi(\eta) = \frac{2(1-\nu)a}{\pi\mu} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 s \sin(\eta s) q(xs) ds.$$

Jeśli wyznaczymy $\psi(\eta)$, to zarówno wszystkie wielkości statyczne, jak i geometryczne, znajdziemy przez odwrócenie transformacji całkowej Hankela. Przemieszczenia w kierunku osi z przyjmą wtedy postać

$$(3.4) \quad w = \int_0^{\infty} \psi(\eta) \left[1 + \frac{\eta \zeta}{2(1-\nu)} \right] J_0(\varrho \eta) e^{-\zeta \eta} d\eta, \quad \zeta = \frac{z}{a}.$$

Napężenie normalne σ_z będzie określone za pomocą wzoru

$$(3.5) \quad \sigma_z = -\frac{\mu}{(1-\nu)a} \int_0^{\infty} \eta \psi(\eta) (1 + \eta \zeta) e^{-\eta \zeta} J_0(\varrho \eta) d\eta.$$

Ponieważ w rozpatrywanym zagadnieniu interesują nas przede wszystkim σ_z dla $\zeta = 0$, to musimy obliczyć wartość całki

$$(3.6) \quad \int_0^{\infty} \eta \psi(\eta) J_0(\varrho \eta) d\eta.$$

Wzór (3.3) może przyjąć również następującą postać, którą otrzymujemy całkując przez części (3.3):

$$(3.7) \quad \psi(\eta) = \frac{2(1-\nu)a}{\pi\mu\eta} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \int_0^1 \frac{d}{ds} [sq(xs)] \cos(\eta s) ds - [sq(xs) \cos \eta s]_0^1 \right\}.$$

Podstawiając teraz (3.7) do wzoru na napężenia i wykonując całkowanie względem η otrzymamy

$$(3.8) \quad [\sigma_z]_{\zeta=0} = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{sq(x, s)}{\sqrt{\varrho^2 - s^2}} \right]_0^1 dx, (\varrho < s \leq 1) \right\} - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\min(1, \varrho)} \frac{d}{ds} [sq(xs)] \frac{ds}{\sqrt{\varrho^2 - s^2}}.$$

Przypuśćmy obecnie, że

$$(3.9) \quad q(\varrho) = \begin{cases} p_0, & \text{jeśli } 0 \leq \varrho < m; \\ 0, & \text{jeśli } m < \varrho < 1. \end{cases}$$

Wtedy

$$(3.10) \quad [\sigma_z]_{\zeta=0} = \begin{cases} -p_0, & \text{jeśli } 0 \leq \varrho < m, \\ 0, & \text{jeśli } m < \varrho < 1, \\ \frac{2}{\pi} p_0 \left[\frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{\sqrt{1 - \varrho^2}} + \arcsin \sqrt{\frac{1 - m^2}{\varrho^2 - m^2}} - \arcsin \frac{1}{\varrho} \right], & \text{jeśli } \varrho > 1. \end{cases}$$

Z kolei dla obciążenia pierścieniowego przyjmującego postać:

$$(3.11) \quad q(\varrho) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq \varrho < m; \\ -Q, & \text{jeśli } m < \varrho < 1, \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$(3.12) \quad [\sigma_z]_{\zeta=0} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq \varrho < m; \\ Q, & \text{jeśli } m < \varrho < 1; \\ \frac{2}{\pi} Q \left[-\frac{\sqrt{1 - m^2}}{\sqrt{\varrho^2 - 1}} + \arcsin \sqrt{\frac{1 - m^2}{\varrho^2 - m^2}} \right], & \text{jeśli } \varrho > 1. \end{cases}$$

Na koniec korzystamy z zasady superpozycji, która tu obowiązuje, i dodając (3.10) do (3.12) otrzymujemy rozwiązanie naszego problemu, określonego przez warunki brzegowe (3.1), mianowicie

$$(3.13) \quad [\sigma_z]_{\zeta=0} = \begin{cases} -p_0, & \text{jeśli } 0 \leq \varrho < m; \\ Q, & \text{jeśli } m < \varrho < 1; \\ \frac{2Q}{\pi} \left[\frac{\lambda - (1 + \lambda)\sqrt{1 - m^2}}{\sqrt{\varrho^2 - 1}} + (1 + \lambda) \arcsin \sqrt{\frac{1 - m^2}{\varrho^2 - m^2}} - \right. \\ \left. - \lambda \arcsin \frac{1}{\varrho} \right], & \text{jeśli } \varrho > 1, \end{cases}$$

gdzie λ jest bezwymiarowym obciążeniem:

$$(3.14) \quad \lambda = p_0/Q.$$

Interesujące jest również obliczenie zasięgu strefy odkształceń plastycznych dla przypadku, gdy powierzchnia szczeliny, jest wolna od obciążeń, a ciśnienia zostały przyłożone w nieskończoności:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \sigma_\theta = \sigma_r = 0, & \quad r = \infty \\ \sigma_z = p_0, & \quad \text{jeśli } z = \infty. \end{aligned}$$

W zagadnieniu sprężystym odpowiedni rozkład naprężeń otrzymuje się natychmiast przez proste złożenie jednorodnego stanu (3.15) z rozwiązaniem uzyskanym uprzednio przy przyjęciu niezerowych (dla stanu naprężenia) warunków brzegowych na powierzchni szczeliny. W tym przypadku jednakże musimy przedtem dokonać pewnej modyfikacji pola naprężeń (3.13), mianowicie musimy je określić w ten sposób, aby naprężenie $[\sigma_z]_{z=0}$ dla $m < \varrho < 1$ po złożeniu go ze stanem jednorodnym (3.15) nadal było równe stałej Q (a nie $Q - p_0$, jakby wynikało z prostego dodania obydwu stanów). Modyfikacja ta dotyczy więc przede wszystkim warunków brzegowych (3.1), które przybiorą obecnie postać ($\zeta = 0$):

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \tau_{rz} = 0, & \quad \text{jeśli } \varrho \geq 0; \\ \sigma_z = \begin{cases} -p_0, & \text{jeśli } 0 \leq \varrho < m; \\ Q - p_0, & \text{jeśli } m < \varrho < 1; \end{cases} \\ w = 0, & \quad \text{jeśli } \varrho > 1. \end{aligned}$$

Postępując podobnie jak poprzednio dodajemy rozwiązanie dla szczeliny obciążonej na wewnętrznej części powierzchni ciśnieniem $-p_0$ do rozwiązania dla szczeliny obciążonej na pierścieniu $m < \varrho < 1$ naprężeniem rozciągającym $Q - p_0$, a następnie do tak otrzymanego wyrażenia na $[\sigma_z]_{z=0}$ dodajemy jednorodne pole (3.15). Otrzymujemy

$$(3.17) \quad [\sigma_z]_{z=0} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq \varrho < m; \\ Q, & \text{jeśli } m < \varrho < 1; \\ \frac{2Q}{\pi} \left[\frac{\lambda - \sqrt{1-m^2}}{\sqrt{\varrho^2-1}} - \lambda \arcsin \frac{1}{\varrho} + \arcsin \sqrt{\frac{1-m^2}{\varrho^2-m^2}} + \frac{\pi}{2} \lambda \right], & \text{jeśli } \varrho > 1. \end{cases}$$

Wzór (3.17) określa rozkład naprężeń σ_z w płaszczyźnie $z = 0$ w przypadku, gdy powierzchnia szczeliny jest wolna od ciśnień, a jedynym obciążeniem jest naprężenie rozciągające $\sigma_z = p_0$, przyłożone w nieskończoności.

4. Zasięg strefy plastycznej

Punktem wyjściowym do obliczenia zasięgu strefy plastycznej

(4.1) $s = a - l$

są wzory (3.13) dla przypadku obciążenia przyłożonego na powierzchni szczeliny oraz (3.17) dla obciążenia na zewnątrz szczeliny. Interesuje nas tutaj jedynie rozkład naprężenia $[\sigma_z]_{z=0}$ poza brzegiem szczeliny, a więc dla $\varrho > 1$. Jednakże, aby lepiej przedstawić tok rozumowania, wykorzystamy także wzory (3.10) oraz (3.12).

Pierwszy z nich przedstawia rozkład naprężeń normalnych $[\sigma_z(p_0)]_{\zeta=0}$ pochodzących od ciśnienia p_0 na powierzchni koła o promieniu $\varrho = m$ i, jak łatwo widać, ma osobliwość w punkcie $\varrho = 1$. Mianowicie

$$(4.2) \quad [\sigma_z(p_0)]_{\zeta=0} = \frac{\sqrt{2p_0}}{\pi} [1 - \sqrt{1 - m^2}](\varrho - 1)^{-1/2} + \dots$$

Drugi spośród wymienionych wzorów opisuje rozkład naprężeń $[\sigma_z(Q)]_{\zeta=0}$, jakie wynikają z założenia, że występują ciągnięcia Q na pierścieniu $m < \varrho < 1$; również tutaj pojawia się osobliwość w punkcie $\varrho = 1$:

$$(4.3) \quad [\sigma_z(Q)]_{\zeta=0} = \frac{-\sqrt{2Q}}{\pi} \sqrt{1 - m^2} (\varrho - 1)^{-1/2} + \dots$$

Dodanie obydwu wyrażeń (4.2) i (4.3) pozwala określić rozkład naprężeń normalnych σ_z w płaszczyźnie szczeliny, pochodzących od jednoczesnego działania ciśnień p_0 i istnienia strefy plastycznej, w której naprężenia σ_z posiadają stałą wartość. Ten wypadkowy rozkład będziemy oznaczać symbolem $[\sigma_z(p_0, Q)]_{\zeta=0}$, i korzystając z (4.2) i (4.3) napiszemy

$$(4.4) \quad [\sigma_z(p_0, Q)]_{\zeta=0} = \frac{\sqrt{2Q}}{\pi} [\lambda - (1 + \lambda)\sqrt{1 - m^2}] (\varrho - 1)^{-1/2} + \dots$$

Identyczne wyrażenie otrzymalibyśmy rozwijając funkcję określającą wypadkowe naprężenia $[\sigma_z(p_0, Q)]_{\zeta=0}$ [wzór (3.13)] w uogólniony szereg potęgowy w otoczeniu punktu $\varrho = 1$.

Zasięg strefy plastycznej określimy, podobnie jak to uczynił Dugdale dla przypadku dwuwymiarowego, żądając ograniczoneści naprężeń $[\sigma_z]_{\zeta=0}$ w punkcie $\varrho = 1$, a zatem żądając, aby współczynnik w nawiasie prostokątnym w wyrażeniu (4.4) zniknął:

$$(4.5) \quad \lambda - (1 + \lambda)\sqrt{1 - m^2} = 0.$$

Stąd pamiętając że $m = l/a$ otrzymujemy

$$(4.6) \quad \frac{a}{l} = \frac{1 + \lambda}{\sqrt{1 + 2\lambda}}$$

lub też wstawiając $\lambda = p_0/Q$ oraz $s = a - l$ dostajemy ostateczny wzór wiążący zasięg strefy plastycznej s z przyłożonym wewnątrz szczeliny obciążeniem p_0 , mianowicie:

$$(4.7) \quad s = l \left(\frac{1 + p_0/Q}{\sqrt{1 + 2p_0/Q}} - 1 \right).$$

Postępując analogicznie, tzn. rozwijając w uogólniony szereg potęgowy trzecią spośród funkcji (3.17) w otoczeniu punktu $\varrho = 1$,

$$[\sigma_z(p_0, Q)]_{\zeta=0} = \frac{\sqrt{2Q}}{\pi} (\lambda - \sqrt{1 - m^2}) (\varrho - 1)^{-1/2} + \dots$$

i przyrównując współczynnik przy $(\varrho - 1)^{-1/2}$ do zera, otrzymujemy

$$(4.8) \quad \frac{a}{l} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

lub też

$$(4.9) \quad s = l \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (p_0/Q)^2}} - 1 \right].$$

Wzory (4.8) i (4.9) określają zasięg strefy plastycznej dla przypadku, gdy obciążenie przyłożone jest nieskończenie daleko od szczeliny.

Przeprowadzimy obecnie krótką dyskusję otrzymanych wzorów. Pierwszy spośród nich, tj. wzór (4.6) lub równoważny mu wzór (4.7), porównamy z analogicznym wzorem dla przypadku szczeliny obciążonej wewnątrz ciśnieniem p_0 , uzyskanym przez M. WNUKA [53] przy użyciu wariacyjnych metod teorii plastyczności (przybliżone rozwiązanie problemu sprężysto-plastycznego). Rozwiązanie to, jak można było się spodziewać, daje rozmyty obszar odkształceń plastycznych i na pierwszy rzut oka różni się dość znacznie od otrzymanego w niniejszej pracy. Porównamy tu jedynie zasięg strefy plastycznej, który w rozwiązaniu przybliżonym [53] zależy od współczynnika Poissona:

$$(4.10) \quad \frac{a}{l} = 1 + \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \left[3 \sin^2 \psi + 4(1 - 2\nu)^2 \cos^2 \frac{\psi}{2} \right]_{\psi = \psi_{\max}}^{\lambda \ll 1} + \dots,$$

a prosta łącząca wierzchołek szczeliny z najdalej położonym punktem obszaru plastycznego jest nachylona do płaszczyzny $\zeta = 0$ pod kątem

$$(4.11) \quad \psi_{\max} = \pm \arccos \frac{1}{3} (1 - 2\nu)^2.$$

Kąt ten dla $\nu = 1/2$ wynosi 90° , natomiast dla $\nu = 0$ jest równy $70^\circ 30'$. W szczególności dla $\nu = 0,3$ otrzymujemy $\psi_{\max} = 86^\circ 56'$ oraz zasięg strefy plastycznej

$$(4.12) \quad \frac{a}{l} = 1 + 0,1686 \lambda^2 + \dots$$

Wzór (4.6) dla małych wartości λ daje

$$(4.13) \quad \frac{a}{l} = 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 + \dots$$

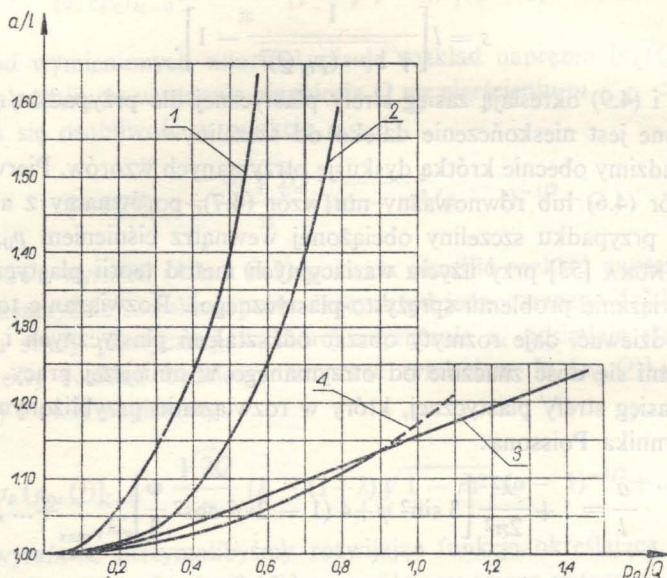
Obydwa wzory, tj. wzór (4.6) oraz (4.12), zilustrowano graficznie, mianowicie odpowiada im krzywa 3 oraz krzywa 4 na rys. 5.

Dla obciążeń nieskończenie dużych ($\lambda = \infty$) ze wzoru (4.6) otrzymujemy nieskończenie duży zasięg pierścienia poślizgów plastycznych (a nie dla $\lambda = 1$, jak w przypadku obciążeń przyłożonych na zewnątrz). Asymptotyczne rozwinięcie funkcji a/l (4.6) w uogólniony szereg potęgowy zmiennej λ , gdy $\lambda \rightarrow \infty$, posiada postać

$$(4.14) \quad \frac{a}{l} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \frac{5}{32} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 + \dots \right].$$

W zakresie pośrednich wartości parametru λ , tj. dla $0,5 \leq \lambda \leq 2,5$, funkcję (4.6) można z dużą dokładnością aproksymować następującym, liniowym wyrażeniem:

$$(4.15) \quad \frac{a}{l} \approx 0,968 + 0,186 \lambda.$$



Rys. 5. Zasięg strefy plastycznej:

obciążenie poza szczeliną 1 – płaski stan naprężenia (Dugdale), 2 – trójwymiarowy stan naprężenia, wzór (4.8), obciążenie wewnątrz szczeliny osiowo symetrycznej 3 – wzór (4.6), 4 – przybliżenie wg Wnuka [53]

Wzór (4.8) lub (4.9) jest odpowiednikiem wzoru Dugdale'a dla przypadku trójwymiarowego stanu naprężenia, jaki powstaje w pobliżu brzegów osiowo-symetrycznej szczeliny. Aby móc lepiej porównać obydwie wzory, napiszemy również ich rozwinięcia w szeregi potęgowe w otoczeniu punktu $\lambda = 0$ oraz $\lambda = 1$ (obydwie funkcje posiadają dla $\lambda = 1$ asymptotę pionową), mianowicie: wzór Dugdale'a (2.5)

$$(4.16) \quad \frac{a}{l} = \sec \frac{\pi}{2} \lambda = \begin{cases} 1 + \frac{\pi^2}{8} \lambda^2 + \frac{5\pi^4}{788} \lambda^4 + \dots, & \text{jeśli } \lambda \ll 1; \\ \frac{2}{\pi} (1 - \lambda)^{-1} + \dots, & \text{jeśli } \lambda \rightarrow 1 \end{cases}$$

oraz wzór (4.8)

$$(4.17) \quad \frac{a}{l} = (1 - \lambda^2)^{-1/2} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{3}{8} \lambda^4 + \dots, & \text{jeśli } \lambda \ll 1; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \lambda)^{-1} + \dots, & \text{jeśli } \lambda \rightarrow 1. \end{cases}$$

Gdy $\lambda \rightarrow 1$, otrzymujemy nieskończenie duży zasięg strefy odkształceń plastycznych. Jest to przypadek tzw. uplastycznienia dalekiego zasięgu (zniszczenie następuje wówczas na drodze pełnego wyczerpania nośności granicznej materiału), które może być realizowane jedynie przy braku wzmocnienia (materiał idealnie sprężysto-plastyczny) i przy bardzo wolno narastającym obciążeniu, tak aby wpływ szybkości odkształcenia na granicę plastyczności można było pominąć. Przy większych szybkościach uwalniania energii sprężystej (gdy wzrost granicy plastyczności jest dostateczny, aby maksymalne naprężenia normalne osiągnęły wartość wytrzymałości na zerwanie) uplastycznienie dalekiego zasięgu nie wystąpi i pęknięcie nosi charakter kruchy (por. prace FROSTA i PHILLIPSA [14] oraz OROWANA [37]).

Krzywe odpowiadające wzorom (4.16) i (4.17) przedstawia rys. 5 (krzywe 1 i 2). Na zakończenie wartości liczbowe bezwymiarowego zasięgu strefy plastycznej a/l dla różnych obciążeń bezwymiarowych $\lambda = p_0/Q$, wynikające ze wzoru Dugdale'a, ze wzoru M. WNUKA oraz z obydwu wzorów (4.6) i (4.8), wyprowadzonych w niniejszej pracy, zestawiono w tabelicy 1.

Tablica 1. Zasięg strefy plastycznej jako funkcji obciążenia

$\frac{p_0}{Q}$	Obciążenia przyłożone z zewnątrz		Obciążenia wewnątrz szczeliny	
	Wzór Dugdale'a (4.16)	Wzór (4.8)	Wzór (4.6)	Wzór (4.12)
	a/l	a/l	a/l	a/l
0,1	1,0124	1,0050	1,0042	1,0017
0,5	1,4142	1,1547	1,0607	1,0422
0,75	2,6131	1,5119	1,1068	1,0948
0,9	6,3938	2,2941	1,1355	1,1366
0,95	12,7519	3,2030	1,1451	1,1522
0,99	63,3071	7,0871	1,1528	1,1652
1,00	∞	∞	1,1547	1,1686
1,5	—	—	1,2500	—
2,0	—	—	1,3416	—

Literatura cytowana w tekście

1. Г. И. Баренблатт, *О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении*, Прикл. Мат. Мех., 3, 4, 5, 23 (1959).
2. Г. И. Баренблатт, *Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении*, ПМТФ, 4, 1961, 3.
3. B. A. BILBY, A. H. COTTRELL, K. H. SWINDEN, *The spread of plastic yield from a notch*, Proc. Roy. Soc., A, No 1350, 272 (1960), 304.
4. F. P. BOWDEN, D. TABOR, *Friction and Lubrication of Solids*, Oxford University Press, Oxford 1962.
5. H. F. BUECKNER, *The propagation of cracks and the energy of elastic deformation*, Trans. ASME, 6, 80 (1958).
6. W. D. COLLINS, *On the solution of some axisymmetric boundary value problems by means of integral equations*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, 14 (1961), 101.

7. J. COOK, J. E. GORDON, *A mechanism for the control of crack propagation in all-brittle systems*, Proc. Roy. Soc. A, No. 1391, **282** (1964), 508.
8. J. DIXON, W. VISSER, *An investigation of the elastic-plastic strain distribution around cracks in various sheet materials*, Proc. Internat. Symp. Photoelasticity, Chicago 1961, Pergamon Press 1963.
9. L. H. DONNELL, *Stress concentrations due to elliptical discontinuities in plates under edge forces*, Calif. Inst. Tech., T. von Kármán Anniv., 1941, 293.
10. D. S. DUGDALE, *Yielding of steel sheets containing slits*, J. Mech. Phys. Sol., **8** (1960), 100.
11. Я. И. Френкель, *Теория обратимых и необратимых трещин в твердых телах*, Ж. Тех. Физ. **11**, **22** (1952), 1857.
12. N. E. FROST, *Non-propagating cracks in vee-notched specimens subject to fatigue loading*, The Aeronaut. Quart., **8** (1957), 1.
13. N. E. FROST, D. S. DUGDALE, *The propagation of fatigue cracks in sheet specimens*, J. Mech. Phys. Solids, **6** (1958), 92.
14. N. E. FROST, C. E. PHILLIPS, *Some observations on the spread of fatigue cracks*, Proc. Roy. Soc., A, **242** (1957), 216.
15. W. W. GERBERICH, *Plastic strains and energy density in cracked plates I. Experimental technique and results*, Proc. SESA **2**, **21** (1964), 335.
16. J. N. GOODIER, F. A. FIELD, *Plastic energy dissipation in crack propagation*, Fracture of Solids, edited by D. C. Drucker and J. J. Gilman, New York 1963, 103.
17. A. E. GREEN, *On Boussinesq's problem and penny-shaped cracks*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **45** (1949), 251.
18. A. A. GRIFFITH, *The phenomena of rupture and flow in solids*, Phil. Trans., A, **221** (1921), 163.
19. A. K. HEAD, *The growth of fatigue cracks*, Phil. Mag., **44** (1953), 925.
20. A. K. HEAD, *The propagation of fatigue cracks*, J. Appl. Mech., **23** (1956), 407.
21. J. HULT, *Experimental studies of fatigue crack propagation in torsion*, Trans. Roy. Inst. Tech., Nr. 119, Stockholm 1958.
22. J. HULT, McCLINTOCK, *Elastic-plastic stress and strain distributions around sharp notches under repeated shear*, IX Int. Congr. Appl. Mech., Brussels 1956, Proceedings VIII, 51.
23. C. E. INGLIS, *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Trans. Inst. Naval Archit., **55** (1913), 219.
24. G. R. IRWIN, *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, J. Appl. Mech., **3**, **24** (1957).
25. G. R. IRWIN, *Fracture Mechanics*, Pergamon Press, New York 1960.
26. J. A. JACOBS, *Relaxation methods applied to problems of plastic flow I. Notched bar under tension*, Phil. Mag., **41** (1950), 349.
27. С. Я. Ярема, *Исследование полос пластичности при растяжении пластин с концентратором*, Вопросы Мех. Реального Твердого Тела, **2**, Изд. «Наукова Думка», Киев 1964, 177.
28. I. KOBAYASHI, *Darstellung eines Potentials in Zylinderschen Koordinaten das sich aus einer Ebene innerhalb und ausserhalb einer Kreisbegrenzung verschiedene Grenzbedingung unterwirft*, Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ., **20** (1931), 197.
29. Г. И. Корнилов, С. Я. Ярема, *Плоские образцы с трещиновидным концентратором для экспериментального исследования полос пластичности*, Вопросы мех. реального твердого тела, Изд. АН УССР, **7**, Киев 1962.
30. М. Я. Леонов, *Элементы теории хрупкого разрушения ПМТФ*, **3** (1961), 85.
31. М. Я. Леонов, Н. Я. Швайко, *Упруго-пластическая деформация при кручении стержня с мелким полуцилиндрическим разом на поверхности*, Вопросы мех. реального твердого тела, Изд. АН УССР, **1**, Киев 1962.
32. N. F. MOTT, *Fracture of metals: theoretical consideration*, Engineering **4275**, **165** (1948), 4276.
33. S. A. F. MURRELL, *The theory of the propagation of elliptical Griffith cracks under various conditions of plane strain or plane stress*, Brit. J. Appl. Phys., **15** (1964), part. I, 1195, part. II and III, 1211.

34. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Изд. Акад. Наук СССР, Москва 1949.
35. Н. NEUBER, *Theory of notch stresses* (tłum. z niem.) Springer-Verlag, Berlin 1958.
36. Л. В. ОНЫШКО, *О влиянии закона распределения сил взаимодействия между поверхностями микротрещин на условие разрушения хрупкого тела*, Вопросы Мех. реального твердого тела, 2, Изд. «Наукова Думка», Киев 1964, 38.
37. E. OROWAN, *Energy criteria of fracture*, Welding Journal, March 1955, 157s.
38. L. E. PAYNE, *On axially symmetric punch, crack and torsion problems*, Journ. S.I.A.M. 1 (1953), 53.
39. К. Н. Русинко, *Об условиях возникновения полос пластичности при растяжении пластинки с прямолинейной щелью*, Вопросы мех. реального твердого тела, 2, Изд. «Наукова Думка», Киев 1964, 27.
40. R. A. SACK, *Extension of Griffith's theory of rupture to three dimensions*, Proc. Phys. Soc., 58 (1946), 729.
41. I. N. SNEDDON, *The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid*, Proc. Roy. Soc., A. 187 (1946), 229.
42. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw-Hill, New York 1951.
43. I. N. SNEDDON, *Crack problems in the theory of elasticity*, Dep. of Math. and Engin. Research, Appl. Math. Res. Group, North Carolina State College, Raleigh, North Carolina 1961.
44. I. N. SNEDDON, M. LOWENGRUB, *Crack problems in the mathematical theory of elasticity*, STAM, Monographs, John, Wiley NY, 1966.
45. L. D. STIMPSON, D. M. EATON, *The extent of elasto-plastic yielding at the crack point on externally notched plane stress tensile specimen*, ARL-24, Aeron. Res. Lab., OAR, 1961.
46. J. L. SWEDLOW, W. W. GERBERICH, *Plastic strains and energy density in cracked plates*, II. Comparison with elastic theory, Proc. SESA 2, 21 (1964), 345.
47. S. P. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 2 wyd. McGraw-Hill, New York 1951.
48. H. M. WESTERGAARD, *Bearing pressure and cracks*, J. Appl. Mech., 6 (2), (1939), A-49.
49. M. L. WILLIAMS, *On the stress distribution at the base of a stationary crack*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 79, March 1957.
50. M. L. WILLIAMS, *The bending stress distribution at the base of a stationary crack*, J. Appl. Mech., E 28 (1961), 78.
51. M. L. WILLIAMS, *Some observations regarding the stress field near the point of a crack*, Proc. of the Crack Propag. Symp. at Cranfield 1, (1961), 130.
52. П. М. Витвицки, М. Я. Леонов, *Полосы скольжения при неоднородной деформации пластинки*, Вопросы мех. реального твердого тела, Изд. АН УССР, 1, Киев 1962.
53. M. WNUK, *Szczelina osiowo symetryczna w ośrodku sprężysto-plastycznym, w przygotowaniu do druku*.
54. Я. П. Желтов, С. А. Христьянович, *О механизме гидравлического разрыва нефтяного пласта*, Изв. АН СССР, ОТН, Но 5 (1955).

Резюме

ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ВОКРУГ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ МОДЕЛЬЮ ДАГДАЙЛЯ

Во введении, кратко, обсуждается ряд работ других авторов, касающихся нераспространяющихся трещин. Затем предлагается способ определения пластической области (по Дагдайлю) в случае двухмерной задачи; далее определяется область распределения пластических деформации для осесимметрической трещины в пространстве из идеально упруго-пластического материала.

Составлено таблицу областей пластической зоны в функции нагрузки, и диаграмму на которой сравниваются кривые распределения области пластической деформации определенные по четырем формулам.

Summary

PLASTIC STRAIN AROUND AN AXIALLY SYMMETRIC CRACK REPRESENTED BY THE DUGDALE MODEL

The introduction contains a brief discussion of a number of works of other authors concerning non-propagating cracks. Next, the method for determining the plastic region (according to Dugdale) is described in the case of the two-dimensional problem. The subsequent part of the paper is devoted to the determination of the range of plastic strain for an axially symmetric crack in a perfect elastic-plastic body.

The paper contains a table of the extent of plastic zone in function of the load and a diagram confronting the curves of the distributions of plastic strain zones computed by means of four formulae.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN
I POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 czerwca 1965 r.