ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 14 (1966)

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE FILTRACJI CIECZY NIEJEDNORODNYCH

CZESŁAW GRABARCZYK (WARSZAWA)

1. Sformułowanie zagadnienia

W procesie wypierania jednej cieczy przez drugą w ośrodku porowatym przy założeniu, że obie ciecze nie mieszają się ze sobą, powstaje strefa przejściowa, w której obie ciecze «przenikają się» nawzajem.

W obszarze strefy przejściowej mamy do czynienia z jednoczesną filtracją cieczy niejednorodnych.

Przepływ cieczy niejednorodnych w ośrodkach porowatych z reguły jest nieustalony. Takie parametry fizyczne cieczy, jak ciężar właściwy i lepkość, są stałe, natomiast prędkość filtracji, wydatek i ciśnienie złożowe poszczególnych cieczy są funkcjami położenia i czasu.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy następujące założenia: 1) ośrodek porowaty jest jednorodny i nieodkształcalny; 2) w ośrodku porowatym występują tylko dwie ciecze przenikające się nawzajem, ale nie mieszające się ze sobą, np. woda i ropa naftowa; 3) obie ciecze są nieściśliwe ($\varrho = \text{const}$); 4) przepływ każdej cieczy jest ciągły; 5) pole prędkości nie ma punktów osobliwych (źródeł i upustów); 6) ruch obu cieczy jest jednowymiarowy; 7) temperatura złoża oraz przepływających cieczy jest stała; 8) znane są empiryczne zależności: współczynniki względnych przepuszczalności $F_w(\sigma)$ i $F_r(\sigma)$ oraz ciśnienia kapilarnego $p_k(\sigma)$.

Przy tych założeniach zostanie wyprowadzone ogólne równanie różniczkowe opisujące rozkład wodonasycenia w strefie przejściowej.

2. Wyprowadzenie ogólnego równania rozkładu wodonasycenia w strefie przejściowej

W zagadnieniu wypierania jednej cieczy przez drugą w ośrodku porowatym w ogólnym przypadku będziemy mieli pięć niewiadomych funkcji. Nieznanymi funkcjami będą: ciśnienie $p_i(x, t)$ w każdej cieczy, wektor prędkości filtracji $v_i(x, t)$ dla każdej cieczy oraz wodonasycenie ośrodka porowatego $\sigma(x, t)$.

Ażeby dane zagadnienie w całości rozwiązać, należy zestawić układ tylu równań, ile występuje nieznanych funkcji i wyznaczyć każdą z nich jako funkcję położenia i czasu.

Równaniami wyjściowymi dla procesu wypierania np. ropy naftowej przez wodę z ośrodka porowatego, są następujące:

równania ruchu

$$(2.1)\qquad v_w = -\frac{k}{\mu_w} F_w(\sigma)\left(\frac{\partial p_w}{\partial x} + \gamma_w \sin\alpha\right)$$

oraz

$$(2.2)\qquad v_r = -\frac{k}{\mu_r} F_r(\sigma)\left(\frac{\partial p_r}{\partial x} + \gamma_r \sin\alpha\right);$$

równania określające ciśnienie kapilarne

$$(2.3)\qquad p_w = p_r + p_k \quad \text{lub} \quad \frac{\partial p_w}{\partial x} = \frac{\partial p_r}{\partial x} + \frac{\partial p_k}{\partial x};$$

równania ciągłości

$$(2.4)\qquad m\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial v_w}{\partial x} = 0, \quad m\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial v_r}{\partial x} = 0,$$

gdzie m oznacza współczynnik porowatości, k współczynnik przepuszczalności ośrodka porowatego, $\sigma(x, t)$ wodonasycenie w strefie przejściowej, jako funkcję położenia i czasu, v_w, v_r prędkość filtracji odpowiednio dla wody i ropy, p_w, p_r ciśnienie złożowe dla wody i ropy, p_k ciśnienie kapilarne, μ_w, μ_r dynamiczny współczynnik lepkości, γ_w, γ_r ciężar właściwy wody i ropy oraz F_w, F_r współczynniki względnych fazowych przepuszczalności jako funkcje wodonasycenia $\sigma(x, t)$.

Odejmując stronami równania $(2.4)_1$ i $(2.4)_2$ otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_w + v_r) = 0,$$

czyli

$$(2.5)\qquad v_w = v_r = v(t) = \text{const względem } x,$$

gdzie prawa strona jako stała całkowania względem x może być funkcją pozostałej zmiennej t. W szczególnym przypadku wypierania stałą ilością wody (stałym natężeniem wtłaczanej wody) funkcja

$$(2.6)\qquad v(t) = \text{const}.$$

Ponieważ poszukujemy funkcji $\sigma = \sigma(x, t)$ więc z powyższego układu równań musimy wyeliminować v_w, v_r, p_w i p_r.

W tym celu przekształcamy równania (2.1) i (2.2):

$$\frac{\partial p_w}{\partial x} = -\frac{\mu_w}{kF_w(\sigma)} v_w - \gamma_w \sin\alpha, \quad \frac{\partial p_r}{\partial x} = -\frac{\mu_r}{kF_r(\sigma)} v_r - \gamma_r \sin\alpha,$$

następnie odejmujemy je stronami; uwzględniając równanie $(2.3)_1$, otrzymujemy

$$\frac{\partial p_k}{\partial x} = \frac{\mu_r}{kF_r(v)} v_r - \frac{\mu_w}{kF_w(\sigma)} v_w + (\gamma_r - \gamma_w)\sin\alpha.$$

Podstawiając $v_r = v(t) - v_w$ oraz $C = \mu_w/\mu_r$ znajdziemy

$$\frac{\partial p_k}{\partial x} = \frac{\mu_r}{kF_r(\sigma)} v(t) - \frac{\mu_r}{kF_r(\sigma)}\left(1 + \frac{F_r}{CF_w}\right) v_w + \left(\gamma_r - \gamma_w\right)\sin\alpha.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$1+\frac{F_r}{CF_w}=\frac{1}{f_w(\sigma)}$$

otrzymamy

$$\frac{kF_r(\sigma)}{\mu_r}\left[\frac{\partial p_k}{\partial x}+(\gamma_w-\gamma_r)\sin\alpha\right]=v(t)-v_w\frac{1}{f_w(\sigma)}.$$

Stąd

$$v_w=\left\{v(t)-\frac{kF_r(\sigma)}{\mu_r}\left[\frac{\partial p_k}{\partial x}+(\gamma_w-\gamma_r)\sin\alpha\right]\right\}f_w(\sigma).$$

Różniczkując stronami ostatnie równanie otrzymamy

$$\frac{\partial v_w}{\partial x}=v(t)\frac{df_w}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{k}{\mu_r}\frac{\partial}{\partial x}\left\{f_w(\sigma)F_r(\sigma)\left[\frac{\partial p_k(\sigma)}{\partial x}+(\gamma_w-\gamma_r)\sin\alpha\right]\right\}. \tag{2.7}$$

Obliczoną pochodną podstawiamy do równania $(2.4)_1$ i otrzymujemy ostateczną postać poszukiwanego równania różniczkowego:

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+v(t)\frac{df_w}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{k}{\mu_r}\frac{\partial}{\partial x}\left\{f_w(\sigma)F_r(\sigma)\left[\frac{\partial p_k(\sigma)}{\partial x}+(\gamma_w-\gamma_r)\sin\alpha\right]\right\}=0. \tag{2.8}$$

Jest to ogólna postać równania wyznaczającego funkcję $\sigma(x, t)$ przy uwzględnieniu ciśnienia kapilarnego i wpływu sił ciężkości.

3. Szczególne przypadki równania ogólnego

Można zauważyć, że równanie (2.8) obejmuje znane w literaturze równania, które są szczególnymi przypadkami wypierania jednego płynu przez drugi w ośrodku porowatym.

Istotnie, jeżeli pominiemy wpływ sił grawitacji ($\alpha=0$), to otrzymamy równanie Leasa – Rapoporta [1]

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+v(t)\frac{df_w}{d\sigma}\frac{d\sigma}{\partial x}-\frac{k}{\mu_r}\frac{\partial}{\partial x}[f_w(\sigma)F_r(\sigma)]\frac{\partial p_k}{\partial x}=0. \tag{3.1}$$

Jeżeli pominiemy wpływ ciśnienia kapilarnego ($p_w=p_r$) i wpływ sił grawitacji, to otrzymamy równanie Buckleya i Leveretta [2]

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+v(t)\frac{df_w}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0. \tag{3.2}$$

Jeżeli natomiast będziemy rozpatrywali przypadek wchłaniania jednej cieczy przez drugą $v(t)=0$ pod wpływem sił kapilarnych $p_k(\sigma)\neq \text{const}$ przy $\alpha=0$, to otrzymujemy równanie

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{k}{\mu_r}\frac{\partial}{\partial x}[f_w(\sigma)F_r(\sigma)]\frac{\partial p_k}{\partial x}=0, \tag{3.3}$$

które posiada rozwiązanie samoodwzorowujące podane przez Ryżika [3].

4. Określenie typu równania ogólnego

Ażeby powiedzieć coś na temat możliwości rozwiązania otrzymanego ogólnego równania, należy określić jego typ.

Zauważmy, że w równaniu (2.8) wyraz $(\gamma_w-\gamma_r)\sin\alpha$ jest wielkością stałą, natomiast pochodną $df_w/d\sigma$ dla danych funkcji $F_w(\sigma)$ i $F_r(\sigma)$ oraz stosunku μ_w/μ_r możemy traktować jako znaną funkcję. Wobec czego wprowadzamy oznaczenia

$$h(\sigma)=\frac{df_w}{d\sigma},\quad c=(\gamma_w-\gamma_r)\sin\alpha. \tag{4.1}$$

Uwzględniając (4.1) w równaniu (2.8) możemy napisać

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+v(t)h(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{k}{\mu_r}\frac{\partial}{\partial x}\left\{f_w(\sigma)F_r(\sigma)\left[\frac{\partial p_k(\sigma)}{\partial x}+c\right]\right\}=0. \tag{4.2}$$

Obliczając pochodną ostatniego wyrazu, otrzymujemy

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+v(t)h(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{k}{\mu_r}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(f_w(\sigma)F_r(\sigma)\big)\right]\left[\frac{\partial p_k(\sigma)}{\partial x}+c\right]+\right.$$
$$\left.+f_w(\sigma)F_r(\sigma)\frac{\partial^2 p_k(\sigma)}{\partial x^2}\right\}=0. \tag{4.3}$$

Obliczmy występujące w ostatnim równaniu pochodne ciśnienia kapilarnego $p_k=p_k(\sigma)$ pamiętając, że $\sigma=\sigma(x,t)$. Mamy

$$\frac{\partial p_k}{\partial x}=\frac{dp_k}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dp_k}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)=\frac{d^2p_k}{d\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\frac{dp_k}{d\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}.$$

Podstawiając obliczone pochodne do równania (4.3) otrzymujemy

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+v(t)h(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{k}{\mu_r}\left\{\left[\frac{df_w}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}F_r(\sigma)+f_w(\sigma)\frac{dF_r}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{dp_k}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+c\right)+f_w(\sigma)F_r(\sigma)\left[\frac{d^2p_k}{d\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\frac{dp_k}{d\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\right]\right\}=0. \tag{4.4}$$

Porządkując ostatnie równanie względem pochodnych funkcji $\sigma(x, t)$, otrzymujemy

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+v(t)h(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{k}{\mu_r}\left\{\frac{\partial\sigma}{\partial x}\left[\frac{df_w}{d\sigma}F_r(\sigma)+f_w(\sigma)\frac{dF_r}{d\sigma}\right]\left(\frac{dp_k}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+c\right)+\right.$$
$$\left.+f_w(\sigma)F_r(\sigma)\frac{d^2p_k}{d\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+f_w(\sigma)F_r(\sigma)\frac{dp_k}{d\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\right\}=0$$

i następnie

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\left\{v(t)h(\sigma)-\frac{k}{\mu_r}c\left[\frac{df_w}{d\sigma}F_r(\sigma)+f_w(\sigma)\frac{dF_r}{d\sigma}\right]\right\}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+$$
$$+\left\{f_w(\sigma)F_r(\sigma)\frac{d^2p_k}{d\sigma^2}-\frac{k}{\mu_r}\left[\frac{df_w}{d\sigma}F_r(\sigma)+f_w(\sigma)\frac{dF_r}{d\sigma}\right]\frac{dp_k}{d\sigma}\right\}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+$$
$$+f_w(\sigma)F_r(\sigma)\frac{dp_k}{d\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=0.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$L_1(\sigma)=v(t)h(t)-\frac{k}{\mu_r}c\left[\frac{df_w}{d\sigma}F_r(\sigma)+f_w(\sigma)\frac{dF_r}{d\sigma}\right],$$

$$L_2(\sigma)=f_w(\sigma)F_r(\sigma)\frac{d^2p_k}{d\sigma^2}-\frac{k}{\mu_r}\left[\frac{df_w}{d\sigma}F_r(\sigma)+f_w(\sigma)\frac{dF_r}{d\sigma}\right]\frac{dp_k}{d\sigma},$$

$$L_3(\sigma)=f_w(\sigma)F_r(\sigma)\frac{dp_k}{d\sigma},$$

otrzymujemy ostateczną postać równania opisującego rozkład wodonasycenia w strefie przejściowej:

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+L_1(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial x}+L_2(\sigma)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+L_3(\sigma)\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=0, \tag{4.5}$$

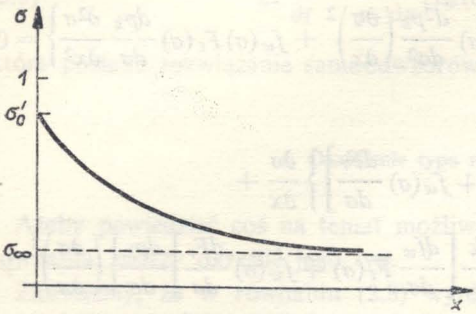
gdzie, jak łatwo zauważyć z wprowadzonych oznaczeń, funkcje będące współczynnikami w równaniu są znanymi funkcjami zależnymi od poszukiwanego rozkładu wodonasycenia $\sigma(x, t)$.

Widzimy, że równanie (4.5) jest quasi-liniowym cząstkowym równaniem różniczkowym typu parabolicznego o współczynnikach zależnych od poszukiwanej funkcji. Wiadomo, że w obecnym stanie nauki o równaniach różniczkowych cząstkowych nie potrafimy wyznaczyć ścisłych rozwiązań równania tego typu. Możemy szukać rozwiązania za pomocą metod numerycznych.

5. Warunki początkowe i brzegowe

Dla pełnego sformułowania problemu należy równanie (4.5) uzupełnić warunkami początkowymi i brzegowymi.

Wiemy, że przy początkowym styku wody z ropą istnieje strefa przejściowa, wewnątrz której nasycenie wodą maleje. Uwzględniając ten fakt formułujemy następujący warunek początkowy: przyjmujemy, że funkcja σ jest monotonicznie malejąca od pewnej wartości σ_0' w miejscu wtłaczania $x = 0$ do pewnej wartości granicznej σ_∞ daleko od miejsca wtłaczania (rys. 1): $\sigma(x, 0) = g(x)$ dla $x \geqslant 0$.



Rys. 1. Warunek początkowy rozkładu nasycenia

Warunki brzegowe określamy w sposób następujący:

$$\sigma(x, t) = \sigma_0' = \text{const} \quad \text{dla} \quad x = 0,$$

$$\sigma(x, t) = \sigma_\infty = \text{const} \quad \text{dla} \quad x \to \infty.$$

Mamy więc zagadnienie mieszane z warunkami początkowymi i brzegowymi I rodzaju. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania różniczkowego quasi-liniowego typu parabolicznego (4.5) przy sformułowanych warunkach początkowych i brzegowych dowiedziono w pracy [4].

6. Uwagi końcowe

W celu wyznaczenia efektywnego rozwiązania równania (4.5) ze sformułowanymi warunkami początkowymi i brzegowymi musimy uciec się do przybliżonych metod numerycznych dla równań tego typu stosując np. różnicową metodę siatek [5] lub metodę prostych [6].

Dla różnicowej metody siatek J. Douglas podaje w swoich pracach [7 i 8] numeryczny sposób rozwiązywania równań różniczkowych quasi-liniowych parabolicznych stosując modyfikację Crank-Nicolsona zwykłej metody różnicowej w celu osiągnięcia stabilności rozwiązania. W pracy powyższej jest podany dowód stabilności i zbieżności proponowanej metody.

Zastosowanie metody prostych do quasi-liniowych równań typu parabolicznych wraz z dowodem stabilności i zbieżności podał B. M. Budak [9].

Opracowanie szczegółowego numerycznego rozwiązania równania (4.5) dla postawionego zagadnienia jest przedmiotem obecnej pracy autora.

Literatura cytowana w tekście

1. L. A. Rapoport, W. J. Leas, *Properties of linear water floods*, Trans. AIME, **198** (1953), 139.

2. S. E. Buckley, M. C. Leverett, *Mechanism of fluid displacement in sands*, Trans. AIME, **146** (1942), 107.

3. В. М. Рыжик, *О капиллярной пропитке водой нефтенасыщенного гидрофилного пласта*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машин., 2, 1960.

4. Чоу-Юуй-лин, *Краевые задачи для нелинейных параболических уравнений*, Мат. Сб., том 47, пр 4, 1959.

5. В. Вазов, Дз. Форсаит, *Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных*, Перевод с англ. Б. М. Будака и Н. П. Жидкова, Москва 1963.

6. И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, т. II, Москва 1959.

7. J. Douglas, *On the numerical integration of quasi-linear parabolic differential equations*, Pac. J. Math., **6** (1956).

8. J. Douglas, *The Application of stability analysis in the numerical solution of quasi-linear paraboli differential equations*, Trans. AMS, 2, **89** (1958).

9. Б. М. Будак, *О методе прямых для некоторых квазилинейных краевых задач параболического типа*, ЗВМиМФ, 6, **1** (1961).

Резюме

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Для принятых предположений выводится общее дифференциальное уравнение, описывающее распределение насыщения в переходной зоне в процессе вытеснения одной жидкости с помощью другой, в однородной пористой среде, при учете капиллярного давления в влияния сил тяжести.

Показано, что частными случаями, выведенного уравнения, являются уравнения, известные из литературы. Общее уравнение сводится к канонической форме и дополняется начальными и краевыми условиями, для рассматриваемого физического явления.

Summary

DIFFERENTIAL EQUATION OF FILTRATION OF A NONHOMOGENEOUS LIQUID

General differential equation is derived, with certain assumptions, for the distribution of saturation in the transition zone during an expulsion process of a liquid by another one in a homogeneous porous body, taking into consideration the capillary pressure and the influence of gravity forces.

It is shown that the equations known from the literature are particular cases of the equation derived. The general solution is reduced to the canonical form and completed with the initial and boundary conditions of the physical problem under consideration.

KATEDRA HYDRAULIKI
MECHANIKI CIECZY I GAZÓW
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 kwietnia 1965 r.