ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 14 (1966)

OSZACOWANIE PARAMETRÓW LINIOWYCH OKRĘTU W PEWNYM ZBIORZE OBCIĄŻEŃ

JÓZEF WIĘCKOWSKI (GDAŃSK)

1. Przez parametr liniowy kadłuba okrętu będziemy rozumieli funkcjonał liniowy określony w pewnej przestrzeni liniowej funkcji jednej lub wielu zmiennych i posiadających w podzbiorze nośnika tej przestrzeni mechaniczną interpretację fizykalną dla konstrukcji okrętu.

Wyróżnione podzbiory nośnika mają między innymi interpretację nieskończonych żbiorów obciążeń, jakie mogą działać na statek w procesie eksploatacji. Wśród tych podzbiorów istotną rolę odgrywają podzbiory od obciążeń ładunkiem i falami na powierzchni swobodnej morza.

Dotychczas rozpatrywane zagadnienia w pracach [4–8] obejmowały bardzo ogólne klasy zbiorów obciążeń przedziałami ciągłych lub szczególne przypadki zbiorów obciążeń przedziałami stałych. Ponieważ zbiory te dla wielu obciążeń o szczególnych cechach fizykalnych są albo zbyt szerokie, albo zbyt wąskie, należy dokładniej sprecyzować własności funkcji obciążeń zgodnie z fizykalnymi cechami badanego obciążenia. Uwagi te dotyczą głównie obciążeń ładunkiem sypkim oraz obciążeń okrętu na fali.

W niniejszej pracy zajmiemy się jedynie zagadnieniami jednowymiarowymi dla ładunku sypkiego przyjmując, że jest to taki ośrodek ciągły, w którym dzięki istnieniu stałego kąta tarcia wewnętrznego powierzchnia swobodna jest linią ciągłą i posiada ograniczoną i przedziałami ciągłą pochodną. Takie założenie jest zgodne z przybliżeniami stosowanymi dla ośrodków sypkich [3]. Praca stanowi jednocześnie wstęp do praktycznie ważniejszego problemu wyznaczania ekstremum integralnego parametrów liniowych okrętu na fali.

Nie podaje się przykładów zastosowań, a jedynie ogólne rozwiązania lub oszacowania ze wskazaniem klasy zadań, które na podstawie podanej teorii można rozwiązać. Przykłady zastosowań będą opublikowane w artykule [8].

Autorowi nie udało się uzyskać we wszystkich przypadkach ścisłych rozwiązań zadania ekstremum integralnego funkcjonału liniowego w rozpatrywanym zbiorze. W tych przypadkach, w których nie udało się uzyskać rozwiązań, podaje się jednak oszacowania tych ekstremów od góry i od dołu.

Rozwiązane problemy należą do teorii sterowania [1 i 2] i mogą być również interpretowane jako zagadnienia sterowania układów dyskretnych w czasie z ograniczoną prędkością urządzeń sterujących. W szczególności przyjęcie ekstremalnego rozkładu danego ładunku sypkiego o ciężarze Q stałym jest równoważne przyjęciu optymalnego sterowania w danym przedziale czasu z ustalonym impulsem sił zewnętrznych.

Autor nie spotkał się w literaturze mechaniki konstrukcji okrętowych i dostępnej mu literaturze teorii sterowania [1, 2] z zastosowaniami teorii sterowania do problemów wytrzymałościowych jak również z rozwiązaniami i oszacowaniami podanymi w niniejszej pracy.

2. Niech będzie dany funkcjonał liniowy parametru J w postaci

$$J(\{p(\xi)\}) = \int_{L_1}^{L_2} j(\xi)\, p(\xi)\, d\xi, \tag{2.1}$$

gdzie $\{j(\xi)\}$ jest daną funkcją wpływu parametru J, określoną i przedziałami ciągłą w przedziale $\langle L_1, L_2\rangle$, natomiast

$$\{p(\xi)\} \in \Omega, \tag{2.2}$$

gdzie

$$\Omega = \big\{\{p(\xi)\};\quad \{p(\xi)\} \in C_p^1,\quad \xi \in \langle L_1, L_2\rangle,\quad |p'(\xi)| \leqslant \alpha,\quad \alpha \neq 0\big\}. \tag{2.3}$$

Przedziałami ciągłą funkcję α, ograniczającą bezwzględne wartości pierwszych pochodnych funkcji $\{p(\xi)\}$ uważamy za daną. W interpretacji fizykalnej może to być tangens kąta tarcia wewnętrznego ładunku sypkiego okrętu.

Z określenia zbioru Ω (2.3) mamy

$$p'(\xi) = r(\xi), \tag{2.4}$$

gdzie $\{r(\xi)\} \in C_p^0$ w przedziale $\langle L_1, L_2\rangle$ i jest ograniczona, tzn.

$$|r(\xi)| \leqslant \alpha, \qquad \xi \in \langle L_1, L_2\rangle. \tag{2.5}$$

Całkując (2.4) w granicach od L_1 do $\xi \in \langle L_1, L_2\rangle$ otrzymujemy

$$p(\xi) = C + \int_{L_1}^{\xi} r(\eta)\, d\eta, \tag{2.6}$$

gdzie C oznacza dowolną stałą (jednak dla każdej ustalonej funkcji inną ustaloną wartość). Ponieważ $\{r(\eta)\} \in C_p^0$, to $\Rightarrow \{p(\xi)\} \in C_p^1$. Ponieważ przedstawienie (2.6) funkcji $\{p(\xi)\}$ przez funkcję $\{r(\eta)\}$ jest możliwe dla każdej funkcji $\{p(\xi)\} \in \Omega$, przeto podstawiając (2.6) do (2.1) otrzymamy nowy funkcjonał

$$J = C \int_{L_1}^{L_2} j(\xi)\, d\xi + \int_{L_1}^{L_2} j(\xi) \int_{L_1}^{\xi} r(\eta)\, d\eta\, d\xi. \tag{2.7}$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$j_L \equiv \int_{L_1}^{L_2} j(\xi)\, d\xi \tag{2.8}$$

i zmieńmy granice całkowania w całce (2.7) wykorzystując to, że obszar całkowania jest normalny względem obydwu osi prostokątnego układu kartezjańskiego ξ, η. Otrzymamy wtedy

$$(2.9)\qquad J'(C;\{r(\eta)\}) = Cj_L + \int_{L_1}^{L_2} \bar{j}(\eta)\, r(\eta)\, d\eta,$$

gdzie

$$(2.10)\qquad \bar{j}(\eta) = \int_{L_1}^{L_2} j(\xi)\, \omega(\xi),(\eta)\, d\xi$$

oraz

$$(2.11)\qquad \omega(\xi,\eta) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \eta \leqslant \xi, \\ 0 & \text{dla} \quad \xi < \eta. \end{cases}$$

Ponieważ z założenia $\{j(\xi)\} \in C_p^0$ w przedziale $\langle L_1, L_2 \rangle$, zatem zgodnie z (2.10) i (2.11) w przedziale $\langle L_1, L_2 \rangle$. Możemy zatem rozpatrywać zamiast funkcjonału (2.1) w zbiorze Ω funkcjonał

$$(2.12)\qquad J'(C;\{r(\eta)\}) = Cj_L + \int_{L_1}^{L_2} \bar{j}(\eta)\, r(\eta)\, d\eta,$$

w zbiorze

$$(2.13)\qquad \Omega' = \{C, \{r(\eta)\};\ \{r(\eta)\} \in C_p^0,\ \xi\ \langle L_1, L_2 \rangle,\ |r(\eta)| \leqslant a,\ C \in (-\infty, +\infty)\}.$$

Zbadajmy ekstrema integralne funkcjonału (2.12) w zbiorze (2.13).

TWIERDZENIE 1. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym do istnienia ekstremum funkcjonału* (2.12) *w zbiorze* (2.13) *jest* $j_L = 0$.

Twierdzenie to jest oczywiste. Oznaczmy przez $N_{\bar{j}}$ nośnik funkcji $\bar{j}(\eta)$, mamy wtedy następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli* $j_L = 0$, *to każdą ekstremalę funkcjonału* (2.12) *w zbiorze* (2.13) *można przedstawić w postaci następującej*:

a) *dla przypadku maksimum*

$$(2.14)\qquad r^+(\eta) = \begin{cases} a \operatorname{sgn} \bar{j}(\eta) & \textit{dla} \quad \eta \in N_{\bar{j}}, \\ u(\eta) & \textit{dla} \quad \eta \in \langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\bar{j}}, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.15)\qquad \{u(\eta)\} \in C_p^0,\ |u(\eta)| \leqslant a,\quad C^+ \in (-\infty, +\infty);$$

b) *dla przypadku minimum*

$$(2.16)\qquad r^-(\eta) = \begin{cases} -a \operatorname{sgn} \bar{j}(\eta) & \textit{dla} \quad \eta \in N_{\bar{j}}, \\ u(\eta) & \textit{dla} \quad \eta \in \langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\bar{j}}, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.17)\qquad \{u(\eta)\} \in C_p^0,\quad |u(\eta)| \leqslant a,\quad C^- \in (-\infty, +\infty).$$

Z twierdzeń 1 i 2 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby ekstremale $r^+(\eta)$ i $r^-(\eta)$ były określone jednoznacznie, jest, aby przedział

$$\langle L_1, L_2\rangle \setminus N_{\bar{j}} \tag{2.18}$$

był pusty.

Istotnie, jeżeli $\langle L_1, L_2\rangle \setminus N_{\bar{j}}$ jest pusty, to funkcje (2.14)–(2.17) są określone jednoznacznie; jeżeli są określone jednoznacznie, to nie mogą być określone przez funkcję $u(\eta)$, a to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle L_1, L_2\rangle \setminus N_{\bar{j}}$ jest pusty.

Wniosek 2. Jeżeli $j_L = 0$, to

$$\max_{C,\{r(\eta)\}\in\Omega'} J' = -\min_{C,\{r(\eta)\}\in\Omega'} J' = \int_{L_1}^{L_2} a\,|\bar{j}(\eta)|\,d\eta. \tag{2.19}$$

Dowód otrzymamy podstawiając $j_L = 0$ oraz (2.14) lub (2.15) do (2.12).

Oznaczmy teraz przez Ω_1' następujący zbiór:

$$\Omega_1' = \big\{\{r(\eta)\};\ \{r(\eta)\}\in C_p^0,\ \ \eta\in\langle L_1, L_2\rangle,\ \ |r(\eta)|\leqslant a\big\}. \tag{2.20}$$

Łatwo wtedy zauważyć, że otrzymamy następujący

Wniosek 3. Funkcjonał (2.12) osiąga w zbiorze (2.20) maksimum i minimum (dla każdego j_L), przy czym ekstremalami są funkcje (2.14) i (2.16), a wartości ekstremalne funkcjonału wynoszą

$$\max_{\{r(\eta)\}\in\Omega_1'} J' = Cj_L + \int_{L_1}^{L_2} a\,|\bar{j}(\eta)|\,d\eta \tag{2.21}$$

oraz

$$\min_{\{r(\eta)\}\in\Omega'} J' = Cj_L - \int_{L_1}^{L_2} a\,|\bar{j}(\eta)|\,d\eta. \tag{2.22}$$

Dowód jest oczywisty. Warunki jednoznaczności ekstremali są tutaj identyczne z warunkami podanymi we wniosku 1.

Określenie ekstremum funkcjonału J' (2.12) w zbiorze Ω' (2.13) jest równoważne określeniu ekstremum funkcjonału (2.1) w zbiorze (2.2); natomiast określenie ekstremum funkcjonału J' w zbiorze Ω_1' jest równoważne określeniu ekstremum funkcjonału J (2.1) w zbiorze

$$\Omega_1 = \big\{\{p(\xi)\};\ \{p(\xi)\}\in\Omega,\ p(L_1) = C\big\}, \tag{2.23}$$

tzn. w zbiorze wszystkich tunkcji należących do Ω i przyjmujących tę samą wartość C w punkcie $\xi = L_1$. Wynika to wprost z (2.6), gdy podstawiamy $\xi = L_1$. Mamy zatem

Wniosek 4. Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia ekstremum funkcjonału (2.1) w zbiorze (2.2) jest $j_L = 0$.

Wniosek 5. Jeżeli $j_L = 0$, to każdą ekstremalę funkcjonału (2.1) w zbiorze (2.2) można przedstawić w postaci

a) dla przypadku maksimum

$$p^+(\xi) = C^+ + \int_{L_1}^{\xi} r^+(\eta)\,d\eta; \tag{2.24}$$

b) dla przypadku minimum

$$p^-(\xi) = C^- + \int_{L_1}^{\xi} r^-(\eta)\,d\eta, \tag{2.25}$$

gdzie C^+ i C^- są dowolnymi liczbami z przedziału $(-\infty, +\infty)$, tzn. ekstremale nie są określone jednoznacznie. Dowód jest natychmiastowy przez podstawienie (2.14)-(2.18) do (2.6).

W analogiczny sposób uzyskamy

Wniosek 6. Jeżeli $j_L = 0$, to

$$\max_{\{p(\xi)\}\in\Omega} J = -\min_{\{p(\xi)\}\in\Omega} J = \int_{L_1}^{L_2} \alpha\,|\bar{j}(\eta)|\,d\eta. \tag{2.26}$$

Podobnie można rozpatrzeć ekstremum J w zbiorze Ω_1 (2.23) otrzymując

Wniosek 7. Funkcjonał (2.1) osiąga w zbiorze Ω_1, (2.23) maksimum i minimum, przy czym ekstremalami są funkcje

a) dla przypadku maksimum

$$p^+(\xi) = C + \int_{L_1}^{\xi} r^+(\eta)\,d\eta, \tag{2.27}$$

b) dla przypadku minimum

$$p^-(\xi) = C + \int_{L_1}^{\xi} r^-(\eta)\,d\eta, \tag{2.28}$$

a wartościami ekstremalnymi funkcjonału są liczby

$$\max_{\{p(\xi)\}\in\Omega_1} J = Cj_L + \int_{L_1}^{L_2} \alpha\,|\bar{j}(\eta)|\,d\eta, \tag{2.29}$$

$$\min_{\{p(\xi)\}\in\Omega_1} J = Cj_L - \int_{L_1}^{L_2} \alpha\,|\bar{j}(\eta)|\,d\eta. \tag{2.30}$$

Ekstremala są określone jednoznacznie wtedy i tylko wtedy, gdy przedział $\langle L_1, L_2\rangle \setminus N_{\bar{j}}$ jest pusty.

Zadanie wyznaczenia ekstremum funkcjonału (2.1) w Ω, a zatem również funkcjonału (2.10) w Ω', nie wyczerpuje jednak możliwych zastosowań w okrętownictwie. W szczególności istotne jest zbadanie ekstremum warunkowego przy zachowaniu stałego ciężaru ładunku w przedziale. Jak się przekonamy w następnym punkcie pracy, tak postawione zadanie narzuca jedynie liniową zależność między C i $\{r(\eta)\}$.

3. Zbadajmy zatem ekstremum funkcjonału (2.1) w zbiorze

$$\Omega_2 = \Big\{ \{p(\xi)\};\ \{p(\xi)\}\in\Omega,\ \int_{L_1}^{L_2} p(\xi)\,d\xi = Q \Big\}, \tag{3.1}$$

gdzie Q jest liczbą daną. Całkując obustronne równanie (2.6) w granicach od L_1 do L_2 otrzymujemy

$$Q = C\Delta + \int_{L_1}^{L_2} d\xi \int_{L_1}^{\xi} r(\eta)\, d\eta, \tag{3.2}$$

gdzie

$$\Delta \equiv L_2 - L_1. \tag{3.3}$$

Zmieniając granice całkowania w (3.2) i obliczając stałą C otrzymujemy

$$C = \frac{Q}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \int_{L_1}^{L_2} (L_2 - \eta)\, r(\eta)\, d\eta, \tag{3.4}$$

tzn. wszystkie stałe C dla funkcji $\{p(\xi)\}$ wg (2.6) takich, że ich całka w przedziale $\langle L_1, L_2 \rangle$ jest równa Q. Podstawiając (3.4) do (2.9) otrzymujemy funkcjonał

$$J''(Q; \{r(\eta)\}) = \frac{Q}{\Delta} j_L + \int_{L_1}^{L_2} \tilde{j}(\eta)\, r(\eta)\, d\eta, \tag{3.5}$$

gdzie

$$\tilde{j}(\eta) = \bar{j}(\eta) - \frac{L_2 - \eta}{L_2 - L_1} j_L. \tag{3.6}$$

Ponieważ $\{\bar{j}(\eta)\} \in C_p^1$, to i $\{\tilde{j}(\eta)\} \in C_p^1$ w przedziale $\langle L_1, L_2 \rangle$. Funkcjonał (3.5) jest określony w zbiorze

$$\Omega_2'' = \{\{r(\eta)\};\ \{r(\eta)\} \in C_p^0,\ \ \eta \in \langle L_1, L_2 \rangle,\ \ |r(\eta)| \leqslant \alpha\}. \tag{3.7}$$

Można teraz wypowiedzieć analogiczne twierdzenie do twierdzeń 1 i 2 i wnioski analogiczne do wniosków 1–7.

Wniosek 1. Funkcjonał (3.5) osiąga w zbiorze (3.6) maksimum i minimum, przy czym ekstremalami są funkcje:

a) dla przypadku maksimum

$$\bar{r}^+(\eta) = \begin{cases} \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}(\eta) & \text{dla } \ \eta \in N_{\tilde{j}}, \\ u(\eta) & \text{dla } \ \eta \in \langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}, \end{cases} \tag{3.8}$$

gdzie

$$\{u(\eta)\} \in C_p^0 \quad \text{i} \quad |u(\eta)| \leqslant \alpha;$$

b) dla przypadku minimum

$$\bar{r}^-(\eta) = \begin{cases} -\alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}(\eta) & \text{dla } \ \eta \in N_{\tilde{j}}, \\ u(\eta) & \text{dla } \ \eta \in \langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}, \end{cases} \tag{3.9}$$

gdzie

$$\{u(\eta)\} \in C_p^0 \quad \text{i} \quad |u(\eta)| \leqslant \alpha,$$

a wartościami ekstremalnymi funkcjonału liczby

$$(3.10)\qquad \max_{\{r(\eta)\}\in\Omega_2''} J'' = \frac{Q}{\varDelta} j_L + \int_{L_1}^{L_2} a\,|\tilde{j}(\eta)|\,d\eta$$

oraz

$$(3.11)\qquad \min_{\{r(\eta)\}\in\Omega_2''} J'' = \frac{Q}{\varDelta} j_L - \int_{L_1}^{L_2} a\,|\tilde{j}(\eta)|\,d\eta.$$

Ekstremale są określone jednoznacznie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(3.12)\qquad \langle L_1, L_2\rangle \equiv N_{\tilde{j}}.$$

Ponieważ ekstremum funkcjonału J'' (3.5) w zbiorze Ω_2'' (3.2) jest równoznaczne ekstremum funkcjonału (2.1) w zbiorze (3.1), przeto otrzymamy

Wniosek 2. Funkcjonał (2.1) osiąga w zbiorze (3.1) maksimum i minimum, przy czym ekstremalami są funkcje

$$(3.13)\qquad \bar{p}^{\nu}(\xi) = \frac{Q}{\varDelta} - \frac{1}{\varDelta}\int_{L_1}^{L_2} (L_2-\eta)\,\bar{r}^{\nu}(\eta)\,d\eta + \int_{L_1}^{\xi} \bar{r}^{\nu}(\eta)\,d\eta,$$

gdzie ν oznacza plus dla przypadku maksimum lub minus dla przypadku minimum.

Wartościami ekstremalnymi funkcjonału są liczby

$$(3.14)\qquad \max_{\{p(\xi)\}\in\Omega_2} J = \max_{\{r(\eta)\}\in\Omega_2''} J'', \quad \min_{\{p(\xi)\}\in\Omega_2} J = \min_{\{r(\eta)\}\in\Omega_2''} J''.$$

Ekstremale są określone jednoznacznie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(3.15)\qquad \langle L_1, L_2\rangle \equiv N_{\tilde{j}}.$$

Zapytajmy się teraz, kiedy określenie ekstremum funkcjonału J w zbiorze Ω_2 może być interpretowane jako określenie ekstremalnego rozkładu ładunku sypkiego w przedziale $\langle L_1, L_2\rangle$. Weźmy pod uwagę przypadek maksimum. Zachodzi to oczywiście tylko wtedy, gdy

$$(3.16)\qquad \bar{p}^{+}(\xi) \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad \xi\in\langle L_1, L_2\rangle.$$

Niech $\langle L_1, L_2\rangle \equiv N_{\tilde{j}}$, wtedy funkcja $\{\bar{r}^{+}(\eta)\}$ jest określona jednoznacznie niezależnie od wartości Q i warunek (3.16) sprowadza się do warunku

$$(3.17)\qquad Q \geqslant \max_{\xi\in\langle L_1,L_2\rangle}\left[\int_{L_1}^{L_2} (L_2-\eta)\,\bar{r}^{+}(\eta)\,d\eta - \varDelta\int_{L_1}^{\xi} \bar{r}^{+}(\eta)\,d\eta\right] \equiv \bar{Q}^{+},$$

a dla przypadku minimum $\langle L_1, L_2\rangle \equiv N_{\tilde{j}}$ do warunku

$$(3.18)\qquad Q \geqslant \max_{\xi\langle L_1,L_2\rangle}\left[\int_{L_1}^{L_2} (L_2-\eta)\,\bar{r}^{-}(\eta)\,d\eta - \varDelta\int_{L_1}^{\xi} \bar{r}^{-}(\eta)\,d\eta\right] \equiv \bar{Q}^{-}.$$

Jeżeli Q^+ lub $Q^- > 0$, to tylko dla $Q \in \langle \bar{Q}^+, +\infty)$ lub dla $Q \in \langle \bar{Q}^-, +\infty)$ rozwiązanie zadania ma interpretację fizykalną, natomiast dla $Q \in (0, \bar{Q}^+)$ i $Q \in (0, \bar{Q}^-)$ przynajmniej jedno z rozwiązań interpretacji fizykalnej w sensie wskazanym wyżej nie posiada.

W przypadku $\langle L_1, L_2 \rangle \not\equiv N_{\tilde{j}}$ mamy ekstremalę $\bar{r}^+(\eta)$ określoną niejednoznacznie w przedziale $\langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}$ (por. 3.8). Możemy wtedy napisać równanie (3.13) dla $\nu \equiv +$ w postaci

$$(3.19)\qquad \bar{p}^+(\xi) = \frac{Q}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \int\limits_{N_{\tilde{j}}} (L_2 - \eta)\, \bar{r}^+(\eta)\, d\eta + \int\limits_{N_{\tilde{j}} \cap \langle L_1, \xi \rangle} \bar{r}^+(\eta)\, \eta d -$$
$$- \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}} (L_2 - \eta)\, u(\eta)\, d\eta + \int\limits_{(\langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}) \cap \langle L_1, \xi \rangle} u(\eta)\, d\eta .$$

Podstawiając (3.19) do (3.16) otrzymujemy

$$(3.20)\qquad \frac{Q}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \int\limits_{N_{\tilde{j}}} (L_2 - \eta)\, \bar{r}^+(\eta)\, d\eta + \int\limits_{N_{\tilde{j}} \cap \langle L_1, \xi \rangle} \bar{r}^+(\eta)\, d\eta \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}} (L_2 - \eta)\, u(\eta)\, d\eta - \int\limits_{(\langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}) \cap \langle L_1, \xi \rangle} u(\eta)\, d\eta$$

dla każdego $\xi \in \langle L_1, L_2 \rangle$.

Lewa strona równania (3.20) jest określona jednoznacznie, natomiast $\{u(\eta)\} \in C_p^0$ i w $\langle L_1, L_2 \rangle$ i $|u(\eta)| \leqslant \alpha$ (zgodnie z (3.8)).

Prawą stronę nierówności (3.20) można napisać w postaci

$$(3.21)\qquad \psi(\xi; \{u(\eta)\}) = \int\limits_{\langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}} \psi(\xi, \eta)\, u(\eta)\, d\eta ,$$

gdzie

$$(3.22)\qquad \psi(\xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}(L_2 - \eta) - 1 & \text{dla} \quad \eta \in (\langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}) \cap \langle L_1, \xi \rangle , \\[2ex] \dfrac{1}{\Delta}(L_2 - \eta) & \text{dla} \quad \eta > \xi \ \text{i} \ \eta \in \langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}} . \end{cases}$$

Oznaczmy przez U zbiór

$$(3.23)\qquad U = \{\{u(\eta)\};\ \{u(\eta)\} \in C_p^0,\ |u(\eta)| \leqslant \alpha,\ \eta \in \langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}\} .$$

Dla każdej ustalonej wartości ξ wyrażenie $\psi(\xi, \{u(\eta)\})$ jest funkcjonałem określonym na zbiorze U i posiadającym jednoznacznie określoną ekstremalę, gdyż zgodnie z (3.22)

$$(3.24)\qquad N_{\varphi(\xi, \eta)} \equiv \langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}$$

dla każdego ξ. Jeżeli zatem dla każdego ξ jest spełniona nierówność

$$\frac{Q}{\varDelta} - \frac{1}{\varDelta} \int\limits_{N_{\tilde{j}}} (L_2 - \eta)\, \bar{r}^+(\eta)\, d\eta + \int\limits_{N_{\tilde{j}} \cap \langle L_1, \xi \rangle} \bar{r}^+(\eta)\, d\eta \geqslant \max_{\substack{\{u(\eta)\} \in U \\ \xi = \mathrm{const}}} \psi(\xi; \{u(\eta)\}), \tag{3.25}$$

gdzie

$$\max_{\substack{\{u(\eta)\} \in U \\ \xi = \mathrm{const}}} \psi(\xi; \{u(\eta)\}) = \int\limits_{\langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}} a\, |\psi(\xi, \eta)|\, d\eta, \tag{3.26}$$

to warunek (3.16) jest spełniony dla każdej funkcji $\{u(\eta)\} \in U$, a zatem i dla każdej ekstremali $\bar{p}^+(\xi)$. Można więc wypowiedzieć następujący wniosek.

Wniosek 3. Jeżeli $\langle L_1, L_2 \rangle \not\equiv N_{\tilde{j}}$, to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby każda ekstremala $\{\bar{p}^+(\xi)\}$ spełniała warunek

$$\bar{p}^+(\xi) \geqslant 0, \tag{3.27}$$

jest nierówność

$$Q \geqslant \max_{\xi \in \langle L_1, L_2 \rangle} \Bigg[\int\limits_{N_{\tilde{j}}} (L_2 - \eta)\, \bar{r}^+(\eta)\, d\eta - \varDelta \int\limits_{N_{\tilde{j}} \cap \langle L_1, \xi \rangle} \bar{r}^+(\eta)\, d\eta + \varDelta \int\limits_{\langle L_1, L_2 \rangle \setminus N_{\tilde{j}}} a\, |\psi(\xi, \eta)|\, d\eta \Bigg] \equiv \tilde{Q}^+. \tag{3.28}$$

Oczywiście, jeżeli $\tilde{Q}^+ \leqslant 0$, to dla każdej wartości $Q \geqslant 0$ istnieje rozwiązanie o znaczeniu fizykalnym.

Podobnie można rozpatrzeć przypadek minimum oraz warunki wystarczające nieistnienia ani jednej ekstremali $\bar{p}^+(\xi)$ lub $\bar{p}^-(\xi)$ spełniającej warunek (3.16). Ponieważ większość funkcji wpływu ważnych praktycznie spełnia warunek $N_{\tilde{j}} \equiv \equiv \langle L_1, L_2 \rangle$, to przypadków tych szczegółowo rozpatrywać nie będziemy.

4. Zajmiemy się wyznaczeniem ekstremum funkcjonału

$$J(\{p(\xi)\}) = \int\limits_{L_1}^{L_2} j(\xi)\, p(\xi)\, d\xi \tag{4.1}$$

w zbiorze

$$\Omega_3 = \{\{p(\xi)\};\ \{p(\xi)\} \in \Omega_2,\ p(\xi) \geqslant 0,\ \xi \in \langle L_1, L_2 \rangle\}. \tag{4.2}$$

Ponieważ $\{p(\xi)\} \in C_p^1$ [(2.3)], to następujące warunki są równoważne:

$$\begin{bmatrix} p(\xi) \geqslant 0 \\ \\ \text{dla każdego } \xi \in \langle L_1, L_2 \rangle \end{bmatrix} \rightleftarrows \begin{bmatrix} \int\limits_{x_1}^{x_2} p(\xi)\, d\xi \geqslant 0 \\ \\ \text{dla każdych } x_1 < x_2 \text{ i } x_1, x_2 \in \langle L_1, L_2 \rangle \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Można zatem rozpatrywać zamiast zadania ekstremum funkcjonału (4.1) w (4.2) zadanie równoważne wyznaczenia ekstremum funkcjonału (4.1) w zbiorze (3.1) z nieprzeliczalną ilością jednostronnych warunków bocznych w postaci

$$\int_{x_1}^{x_2} p(\xi)\, d\xi \geqslant 0 \tag{4.4}$$

dla każdych $x_1 < x_2$ i $x_1, x_2 \in \langle L_1, L_2\rangle$.

Weźmy pod uwagę zadanie równoważne dla funkcji $r(\eta)$. Mamy wtedy do rozpatrzenia ekstremum funkcjonału (por. 3.5)

$$J''(Q; \{r(\eta)\}) = \frac{Q}{\Delta} j_L + \int_{L_1}^{L_2} \bar{j}(\eta)\, r(\eta)\, d\eta \tag{4.5}$$

w zbiorze Ω_2'' (por. 3.7), gdzie

$$\Omega_2'' = \{\{r(\eta)\};\ \{r(\eta)\} \in C_p^0,\ \eta \in \langle L_1, L_2\rangle,\ |r(\eta)| \leqslant \alpha\}, \tag{4.6}$$

przy czym warunki boczne (4.4) przyjmują postać [por. (3.4) i (2.6)]

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{Q}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\int_{L_1}^{L_2} (L_2 - \eta)\, r(\eta)\, d\eta + \int_{L_1}^{\xi} r(\eta)\, d\eta\right] d\xi \geqslant 0 \tag{4.7}$$

dla każdych $x_1 < x_2$ i $x_1, x_2 \in \langle L_1, L_2\rangle$.

Weźmy pod uwagę dowolne $x_1 < x_2$ i $x_1, x_2 \in \langle L_1, L_2\rangle$ i oznaczmy przez $\Delta_{x_1, x_2} \equiv \equiv x_2 - x_1$. Otrzymujemy wtedy w (4.7) po wykonaniu całkowania nierówność

$$\frac{Q}{\Delta}\Delta_{x_1, x_2} - \frac{\Delta_{x_1, x_2}}{\Delta}\int_{L_1}^{L_2} (L_2 - \eta)\, r(\eta)\, d\eta + \int_{x_1}^{x_2} d\xi \int_{L_1}^{\xi} r(\eta)\, d\eta \geqslant 0\,. \tag{4.8}$$

Zmieniając granice całkowania w drugiej z całek w (4.8) i wprowadzając funkcję

$$\omega(\xi;\ x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \text{ dla } \xi \in \langle x_1, x_2\rangle, \\ 0 \text{ dla } \xi \in \langle L_1, L_2\rangle \setminus \langle x_1, x_2\rangle \end{cases} \tag{4.9}$$

i dzieląc (4.8) obustronnie przez Δ_{x_1, x_2} można otrzymać następującą postać nierówności (4.8):

$$\int_{L_1}^{L_2}\left[\int_{\eta}^{L_2} \frac{1}{\Delta_{x_1, x_2}}\,\omega(\xi;\ x_1, x_2)\, d\xi - \frac{L_2 - \eta}{\Delta}\right] r(\eta)\, d\eta \geqslant -\frac{Q}{\Delta}. \tag{4.10}$$

Oznaczmy przez

$$\sigma(\eta; x_1, x_2) \equiv \int_{\eta}^{L_2} \frac{1}{\Delta_{x_1, x_2}}\,\omega(\xi;\ x_1, x_2)\, d\xi - \frac{L_2 - \eta}{\Delta}. \tag{4.11}$$

Po wykonaniu obliczeń po prawej stronie tożsamości (4.11) otrzymujemy

$$\sigma(\eta; x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{\eta - L_1}{L_2 - L_1} & \text{dla} \quad \eta \in \langle L_1, x_1 \rangle, \\[2ex] \dfrac{x_2 - \eta}{x_2 - x_1} - \dfrac{L_2 - \eta}{L_2 - L_1} & \text{dla} \quad \eta \in \langle x_1, x_2 \rangle, \\[2ex] \dfrac{\eta - L_2}{L_2 - L_1} & \text{dla} \quad \eta \in \langle x_2, L_2 \rangle. \end{cases} \tag{4.12}$$

Zwróćmy uwagę na to, że $\sigma(\eta; x_1, x_2)$ jest dla każdego $x_1 < x_2$ i $x_1, x_2 \in \langle L_1, L_2 \rangle$ funkcją ciągłą względem η i że dla każdego x_1 istnieje

$$\lim_{x_1 \to x_2} \sigma(\eta; x_1, x_2) \equiv \sigma(\eta; x_1, x_2) \equiv \begin{cases} \dfrac{\eta - L_1}{L_2 - L_1} & \text{dla} \quad \eta \in \langle L_1, x_1 \rangle, \\[2ex] \dfrac{\eta - L_2}{L_2 - L_1} & \text{dla} \quad \eta \in \langle x_1, L_2 \rangle. \end{cases} \tag{4.13}$$

Funkcja $\sigma(\eta; x_1, x_1)$ posiada nieciągłość pierwszego rodzaju w punkcie $\eta = x_1$ oraz

$$\lim_{\eta \to x_1^-} \sigma(\eta; x_1, x_1) - \lim_{\eta \to x_1^+} \sigma(\eta; x_1, x_1) = 1. \tag{4.14}$$

Wprowadźmy następujące funkcjonały liniowe określone na zbiorze Ω_2'' wg (4.6):

$$\chi(\{r(\eta)\}; x_1, x_1) \equiv \int_{L_1}^{L_2} \sigma(\eta; x_1, x_2)\, r(\eta)\, d\eta. \tag{4.15}$$

Warunki boczne (4.7) można wtedy napisać w postaci równoważnej:

$$\chi(\{r(\eta)\}; x_1, x_2) \geqslant -\frac{Q}{\Delta} \tag{4.16}$$

dla każdych $x_1 < x_2$ i $x_1, x_2 \in \langle L_1, L_2 \rangle$.

Weźmy teraz pod uwagę przypadek $N_{\tilde{j}} \equiv \langle L_1, L_2 \rangle$, tzn. przypadek, w którym ekstremala funkcjonału (4.5) w zbiorze (4.6) jest określona jednoznacznie. Weźmy pod uwagę jeden z warunków bocznych (4.16) i zapytajmy się, kiedy jest on istotny dla oceny maksimum funkcjonału J'' w zbiorze Ω_2''.

Niech funkcje $\tilde{j}(\eta)$ i $\sigma(\eta; x_1, x_2)$ (dla ustalonych x_1, x_2) będą silnie liniowo niezależne w przedziale $\eta \in \langle L_1, L_2 \rangle$. Wtedy krzywa graniczna w dwuwymiarowej przestrzeni warunków bocznych dla funkcjonałów J'' i χ jest wypukła [4] i warunek boczny jest istotny dla oceny maksimum funkcjonału wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\chi(\{\bar{r}^+(\eta)\}; x_1, x_2) < -\frac{Q}{\Delta} \tag{4.17}$$

i co więcej, jeżeli jest spełniony warunek (4.17), to warunek boczny jednostronny można zastąpić równoważnym dla oceny maksimum warunkiem bocznym dwustronnym postaci

$$\chi(\{r(\eta)\};\ x_1, x_2) = -\frac{Q}{\Delta}. \tag{4.18}$$

Weźmy teraz pod uwagę funkcję

$$\Phi^+(x_1, x_2) \equiv \chi(\{\bar{r}^+(\eta)\};\ x_1, x_2). \tag{4.19}$$

Zgodnie z warunkami narzuconymi na x_1 i x_2 [np. w (4.16)] funkcja ta jest określona w trójkącie

$$D \equiv \{x_1, x_2;\ L_1 \leqslant x_1 < L_2,\ x_1 < x_2 \leqslant L_2\}. \tag{4.20}$$

Podamy teraz następujące twierdzenie o oszacowaniu maksimum funkcjonału.

TWIERDZENIE 3. *Niech będzie dany funkcjonał*

$$J''(Q;\ \{r(\eta)\}) = \frac{Q}{\Delta} j_L + \int_{L_1}^{L_2} \tilde{j}(\eta)\, r(\eta)\, d\eta, \qquad Q = \text{const} \tag{4.21}$$

określony w zbiorze

$$\Omega_2'' = \{\{r(\eta)\},\ \{r(\eta)\} \in C_p^0,\ \eta \in \langle L_1, L_2 \rangle,\ |r(\eta)| \leqslant a\} \tag{4.22}$$

z warunkami bocznymi

$$\chi(\{r(\eta)\};\ x_1, x_2) \equiv \int_{L_1}^{L_2} \sigma(\eta; x_1, x_2)\, r(\eta)\, d\eta \geqslant -\frac{Q}{\Delta} \tag{4.23}$$

dla każdych $x_1 < x_2$ i $x_1, x_2 \in \langle L_1, L_2 \rangle$ *przy czym funkcje* $\tilde{j}(\eta)$ i $\sigma(\eta;\ x_1, x_2)$ *są dla każdej pary* x_1, x_2 *silnie liniowo niezależne* (*do tego wystarczy, aby* $\tilde{j}(\eta)$ *nie było w żadnym podprzedziale liniową funkcją* η). *Mamy wtedy następujące oszacowanie wartości maksimum* J'' *w* Ω_2'' *z warunkami bocznymi*:

$$\max J'' \leqslant J, \tag{4.24}$$

gdzie

$$J = \inf_{x_1, x_2 \in D} \left\{ \frac{Q}{\Delta} j_L + \int_{L_1}^{L_2} \tilde{j}(\eta)\, a \operatorname{sgn}[\tilde{j}(\eta) + \lambda(x_1, x_2)\, \sigma(\eta;\ x_1, x_2)]\, d\eta \right. \tag{4.25}$$

$$\left. \text{dla } \Phi^+(x_1, x_2) < -\frac{Q}{\Delta} \text{ lub } J = \max_{\{r(\eta)\} \in \Omega_2''} J'' \text{ dla } \Phi^+(x_1, x_2) \geqslant -\frac{Q}{\Delta} \right\},$$

przy czym $\lambda(x_1, x_2)$ *spełnia równanie*

$$\int_{L_1}^{L_2} a \operatorname{sgn}[\tilde{j}(\eta) + \lambda\sigma(\eta;\ x_1, x_2)]\, \sigma(\eta;\ x_1, x_2)\, d\eta = \frac{Q}{\Delta}, \tag{4.26}$$

natomiast dla przypadku minimum

$$\min J'' \geqslant \bar{J}, \tag{4.27}$$

gdzie

$$\bar{J} = \sup_{x_1, x_2 \in D} \left\{ \frac{Q}{\Delta} j_L - \int_{L_1}^{L_2} \tilde{j}(\eta)\, \alpha \operatorname{sgn}[j(\eta) + \lambda(x_1, x_2)\, \sigma(\eta; x_1, x_2)]\, d\eta \right. \tag{4.28}$$

$$\left. \textit{dla } \Phi^-(x_1, x_2) < -\frac{Q}{\Delta} \textit{ lub } J = \min_{\{r(\eta)\} \in \Omega_2''} J'' \textit{ dla } \Phi^-(x_1, x_2) \geqslant -\frac{Q}{\Delta} \right\},$$

przy czym $\lambda(x_1, x_2)$ *spełnia równanie*

$$\int_{L_1}^{L_2} \alpha \operatorname{sgn}[\tilde{j}(\eta) + \lambda\sigma(\eta;\ x_1, x_2)]\, \sigma(\eta;\ x_1, x_2)\, d\eta = \frac{Q}{\Delta}, \tag{4.29}$$

$$\Phi^-(x_1, x_2) \equiv \chi(\{\bar{r}^-(\eta)\};\ x_1, x_2). \tag{4.30}$$

D o w ó d (dla przypadku maksimum). Zauważmy wpierw, że jeżeli spełnione są warunki boczne (4.23), to spełniony jest również warunek

$$\chi(\{r(\eta)\};\ x_1, x_2) \geqslant -\frac{Q}{\Delta} \tag{4.31}$$

dla ustalonej pary $x_1 < x_2\, x_1$, $x_2 \in \langle L_1, L_2 \rangle$, ale na ogół nie odwrotnie. Zatem jeżeli przez $\Omega''_{2,\infty}$ oznaczymy zbiór wszystkich funkcji $\{r(\eta)\} \in \Omega_2''$ i spełniających (4.28), a przez Ω''_{2, x_1, x_2} zbiór wszystkich funkcji spełniających (4.31) i należących do Ω_2'', to

$$\Omega''_{2,\infty} \subset \Omega''_{2, x_1, x_2}. \tag{4.32}$$

Niech $\bar{J}_{x_1, x_2}$ oznacza maksimum funkcjonału (4.21) w Ω''_{2, x_1, x_2}, to zgodnie z (4.32)

$$\max_{\{r(\eta)\} \in \Omega''_{2,\infty}} J'' \leqslant \bar{J}_{x_1, x_2}. \tag{4.33}$$

Ponieważ (4.33) jest spełniony dla każdego $x_1 < x_2$ i $x_1, x_2 \in \langle L_1, L_2 \rangle$, tzn. dla $x_1, x_2 \in D$, zatem

$$\max_{\{r(\eta)\} \in \Omega''_{2,\infty}} J'' \leqslant \inf_{x_1, x_2 \in D} \bar{J}_{x_1, x_2}. \tag{4.34}$$

Zgodnie z (4.15) dla tych $x_1, x_2 \in D$, dla których $\Phi^+(x_1, x_2) \geqslant -Q/\Delta$,

$$\bar{J}_{x_1, x_2} = \max_{\{r(\eta)\} \in \Omega_2''} J'', \tag{4.35}$$

natomiast dla tych $x_1, x_2 \in D$, dla których $\Phi^+(x_1, x_2) < -Q/\Delta$, należy dla każdej pary x_1, x_2 rozwiązać zadanie ekstremum funkcjonału J'' w Ω_2'' z jednym warunkiem bocznym przy silnej liniowej niezależności funkcji wpływu. Wystarczy tu zastosować np. twierdzenie 1 z pracy [7]. Otrzymujemy wtedy tezę.

Analogicznie dowodzi się przypadku minimum.

Uwaga. Jeżeli po wyznaczeniu wartości $\inf_{x_1, x_2 \in D} J$ wskażemy taką funkcję $\{r_0(\eta)\} \in \Omega''_{2,\infty}$, że

$$J''(Q; \{r_0(\eta)\}) = \inf_{x_1, x_2 \in D} \bar{J}_{x_1, x_2}, \tag{4.36}$$

to $r_0(\eta)$ jest ekstremalą zadania na maksimum J'' w $\Omega_{2,\infty}$. Nie trudno jednak zauważyć, że również jeżeli znajdziemy taki przedział $I \subset \langle L_1, L_2 \rangle$ (I może się składać ze skończonej ilości przedziałów rozłączonych), w którym będzie spełniony warunek

$$\int_I p(\xi, Q)\, d\xi \geqslant 0 \tag{4.37}$$

i jednocześnie funkcjonał

$$J''(Q; \{r(\eta)\}) = \frac{Q}{\Delta} j_L + \int_{L_1}^{L_2} \tilde{j}(\eta)\, d\eta \tag{4.38}$$

osiągnie maksimum w zbiorze $\Omega''_{2,\infty}$ (oznaczmy je przez $\max J''$) i jednocześnie wskażemy taką funkcję $\{r_0(\eta)\} \in \Omega''_{2.\infty}$, że

$$J''(Q; \{r_0(\eta)\}) = \max J'', \tag{4.39}$$

to $r_0(\eta)$ jest ekstremalą dla zadania o maksimum J'' w $\Omega''_{2,\infty}$. Dowód jest oczywisty, jeżeli zauważymy, że

$$\Omega''_{2,\infty} \subset \Omega''_{2,I}, \tag{4.40}$$

gdzie

$$\Omega''_{2,I} = \left\{\{r(\eta)\};\ \{r(\eta)\} \in \Omega''_{2},\ \int_I p(\xi, Q)\, d\xi \geqslant 0\right\}. \tag{4.41}$$

Podane wyżej oszacowania lub sposób poszukiwania ekstremali nie są jednak efektywne i w zastosowaniach liczbowych nie mogą odgrywać większej roli. Ścisłego rozwiązania natomiast nie udało się uzyskać, gdyż wymaga to rozwiązania zadania ekstremum z nieprzeliczalną ilością jednostronnych warunków bocznych.

Przejdziemy zatem do efektywnych metod szacowania ekstremum integralnego od góry i od dołu w przedziale ładunków $Q \in (0, \bar{Q}^+)$ i $Q \in (0, \bar{Q}^-)$ [(3.17) i (3.18)]. Będziemy w dalszym ciągu zakładali, że $N_{\tilde{j}} \equiv \langle L_1, L_2 \rangle$.

5. Podamy teraz istotne dla zastosowań twierdzenie pozwalające w efektywny sposób oszacować ekstremum integralne funkcjonału (4.21) w zbiorze (4.22) z warunkami bocznymi (4.23).

TWIERDZENIE 4. *Niech będzie dany funkcjonał*

$$J''(Q; \{r(\eta)\}) = \frac{Q}{\Delta} j_L + \int_{L_1}^{L_2} \tilde{j}(\eta)\, r(\eta)\, d\eta, \quad Q = \text{const} \tag{5.1}$$

określony w zbiorze

$$\Omega_2'' = \{\{r(\eta)\},\ \{r(\eta)\} \in C_p^0,\ \eta \in \langle L_1, L_2 \rangle,\ |r(\eta)| < \alpha\} \tag{5.2}$$

o takiej funkcji wpływu $\tilde{j}(\eta)$, *że*

$$N_{\tilde{j}} \equiv \langle L_1, L_2 \rangle. \tag{5.3}$$

Niech będą również dane warunki boczne w postaci

$$\chi(\{r(\eta)\}; x_1, x_2) = \int_{L_1}^{L_2} \sigma(\eta; x_1, x_2)\, r(\eta)\, d\eta \geqslant -\frac{Q}{\Delta} \tag{5.4}$$

dla każdych $x_1 < x_2$ i $x_1, x_2 \in \langle L_1, L_2 \rangle$.

Dla oszacowania od dołu maksimum integralnego funkcjonału (5.1) *w zbiorze* (5.2) *z warunkami bocznymi* (5.4) *wystarczy wziąć funkcję*

$$\tilde{r}^+(\eta) \equiv r^+(\eta)\left(1 + \frac{p^+(\eta, Q')}{|p^+(\eta, Q')|}\right), \tag{5.5}$$

gdzie

$$r^+(\eta) = \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}(\eta), \tag{5.6}$$

$$p^+(\xi, Q') = \frac{Q'}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\int_{L_1}^{L_2} (L_2 - \eta)\, r^+(\eta)\, d\eta + \int_{L_2}^{\xi} r^+(\eta)\, d\eta, \tag{5.7}$$

a liczba Q' *spełnia równanie*

$$Q = \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} \left(p^+(\xi, Q') + |p^+(\xi, Q')|\right) d\xi, \tag{5.8}$$

i obliczyć wartość funkcjonału (5.1) *dla funkcji* (5.2). *Dla oszacowania od góry minimum funkcjonału* (5.1) *w zbiorze* (5.2) *z warunkami bocznymi* (5.4) *wystarczy wziąć funkcję*

$$\tilde{r}^-(\eta) \equiv r^-(\eta)\left(1 + \frac{p^-(\xi, Q'')}{|p(\eta, Q'')|}\right), \tag{5.9}$$

gdzie

$$r^-(\eta) = \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}(\eta),$$

$$p^-(\xi, Q'') = \frac{Q''}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\int_{L_1}^{L_2} (L_2 - \eta)\, r^-(\eta)\, d\eta + \int_{L_1}^{\xi} r^-(\eta)\, d\eta, \tag{5.10}$$

a liczba Q'' *spełnia równanie*

$$Q = \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} \left(p^-(\xi, Q'') + |p^-(\xi, Q'')|\right) d\xi, \tag{5.11}$$

i obliczyć wartość funkcjonału (5.1) *dla funkcji* (5.9).

Dowód. Dowód jest oczywisty, gdyż wartość funkcjonału (5.1) dla każdej funkcji $\{r(\eta)\} \in \Omega_2''$ szacuje maksimum integralne od dołu a minimum integralne od góry. Istotne jest jednak wskazanie znacznej ostrości tego oszacowania. Weźmy pod uwagę przypadek maksimum. Nie trudno zauważyć, że dla $Q \in \langle \overline{Q}^+, +\infty)$ oraz $Q = 0$ otrzymujemy ścisłe rozwiązanie, natomiast dla $Q \in (0, \overline{Q}^+)$ oszacowania są przybliżone.

Pokażemy, że wskazana funkcja (5.5) jest ekstremalą funkcjonału (5.1) w dość szerokim podzbiorze zbioru (5.2).

Łatwo również sprawdzić, że dla wszystkich $Q \in (0, \overline{Q}^+)$ (5.5) i (5.9) otrzymuje się z funkcji (5.7) lub (5.10) przez różniczkowanie i przyjęcie $r(\eta) \equiv 0$ tam, gdzie odpowiednio przesunięte równoległe do osi rzędnych funkcje (5.7) lub (5.10), przyjmują wartości ujemne.

Weźmy pod uwagę funkcjonał

$$J(\{r(\eta)\}) = \int_{L_1}^{L_2} \tilde{j}(\eta)\, r(\eta)\, d\eta. \tag{5.12}$$

Funkcjonał ten osiąga w zbiorze (5.2) maksimum dla

$$r^+(\eta) = \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}(\eta). \tag{5.13}$$

Niech

$$\{r^+(\eta) + u(\eta)\} = \{r(\eta)\} \in \Omega_2'' \quad \text{i} \quad u(\eta) \not\equiv 0;$$

zgodnie z określeniem tego zbioru

$$|r(\eta)| \leqslant \alpha. \tag{5.14}$$

A zatem

$$|r^+(\eta) + u(\eta)| \leqslant \alpha, \tag{5.15}$$

skąd

$$-\alpha - r^+(\eta) \leqslant u(\eta) \leqslant \alpha - r^+(\eta) \tag{5.16}$$

lub podstawiając (5.14)

$$-\alpha(1 + \operatorname{sgn} \tilde{j}(\eta)) \leqslant u(\eta) \leqslant \alpha(1 - \operatorname{sgn} \tilde{j}(\eta)). \tag{5.17}$$

Z (5.17) mamy zatem wniosek następujący:

Wniosek 1. Każda funkcja $r(\eta) \in \Omega_2''$ może być przedstawiona w postaci sumy $r^+(\eta) + u(\eta)$, gdzie $\{u(\eta)\}$ spełnia nierówność (5.17) i $\{u(\eta)\}$ przedziałami ciągła.

Zauważmy teraz, że funkcjonał (5.12) jest jednorodny pierwszego stopnia i addytywny, a zatem

$$J(\{r(\eta)\}) = J(\{r^+(\eta)\}) + J(\{u(\eta)\}). \tag{5.18}$$

Mamy jednak

$$J(\{r^+(\eta)\}) = \max_{\{r(\eta)\} \in \Omega_2''} J, \tag{5.19}$$

przy czym jest to maksimum integralne; a zatem nierówność

(5.20) $$J(\{r(\eta)\}) < J(\{r^+(\eta)\})$$

jest silna, jeżeli $u(\eta) \not\equiv 0$, gdyż ekstremala jest wobec założenia $N_{\tilde{j}} \equiv \langle L_1, L_2 \rangle$ określona jednoznacznie. Odejmując od nierówności (5.20) równanie (5.18) otrzymujemy

(5.21) $$J(\{u(\eta)\}) < 0.$$

Wniosek 2. Dla każdej funkcji $\{u(\eta)\}$ przedziałami ciągłej spełniającej nierówność (5.17) funkcjonał (5.12) przyjmuje wartości ujemne.

Weźmy teraz pod uwagę dowolną funkcję $r(\eta) \in \Omega_2''$ taką, że

(5.22) $$p(\xi, Q') = \frac{Q'}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \int_{L_1}^{L_2} (L_2 - \eta)\, r(\eta)\, d\eta + \int_{L_1}^{\xi} r(\eta)\, d\eta \geqslant 0$$

i przedstawmy ją w postaci sumy

(5.23) $$r(\eta) = \tilde{r}^+(\eta) + \tilde{u}(\eta).$$

Ponieważ $\{r(\eta)\} \in \Omega_2''$,

(5.24) $$|r(\eta)| \leqslant \alpha,$$

to

(5.25) $$-\alpha - \tilde{r}^+(\eta) \leqslant \tilde{u}(\eta) \leqslant \alpha - \tilde{r}^+(\eta)$$

i tam gdzie $\tilde{r}^+(\eta) \equiv r^+(\eta)$ mamy

(5.26) $$-\alpha\big(1 + \operatorname{sgn} \tilde{j}(\eta)\big) \leqslant \tilde{u}(\eta) \leqslant \alpha\big(1 - \operatorname{sgn} \tilde{j}(\eta)\big)$$

oraz tam gdzie $\tilde{r}(\eta) = 0$

(5.27) $$-\alpha \leqslant \tilde{u}(\eta) \leqslant \alpha.$$

Porównując nierówności (5.26) i (5.27) z (5.17) oraz biorąc pod uwagę wniosek 1 i wniosek 2 mamy

Wniosek 3. Dla każdej zmiany $\tilde{u}(\eta)$ funkcji $\tilde{r}^+(\eta)$ spełniającej nierówności

(5.28) $$\begin{aligned} -\alpha\big(1 + \operatorname{sgn} j(\eta)\big) \leqslant \tilde{u}(\eta) \leqslant \alpha\big(1 - \operatorname{sgn} \tilde{j}(\eta)\big), &\quad \text{gdy} \quad \tilde{r}^+(\eta) = r^+(\eta), \\ -\alpha \leqslant \tilde{u}(\eta) \leqslant 0, &\quad \text{gdy} \quad \tilde{r}^+(\eta) = 0 \quad \text{i} \quad r^+(\eta) = \alpha, \\ 0 \leqslant u'(\eta) \leqslant \alpha, &\quad \text{gdy} \quad \tilde{r}^+(\eta) = 0 \quad \text{i} \quad r^+(\eta) = -\alpha \end{aligned}$$

oraz warunek (5.22) funkcjonał (5.14) osiąga w otoczeniu funkcji $\tilde{r}^+(\eta)$ maksimum.

Klasa funkcji, dla których funkcjonał (5.1) dla funkcji (5.5) stanowi ekstremum integralne, jest zatem bardzo szeroka. Funkcja (5.5) nie jest jednak na pewno rozwiązaniem ścisłym, gdyż np. miejsce występowania ekstremum integralnego funkcji (5.7), w którym spełnione jest równanie

(5.29) $$\tilde{j}(\eta) = 0,$$

oraz miejsca występowania ekstremum funkcji wpływu $j(\eta)$, np. różniczkowalnej spełniające warunek

(5.30) $$j'(\eta) = 0,$$

jeżeli występują we wnętrzu przedziału $\langle L_1, L_2\rangle$, wcale nie muszą się pokrywać. A zatem w takim przypadku można dla dostatecznie małych Q wskazać funkcję $\check{r}(\eta) \neq \tilde{r}^+(\eta)$, dla której

(5.31) $$J''(Q, \{\tilde{r}^+(\eta)\}) < J(Q, \{\check{r}(\eta)\}).$$

Analogiczne własności posiada dla przypadku minimum funkcja (5.9).

Przejdziemy do oszacowania maksimum integralnego od góry i minimum integralnego od dołu. Tym samym będziemy mogli każdorazowo podać błąd przybliżonej wartości ekstremum.

6. Dla oszacowania od góry maksimum integralnego funkcjonału (4.21) w zbiorze (4.22) z warunkami bocznymi (4.23) należy rozpatrzeć wartość tego funkcjonału w zbiorze rozszerzonym funkcji i to takim, aby ekstremum integralne w zbiorze szerszym było większe od ekstremum integralnego w zbiorze (4.21). To samo dotyczy oszacowania minimum integralnego od dołu. W tym celu dopuścimy nieciągłe rozkłady ładunku $p(\xi, Q)$ w przedziale $\langle L_1, L_2\rangle$ i udowodnimy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 5. A. *Niech będzie dany funkcjonał*

(6.1) $$J''(Q; \{r(\eta)\}) = \frac{Q}{\varDelta} j_L + \int_{L_1}^{L_2} \tilde{j}(\eta)\, r(\eta)\, d\eta, \quad Q = \text{const}$$

określony w zbiorze

(6.2) $$\Omega_2'' = \{\{r(\eta)\},\ \{r(\eta)\} \in C_p^0,\ \eta \in \langle L_1, L_2\rangle \ \text{ i } |r(\eta)| < a\}$$

z warunkami bocznymi

(6.3) $$p(\xi, Q) \equiv \frac{Q}{\varDelta} - \frac{1}{\varDelta}\int_{L_1}^{L_2} (L_2 - \eta)\, r(\eta)\, d\eta) + \int_{L_1}^{\xi} r(\eta)\, d\eta \geqslant 0$$

dla każdego $\xi \in \langle L_1, L_2\rangle$ *i o takiej funkcji wpływu* $j(\eta)$, *że*

(6.4) $$N_{\tilde{j}} \equiv I$$

dla każdego przedziału $I \equiv \langle x_{1,I}, x_{2,I}\rangle \subset \langle L_1, L_2\rangle$, *gdzie*

(6.5) $$\tilde{j}_I(\eta) = \int_{\eta}^{x_{2,}^I} j(\xi)\, d\xi - \frac{x_{2,I} - \eta}{x_{2,I} - x_{1,I}} j_I.$$

Niech jednocześnie funkcja wpływu $j(\eta)$ *posiada tę własność, że dla każdego* λ *nierówność*

(6.6) $$j(\eta) > \lambda$$

wyznacza ciąg skończony przedziałów rozłączonych $I_s(\lambda) \equiv (x_{1,s}, x_{2,s})$; $s = 1, 2, ..., N(\lambda)$ *o długości różnej od zera, a nierówność*

$$j(\eta) < \lambda \tag{6.7}$$

wyznacza ciąg skończony przedziałów rozłącznych $s = 1, 2, ..., M(\lambda)$ *o tych samych własnościach* $R_s(\lambda) \equiv \langle x_{1,s}, x_{2,s} \rangle$. *Jeżeli dla dowolnej danej wartości* λ *i danej wartości* $Q = Q_0$ *suma pierwiastków równań*

$$\min_{\xi \in I_s} \left[\frac{Q}{\Delta_{I_s}} - \frac{1}{\Delta_{I_s}} \int_{I_s} (x_{2,s} - \eta)\, \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}_{I_s}(\eta)\, d\eta + \int_{x_{1,s}}^{\xi} \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}_{I_s}(\eta)\, d\eta \right] = 0, \quad s = 1, 2, ..., N, \tag{6.8}$$

spełnia równanie

$$\sum_{s=1}^{K} \bar{Q}_{I_s} = Q_0, \tag{6.9}$$

to jest spełniona nierówność

$$\sum_{s=1}^{N} \left[\bar{Q}_{I_s} \max_{k=1,2,...,N} \left(\frac{j_{I_k}}{\Delta_{I_k}} \right) + \int_{R_s} j_{I_s}(\eta)\, \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}_{I_s}(\eta)\, d\eta \geqslant \geqslant \max_{\{r(\eta)\} \in \Omega_2''} J''(Q_0; \{r(\eta)\}) \right], \tag{6.10}$$

przy $p(\xi, Q) \geqslant 0$ *dla każdego* $\xi \in \langle L_1, L_2 \rangle$.

B. *Jeżeli dla dowolnej danej wartości* λ *i danej wartości* $Q = Q_0$ *suma pierwiastków równań*

$$\min_{\xi \in R_s} \left[\frac{Q}{\Delta_{R_s}} + \frac{1}{\Delta_{R_s}} \int_{R_s} (x_{2,s} - \eta)\, \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, d\eta - \int_{x_{1,s}} \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, d\eta \right] = 0, \quad s = 1, 2, ..., M, \tag{6.11}$$

spełnia równanie

$$\sum_{s=1}^{M} Q_{R_s} = Q_0, \tag{6.12}$$

to jest spełniona nierówność

$$\sum_{s=1}^{M} \left[Q_{R_s} \min_{k=1,2,...,n} \left(\frac{j_{R_k}}{\Delta_{R_k}} \right) - \int_{R_s} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, d\eta \leqslant \leqslant \min_{\{r(\eta)\} \in \Omega_2''} J''(Q_0; \{r(\eta)\}) \right], \tag{6.13}$$

przy $p(\xi, Q_0) \geqslant 0$ *dla każdego* $\xi \in \langle L_1, L_2 \rangle$.

Przeprowadźmy jedynie dowód dla przypadku A, gdyż dowód dla przypadku B jest analogiczny.

Dowód. Weźmy dowolną funkcję $p(\xi, Q_0)$ spełniającą (6.3), mamy wtedy

$$-\int_{R_s} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, a \operatorname{sgn} j_{R_s}(\eta)\, d\eta \leqslant \int_{R_s} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, p'(\xi, Q_0)\, d\eta, \tag{6.14}$$

gdyż

$$r(\eta) \equiv p'(\xi, Q_0) \tag{6.15}$$

jest ekstremalą dla minimum integralnego funkcjonału

$$J_{R_s}(Q_{R_s}, \{r(\eta)\}) \equiv \frac{Q_{R_s}}{\Delta_{R_s}} j_{R_s} + \int_{R_s} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, r(\eta)\, d\eta. \tag{6.16}$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzi równość

$$\sum_{s=1}^{M} J_{R_s}(Q_{R_s}; \{-a \operatorname{sgn} j_{R_s}(\eta)\}) = \int_{L_1}^{L_2} \psi(\xi)\, j(\xi)\, d\xi, \tag{6.17}$$

gdzie

$$\psi(\xi) = \begin{cases} p_{R_s}(\xi, Q_{R_s}) & \text{dla } \xi \in R_s \quad s = 1, 2, \ldots, M, \\ 0 & \text{dla } \xi \notin \bigcup_{s=1}^{M} R_s, \end{cases} \tag{6.18}$$

a

$$p_{R_s}(\xi, Q_{R_s}) = \frac{Q_{R_s}}{\Delta_{R_s}} + \frac{1}{\Delta_{R_s}} \int_{R_s} (x_{2,s} - \eta)\, a \operatorname{sgn} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, d\eta - \int_{x_{1,s}}^{\xi} a \operatorname{sgn} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, d\eta, \quad s = 1, 2, \ldots, M. \tag{6.19}$$

Weźmy teraz funkcję $\varphi(\xi)$ taką, że

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} p(\xi, Q_0) + C_s & \text{dla } \xi \in R_s, \\ 0 & \text{dla } \xi \notin \bigcup_{s=1}^{M} R_s, \end{cases} \tag{6.20}$$

gdzie stałe C_s dobrane tak, aby $\varphi(\xi) \geqslant 0$ dla $\xi \in \langle L_1, L_2 \rangle$ oraz

$$\int_{L_1}^{L_2} \varphi(\xi)\, d\xi = Q_0. \tag{6.21}$$

Można to zawsze osiągnąć, ponieważ $p(\xi, Q_0) \geqslant 0$ dla $\xi \in \langle L_1, L_2 \rangle$ oraz

$$\int_{L_1}^{L_2} p(\xi, Q_0)\, d\xi = Q_0. \tag{6.22}$$

Z (6.14) i (6.17) otrzymamy wtedy, że

$$\sum_{s=1}^{M} J_{R_s}(Q'_{R_s}; \{-a \operatorname{sgn} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\}) \leqslant \int_{L_1}^{L_2} \varphi(\xi)\, j(\xi)\, d\xi, \tag{6.23}$$

gdzie

$$\sum_{s=1}^{M} Q'_{R_s} = \sum_{s=1}^{M} Q_{R_s} \tag{6.24}$$

oraz

$$Q'_{R_s} = \int_{R_s} p(\xi, Q_0)\, d\xi + C_s \int_{R_s} d\xi. \tag{6.25}$$

Prawą stronę nierówności (6.23) po podstawieniu (6.20) można przekształcić do postaci

$$\int_{L_1}^{L_2} \varphi(\xi)\, j(\xi)\, d\xi = \int_{L_1}^{L_2} p(\xi, Q_0)\, j(\xi)\, d\xi + \sum_{s=1}^{M} C_s \int_{R_s} j(\xi)\, d\xi - \int_{\langle L_1, L_2\rangle \setminus \bigcup_{s=1}^{M} R_s} p(\xi, Q_0)\, j(\xi)\, d\xi. \tag{6.26}$$

Natomiast lewą stronę można napisać po podstawieniu (6.25) w postaci

$$\sum_{s=1}^{M} J_{R_s}(Q'_{R_s}; \{-\alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\}) = \sum_{s=1}^{M} C_s \int_{R_s} j(\xi)\, d\xi + \sum_{s=1}^{M} \frac{1}{\Delta_{R_s}} \left(\int_{R_s} p(\xi, Q_0)\, d\xi \right) \left(\int_{R_s} j(\xi)\, d\xi \right) - \sum_{s=1}^{M} \int_{R_s} \tilde{j}^{(\eta)}_{R_s} \alpha \operatorname{sgn} j_{R_s}(\eta)\, d\eta. \tag{6.27}$$

Podstawiając (2.26) i (6.27) do (6.23) otrzymujemy po uporządkowaniu

$$\sum_{s=1}^{M} \frac{1}{\Delta_{R_s}} \left(\int_{R_s} p(\xi, Q_0)\, d\xi \right) \left(\int_{R_s} j(\xi)\, d\xi \right) + \int_{\langle L_1, L_2\rangle \setminus \bigcup_{s=1}^{M} R_s} p(\xi, Q_0)\, j(\xi)\, d\xi - \sum_{s=1}^{M} \int_{R_s} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, \alpha \operatorname{sgn} \tilde{j}_{R_s}(\eta)\, d\eta \leqslant \int_{L_1}^{L_2} p(\xi, Q_0)\, j(\xi)\, d\xi. \tag{6.28}$$

Oznaczmy dla skrócenia zapisu

$$j_{R_s} \equiv \int_{R_s} j(\xi)\, d\xi; \tag{6.30}$$

łatwo wtedy zauważyć, że

$$\int_{\langle L_1, L_2\rangle \setminus \bigcup_{s=1}^{M} R_s} p(\xi, Q_0)\, j(\xi)\, d\xi \geqslant \lambda \int_{\langle L_1, L_2\rangle \setminus \bigcup_{s=1}^{M} R_s} p(\xi, Q_0)\, d\xi \geqslant \min_{s=1,2,\dots,M} \left(\frac{j_{R_s}}{\Delta_{R_s}} \right) \int_{\langle L_1, L_2\rangle \setminus \bigcup_{s=1}^{M} R_s} p(\xi, Q_0)\, d\xi \tag{6.31}$$

ze względu na nierówność (6.7). Podstawiając po lewej stronie nierówności (6.28) w pierwszej sumie $\min\limits_{k=1,2,\dots,M} (j_k/\Delta_{R_s})$ zamiast j_{R_s}/Δ_{R_s} oraz zamiast drugiej sumy wyrażenie po prawej stronie nierówności (6.31) oraz wykorzystując równanie (6.22) otrzymujemy tezę (6.13). Ostatnie przekształcenia zmniejszają na ogół ostrość oszacowania przy dużych M. W zastosowaniach w okrętownictwie funkcje wpływu mają jednak tę własność, że $M = 1, 2$ (np. funkcje wpływu siły tnącej i momentu gnącego dla kadłubów statków morskich i śródlądowych w rozpatrywanym przedziale ładowni lub zbiornika) i dlatego oszacowania te można uznać za wystarczające.

Posługując się twierdzeniami niniejszej pracy można teraz rozwiązać szereg następujących zadań o znaczeniu praktycznym, jak np.:

1. Dla danej funkcji wpływu parametru liniowego okrętu i danych ciężarów ładunku Q_i ($i = 1, 2, ..., \Omega$) w każdej ładowni lub zbiorniku wyznaczyć lub oszacować obwiednię tego parametru przy wszelkich możliwych rozkładach tego ładunku w każdej ładowni z ograniczoną pochodną obciążenia ciągłego ładunku [8].

2. Dla danej funkcji wpływu parametru liniowego okrętu i danych maksymalnych ciężarów ładunku $Q_{i,\max}$ ($i = 1, 2, ..., U$) w każdej ładowni lub zbiorniku sporządzić obwiednię tego parametru wskazując jednocześnie, dla jakich wartości $Q_i \in \langle 0, Q_{i,\max} \rangle$ zachodzi ekstremum.

Można również rozpatrywać zadania ze skończoną ilością warunków bocznych, programy ładowania, zadania wielowymiarowe. Te ostatnie zagadnienia wymagają jednak rozszerzenia i uogólnienia rozwiązanych przypadków jednowymiarowych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. Friedman, *Optimal control for hereditary processes*, Rat. Mech. Anal., 5, **15** (1964).
2. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Г. И. Ф. М. Л., Москва 1961.
3. В. В. Соколовский, *Статика сыпучей среды*, Г. И. Москва, 1954.
4. J. Więckowski, *Integralne ekstremum warunkowe pewnego funkcjonału kwadratowego*, Biul. IMP PAN, nr. 315, 1964, Prace IMP, z. 25 (1965).
5. J. Więckowski, *Obwiednie liniowych parametrów kadłuba okrętu w programach ładowania*, Zeszyty Naukowe Politechn. Gdańskiej, Budownictwo Okrętowe 6, 1964.
6. J. Więckowski, *Wpływ niejednorodności ładunku z jedną tworzącą na parametry zginania kadłuba okrętu*, Arch. Mech. Stos., 4, 1964.
7. J. Więckowski, *Ekstremum pewnego funkcjonału liniowego z jednostronnym warunkiem pobocznym i jego interpretacja w mechanice konstrukcji okrętowych*, Rozpr. Inżyn., 3, **12** (1964).
8. J. Więckowski, *Funkcje wpływu i oszacowania obwiedni parametrów zginania sztywnego kadłuba okrętu dla ładunku sypkiego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Okrętowe VIII, w druku.

Р е з ю м е

ОЦЕНКА ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОРАБЛЯ НА НЕКОТОРЫМ МНОЖЕСТВЕ НАГРУЗОК

Рассматриваются интегральные экстремумы функционала (2.1) на множестве непрерывных функций с кусочно-непрерывной и ограниченной производной (2.3). После сведения задачи к эквивалентной задаче о экстремуме линейного функционала (2.12) на множестве кусочно непрерывных и ограниченных функций (2.13), находится экстремаль и значения экстремума.

В п. 3 исследован частный случай, когда рассматривается экстремум функционала (2.1) на множестве (3.1). Если экстремаль неотрицательна во всем интервала, то рассматренная задача имеет физическое истолкование, как задача о экстремальном распределении сыпучего груза в корабельном трюме.

Для случая когда экстремаль на множестве (3.1) не является неотрицательной во всем интервале, получены оценки интегральных экстремумов функционала (2.1) на множестве неотрицательных функций из (3.1). Даны верхние и нижние оценки (п. 5 и п. 6).

В заключение формулируется задача о технической интерпретации, представленная в другой работе [8]. Ее решение получено на основе общих положений и оценок данных в настоящей работе. Обсуждаются дальнейшие возможные направления исследований.

Summary

ESTIMATION OF THE LINEAR PARAMETERS OF A SHIP IN SOME A SET LOADS

The object of the considerations is the problem of integral extrema of the functional (2.1) in the set (2.3) of continuous functions having sectionally continuous derivatives. After reducing the problem to the equivalent extremum problem of the linear functional (2.12) in the set of functions (2.13) sectionally continuous and bounded, the extremal function and the values of the extrema are obtained.

In Sec. 3 is considered a particular case of extremum of the functional (2.1) in the set (3.1) having, in the case of extremal function nonnegative in the entire interval, a physical interpretation of (in the form of) the extremal distribution of a granular shipload in the hold of a ship.

If the extremal function in the set (3.1) is not nonnegative in the entire interval, estimates from above and from below are obtained for the integral extrema of the functional (2.1), in the set of nonnegative functions belonging to the set (3.1).

In conclusion, the problem of technical interpretation described in another paper [8] is discussed and solved on the basis of general solutions and estimations obtained in the present paper. Directions of further research are suggested.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1965 r.