

PRZEGLĄD OSTATNICH PRAC WŁOSKICH W DZIEDZINIE NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

ELIO GIANGRECO

Pełny opis postępu uzyskanego w badaniach przeprowadzonych w ostatnich latach we Włoszech w dziedzinie nośności granicznej powinien wiązać się również z badaniami innych krajów, które z pewnością wpłynęły na kierunek i przebieg teoretycznych i doświadczalnych badań we Włoszech. Musimy jednak zrezygnować z tak szerokiego opisu i przedstawimy bardzo ogólny przegląd prac włoskich wskazując te badania, które ze względu na swą oryginalność i możliwość łatwego zastosowania zasługują na wzmiankę. We Włoszech, podobnie jak i w innych krajach, można wyróżnić dwa główne aspekty badań, mianowicie pełny opis przebiegu zjawiska aż do momentu zniszczenia, uwzględniający plastyczne przystosowanie i odciążenie sprężyste, oraz metodę nośności granicznej odnoszącą się jedynie do końcowego stanu konstrukcji i opisującą stan zniszczenia za pomocą odpowiedniego mechanizmu kinematycznego. Dokonano pewnych prób w kierunku znalezienia metod pośrednich między tymi dwiema skrajnymi metodami: pierwszą, odpowiadającą ściśle rzeczywistemu przebiegowi zjawiska lecz pełną komplikacji oraz drugą, bardzo prostą, lecz zbyt schematyczną i opierającą się jedynie na pojęciu przegubów plastycznych. Dlatego przegląd nasz dotyczyć będzie wszystkich tych zagadnień.

W punkcie 1 rozpatrzmy nośność graniczną przekrojów pod działaniem naprężeń gnących, wzdłużnych i tnących dla materiałów jednorodnych, betonu, betonu zbrojonego i wstępnie sprężonego. Następnie omówimy pewne badania dotyczące problemu nośności granicznej przy jednoczesnym zginaniu i ścinaniu, przeprowadzone w Instytucie Techniki Konstrukcji w Neapolu na zlecenie Europejskiego Komitetu Betonu.

W punkcie 2 rozpatrzmy zastosowanie teorii nośności granicznej do konstrukcji mostowych przy obciążeniach proporcjonalnych i nieproporcjonalnych, zagadnienie przystosowania się konstrukcji (shake down) i przypadek wstępnych odkształceń. Omówimy ogólnie badania dotyczące rusztów i łuków, a w szczególności rozpatrzmy mosty Nielsena i Maillarta.

W punkcie 3 poświęconym metodzie lokalnego zniszczenia omówimy prace, które ulepszają metodę przegubów plastycznych, gdzie wyniki uzyskane z analizy granicznej są dalej modyfikowane tak, aby uwzględnić ugięcie w stanie granicznym i związek pomiędzy momentem gnącym i krzywizną w zakresie sprężysto-plastycznym.

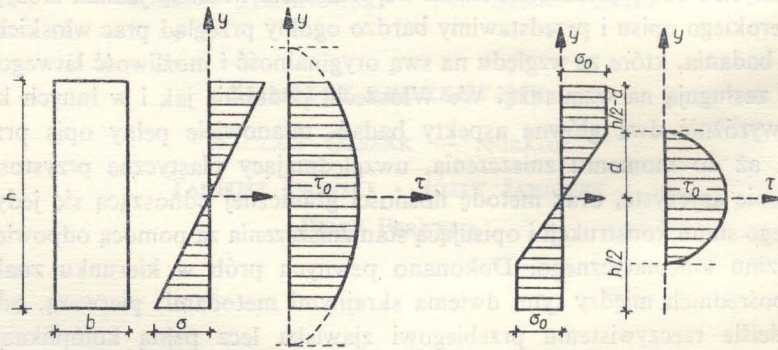
Punkt 4 dotyczy stopniowego obliczenia przebiegu uplastycznienia. Wspomnimy o pewnych pracach omawiających zachowanie się konstrukcji w zakresie sprężysto-

plastycznym i związane z tym zjawisko odciążenia przed zniszczeniem. Poza tym omówimy metodę pozwalającą na badanie stopniowego uplastycznienia za pomocą właściwego odwzorowania geometrycznego przekroju.

W końcowym p. 5 rozpatrzmy stateczność poprzeczną w zakresie sprężysto-plastycznym. Omówimy niektóre prace z tego zakresu i wyniki badań przeprowadzonych w Instytucie Techniki Konstrukcji w Neapolu.

1. Nośność graniczna przekroju

Rozpatrując jednorodnie i idealnie plastyczne materiały, GALLI i FRANCIOSI [1] przeprowadzili analizę stanu granicznego przekroju belki pod jednoczesnym działaniem momentu zginającego i siły tnącej oraz momentu zginającego, siły osiowej i siły tnącej; punktem wyjścia był warunek plastyczności Hubera — Misesa — Hencky'ego.



$$T = bA \left(\frac{h}{2} \sqrt{B^2 - \frac{h^2}{4} + B^2 \arcsin \frac{h}{2B}} \right)$$

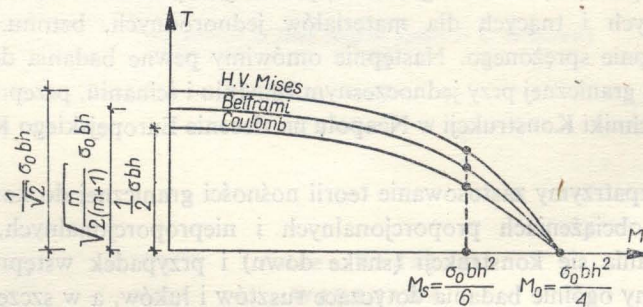
$$A = \frac{M}{\sqrt{2}}$$

$$B = \sigma_0 \frac{1}{M}$$

$$M = M_0 \left(1 - \frac{16}{3\pi^2} \frac{T^2}{T_0^2} \right)$$

$$M_0 = \frac{\sigma_0 b h^2}{4}$$

$$T_0 = \tau_0 b h$$

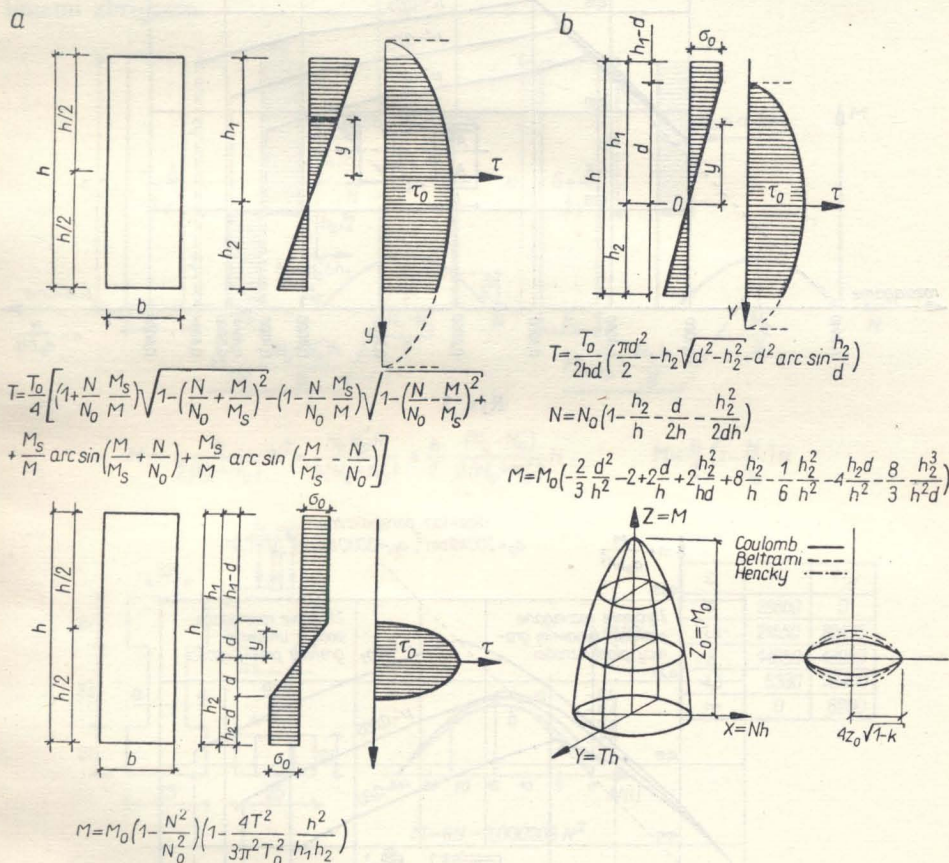


Rys. 1

Pierwsza praca podaje związek pomiędzy momentem zginającym i siłą tnącą, zakładając osiągnięcie stanu plastycznego w przekroju, gdy naprężenia normalne osiągają na części przekroju granicę plastyczności lub leżą poniżej niej przy jednoczesnym występowaniu naprężeń stycznych. Rysunek 1 pokazuje wykresy naprężeń normalnych i stycznych, odpowiadające dwóm przypadkom rozkładu naprężeń,

oraz krzywą uplastycznienia we współrzędnych M, T złożoną z dwóch odcinków odpowiadających różnym wartościom momentu zginającego. Dwie pozostałe krzywe odpowiadają warunkom plastyczności Coulomba i Beltramięgo.

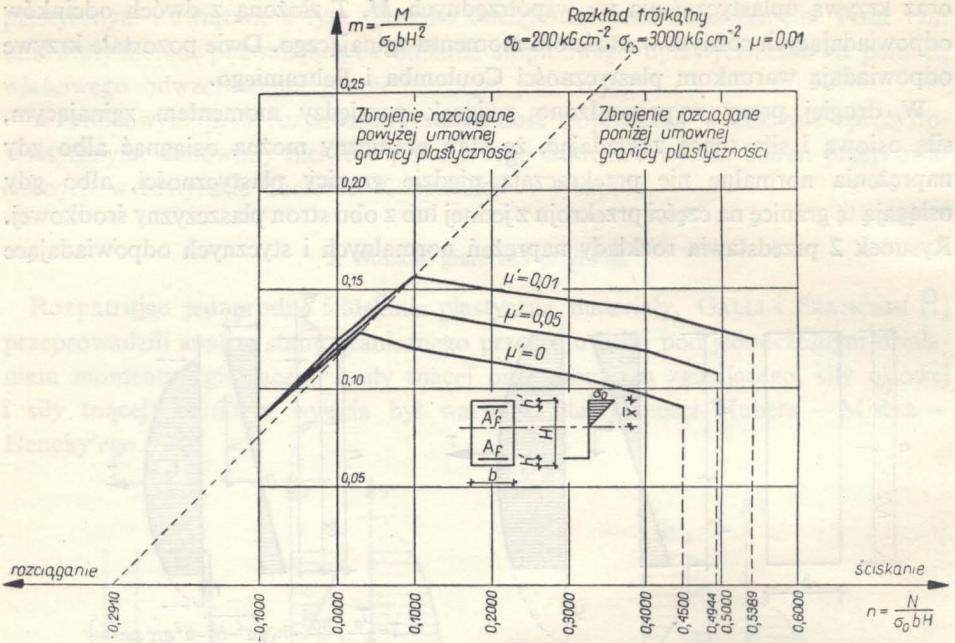
W drugiej pracy wyprowadzono związek pomiędzy momentem zginającym, siłą osiową i siłą tnącą zakładając, że stan graniczny można osiągnąć albo gdy naprężenia normalne nie przekraczają nigdzie granicy plastyczności, albo gdy osiągają tę granicę na części przekroju z jednej lub z obu stron płaszczyzny środkowej. Rysunek 2 przedstawia rozkłady naprężeń normalnych i stycznych odpowiadające



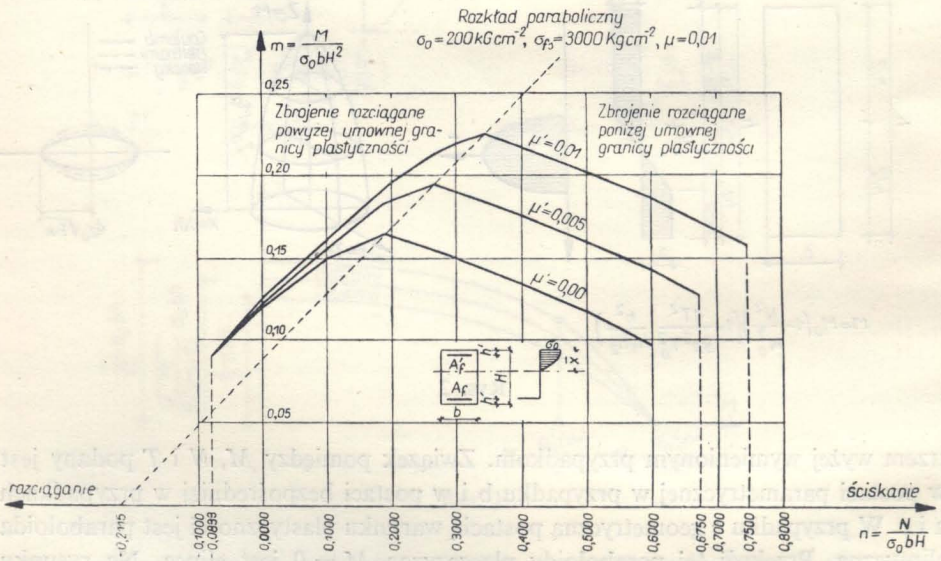
Rys. 2

trzem wyżej wymienionym przypadkiem. Związek pomiędzy M, N i T podany jest w postaci parametrycznej w przypadku b i w postaci bezpośredniej w przypadkach a i c. W przypadku c geometryczną postacią warunku plastyczności jest paraboloida eliptyczna. Przekrój tej paraboloidy płaszczyzną $M = 0$ jest elipsą. Na rysunku pokazano ten przekrój wprowadzając także warunki Coulomba i Beltramięgo. Como [3] z naszego Instytutu zbadał również uplastycznienie przekroju dwuteowego.

Omówimy obecnie pewne badania przeprowadzone na materiałach niejednorodnych, wśród których na pierwszym miejscu należy wymienić beton i beton zbrojony;



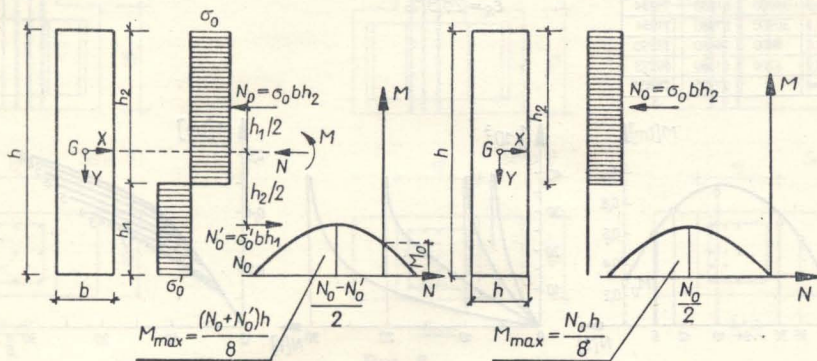
Rys. 3



Rys. 4

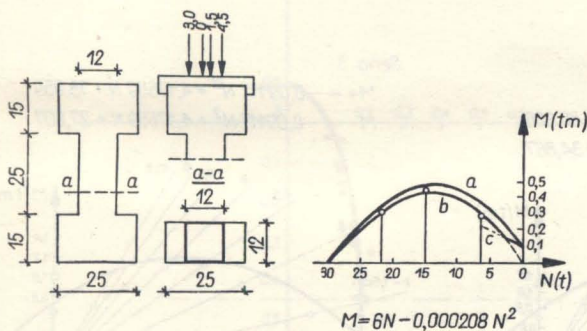
rozpatrzmy także beton wstępnie sprężony. Wielu autorów badało zależność pomiędzy momentem gnącym i siłą osiową, wychodząc z określonego rozkładu naprężeń w przekroju [4, 5, 6].

GRECO [7] z naszego Instytutu przeprowadził ogólną analizę dotyczącą rozkładu naprężeń dla przekroju prostokątnego o podwójnym, niesymetrycznym zbrojeniu; w szczególnym przypadku otrzymuje się rozkład paraboliczny i trójkątny. Rysunki 3 i 4 pokazują wykresy zależności pomiędzy momentem zginającym i siłą osiową w przypadku przekroju prostokątnego przy założeniu, że oś obojętna leży pomiędzy liniami zbrojenia.



$$M = -\frac{h}{2(N_0 + N_0')} N^2 + \frac{N_0 N_0' h}{2(N_0 + N_0')} + \frac{h}{2} \frac{(N_0 - N_0')}{2(N_0 + N_0')} N$$

$$M = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{N}{N_0}\right) N$$

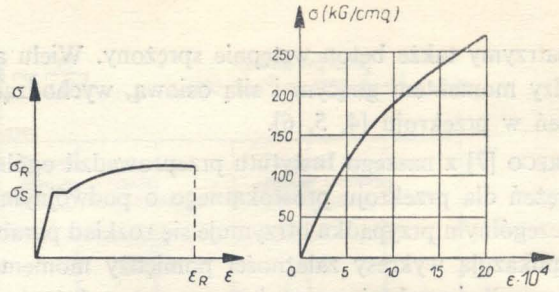
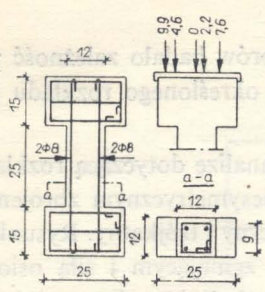


e	N	M _N
0	28800	0
1,5	21650	32475
3	14650	43950
4,5	6330	28450
∞	0	8200

Rys. 5

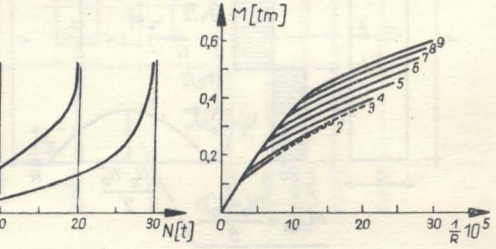
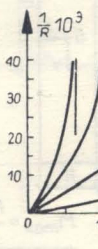
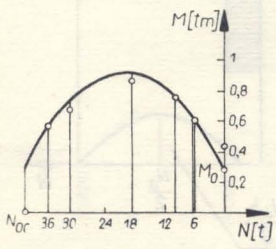
BARBARITO [8] z Uniwersytetu w Neapolu przeprowadził analizę teoretyczną i doświadczalną dotyczącą zależności pomiędzy M a N dla betonu niezbrojonego; RAITHEL i BARBARITO [9] badali tę zależność dla betonu zbrojonego, a BARBARITO i AIELLO [10] dla betonu wstępnie sprężonego.

Rysunek 5 przedstawia wyniki pierwszej pracy. Najpierw przyjęto, że beton może przenosić naprężenie rozciągające, a następnie założono, że może on przenosić tylko ścisnienie. Krzywe c i h przedstawiają warunki plastyczności dla obu przypadków. Widzimy, że dla małej mimośrodowości siły dwie krzywe różnią się od



e	N [kG]	M _N = N _{0e}	M _N [kGm]
0	45000	0	0
2,2	30900	67980	71934
2,2	30900	67980	71934
7,6	9800	74480	73290
9,9	6200	61380	60273
∞	0	27375	28800

$\sigma_S = 3200 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_R = 4500 \text{ kg/cm}^2$
 $\epsilon_R = 28,3 \%$



$$M_N = M_0 + N \frac{h}{2} \left(1 - \frac{N}{N_{0c}}\right)$$

$$M_N = 28800 + 6N - 0.000149 N^2$$

Rys. 6

Seria 2

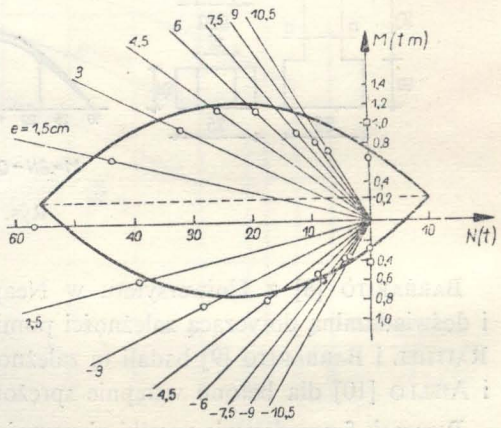
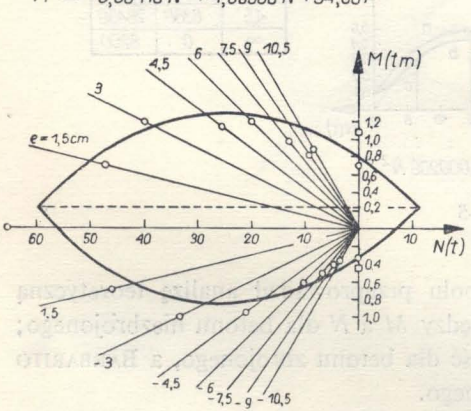
$$M_+ = -0,08418 N^2 + 4,06380 N + 80,866$$

$$M_- = -0,08418 N^2 + 4,06380 N + 34,867$$

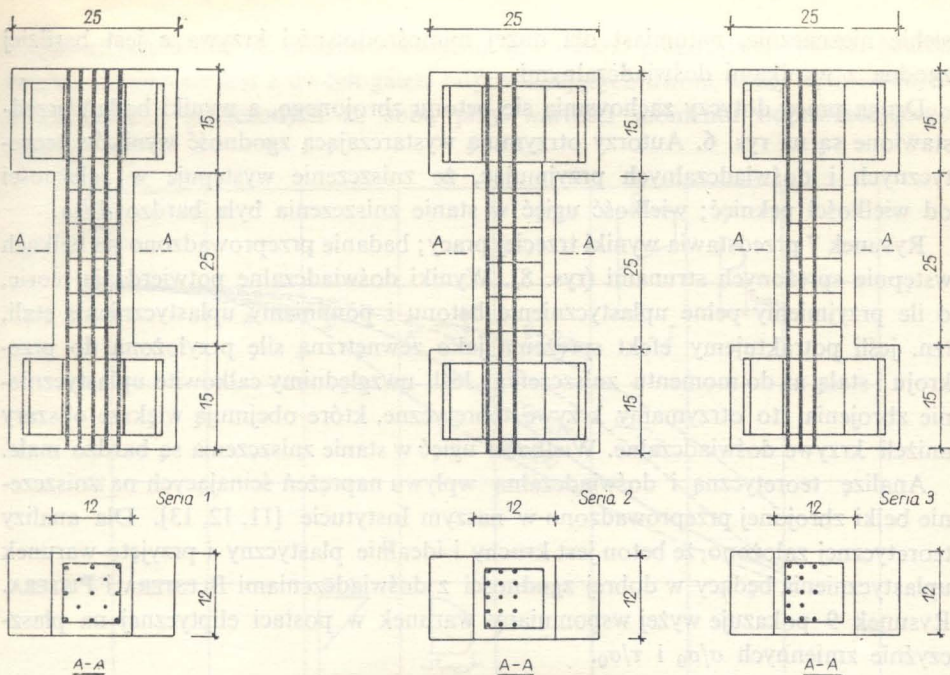
Seria 3

$$M_+ = -0,09117 N^2 + 4,17659 N + 73,959$$

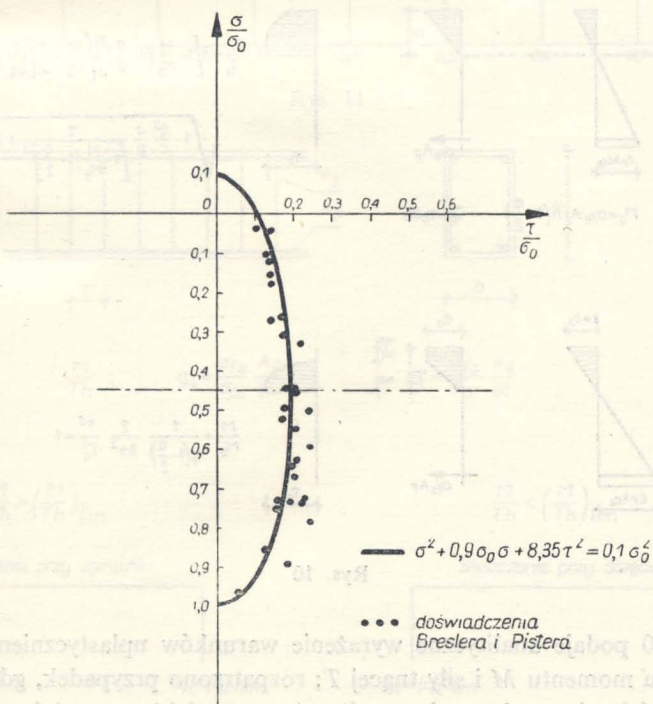
$$M_- = -0,09117 N^2 + 4,17659 N + 27,807$$



Rys. 7



Rys. 8



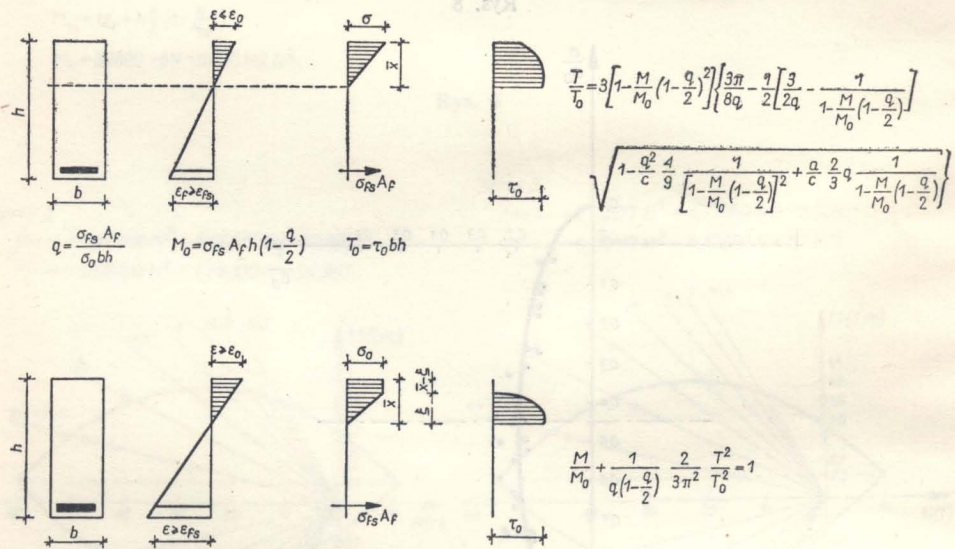
Rys. 9

siebie nieznacznie, natomiast dla dużej mimośrodowości krzywa c jest bardziej zgodna z wynikami doświadczalnymi.

Druga praca dotyczy zachowania się betonu zbrojonego, a wyniki badań przedstawione są na rys. 6. Autorzy otrzymują wystarczającą zgodność wyników teoretycznych i doświadczalnych przyjmując, że zniszczenie występuje w zależności od wielkości pęknięć; wielkość ugięć w stanie zniszczenia była bardzo duża.

Rysunek 7 przedstawia wyniki trzeciej pracy; badanie przeprowadzono na belkach wstępnie sprężonych strunami (rys. 8). Wyniki doświadczalne potwierdzają teorię, o ile przyjmiemy pełne uplastycznienie betonu i pominiemy uplastycznienie stali, tzn. jeśli potraktujemy efekt sprężenia jako zewnętrzną siłę przyłożoną do przekroju i stałą aż do momentu zniszczenia. Jeśli uwzględnimy całkowite uplastycznienie zbrojenia, to otrzymamy krzywe teoretyczne, które obejmują większe obszary aniżeli krzywe doświadczalne. Wielkości ugięć w stanie zniszczenia są bardzo małe.

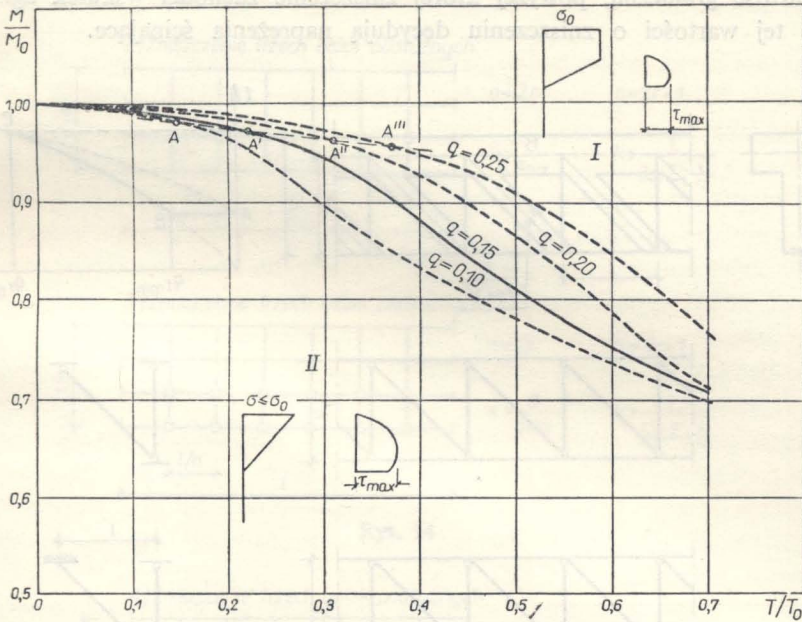
Analizę teoretyczną i doświadczalną wpływu naprężeń ścinających na zniszczenie belki zbrojonej przeprowadzono w naszym Instytucie [11, 12, 13]. Dla analizy teoretycznej założono, że beton jest kruchy i idealnie plastyczny i przyjęto warunek uplastycznienia będący w dobrej zgodności z doświadczeniami BLESTERA i PISTERA. Rysunek 9 pokazuje wyżej wspomniany warunek w postaci eliptycznej na płaszczyźnie zmiennych σ/σ_0 i τ/σ_0 .



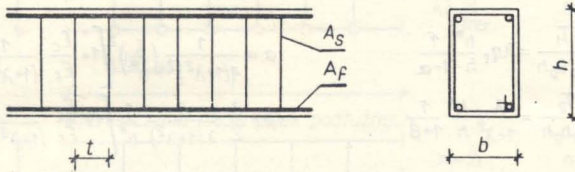
Rys. 10

Rysunek 10 podaje analityczne wyrażenie warunków uplastycznienia przekroju przy działaniu momentu M i siły tnącej T ; rozpatrzono przypadek, gdy naprężenia normalne nigdzie nie przekraczają granicy plastyczności i przypadek, gdy w pewnej części przekroju są one równe granicy plastyczności. Otrzymano związki przy założeniu, że zbrojenie znajduje się w stanie plastycznym przy jednoosiowym roz-

ciąganiu; zależą one od procentu zbrojenia q , co jasno przedstawia rys. 11. Każda krzywa utworzona jest z dwóch gałęzi odpowiadających dwom wyżej wymienionym przypadkom i połączonych ze sobą przy wartości momentu odpowiadającego $\sigma = \sigma_0$.



Rys. 11



$$\frac{M}{Th} ; \quad q_l = \frac{\sigma_{fs} A_f}{\sigma_{oc} bh} ; \quad q_t = \frac{\sigma_{fs} A_s}{\sigma_{oc} bt}$$

$$\frac{M}{Th} > \left(\frac{M}{Th}\right)_{lim}$$

zniszczenie przy zginaniu

$$\frac{M}{Th} < \left(\frac{M}{Th}\right)_{lim}$$

zniszczenie przy ścięciu

$$q_l > (q_l)_{lim}$$

zniszczenie
betonu

$$q_l < (q_l)_{lim}$$

zniszczenie
stali

$$q_t > (q_t)_{lim}$$

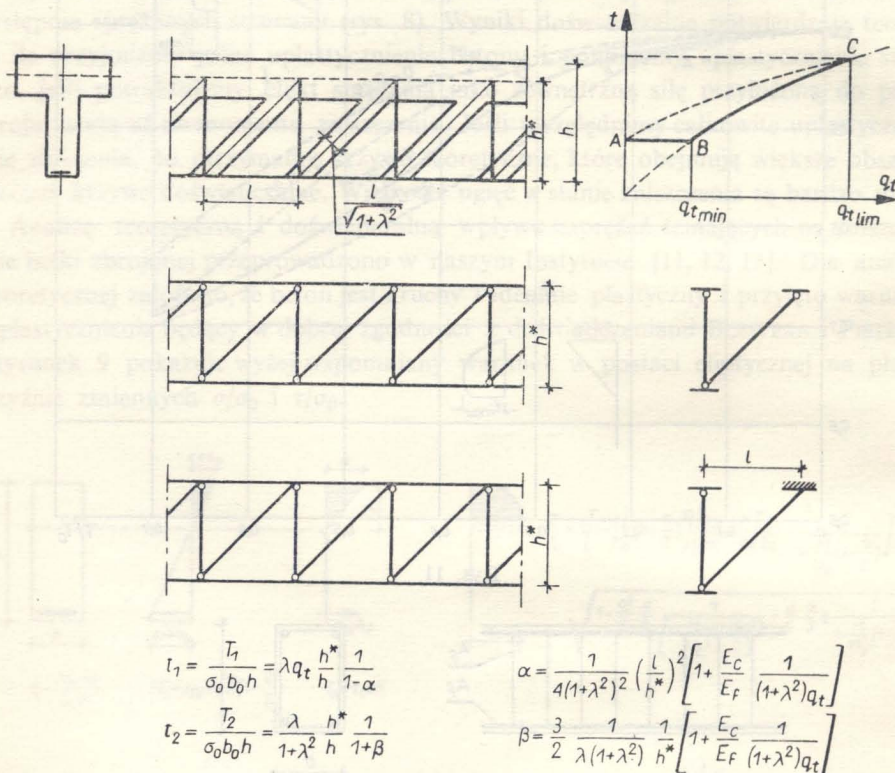
zniszczenie
prętów betonowych

$$q_t < (q_t)_{lim}$$

zniszczenie
strzemiń

Rys. 12

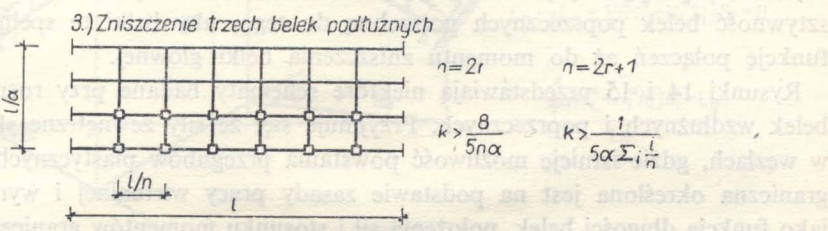
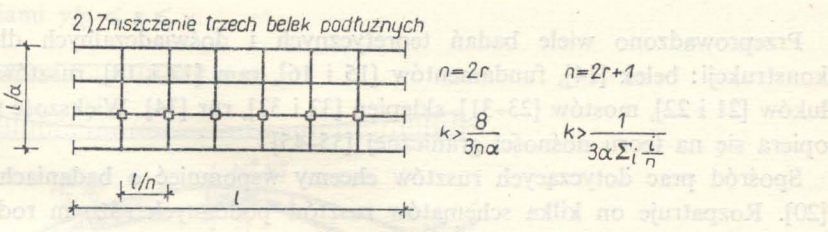
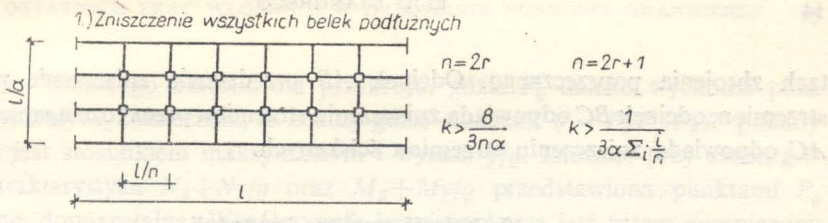
Analizę teoretyczną belek pod działaniem momentu zginającego i siły tnącej przedstawił E. GIANGRECO biorąc pod uwagę mechanizm zniszczenia betonu zbrojonego. Badania tego rodzaju są bezpośrednio związane z pracami V Komisji Europejskiego Komitetu Betonu. Przyjmując stosunek M/Th jako parametr określono jego wartość graniczną, powyżej której zniszczenie zachodzi wskutek zginania; poniżej tej wartości o zniszczeniu decydują naprężenia ścinające.



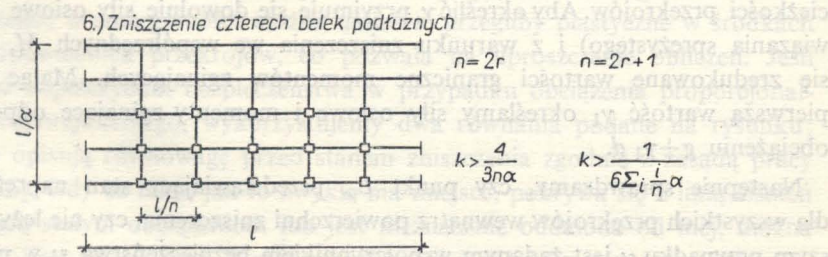
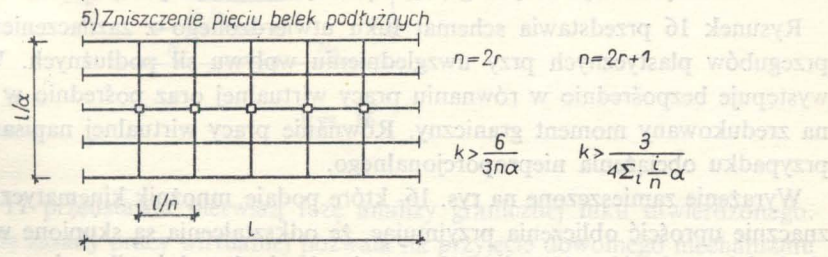
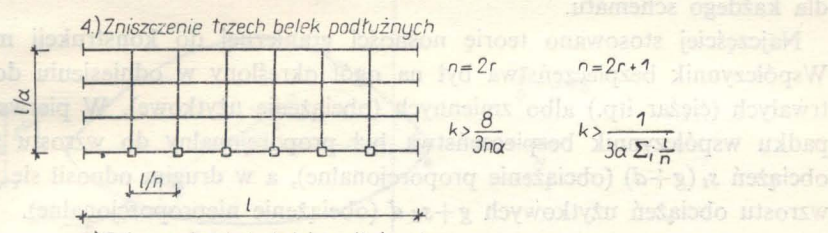
Rys. 13

Rysunek 12 przedstawia dwa powyższe oraz inne przypadki występujące w zależności od tego czy przekrój jest słabiej, czy silniej uzbrojony na przenoszenie ścinania. W drugim przypadku poddano ponownej ocenie teorię MÖRSCHA traktując belkę jako kratownicę utworzoną przez ściskane słupki betonowe, zawarte między spękaniami i przez pręty odpowiadające rozciągany strzemiomom. Podłużne zbrojenie uzupełnia konstrukcję u dołu.

Rysunek 13 przedstawia element konstrukcji, w której przyjmuje się, że słupki betonowe są przegubowo połączone ze zbrojeniem podłużnym i przymocowane do płyty górnej. W ten sposób wprowadzono istotną modyfikację do teorii Mörscha. Na tym samym rysunku podane są wyrażenia bezwymiarowych sił tnących t_1 i t_2 odpowiadających odpowiednio zniszczeniu strzemiom i słupków betonowych. Zamieszczony jest także wykres bezwymiarowych sił tnących przy różnych procen-



Rys. 14



Rys. 15

tach zbrojenia poprzecznego. Odcinek AB przedstawia zniszczenie przy braku strzemion, odcinek BC odpowiada zniszczeniu strzemion przez rozciąganie, a odcinek AC odpowiada zniszczeniu strzemion ściskanych.

2. Nośność graniczna konstrukcji

Przeprowadzono wiele badań teoretycznych i doświadczalnych dla różnych konstrukcji: belek [14], fundamentów [15 i 16], ram [17 i 18], rusztów [19 i 20], łuków [21 i 22], mostów [23–31], sklepień [32 i 33], rur [34]. Większość tych badań opiera się na teorii nośności granicznej [35–45].

Spośród prac dotyczących rusztów chcemy wspomnieć o badaniach SPARACIO [20]. Rozpatruje on kilka schematów rusztów poddanych różnym rodzajom obciążenia; zajmując się przede wszystkim rusztem mostowym określa minimalną sztywność belek poprzecznych potrzebną do tego, aby belki te spełniały swoją funkcję połączeń aż do momentu zniszczenia belki głównej.

Rysunki 14 i 15 przedstawiają niektóre schematy badane przy rosnącej ilości belek wzdłużnych i poprzecznych. Przyjmuje się, że siły zewnętrzne skupione są w węzłach, gdzie istnieje możliwość powstania przegubów plastycznych. Nośność graniczna określona jest na podstawie zasady pracy wirtualnej i wyrażona jest jako funkcja długości belek, położenia sił i stosunku momentów granicznych belek poprzecznych i wzdłużnych. Różne możliwe mechanizmy zniszczenia zbadano dla każdego schematu.

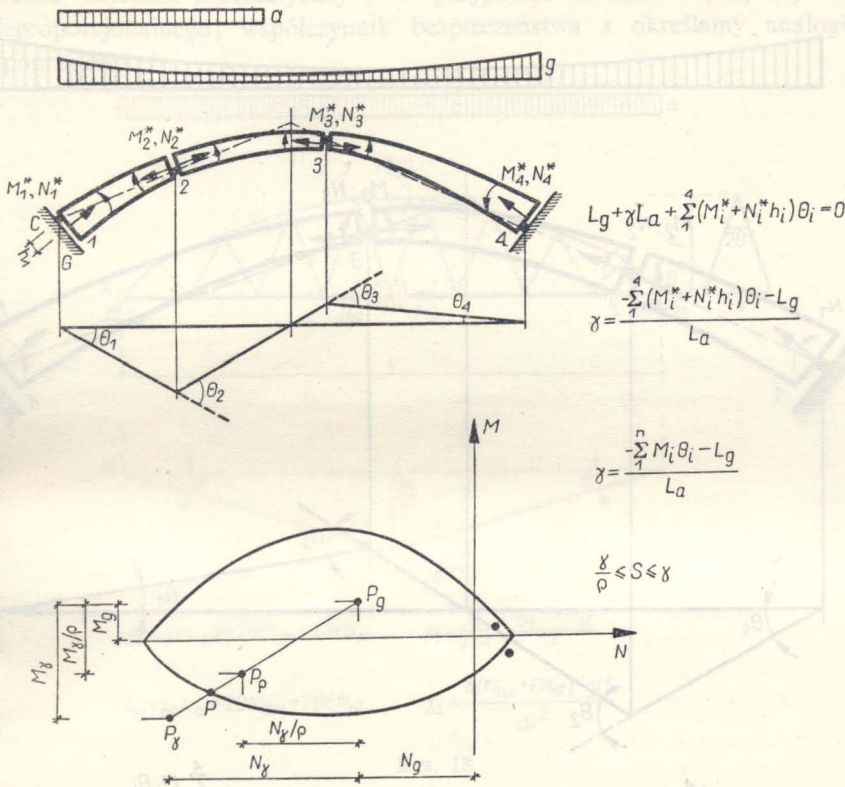
Najczęściej stosowano teorię nośności granicznej do konstrukcji mostowych. Współczynnik bezpieczeństwa był na ogół określony w odniesieniu do obciążeń trwałych (ciężar itp.) albo zmiennych (obciążenie użytkowe). W pierwszym przypadku współczynnik bezpieczeństwa był proporcjonalny do wzrostu wszystkich obciążeń $s_i(g+d)$ (obciążenie proporcjonalne), a w drugim odnosił się jedynie do wzrostu obciążeń użytkowych $g+s_u d$ (obciążenie nieproporcjonalne).

Rysunek 16 przedstawia schemat łuku utwierdzonego z zaznaczeniem położenia przegubów plastycznych przy uwzględnieniu wpływu sił podłużnych. Wpływ ten występuje bezpośrednio w równaniu pracy wirtualnej oraz pośrednio w wyrażeniu na zredukowany moment graniczny. Równanie pracy wirtualnej napisane jest dla przypadku obciążenia nieproporcjonalnego.

Wyrażenie zamieszczone na rys. 16, które podaje mnożnik kinematyczny; można znacznie uprościć obliczenia przyjmując, że odkształcenia są skupione w środkach ciężkości przekrojów. Aby określić γ , przyjmuje się dowolnie siły osiowe (np. z rozwiązania sprężystego) i z warunku zniszczenia we współrzędnych M, N określa się zredukowane wartości graniczne momentów zginających. Mając określoną pierwszą wartość γ_1 określamy siły osiowe i momenty zginające odpowiadające obciążeniu $g+\gamma_1 d$.

Następnie sprawdzamy, czy punkt L_γ , przedstawiający stan naprężenia, leży dla wszystkich przekrojów wewnątrz powierzchni zniszczenia, czy nie leży. W pierwszym przypadku γ jest żądanym współczynnikiem bezpieczeństwa s ; w przeciwnym razie można przejść od mnożnika kinematycznego γ do mnożnika statycznie do-

puszczalnego. Można go określić dla przekroju, gdzie P_γ daleko wychodzi poza obszar objęty krzywą zniszczenia, to znaczy gdzie stosunek $\rho = P_g P_\gamma / P_g P'$ podany na rysunku jest stosunkiem maksymalnym i wynosi γ/ρ . Istotnie, przy siłach $g + \gamma/\rho d$ charakterystyka $N_g + N\gamma/\rho$ oraz $M_g + M\gamma/\rho$ przedstawiona punktami P_ρ jest statycznie dopuszczalna. Współczynnik bezpieczeństwa jest zatem ograniczony nierównościami $\gamma/\rho \leq s \leq \gamma$.

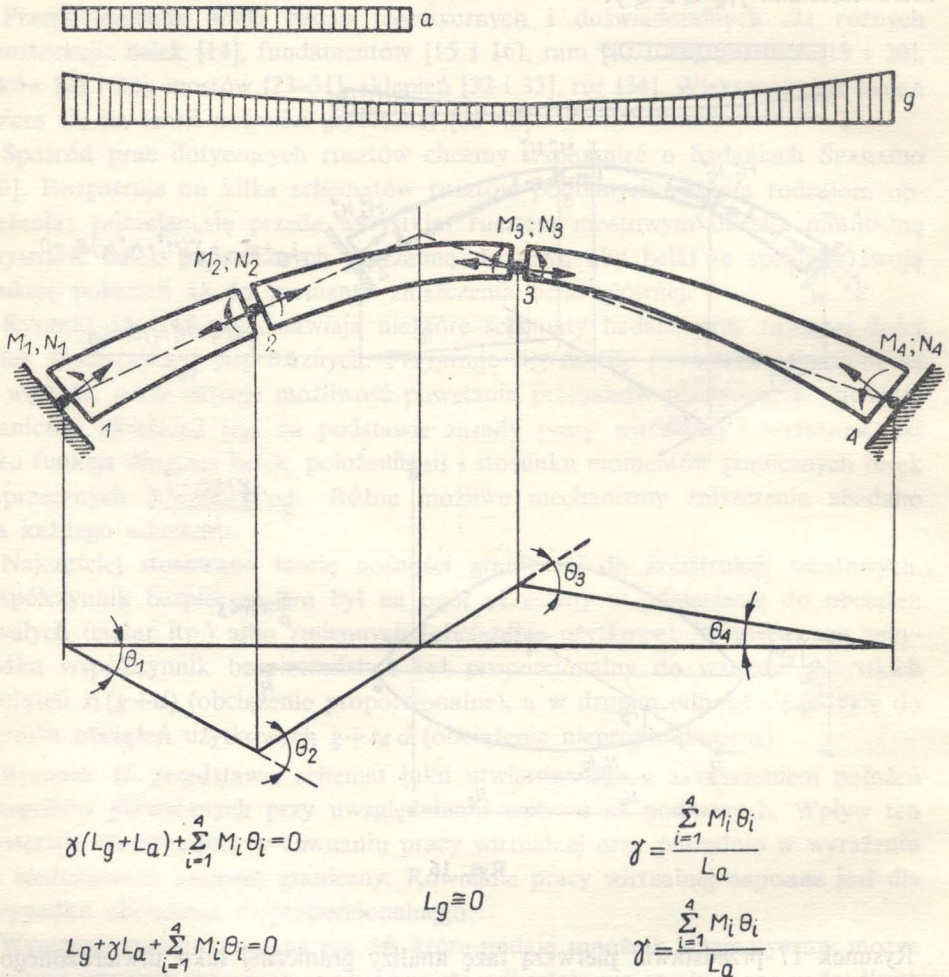


Rys. 16

Rysunek 17 przedstawia pierwszą fazę analizy granicznej łuku utwierdzonego. Zastosowanie zasady pracy wirtualnej pozwala na przyjęcie dowolnego mechanizmu kinematycznego; w szczególności można umieścić przeguby plastyczne w środkach ciężkości odpowiednich przekrojów, co pozwala na uproszczenie obliczeń. Jeśli chcemy znać współczynnik bezpieczeństwa w przypadku obciążenia proporcjonalnego i nieproporcjonalnego, wykorzystujemy dwa równania podane na rysunku; równania te opisują równowagę przed stanem zniszczenia zgodnie z zasadą pracy wirtualnej [36]. Gdy oś łuku, jak to zwykle ma miejsce, pokrywa się z linią ciśnienia odpowiadającą stałym obciążeniom lub jest nieznacznie oddalona od niej, można przyjąć, że L_g jest równe zero. Współczynnik γ nie jest taki sam w przypadku obciążania proporcjonalnego i nieproporcjonalnego, ponieważ mamy różny wpływ

siły osiowej na graniczne momenty M_i^0 . Następnie obliczamy s , obliczając przy znanym γ statycznie dopuszczalny mnożnik γ/ρ .

FRANCIOSI i GALLI przeprowadzili interesujące badania dotyczące nośności granicznej specjalnych typów mostów, takich jak mosty NIELSENA [23 i 26] i MAILARTA [24], które często wykonywano we Włoszech.

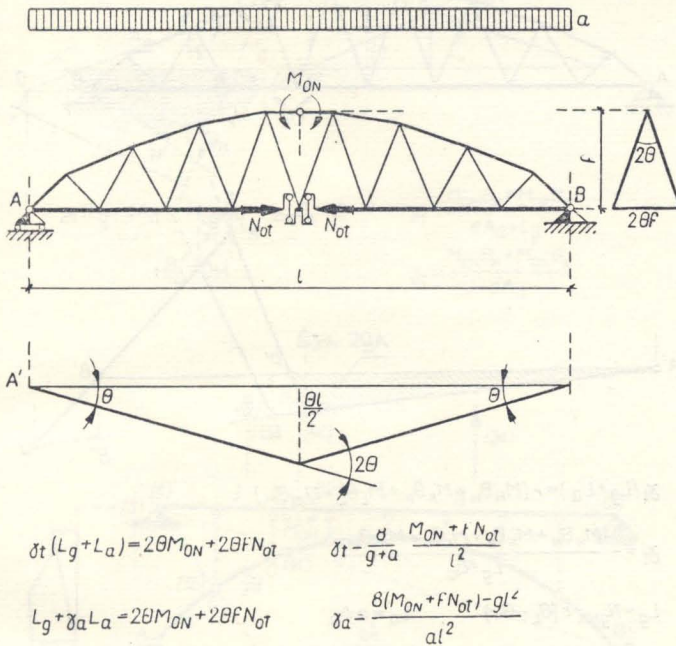


Rys. 17

Jak wiemy, w moście Nielsena pomost jest zawieszony na skośnych prętach. Ustrój ten posiada wiele zalet w porównaniu z konstrukcjami łukowymi o prętach pionowych. W pierwszym rzędzie mamy zmniejszenie momentów zginających przy obciążeniach użytkowych, poza tym największe momenty zginające nie ulegają zmianie. W związku z tym można wykonać łuki o małych przekrojach i o cienkich prętach, co prowadzi do nadzwyczaj estetycznej postaci konstrukcji. Może się jednak

zdarzyć, że niektóre elementy zawieszenia przestają pracować przy działaniu obciążeń użytkowych, przynajmniej na krótki okres czasu.

Rysunek 18 przedstawia obliczenie nośności granicznej mostu Nielsena w przypadku, gdy obciążenie użytkowe działa na całej rozpiętości. W tym przypadku powstaje symetryczny mechanizm zniszczenia: np. może powstać przegub w środku łuku i w środku pomostu. Na rysunku zamieszczono równanie prac przygotowanych i podano mnożnik kinematyczny γ w przypadku obciążenia proporcjonalnego i nieproporcjonalnego; współczynnik bezpieczeństwa s określamy analogicznie jak poprzednio.

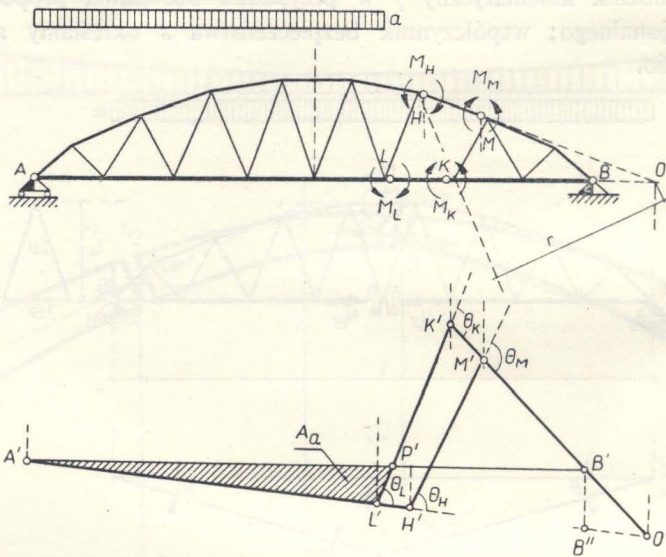


Rys. 18

W przypadku obciążeń użytkowych, rozłożonych na części rozpiętości mostu poczynając od podpory, mechanizm zniszczenia jest inny; pokazany jest on na rys. 19; powstaje on w wyniku utraty stateczności elementu HK i na skutek utworzenia się czterech przegubów plastycznych w czterech przekrojach H, K, L i M , przy czym element HK leży na przekątnej czworoboku $HKLM$. Na tym samym rysunku podano równanie pracy wirtualnej i wyrażenie na mnożnik γ .

W podobny sposób przeprowadzono systematyczną analizę mechanizmu zniszczenia dla mostu Maillarta o wiotkim łuku i belce usztywniającej. Most taki, jak wiadomo, utworzony jest przez cienkie sklepienie o szerokości równej w przybliżeniu szerokości pomostu i połączonej z pomostem za pomocą cienkich ścianek o takiej samej szerokości, posiadających często otwory zmniejszające ciężar. Pomost natomiast posiada znaczną sztywność na zginanie; zakłada się, że łukowe sklepienie przenosi tylko siły osiowe. Stosunek momentów bezwładności pomostu i łuku wynosi zazwyczaj od 60 do 70.

Z powyższych uwag wynika, że w cienkim łuku będzie miało miejsce zniszczenie na skutek siły osiowej zależnej od granicznej siły normalnej; w pomoście na odwrót — zniszczenie powstanie pod wpływem momentów zginających. W tym przypadku współczynnik bezpieczeństwa przy obciążeniu proporcjonalnym i nieproporcjonalnym jest na ogół taki sam.



$$\delta_t(L_g + L_a) = r(M_H \theta_H + M_K \theta_K + M_L \theta_L + M_M \theta_M)$$

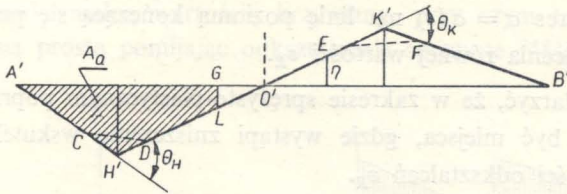
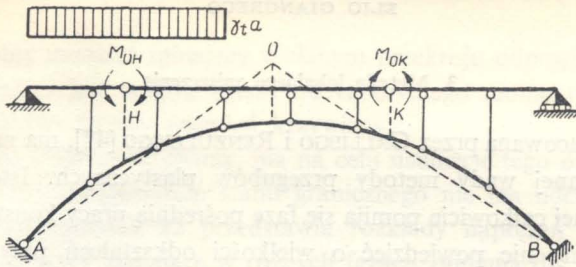
$$\delta_t = - \frac{M_H \theta_H + M_K \theta_K + M_L \theta_L + M_M \theta_M}{L_g + L_a}$$

$$L_g = N_{gHK} r(\theta_L - \theta_K) \quad L_a = a A_a$$

Rys. 19

Rysunek 20 przedstawia stan graniczny mostu Maillarta przy zniszczeniu belki usztywniającej; na rysunku zamieszczono równanie prac przygotowanych i wyrażenie współczynnika γ przy pominięciu ciężaru własnego. Po określeniu γ należy sprawdzić czy pokrywa się on ze współczynnikiem bezpieczeństwa s ; w przeciwnym przypadku należy s określić.

Rysunek 21 przedstawia stan graniczny w przypadku zniszczenia sklepienia łukowego; może to mieć miejsce, gdy siła osiowa osiąga wartość graniczną przy połączeniu sklepienia ze ścianką. W ten sposób mechanizm zniszczenia charakteryzuje się przegubem plastycznym w belce i dwoma przegubami w sklepieniu łukowym. Na rysunku podano równanie pracy wirtualnej, przy czym δ oznacza przemieszczenie w przekroju krytycznym; podano także wyrażenie na współczynnik.



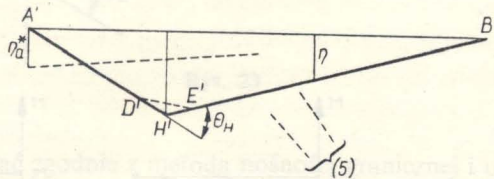
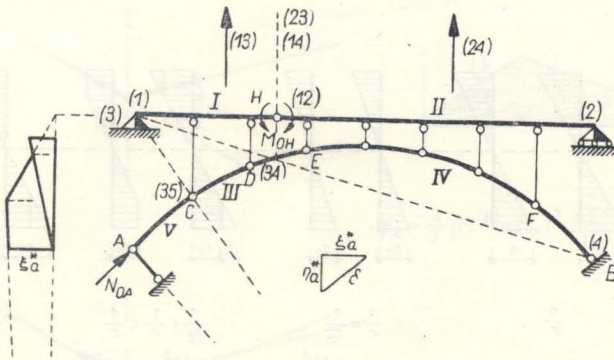
$$\delta_t (Lg + aA_a) - M_{OH}\theta_H - M_{OK}\theta_K = 0$$

$$Lg \approx 0$$

$$\delta_t = \frac{M_{OH}\theta_H + M_{OK}\theta_K}{aA_a + Lg}$$

$$\delta_t = \frac{M_{OH}\theta_H + M_{OK}\theta_K}{aA_a}$$

Rys. 20



$$\delta_t (Lg + L_a) + M_{OH}\theta_H + N_{OA}\delta = 0$$

$$\delta_t = -\frac{M_{OH}\theta_H + N_{OA}\delta}{Lg + L_a}$$

Rys. 21

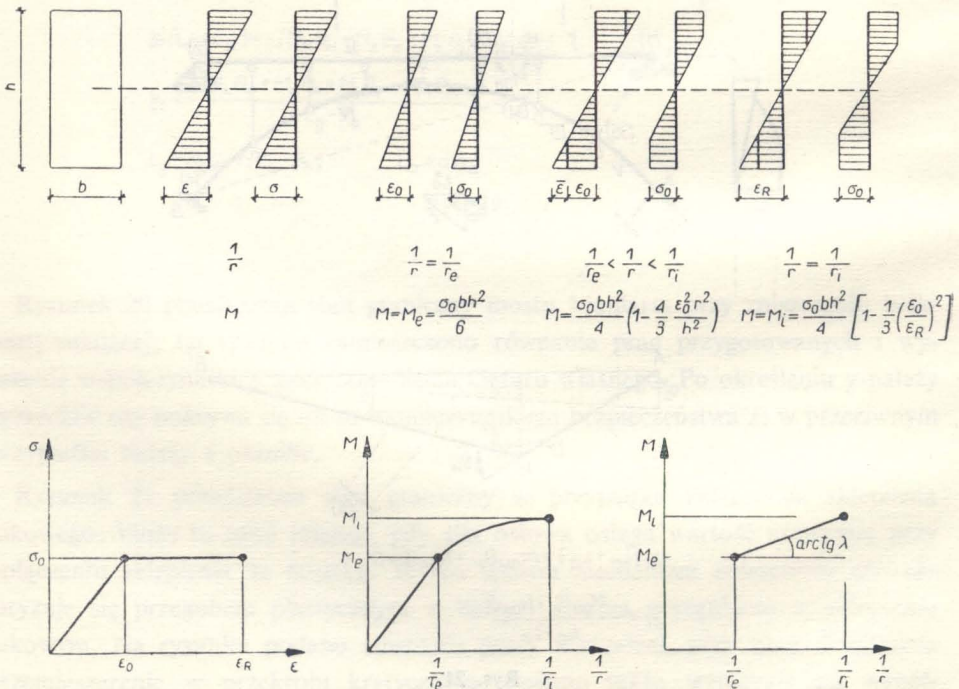
3. Metoda lokalnego zniszczenia

Metoda ta, opracowana przez GALLIEGO i RENZULLIEGO [47], ma na celu usunięcie często krytykowanej wady metody przegubów plastycznych. Istotnie, w teorii nośności granicznej całkowicie pomija się fazę pośrednią pracy konstrukcji, wskutek czego nie możemy nic powiedzieć o wielkości odkształceń przy przechodzeniu konstrukcji do stanu granicznego.

Można zatem wysunąć trzy zastrzeżenia w stosunku do metody nośności granicznej, gdy wykres $\sigma = \sigma(\epsilon)$ ma linię poziomą kończącą się przy maksymalnej wartości odkształcenia równej wartości ϵ_R .

1. Może się zdarzyć, że w zakresie sprężysto-plastycznym poprzedzającym stan graniczny mogą być miejsca, gdzie wystąpi zniszczenie wskutek przekroczenia granicznej wielkości odkształceń ϵ_R .

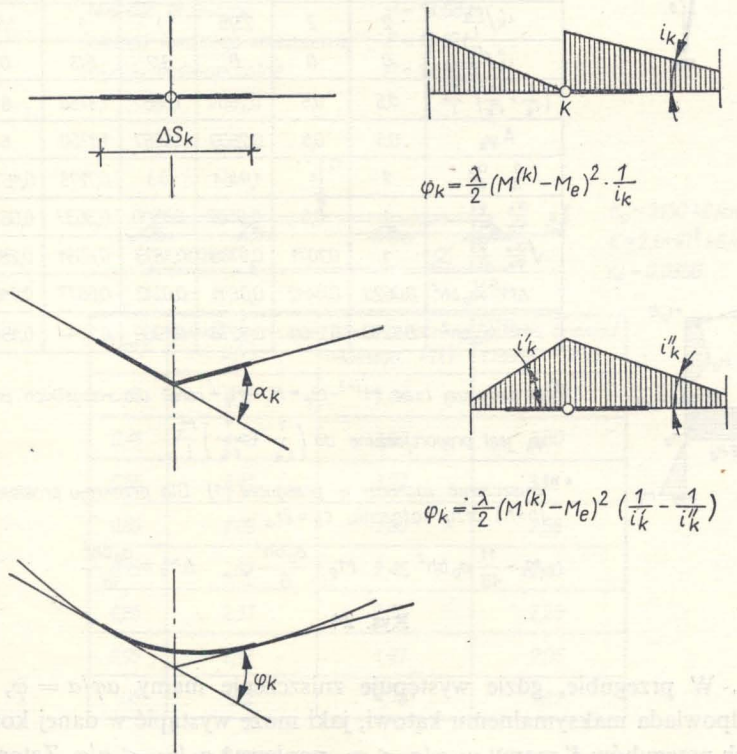
2. W pewnych przekrojach mogą powstać odkształcenia plastyczne w zakresie sprężysto-plastycznym, które pozostają niezauważone, ponieważ w przekrojach tych powstaje następnie odciążenie i powrót do zakresu sprężystego. Innymi słowy, w pewnych przekrojach mogą wystąpić plastyczne odkształcenia, a wskutek odciążenia nie stanowią one części $n+1$ przekrojów, gdzie powstają przeguby plastyczne.



Rys. 22

3. Maksymalny moment zginający w danym przekroju odpowiada pewnej skończonej krzywiznie i jest zawsze niższy od całkowitego momentu niszczącego M , któremu odpowiada zerowy promień krzywizny.

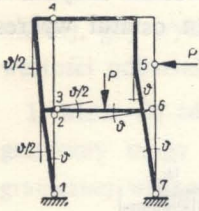
Metoda, którą obecnie omówimy, ma na celu usunięcie tego ostatniego zarzutu; założymy, że przed osiągnięciem stanu granicznego nie ma odciążenia ani lokalnego zniszczenia. Rysunek 22 przedstawia rozkłady naprężeń normalnych oraz wyrażenie na momenty zginające w różnych fazach zginania dla przekroju prostokątnego. Na tym samym rysunku pokazano wykres naprężenie-odkształcenie z zaznaczoną graniczną wartością odkształcenia oraz wykres moment-krzywizna z zaznaczoną maksymalną wartością krzywizny, przy czym ten ostatni wykres zastępujemy linią prostą pomijając odkształcenie sprężyste [48].



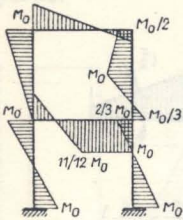
Rys. 23

Będziemy postępować zgodnie z metodą nośności granicznej i określimy najpierw w zwykły sposób położenie przegubów plastycznych. Zgodnie z powyższymi założeniami należy przyjąć, że na ogół tylko w jednym przegubie moment osiągnie maksymalną wartość M_i ; w innym przegubie, powiedzmy K , moment $M^{(k)}$ jest mniejszy od M_i . Oznaczając przez α_k względny obrót w przegubie występujący w przypadku ciała sztywno-plastycznego, obrót rzeczywisty mierzony na końcach strefy plastycznej zawierającej przegub K będzie proporcjonalny do φ_k .

Na rysunku 23 podano wyrażenie na φ_k w przypadku działania skupionego momentu i siły w zależności od momentu w przegubie $M^{(k)}$ i nachyleń i_k wykresu momentów; mając nachylenie i_k określone z rozkładu momentów w stanie granicznym przyjmujemy w pierwszym etapie, że w każdym przegubie $M^{(k)}$ równa się M_i i z wyrażeń podanych na rysunku określamy wielkości φ_k . Rozpatrujemy stosunki α_k/φ_k i przyjmujemy, że zniszczenie następuje w przegubie, dla którego α/φ osiąga maksimum. Istotnie, ruch sztywny w stanie granicznym określony jest z dokładnością do dowolnego mnożnika, zatem wszystkie kąty α_k można pomnożyć przez



Przegub	1	2	3	4	5	6	7
α_k	1	0,5	0,5	0,5	1	1	1
$i_k'/\frac{M_i}{l}$	2	2	23/6	1	1	1/6	5/3
$i_k''/\frac{M_i}{l}$	0	0	0	3/2	8/3	0	0
$(\frac{1}{i_k'} + \frac{1}{i_k''}) \frac{M_i}{l}$	0,5	0,5	0,2609	1,6667	1,3750	6	0,6
$A \varphi_k$	0,5	0,5	0,2609	1,6667	1,3750	6	0,6
$\frac{1}{A} \frac{\alpha_k}{\varphi_k}$	2	1	1,9164	0,3	0,7273	0,1670	1,6667
$\frac{\alpha_k}{\varphi_k} \frac{\varphi_1}{\alpha_1}$	1	0,5	0,9582	0,1500	0,3637	0,0834	0,8334
$\sqrt{\frac{\alpha_k}{\varphi_k} \frac{\varphi_1}{\alpha_1}}$	1	0,7071	0,9788	0,3873	0,6031	0,2888	0,9132
$\Delta M^{(k)}/\sigma_0 b h^2$	0,0625	0,0442	0,0611	0,0242	0,0377	0,0180	0,0571
$M^{(k)}/\sigma_0 b h^2$	0,2292	0,2109	0,2278	0,1909	0,2044	0,1847	0,2238



*) w pierwszej fazie $M^{(k)} - M_e = M_i - M_e = \text{const}$ dla wszystkich przegubów,

φ_k jest proporcjonalne do $(\frac{1}{i_k'} + \frac{1}{i_k''}) \frac{M_i}{l}$

***) zniszczenie zachodzi w przegubie (1) Dla przekroju prostokątnego ($b \times h$) przy zatężeniu $\epsilon_R = 2\epsilon_0$

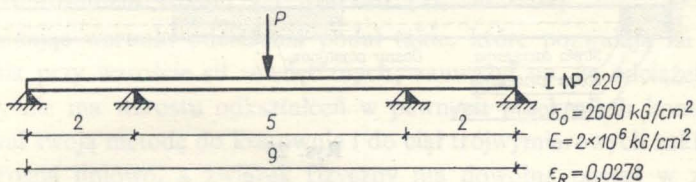
$$M_i = \frac{11}{48} \sigma_0 b h^2, \quad M_e = \frac{\sigma_0 b h^2}{6}, \quad \Delta M_i = \frac{\sigma_0 b h^2}{16}$$

Rys. 24

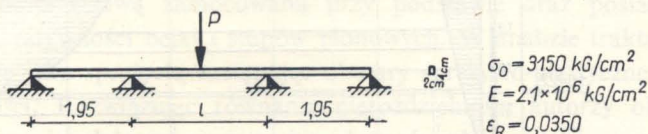
stałą φ/α . W przegubie, gdzie występuje zniszczenie mamy $\alpha\varphi/\alpha = \varphi$, tzn. kąt obrotu odpowiada maksymalnemu kątowi, jaki może wystąpić w danej konstrukcji. Dla innych przegubów K mamy $\alpha_k \varphi/\alpha < \varphi_k$, ponieważ $\alpha_k/\varphi_k < \alpha/\varphi$. Zatem względny kąt obrotu φ_k w przegubie K jest mniejszy od wartości maksymalnej, a moment $M^{(k)}$ jest mniejszy od M_i i może być określony z podanych wyrażeń.

Spśród rozpatrzonych przykładów autorzy przeprowadzili również obliczenia dla układu ramowego (przedstawionego na rys. 24), którego nośność graniczną określili poprzednio H. J. GREENBERG i W. PRAGER przy założeniu, że kolumny i belki mają jednakowe długości i przekroje. Wszystkie elementy obliczeń podane są na rysunku. Obciążenie niszczące otrzymane przy użyciu powyższej metody jest około 16% niższe od wartości nośności granicznej; kolejna iteracja jedynie nieznacznie zmienia wynik.

Autorzy przeprowadzili doświadczenie na belkach dwuteowych i na szeregu belek o przekroju prostokątnym. Rysunek 25 przedstawia schematy obciążeń i porównanie wyników doświadczalnych i teoretycznych otrzymanych na podstawie metody nośności granicznej i metody powyższej. Podczas gdy dla przekroju prostokątnego różnice pomiędzy obydwoema metodami są dosyć znaczne, w przypadku przekroju dwuteowego obie metody prowadzą praktycznie do tego samego wyniku.



Nośność graniczna	$P = 13,58 t$
Metoda lokalnego zniszczenia	$P = 13,10 t$
Wyniki doświadczone	$P = 12,50 t$



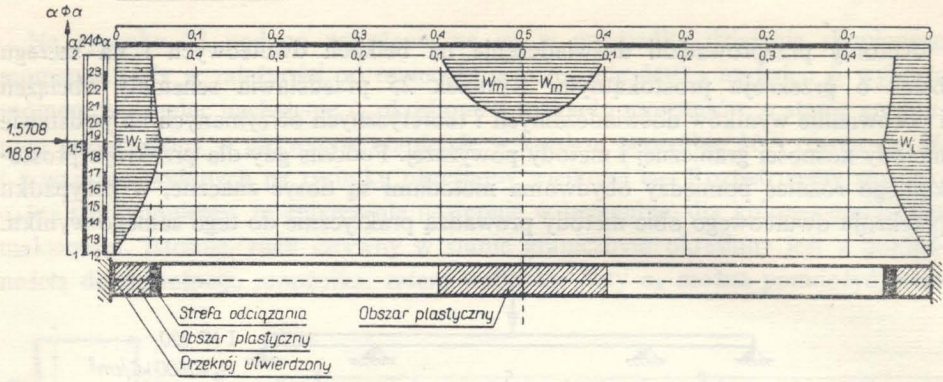
$l(m)$	Nośność graniczna $P(t)$	Metoda zniszczenia lokalnego $P(t)$	Badania doświadczone $P(t)$
0,35	5,76	5,09	5,00
0,45	4,48	3,99	3,80
0,55	3,41	3,22	3,10
0,65	3,09	2,80	2,58
0,75	2,67	2,45	2,40
0,85	2,37	2,17	2,25
0,95	2,12	1,97	2,05
1,05	1,92	1,78	1,82

Rys. 25

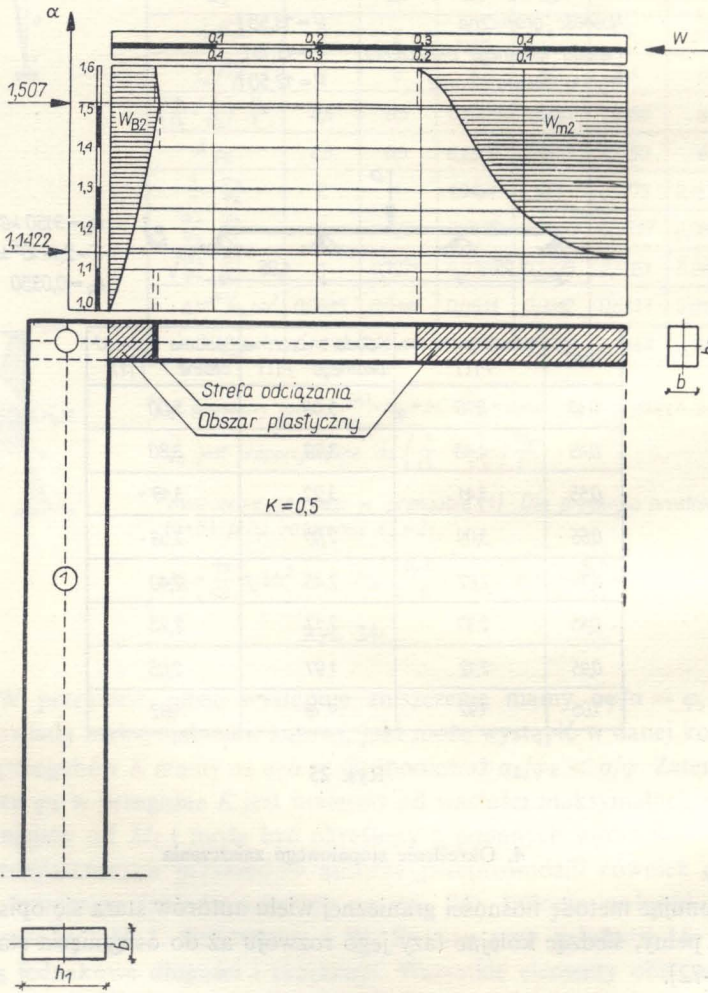
4. Określenie stopniowego zniszczenia

Kwestionując metodę nośności granicznej wielu autorów stara się opisać zjawisko w sposób pełny, śledząc kolejne fazy jego rozwoju aż do osiągnięcia stanu granicznego [49–72].

Pomimo znacznych trudności, jakie napotyka się przy tego rodzaju opisie, autorzy ci uważają, że opis taki lepiej przedstawia zachowanie się konstrukcji i wykazuje szereg aspektów zjawiska, które całkowicie pomija się w metodzie noś-



Rys. 26



Rys. 27

ności granicznej, np. zmiana stanu naprężenia w różnych przekrojach konstrukcji i często występujące odciążenie przekrojów uplastycznionych przy wzroście sił zewnętrznych oraz możliwość zlokalizowania miejsc, gdzie wystąpi zniszczenie wskutek nadmiernych odkształceń.

Ciekawą analizę procesu zginania belki o stałym przekroju równomiernie obciążonej aż do osiągnięcia stanu granicznego przedstawił LEVI [50], a badania doświadczalne przeprowadzili ROSSETTI i MACCHI [57, 58 i 59].

FINZI [70] badając warunki odciążenia podał takie, które pozwalają na wystąpienie odciążenia przy wzroście sił zewnętrznych; zauważył on, że odciążenie występujące wtedy nie ma wzrostu odkształceń w pewnych przekrojach konstrukcji. Autor zastosował swoją metodę do kratownic i do ciał trójwymiarowych zakładając, że obciążenia rosną liniowo, a związek fizyczny ma dowolną postać w zakresie plastycznym i jest liniowy przy odciążeniu; w szczególnym przypadku rozpatrzono ciało idealnie plastyczne.

GIANGRECO i FOTI [71] oraz SARA [72] przeprowadzili analizę stref sprężystych i plastycznych przy wzroście obciążenia. Rozpatrywali oni belki o przekroju prostokątnym i ramę jednoprzęsłową zamocowaną przy podstawie oraz posiadającą zmienny stosunek K sztywności belki i słupów pionowych. W analizie traktowano cały czas konstrukcję jako sprężystą zastępując obszary sprężysto-plastyczne belką o zmiennej wysokości. Rozwiązując równanie nierozdzielności autorzy określili wielkości hiperstatyczne i w dalszym ciągu zasięg obszarów plastycznych, co pozwoliło na zbadanie miejsc, gdzie zachodzą odciążenia. Porównując wyniki otrzymane dla utwierdzonej belki i ramy stwierdzono, że większe odciążenie występuje dla belki w pobliżu podpór. Zaobserwowano także występowanie różnych wartości odciążenia przy zmiennym stosunku sztywności belki poziomej i sztywnych słupów; gdy sztywność belki jest mniejsza od sztywności słupów, zakres odciążenia jest taki sam jak w sztywno podpartej belce. Odciążenie maleje w miarę jak sztywność belki poziomej rośnie aż do momentu całkowitego zaniku. Pojawia się ono w ograniczonej wielkości w pobliżu środka belki, gdy jej sztywność znacznie przewyższa sztywność słupów.

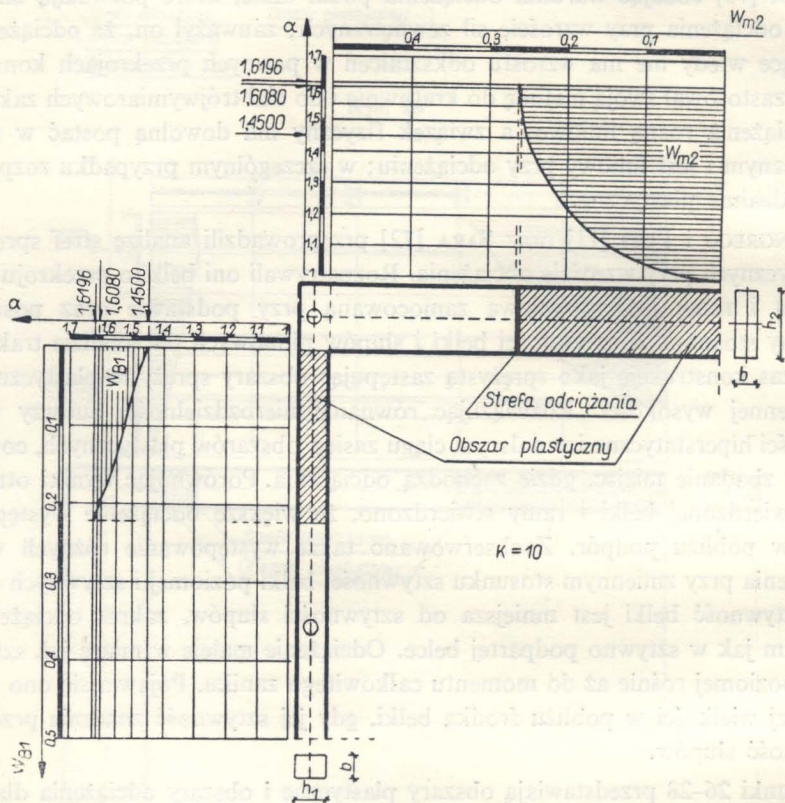
Rysunki 26–28 przedstawiają obszary plastyczne i obszary odciążenia dla $K = 0$ (belka utwierdzona), $K = 0,5$ i $K = 10$.

JOSSA [52] przedstawił metodę pozwalającą na opis zjawiska przy dowolnej krzywej.

5. Stateczność poprzeczna w zakresie sprężysto-plastycznym

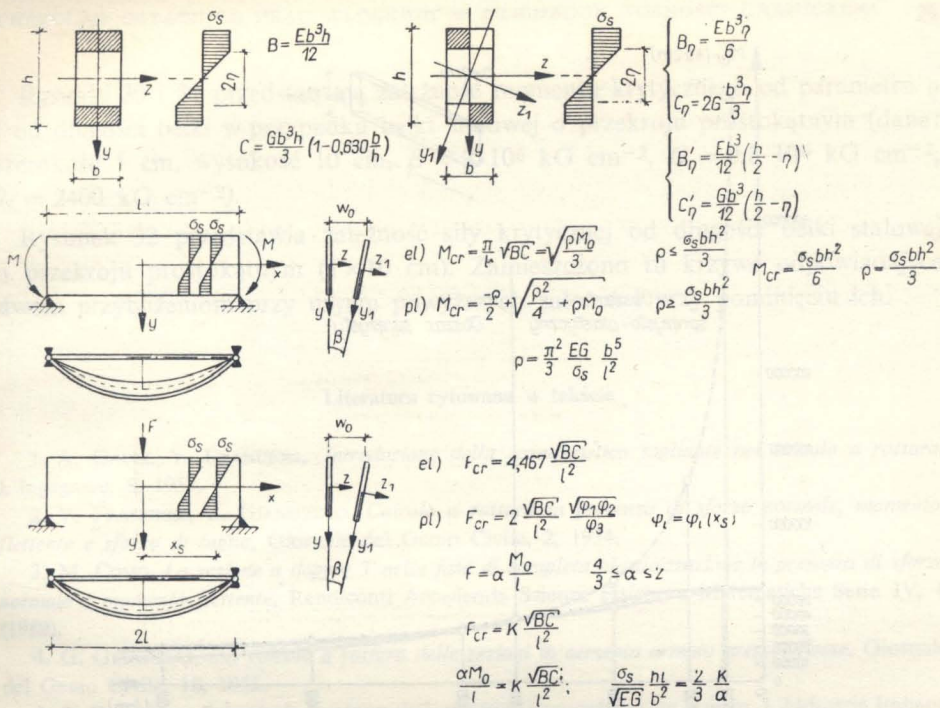
Wiele prac poświęcono utracie stateczności giętnej poza obszarem sprężystym [73–77] oraz stateczności skrętno-giętnej [78–83]. Pierwszą analizę tego tematu przedstawił E. GIANGRECO przy użyciu metody energetycznej; wprowadzając pole przemieszczeń, spełniające warunki brzegowe i zależne od kilku dowolnych parametrów, autor podaje wyrażenie na energię potencjalną i z warunku minimum otrzymuje układ jednorodnych równań liniowych, skąd znajduje się wartość obciążenia krytycznego [77 i 79]. Autor rozpatruje wysoką belkę o przekroju prostokątnym

kątnym, podpartą na obu końcach i mającą skrępowany obrót w płaszczyźnie prostokątnej. Przyjęto dwie hipotezy, które następnie zostały odrzucone. 1. We wzorze na sztywność skrętną $C = (Gb^3 h/3)(1 - 0,630 b/h)$ pomija się drugi wyraz zależny od stosunku b/h , co prowadzi do małego błędu (w drugim przypadku tylko 6%); 2. Za sztywność zgięciową względem pionowej płaszczyzny przyjmuje się $Eb^3 h/12$; nie jest to wyrażenie ściśle, ponieważ po odkształceniu poprzecznym występują przyrosty naprężeń, które częściowo odciążają obszary plastyczne.

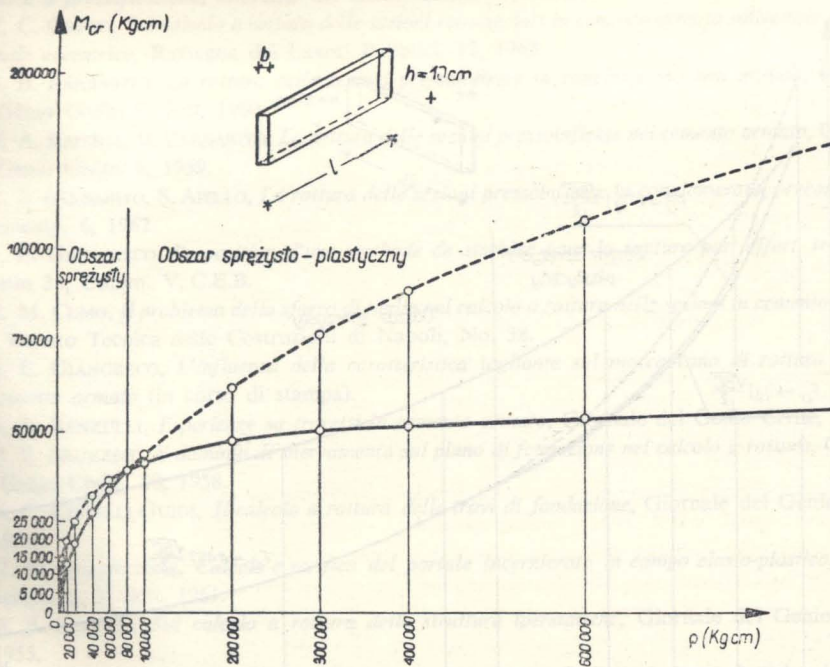


Rys. 28

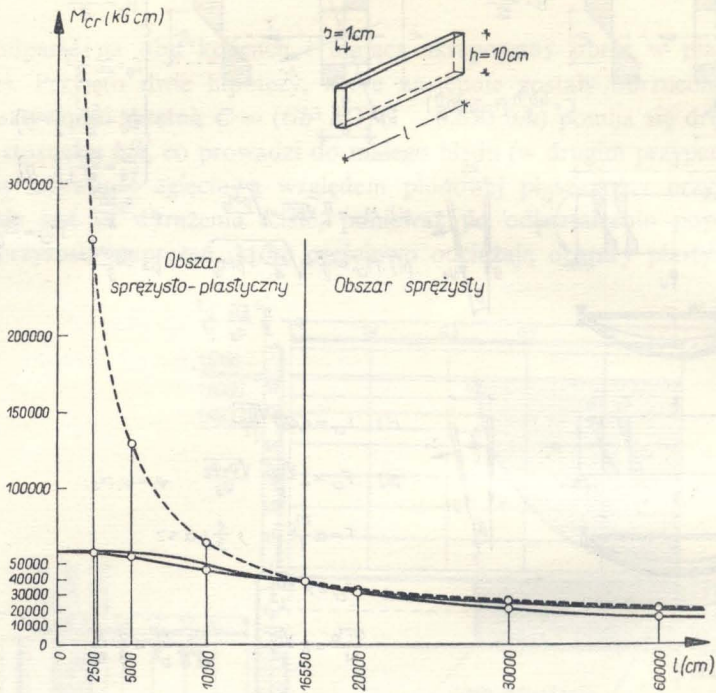
Rozpatrzono najpierw przypadek belki poddanej działaniu dwóch momentów zginających na końcach. Rysunek 29 podaje wyrażenia dla momentu krytycznego w zakresie sprężystym i plastycznym oraz przedziały ważności wzorów; gdy moment zewnętrzny równy jest momentowi plastycznemu, obydwa wzory dają ten sam wynik. Drugi przypadek odnosi się do siły skupionej i jest bardziej złożony, ponieważ moment zginający zmienia się wzdłuż belki. Rysunek 29 podaje wyrażenie na siłę krytyczną, gdzie φ_1 , φ_2 i φ_3 zależą od x_s (położenie strefy uplastycznienia); musimy zatem przyjąć pewną wartość x_s , tzn. wartość $F = aM_0/l$ i wtedy funkcje φ_1 , φ_2 i φ_3 są określone, co daje nam wartość F , którą można przedstawić w postaci $F_{kr} = K \sqrt{BC}/l^2$ (K współczynnik liczbowy).



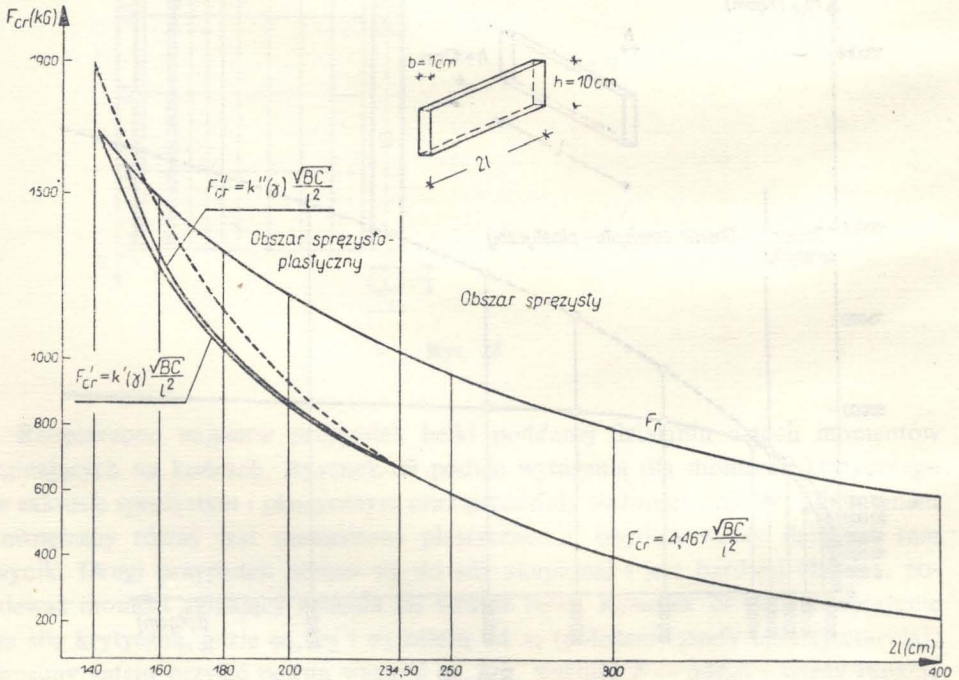
Rys. 29



Rys. 30



Rys. 31



Rys. 32

Rysunki 30 i 31 przedstawiają zależność momentu krytycznego od parametru ρ i od długości belki w przypadku belki stalowej o przekroju prostokątnym (dane: szerokość 1 cm, wysokość 10 cm, $E = 2 \cdot 10^6$ kG cm⁻², $G = 0,8 \cdot 10^6$ kG cm⁻², $\theta_s = 2400$ kG cm⁻²).

Rysunek 32 przedstawia zależność siły krytycznej od długości belki stalowej o przekroju prostokątnym (1 × 10 cm). Zamieszczono tu krzywe odpowiadające dwóm przybliżeniom przy użyciu powyższych założeń i przy pominięciu ich.

Literatura cytowana w tekście

1. A. GALLI, V. FRANCIOSI, *Introduzione della caratteristica tagliante nel calcolo a rottura*, L'Ingegnere, 8, 1953.
2. V. FRANCIOSI, E. GIANGRECO, *Calcolo a rottura in presenza di sforzo normale, momento flettente e sforzo di taglio*, Giornale del Genio Civile, 2, 1954.
3. M. COMO, *La sezione a doppio T nella fase di completa plasticizzazione in presenza di sforzo normale e momento flettente*, Rendiconti Accademia Scienze Fisiche e Matematiche Serie IV, 4 (1959).
4. G. GIANNELLI, *Sul calcolo a rottura delle sezioni in cemento armato pressoinflesse*, Giornale del Genio Civile, 12, 1958.
5. V. FRANCIOSI, *Sul calcolo a rottura delle strutture in conglomerato armato*, L'Industria Italiana del Cemento, Apr. 1954.
6. U. CARPUTI, *Calcolo a rottura di una sezione rettangolare in cemento armato dissimmetrica soggetta a pressoflessione*, Giornale del Genio Civile, 10, 1958.
7. C. GRECO, *Sul calcolo a rottura delle sezioni rettangolari in cemento armato sollecitate a sforzo normale eccentrico*, Rassegna dei Lavori Pubblici, 12, 1962.
8. B. BARBARITO, *La rottura delle sezioni pressoinflesse in conglomerato non armato*, Giornale del Genio Civile, 9, Sett. 1960.
9. A. RAITHEL, B. BARBARITO, *La rottura delle sezioni pressoinflesse nel cemento armato*, Giornale del Genio Civile, 6, 1959.
10. B. BARBARITO, S. AIELLO, *La rottura delle sezioni pressoinflesse in conglomerato, precompresso*, Il Cemento, 6, 1962.
11. E. GIANGRECO, *Proposition d'une methode de synthèse pour la rupture par effort tranchant*, Bulletin 33, Comm. V, C.E.B.
12. M. COMO, *Il problema dello sforzo di taglio nel calcolo a rottura nelle sezioni in cemento armato*, Atti Istituto Tecnica delle Costruzioni di Napoli, No. 38.
13. E. GIANGRECO, *L'influenza della caratteristica tagliante sul meccanismo di rottura di travi in cemento armato* (in corso di stampa).
14. T. RENZULLI, *Esperienze su travetti in cemento armato*, Giornale del Genio Civile, 2, 1957.
15. E. BRUZZESE, *Il dominio di snervamento sul piano di fondazione nel calcolo a rottura*, Giornale del Genio Civile, 10, 1958.
16. C. CESTELLI GUIDI, *Il calcolo a rottura delle travi di fondazione*, Giornale del Genio Civile, 6, 1958.
17. D. ANNARATONE, *Calcolo e verifica del portale incernierato in campo elasto-plastico*, Rivista d'Ingegneria, 9, Sett. 1961.
18. P. POZZATI, *Sul calcolo a rottura delle strutture iperstatiche*, Giornale del Genio Civile, 5, 1955.
19. F. MATTIAZZO, *Sul calcolo dei graticci di travi ortogonali di travi elasto-plastiche*, Atti dello Istituto di Costruzioni e Ponti, Milano 1958.
20. R. SPARACIO, *Il calcolo a rottura degli impalcati da ponte*, Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Serie IV, 28 (1960).

21. T. RENZULLI, *Prove a rottura di un arco incastrato in conglomerato armato*, Giornale del Genio Civile, 10, 1959.
22. A. RAITHEL, L. ADRIANI, *In tema di sicurezza delle strutture ad arco*, Rendiconti Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Serie IV, 28 (1961).
23. V. FRANCIOSI, *Verifica a rottura della trave Nielsen*, Giornale del Genio Civile, 3, 1954.
24. A. GALLI, V. FRANCIOSI, *Il calcolo a rottura dei ponti a volta sottile ed impalcato irrigidente*, Giornale del Genio Civile, 11, 1955.
25. V. FRANCIOSI, *La sicurezza a rottura nei ponti ad arco*, L'Ingegnere, 7, 1956.
26. V. FRANCIOSI, *Ponti ad arco ad impalcato sospeso*, Hoepli 1958.
27. V. FRANCIOSI, *La verifica a rottura nelle strutture da ponte*, Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni di Napoli, 65.
28. V. SORGENTE, *In tema di calcolo a rottura e risultati sperimentali relativi ad una struttura da ponte a volta irrigidita*, Giornale del Genio Civile, 12, 1957.
29. A. RAITHEL, *Il grado di sicurezza dei ponti ad arco*, Giornale del Genio Civile, 9, 1959.
30. G. MAIER, *Sul comportamento dei ponti sospesi a trave irrigidente in regime elasto-plastico*, Costruzioni Metalliche, 5, 1959.
31. L. ADRIANI, *In tema di rottura di ponti a volte sottili irrigidite*, Autostrade, 11, 1961.
32. F. MAZZARELLA, *Il carico di rottura nelle volte scatolari*, La Ricerca, Anno X, No. 1.
33. T. RENZULLI, *Considerazioni sul calcolo a rottura delle lastre curve*, Celebrazioni Archimedee, Siracusa 1961.
34. A. PASSARO, *Calcolo a rottura delle tubazioni metalliche di grande diametro*, Energia Elettrica, 10, 1957.
35. A. GALLI, *Il grado di sicurezza delle strutture*, Rassegna Tecnica ANIAI, 11, 1954.
36. V. FRANCIOSI, *Il procedimento del limit design per carichi non proporzionali*, La Ricerca, Serie IV, No. 3.
37. V. FRANCIOSI, *Il teorema fondamentale del calcolo a rottura*, L'Ingegnere, 12, 1955.
38. V. FRANCIOSI, *Premesse all'introduzione del calcolo a rottura nella pratica tecnica*, Rendiconti Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Serie IV, 22 (1955).
39. M. CAIRONI, *Su uno schema di calcolo in cemento armato in regime elasto-plastico*, Atti Istituto Costruzioni e Ponti, Milano 1955.
40. V. FRANCIOSI, *Introduzione al calcolo a rottura*, Lezioni del Corso di Perfezionamento di Teoria e Tecnica delle Strutture, Napoli 1958.
41. G. AUGUSTI, *Sulla determinazione del grado di sicurezza nel calcolo a rottura*, Rendiconti Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Serie IV, 27 (1960).
42. E. BRUZZESE, *Il problema delle distorsioni nel calcolo a rottura*, Rendiconti Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Serie IV, 25 (1958).
43. R. SPARACIO, *Collasso da carichi ripetuti in sollecitazione composta*, L'Ingegnere, 10-11, 1962.
44. R. SPARACIO, *Il teorema fondamentale del calcolo a rottura per carichi ripetuti in sollecitazione composta*, Rendiconti Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Serie IV, 28 (1961).
45. R. SPARACIO, *La ricerca del minimo coefficiente di sicurezza a rottura in presenza di carichi variabili e distorsioni*, Giornale del Genio Civile, 10, 1960.
46. R. SPARACIO, *Verifica a rottura in presenza di carichi ripetuti, in particolare di sollecitazioni sismiche*, Convegno Internazionale di Ingegneria Sismica, Messina 1959.
47. A. GALLI, T. RENZULLI, *Contributo all'evoluzione del metodo delle cerniere plastiche e metodo della rottura localizzata*, Giornale del Genio Civile, 11-12, 1954.
48. T. RENZULLI, *Sul calcolo delle strutture monodimensionali in regime elasto-plastico*, Rendiconti Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Serie IV, 21 (1954).
49. F. LEVI, *Superfici di influenza e fenomeni di adattamento nelle lastre piane*, Giornale del Genio Civile, 5, 1950.
50. F. LEVI, *Analisi dei fenomeni anelastici proseguita fino a rottura*, Giornale del Genio Civile, 3, 1954.

51. F. LEVI, *Fenomeni di adattamento e calcolo a rottura*, Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei, Marzo 1953.
52. F. JOSSA, *Considerazioni sul calcolo a rottura e su un metodo generale di verifica delle strutture*, Giornale del Genio Civile, 1-2, 1956.
53. G. GRANDORI, *Strutture reticolari in equilibrio elasto-plastico*, Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni, Milano 1952.
54. F. LEVI, *Adaptations plastiques au bord des surfaces de révolution*, Ass. Ponts et Charpentes, 13, Zurich 1953.
55. F. LEVI, *Etude théorique expérimentale d'une dalle precontrainte sur appui élastique jusque à la limite de élasticité*, Annales I.T.B.T.P., 6, 1953.
56. F. LEVI, *Poutres hyperstatiques en fase d'adaptation*, Schweizerische Bauzeitung, 34, 1954.
57. G. MACCHI, *Etude expérimentale de poutres continues precontraintes dans le domaine plastique et à la rupture*, II Congresso Internazionale F.I.P., Amsterdam 1955.
58. G. MACCHI, *Ridistribuzione dei momenti in campo anelastico ed a rottura nelle travi continue precomprese*, Symposium sulla plasticità nella Scienza delle Costruzioni, Varenna, Sett. 1956.
59. G. MACCHI *Sulla distribuzione plastica dei momenti nelle travi iperstatiche*, Rendiconti Accademia dei Lincei, Serie VIII, 21 (1956).
60. L. FINZI, *Unloading processes in elastic-plastic structures*, IX Congresso Internazionale di Meccanica Applicata, Bruxelles 1957.
61. U. ROSSETTI, *Contributo allo studio del cemento armato in fase anelastica a rottura*, Giornale del Genio Civile, 10, 1957.
62. G. GRANDORI, *Un metodo grafico analitico per il calcolo di travi inflesse elasto-plastiche*, Il Cemento, 3, 1957.
63. G. GRANDORI, *Un'esperienza sul comportamento di travi inflesse in campo elasto-plastico*, Symposium sulla plasticità nella Scienza delle Costruzioni, Varenna, Sett. 1956.
64. M. BROZZU, *Effetti del rincredimento dei materiali sulla resistenza delle travi inflesse*, Symposium sulla plasticità delle costruzioni, Varenna, Sett. 1958.
65. G. MORAVIA, *Un'esperienza su modello in campo elasto-plastico*, La Metallurgia Italiana, 12, 1958.
66. M. BROZZU, *Sull'interpretazione del comportamento sperimentale delle travi inflesse in campo elasto-plastico*, Il Cemento, 3, 1958.
67. U. CARPUTI, *Sulla ridistribuzione dei momenti flettenti in uno studio iperstatico*, Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni di Napoli, No. 16.
68. A. CASTIGLIONI, *Travi elasto-plastiche a plasticità diffusa*, Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni, Milano 1959.
69. F. LEVI, *Phénomènes d'adaptation et calculs à rupture dans les constructions hyperstatiques en beton armé*, Revue C, Tijdschrift, 8, 1961.
70. L. FINZI, *Condizioni perchè elementi plasticizzati delle strutture ritornino elastici al crescere dei carichi*, Giornale del Genio Civile, 4, 1956.
71. E. GIANGRECO, G. FOTI, *Sui ritorni elastici in strutture morodimensionali perfettamente elasto-plastiche*, Giornale del Genio Civile, 3, 1958.
72. G. SARÀ, *Il comportamento del portale incastrato in regime perfettamente elasto-plastico*, Costruzioni Metalliche, 5, 1962.
73. V. FRANCIOSI, *Il carico di punta critico in regime elasto-plastico*, Rendiconti Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Serie IV, 20 (1953).
74. T. RENZULLI, *Il problema dell'asta caricata di punta in campo elasto-plastico*, Rendiconti Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Serie IV, 23 (1956).
75. V. FRANCIOSI, *La stabilità dell'asta in campo elasto-plastico*, Rendiconti Corso Perfezionamento in c.a., 9 (1958), Milano.
76. E. BRUZZESE, *L'instabilità dell' equilibrio della trave Nielsen al di là dei limiti di proporzionalità*, Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni di Napoli, No. 68.
77. G. MAIER, *Sull'equilibrio elasto-plastico delle strutture reticolari in presenza di diagrammi forze elongazioni a tratti decrescenti*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 95 (1961).

78. E. GIANGRECO, *Lo svergolamento delle travi alte in regime elasto-plastico*, Rendiconti e Pubblicazioni del Corso di Perfezionamento in cemento armato di Milano, 8 (1957).

79. E. GIANGRECO, C. FOTI, A. SOLLAZZO, *L'instabilità flessio-torsionale in regime elasto-plastico*, Tecnica Italiana, anno 23, 8, 1958.

80. E. GIANGRECO, *Una ricerca teorico-sperimentale sullo svergolamento delle travi alte in regime elasto-plastico*, Giornale del Genio Civile, 1, 1958.

81. C. FOTI, *L'instabilità flessio-torsionale al di là dei limiti elastici di una trave appoggiata agli estremi con un carico concentrato in un punto generico*, Rendiconti Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Serie IV, 26 (1959).

82. P. MATILDI, A. SOLLAZZO, *Sull'instabilità flessio-torsionale delle travi alte al di là dei limiti elastici*, Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni di Bari, 20, 1959.

83. P. MATILDI, A. SOLLAZZO, *Risultati di esperienze in tema di instabilità flessio-torsionale*, Costruzioni Metalliche, 5, 1962.

Резюме

ОБЗОР ПОСЛЕДНИХ ИТАЛЬЯНСКИХ РАБОТ В ОБЛАСТИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Полное описание прогресса в исследованиях, проведенных в последние годы в Италии, в области несущей способности, должно быть связано также с исследованиями, проводимыми другими странами, которые, без сомнения отразились на направлении и процессе теоретических и экспериментальных исследований в Италии. Однако, мы должны отказаться от столь широкого описания и представим, весьма общий обзор итальянских работ, обращая внимание на те исследования, которые ввиду своей оригинальности и возможности легкого применения, заслуживают внимания. В Италии, подобно, как и в других странах, можно различить два главных аспекта исследований, а именно: полное описание явления, вплоть до момента разрушения, учитывающее пластическое приспособление и упругую разгрузку, а также метод несущей способности, касающийся, единственно, конечного состояния конструкции и описывающий разрушение с помощью соответствующего кинематического механизма.

Проводились известные попытки установления промежуточных методов между этими крайними методами: первым, точно соответствующим действительному процессу явления, но очень сложным и, вторым, очень простым, но слишком схематическим и основывающимся, единственно, на понятии пластических шарниров. По этому настоящий обзор будет касаться всех этих проблем.

Summary

RECENT ITALIAN CONTRIBUTIONS IN THE LIMIT DESIGN

A complete description of progress reached by the scientific researches made in Italy during the last few years in the field of limit design should be connected with the Italian studies already performed as well as the scientific contributions of foreign countries, which certainly affected the course of Italian theoretical and experimental researches. We naturally must consider all these elements as already acquired and we must confine ourselves to a very general panoramic review of Italian contributions, signaling those researches which, because of their original set up and easy application, seem worth to be pointed out. In Italy, as well as in foreign countries, two main aspects can be seen in the studies performed: the progressive method, which follows the phenomenon gradual evolution up to the collapse, holding in account the plastic adaptation and the

elastic recovery, and the limit design which refers only to the last event of the structure characterizing the collapse condition through the collapse kinematic mechanism. Some attempts were made to trace an intermediate way between these two methods; the method strictly adherent to the physical reality of the phenomenon but full of complications, and the very simple one, but too schematic of the plastic hinges. Therefore, our illustration fundamentally shall go on within these consideration.

UNIVERSITY OF NAPLES

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 listopada 1964 r.