

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

WYBOCZENIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE
NIEKTÓRYCH PRĘTÓW NIEPRYZMATYCZNYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XXII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	233
2. Klasyfikacja prętów afinicznych	233
3. Metoda «założenia równania ścisłego» w zastosowaniu do zagadnień stateczności prętów niepryzmatycznych	238
3.1. Opis metody «założenia równania ścisłego»	238
3.2. Wyprowadzenie wzorów na siłę krytyczną i sztywność pręta	241
3.3. Prawo Ylina. Przypadek wyboczenia sprężysto-plastycznego	246
3.4. Przykłady stosowania wyprowadzonych wzorów i tablic	254
4. Wyboczenie sprężysto-plastyczne prętów zbieżnych	260
4.1. Wyboczenie sprężysto-plastyczne jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych	260
4.2. Wyboczenie sprężysto-plastyczne dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych	266
4.3. Wyboczenie sprężysto-plastyczne jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych	272
4.4. Wyboczenie sprężysto-plastyczne dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych	277
4.5. Określenie kierunku niebezpiecznego dla prętów płasko zbieżnych	277
4.6. Obliczenie siły krytycznej dla prętów zbieżnych metodami przybliżonymi	282
4.7. Przykład liczbowy	286
5. Uwagi końcowe i wnioski	286

1. Wstęp

Stosowanie w praktyce prętów niepryzmatycznych, narażonych na wyboczenie, jest podyktowane różnymi względami. Z jednej strony łatwo przewidzieć, że materiał obliczonego na wyboczenie pręta pryzmatycznego nie jest należycie wykorzystany, że więc zastosowanie prętów niepryzmatycznych pozwoli dokonać pewnych oszczędności na materiale, a tym samym i na ciężarze konstrukcji. W innych przypadkach stosowanie prętów niepryzmatycznych narzuca konstrukcja (korbowody silników spalinowych, sprzężarek, wiertła kręte walcowe i stożkowe itp.).

Obliczaniem siły krytycznej dla różnych rodzajów prętów niepryzmatycznych przy założeniu prawa Hooke'a, a więc sprężystości odkształceń zajmowało się wielu badaczy; szczególne zasługi położył na tym polu A. N. Dinnik, [1], zestawiając między innymi wyniki obliczeń w tablice, nadające się do bezpośredniego wykorzystania w praktyce konstruktorskiej. Stosowalność tablic tych jest jednak ograniczona, bowiem naprężenie krytyczne w najmniejszym z przekrojów pręta nie może przekraczać granicy proporcjonalności. Praca niniejsza stawia sobie za cel rozszerzenie zagadnienia, mianowicie określenie sił krytycznych dla niektórych ważniejszych prętów niepryzmatycznych, podlegających wyboczeniu sprężysto-plastycznemu.

2. Klasyfikacja prętów afinicznych

Obierzmy pewien przekrój poprzeczny nieodkształconego pręta prostego za podstawowy i przyjmijmy w jego środku ciężkości początek prostokątnego układu współrzędnych. Oś x skierowujemy zgodnie z osią pręta, osie y i z zgodnie z głównymi środkowymi osiami bezwładności przekroju podstawowego. Przekrój podstawowy będzie więc posiadał odciętą $x=0$. Wielkości, charakteryzujące go, jak powierzchnię F , momenty bezwładności I_y i I_z itp., będziemy oznaczali wskaźnikami 0. Przekrój podstawowy możemy uważać za pewien obszar D w płaszczyźnie yz , spełniający z założenia warunki

$$(2.1) \quad \int_D y dF = \int_D z dF = \int_D yz dF = 0.$$

Przekroje końcowe pręta będą posiadały odcięte α i β , przy czym albo $\alpha \leq 0$ i $\beta > 0$, albo $\alpha < 0$ i $\beta \geq 0$.

Przez płaszczyznę $\bar{y}\bar{z}$ będziemy rozumieli przesuniętą równoległe o x (w kierunku tej osi) płaszczyznę yz .

Każdy przekrój pręta możemy uważać za pewne przekształcenie przekroju podstawowego, czyli obszaru D . Jeżeli przekształcenie to będzie dla każdego x z przedziału $\langle \alpha, \beta \rangle$ określone związkami

$$(2.2) \quad \begin{cases} \bar{y} = y, \\ \bar{z} = z, \end{cases}$$

to będziemy mieli do czynienia z prętym przyzmatycznym; w przeciwnym razie pręt będzie na ogół nieprzyzmatyczny (jako wyjątek można tu podać np. różne od (2.2) przekształcenie, powodujące obrót obszaru D , będącego kołem, wokół jego środka).

Ogólnie biorąc możemy przekształcenie przekroju podstawowego zapisać w postaci (na ogół różnej dla różnych x)

$$(2.3) \quad \begin{cases} \bar{y} = f_1(y, z), \\ \bar{z} = f_2(y, z). \end{cases}$$

Dla znacznej większości stosowanych w praktyce prętów przekształcenie (2.3) jest dla każdego x z przedziału $\langle \alpha, \beta \rangle$ przekształceniem afinicznym (pokrewieństwem); pręty te wyodrębnimy spośród wszystkich możliwych prętów nieprzyzmatycznych i nazwiemy krótko prętami afinicznymi. Przekształcenie złożone z kilku przekształceń afinicznych oraz odwrotne do afinicznego jest również afiniczne, więc przyjęcie przekroju podstawowego nie odgrywa tu żadnej roli.

Jak wiadomo, przekształcenie (2.3) jest afiniczne, gdy

$$(2.4) \quad \begin{cases} \bar{y} = a_1 y + b_1 z + c_1, \\ \bar{z} = a_2 y + b_2 z + c_2, \end{cases} \quad \text{przy czym} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cechą istotną przekształcenia afinicznego jest zachowanie równoległości prostych.

Związki (2.4) przekształcają płaszczyznę yz na $\bar{y}\bar{z}$, a wraz z nią i obszar D na pewien obszar \bar{D} . Ponieważ środek ciężkości obszaru \bar{D} ma z założenia leżeć na osi x , to muszą być spełnione warunki

$$(2.5) \quad \int_{\bar{D}} \bar{y} d\bar{F} = \int_{\bar{D}} \bar{z} d\bar{F} = 0,$$

z których wynika $c_1 = c_2 = 0$. Zatem pręt nazywamy afinicznym, gdy każdy jego przekrój można otrzymać z przekroju podstawowego przez przekształcenie

$$(2.6) \quad \begin{cases} \bar{y} = a_1 y + b_1 z, \\ \bar{z} = a_2 y + b_2 z, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Współczynniki a_1, a_2, b_1 i b_2 są na ogół funkcjami zmiennej x . Funkcje te spełniają z założenia warunki

$$(2.7) \quad \begin{cases} a_1(0) = b_2(0) = 1, \\ a_2(0) = b_1(0) = 0. \end{cases}$$

Jeżeli wszystkie one są funkcjami ciągłymi w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, to pręt będziemy nazywali *ciągłe* afinicznym, w przeciwnym razie — *nieciągłe* afinicznym.

Spośród prętów afinicznych wyodrębnimy te, dla których kierunki główne wszystkich przekrojów poprzecznych będą do siebie odpowiednio równoległe i nazwiemy je prętami afinicznymi o stałych kierunkach głównych. Kierunki te będą kierunkami osi \bar{y} i \bar{z} ; zatem dla prętów tych

$$(2.8) \quad \int_D \bar{y}\bar{z} d\bar{F} = 0.$$

Oznaczając

$$\int_D y^2 dF = I_{x0}, \quad \int_D z^2 dF = I_{y0}$$

i wykorzystując warunek (2.1), po postawieniu (2.6) do (2.8) otrzymujemy

$$(a_1 a_2 I_{x0} + b_1 b_2 I_{y0}) (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0,$$

czyli, ponieważ $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, więc

$$(2.9) \quad a_1 a_2 I_{x0} + b_1 b_2 I_{y0} = 0.$$

Ponieważ nie może zachodzić równocześnie $a_1 = b_1 = 0$ lub $a_2 = b_2 = 0$ [sprzeczne z (2.6)], oraz $a_1 = b_2 = 0$ [sprzeczne z (2.7)], to równanie (2.9) będzie spełnione, gdy

$$(1) \quad a_2 = b_1 = 0,$$

(2) wszystkie współczynniki a_1, a_2, b_1 i b_2 są różne od zera, lecz

$$\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = -\frac{I_{y0}}{I_{x0}}$$

dla każdego x z przedziału $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Zajmiemy się szczegółowo jedynie pierwszą z tych możliwości, ponieważ druga z reguły nie znajduje zastosowania w praktyce. Przekształcenie (2.6) przybierze tu więc postać

$$(2.10) \quad \begin{cases} \bar{y} = a_1 y, \\ \bar{z} = b_2 z. \end{cases}$$

Rozpatrzmy najpierw przypadki szczególne tego przekształcenia

$$(a) \quad a_1 = b_2 = 1.$$

W tym przypadku mamy do czynienia z prętem pryzmatycznym. Pręt pryzmatyczny możemy więc również zaliczyć do afinicznych.

$$(b) \quad \begin{cases} a_1 = \kappa(x), \\ b_2 = \text{const} = 1, \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} a_1 = \text{const} = 1, \\ b_2 = \kappa(x). \end{cases}$$

Przez odpowiednie przyjęcie układu osi możemy zawsze drugi z tych przypadków sprowadzić do pierwszego, toteż tylko tym przypadkiem będziemy się zajmowali. Przekształcenie (2.10) staje się powinowactwem prostokątnym:

$$(2.11) \quad \begin{cases} \bar{y} = \kappa(x)y, \\ \bar{z} = z; \end{cases}$$

pręty takie będziemy zwali płasko afinicznymi, ponieważ zmiana wymiarów przekroju występuje tylko w jednej płaszczyźnie (xy) . Gdy $\kappa(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, to dany pręt będzie *ciągle* płasko afiniczny. Oznaczając powierzchnie przekrojów przez F , momenty bezwładności przez I promienie bezwładności przez i oraz współczynniki kształtu przekroju $F_i z^2 = \varphi$, możemy łatwo wyprowadzić następujące związki dla prętów płasko afinicznych:

$$(2.12) \quad \begin{cases} F(x) = \kappa(x)F_0, & i_z(x) = \kappa(x)i_{z0}, \\ I_y(x) = \kappa(x)I_{y0}, & \varphi_y(x) = \kappa(x)\varphi_{y0}, \\ I_z(x) = \kappa^3(x)I_{z0}, & \varphi_z(x) = \frac{1}{\kappa(x)}\varphi_{z0}, \\ i_y(x) = i_{y0} = \text{const}, & \end{cases}$$

$$(c) \quad a_1 = b_2 = \kappa(x).$$

Przekształcenie (2.10) staje się w tym przypadku homotetią:

$$(2.13) \quad \begin{cases} \bar{y} = \kappa(x)y, \\ \bar{z} = \kappa(x)z. \end{cases}$$

Mamy zatem do czynienia z podobieństwem geometrycznym wszystkich przekrojów. Pręty takie będziemy zwali *przestrzennie równomiernie* afinicznymi z uwagi na to, że zmiana ich wymiarów w kierunku obu osi jest jednakowa. Będą to pręty o stałym kształcie, a zmiennej wielkości przekroju. Jeżeli funkcja $\kappa(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, to dany pręt będzie *ciągle* przestrzennie równomiernie afiniczny.

Dla prętów przestrzennie równomiernie afinicznych będą obowiązywać związki:

$$(2.14) \quad \begin{cases} F(x) = \kappa^2(x) F_0, \\ I_y(x) = \kappa^4(x) I_{y0}, \\ I_z(x) = \kappa^4(x) I_{z0}, \\ i_y(x) = \kappa(x) i_{y0}, \\ i_z(x) = \kappa(x) i_{z0}, \\ \varphi_y(x) = \varphi_{y0} = \text{const}, \\ \varphi_z(x) = \varphi_{z0} = \text{const}. \end{cases}$$

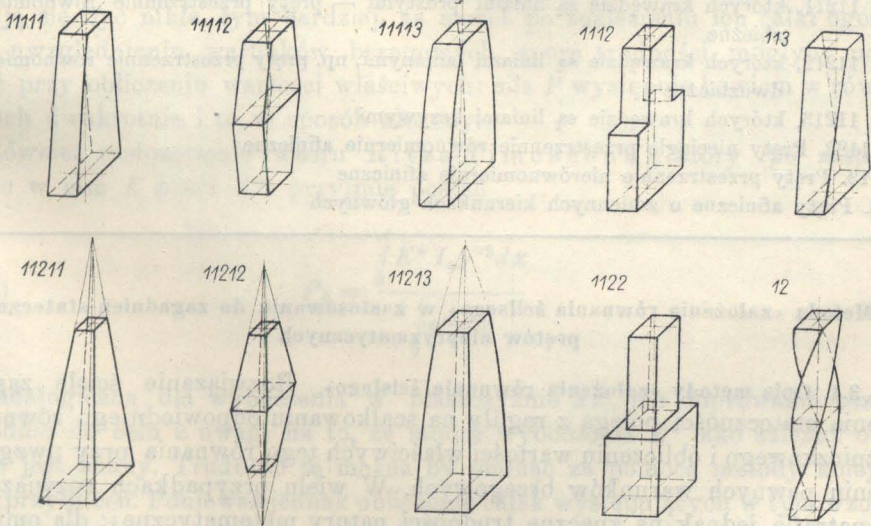
Dwa ostatnie związki są oczywiste z uwagi na stały kształt przekroju pręta.

W przypadku ogólnym przekształcenie (2.10) nie da się sprowadzić ani do (2.11), ani do (2.13). Odpowiednie pręty będziemy zwali przestrzennie *nierównomiernie* afinicznymi.

Pręty przestrzennie równomiernie lub płasko afiniczne, dla których funkcja $\kappa(x)$ jest funkcją liniową, a zatem z uwagi na (2.7) ma postać

$$(2.15) \quad \kappa(x) = 1 + \kappa_0 x,$$

gdzie κ_0 jest pewną liczbą stałą, będziemy zwali przestrzennie równomiernie lub płasko *zbieżnymi*. Krawędzie prętów zbieżnych będą, oczywiście, liniami prostymi. Szczególnie częste zastosowanie znajdują pręty przestrzennie równomiernie zbieżne, do których należą ostrosłupy i stożki proste (ewentualnie ścięte).



Rys. 1. Pręty afiniczne

Pręty złożone z dwóch jednakowych prętów zbieżnych (płasko lub przestrzennie równomiernie), złączonych odpowiednimi podstawami, będziemy zwali prętami *dwuzbieżnymi*. W przypadku gdy między tymi podstawami

znajduje się część pryzmatyczna, pręt można by nazwać *pryzmatyczno-dwuzbieżnym*. Wyboczenie sprężyste takich właśnie prętów (zbieżnych, dwuzbieżnych i pryzmatyczno-dwuzbieżnych) opracował już szczegółowo A. N. Dinnik.

W podobny sposób można również przeprowadzić podział prętów afinicznych o zmiennych kierunkach głównych, czym jednak nie będziemy się tutaj zajmowali.

Usystematyzujemy teraz pręty afiniczne tworząc klasyfikację dziesiętną ważniejszych typów. Przykłady klasyfikowanych prętów podaje rys. 1.

Tablica 1. Klasyfikacja prętów afinicznych

1. Pręty afiniczne

11. Pręty afiniczne o stałych kierunkach głównych

111. Pręty płasko afiniczne

1111. Pręty ciągle płasko afiniczne:

11111, których krawędzie są liniami prostymi — pręty płasko zbieżne

11112, których krawędzie są liniami łamanymi, np. pręty płasko dwuzbieżne

11113, których krawędzie są liniami krzywymi

1112. Pręty nieciągle płasko afiniczne

112. Pręty przestrzennie równomiernie afiniczne

1121. Pręty ciągle przestrzennie równomiernie afiniczne:

11211, których krawędzie są liniami prostymi — pręty przestrzennie równomiernie zbieżne

11212, których krawędzie są liniami łamanymi, np. pręty przestrzennie równomiernie dwuzbieżne

11213, których krawędzie są liniami krzywymi

1122. Pręty nieciągle przestrzennie równomiernie afiniczne

113. Pręty przestrzennie nierównomiernie afiniczne

12. Pręty afiniczne o zmiennych kierunkach głównych

3. Metoda «założenia równania ściślego» w zastosowaniu do zagadnień stateczności prętów niepryzmatycznych

3.1. Opis metody «założenia równania ściślego». Rozwiązanie ściśle zagadnienia stateczności polega z reguły na scałkowaniu odpowiedniego równania różniczkowego i obliczeniu wartości właściwych tego równania przy uwzględnieniu pewnych warunków brzegowych. W wielu przypadkach rozwiązanie to natrafia jednak na znaczne trudności natury matematycznej; dla ominięcia ich podano cały szereg metod przybliżonych, które na ogół z dostateczną dokładnością pozwalają rozwiązać zagadnienie, a więc obliczyć siłę krytyczną dla danego elementu. Stosując je ograniczamy się zwykle do obliczenia pierwszej tylko siły krytycznej, co z reguły jest dla zastosowań zupełnie wystarczające.

Zastanówmy się nad możliwościami obliczenia siły krytycznej dla prętów niepryzmatycznych poddanych wyboczeniu sprężysto-plastycznemu. Ograniczymy się do rozpatrywania prętów o stałych kierunkach głównych, dla których można przyjąć, że linia ugięcia będzie krzywą płaską, położoną w płaszczyźnie xy lub xz .

Przez E^* oznaczymy moduł wyboczenia. Zależy on od naprężenia i od kształtu przekroju, przy czym dla przekrojów symetrycznych według badań Jeżeka, [5], Urbana, [20], Ylinena, [21], i innych tę ostatnią zależność można pominąć. Naprężenie zależy od siły ściskającej P i od powierzchni przekroju $F = F(x)$, zatem $E^* = E^*(P, x)$. Jeżeli przyjmiemy najprostszy przypadek zamocowania końców i obciążenia pręta (pręt dwuprzegubowy lub jednostronnie utwierdzony, ściskany skupioną siłą osiową), to siła krytyczna będzie określona mniejszą z najmniejszych wartości właściwych równań

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} y'' + \frac{Py}{E^*(P, x)I_z(x)} = 0, \\ z'' + \frac{Pz}{E^*(P, x)I_y(x)} = 0. \end{cases}$$

Ponieważ zależność $E^* = E^*(\sigma)$ jest z reguły dość skomplikowana, to widoki na scałkowanie tych równań nawet dla najprostszych zależności $I = I(x)$ wydają się być nikłe, tym bardziej, że nawet po znalezieniu ich całki ogólnej i uwzględnieniu warunków brzegowych spore trudności mogłyby powstać przy obliczeniu wartości właściwych: siła P występuje bowiem w równaniach dwukrotnie i to w sposób złożony.

Również zastosowanie wzoru Ritz-Timoszenki, który (po zastąpieniu w nim E przez E^*) przyjmie postać

$$(3.1.2) \quad P_k = \frac{\int_0^l E^* I_z y''^2 dx}{\int_0^l y'^2 dx}$$

(lub analogiczną dla wyboczenia w płaszczyźnie xz), nie doprowadzi bezpośrednio do celu z uwagi na to, że moduł wyboczenia E^* jako zależny od P nie jest znany. Trudność tę można by ominąć za pomocą metody kolejnych przybliżeń. Ponieważ jednak obliczenie całek występujących w tym wzorze z reguły daje się przeprowadzić jedynie w sposób przybliżony, to biorąc pod uwagę, że sam wzór (3.1.2) w przypadku nieznaności ścisłego równania linii ugięcia jest również wzorem przybliżonym, nie możemy się spodziewać dobrych wyników przy stosowaniu tak dużej ilości przybliżeń.

Również inne znane metody przybliżone, jak Galerkin i Trefftza, wydają się, że nie prowadzą do celu. Większe może nadzieje rokowałyby

metoda różnic skończonych, choć i tu przy kilkakrotnej iteracji nakład pracy byłby niewątpliwie duży, a ocena wielkości błędu — stosunkowo trudna.

Zagadnienie rozwiążemy zatem inną metodą, którą nazwiemy «metodą założenia równania ścisłego». Dla uproszczenia zajmijmy się jedynie wyboczeniem w płaszczyźnie xy , co nie ogranicza ogólności rozważań. Punkt wyjściowy tej metody jest podobny jak w metodach Ritza i Galerkin'a. Obieramy, mianowicie, funkcję $y = y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x)$ o kilku chwilowo nieoznaczonych parametrach $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, spełniającą ściśle warunki brzegowe, a na ogół nie spełniającą danego równania, które w najprostszym przypadku posiada postać

$$(3.1.3) \quad y'' + \frac{P}{B_d} y = 0.$$

Przez B_d oznaczyliśmy sztywność wyboczenia danego pręta. Założymy na razie, że mamy do czynienia z wyboczeniem sprężystym, więc funkcja

$$B_d = B_d(x) = EI(x)$$

jest funkcją znaną; przystosowaniem tej metody do zagadnień wyboczenia sprężysto-plastycznego zajmijmy się później.

Założona funkcja y spełnia jednak na ogół jakies inne równanie

$$(3.1.4) \quad y'' + \frac{P}{B} y = 0,$$

z którego będziemy mogli otrzymać zależność $B = B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x)$, czyli kształt pręta, którego wyboczenie nastąpi według obranej linii ugięcia, oraz siłę krytyczną dla tego pręta. Kształt ten jest jednak uzależniony od wartości parametrów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; dobierając je odpowiednio możemy uzyskać w przybliżeniu z góry zadany kształt pręta $B_d = B_d(x)$. Teoretycznie, optymalne wartości parametrów możemy obliczyć z warunku

$$(3.1.5) \quad \int_0^l [B_d(x) - B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x)]^2 dx = \text{minimum},$$

choć praktycznie spełnienie tego warunku jest z reguły wskutek trudności rachunkowych bardzo kłopotliwe i wobec tego będziemy postępowali nieco inaczej.

Istotna różnica między metodą «założenia równania ścisłego» i metodami Ritza i Galerkin'a polega na tym, że w tych ostatnich metodach obrana funkcja spełnia równanie w przybliżeniu i wartość siły krytycznej jest wartością przybliżoną, natomiast w metodzie «założenia równania ścisłego» równanie [np. (3.1.4)] jest spełnione ściśle i wartość siły krytycznej jest ścisła, a jedyne przybliżenie kryje się w tym, że pręt, dla którego przeprowadzamy obliczenia, jest tylko zbliżony do pręta danego. Kształt otrzy-

manego pręta różni się bowiem nieco od kształtu pręta, dla jakiego chcielibyśmy siłę krytyczną obliczyć.

Metoda zaproponowana pozwala na bardzo łatwą ocenę błędów, pozostających w ścisłym związku z tolerancją wykonania danego pręta, i często błędy wymiarowe, określone różnicą funkcji $B_d(x)$ i $B(x)$, będą leżały w granicach błędów obróbki. Wtedy z technicznego punktu widzenia obliczenie będzie można uznać nawet za ścisłe. Przy stosowaniu metody «założenia równania ścisłego» nie jest istotne posiadanie analitycznej zależności $I = I(x)$; wystarczy znajomość sztywności pręta w kilku punktach (możliwie równomiernie rozłożonych na długości pręta), ponieważ wartości parametrów można dobrać przez bezpośrednie porównanie otrzymanej i założonej sztywności w tych punktach.

Główna zaleta metody polegać jednak będzie na stosunkowo łatwym zastąpieniu stałego modułu Younga E zmiennym modułem wybożenia E^* , co umożliwi rozwiązanie zagadnienia wybożenia sprężysto-plastycznego prętów niepryzmatycznych. Prócz tego omawiana metoda może oddać pewne usługi przy stosowaniu metod Galerkina i Ritz'a, ponieważ obliczając rzeczywisty kształt pręta, dla którego założone równanie linii ugięcia jest równaniem ścisłym, można łatwo zdać sobie sprawę z rzędu popełnianych błędów.

3.2. Wyprowadzenie wzorów na siłę krytyczną i sztywność pręta. Rozważymy wybożenie pręta w płaszczyźnie xy i dla czterech podstawowych przypadków wybożenia przyjmiemy układy odniesienia jak na rys. 2. Zgodnie z oznaczeniami, przyjętymi w p. 2, układ osi narzuca nam wybór przekroju podstawowego: jest to przekrój, któremu odpowiada $x = 0$. We wszystkich czterech przypadkach przyjęliśmy więc $\alpha = 0$ i $\beta = l$. Należy jednak pamiętać, że rozwiązanie tych przypadków jest zarazem rozwiązaniem kilku innych. Na przykład łatwo wykazać, że siła krytyczna dla pręta jednostronnie utwierdzonego jest zarazem siłą krytyczną dla pręta dwuprzegubowego, złożonego z dwóch takich prętów, złączonych odpowiednimi podstawami, a więc dla pręta, dla którego $\alpha = -l$ i $\beta = l$. W ten sposób obliczymy np. siłę krytyczną dla dwuprzegubowego pręta dwuzbieżnego.

Dla uproszczenia obliczeń wprowadzimy nowe zmienne bezwymiarowe. Oznaczmy mianowicie

$$(3.2.1) \quad \frac{x}{l} = t,$$

$$(3.2.2) \quad \frac{B(x)}{B_0} = b(x) \quad \text{lub} \quad \frac{B(t)}{B_0} = b(t),$$

gdzie B_0 jest sztywnością pręta na wybożenie w przekroju podstawowym. Po wprowadzeniu tych oznaczeń równanie zasadnicze zginania

$$(3.2.3) \quad \frac{M}{B} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

przybierze postać

$$\frac{M}{bB_0} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 y}{dt^2},$$

czyli, oznaczając dla skrótienia $\frac{d^2 y}{dt^2}$ przez y'' ,

$$(3.2.4) \quad y'' - \frac{Ml^2}{bB_0} = 0.$$

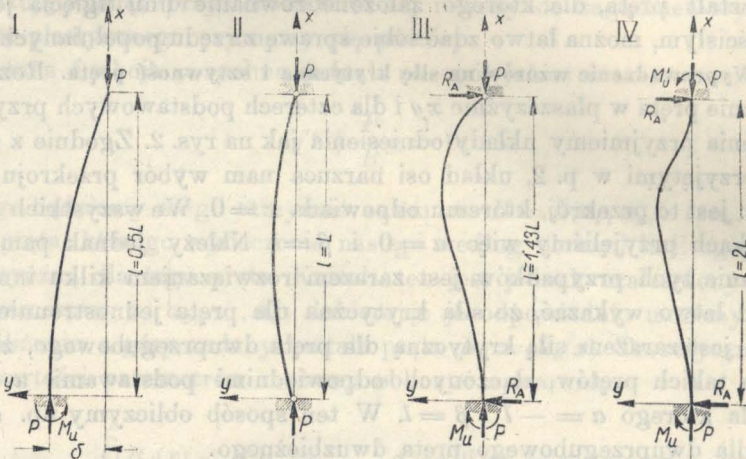
Zajmiemy się najpierw pierwszym przypadkiem wyboczenia. Ponieważ mamy tu $M = -Py$, więc po wstawieniu jest

$$(3.2.5) \quad y'' + \frac{Pl^2}{bB_0} y = 0.$$

Założymy teraz z góry równanie linii ugięcia w postaci

$$(3.2.6) \quad y = \delta f(t)$$

— na ogół z pewną ilością parametrów, których dla skrótienia zapisu nie będziemy wyszczególniali — określimy kształt pręta, dla którego równanie to



Rys. 2. Przyjęte układy odniesienia

będzie ściśle obowiązywać, oraz obliczymy siłę krytyczną dla tego pręta. Przez δ oznaczymy tu strzałkę ugięcia pręta; zdążanie jej do zera zapewni zdążanie siły do wartości krytycznej. Równanie (3.2.6) musi spełniać warunki brzegowe, więc $f(1) = 0$ i $f'(0) = 0$; poza tym $f(0) = 1$, a jeżeli założymy, że sztywność w przekroju $t=1$ (swobodny koniec pręta) ma być różna od zera, to musi być ponadto spełniony warunek $f''(1) = 0$, co jest widoczne z równania (3.2.5). Po podstawieniu mamy

$$(3.2.7) \quad \delta f''(t) + \frac{P\delta l^2}{bB_0} f(t) = 0.$$

Równanie to ma być spełnione dla każdej wartości t w przedziale $0 \leq t \leq 1$; wstawiając do równania $t = 0$ [zatem $b = 1$, jak widać z (3.2.2)], otrzymujemy

$$(3.2.8) \quad \delta f''(0) + \frac{P \delta l^2}{B_0} = 0.$$

Stąd wartość siły krytycznej

$$(3.2.9) \quad P_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[-\frac{B_0 \delta f''(0)}{\delta l^2} \right] = -\frac{B_0}{l^2} f''(0).$$

Oczywiście, w przypadku prawidłowego wyboru funkcji $f(t)$ wartość ta wypadnie dodatnia, ponieważ z rys. 2 jest rzeczą widoczną, że $f''(0) < 0$. Wprowadzając, jak się to zazwyczaj czyni, współczynnik stateczności \mathfrak{S} , określony dla pierwszego przypadku wybożenia równaniem

$$(3.2.10) \quad P_k = \mathfrak{S} \frac{E I_0}{L^2} = \mathfrak{S} \frac{E I_0}{4 l^2},$$

gdzie przez L oznaczyliśmy długość zredukowaną pręta $L = 2l$, otrzymujemy ze wzoru (3.2.9) w przypadku wybożenia sprężystego wprost

$$(3.2.11) \quad \mathfrak{S} = -4 f''(0),$$

natomiast w przypadku wybożenia sprężysto-plastycznego

$$(3.2.12) \quad \mathfrak{S} = -4 f''(0) \frac{E_0^*}{E},$$

gdzie E_0^* jest modułem wybożenia w przekroju podstawowym¹⁾. W tym ostatnim przypadku nie możemy na razie obliczyć konkretnej wartości \mathfrak{S} , ponieważ nie znamy E_0^* . Posłużymy się więc tylko wzorem (3.2.11) oznaczając wynik przez $\bar{\mathfrak{S}}$; będzie to pozorny współczynnik stateczności.

Wprowadzimy również pojęcia naprężeń krytycznych: w przekroju podstawowym (utwierdzonym)

$$(3.2.13) \quad \sigma_{k0} = \frac{P_k}{F_0}$$

oraz w przekroju swobodnym

$$(3.2.14) \quad \sigma_{k1} = \frac{P_k}{F_1},$$

gdzie F_1 jest powierzchnią przekroju dla $t = 1$. Z (3.2.10) otrzymujemy na naprężenie σ_{k0} wzór analogiczny do wzoru Eulera

$$(3.2.15) \quad \sigma_{k0} = \mathfrak{S} \frac{E}{\lambda_0^2},$$

w którym oznaczyliśmy

$$(3.2.16) \quad \lambda_0 = \frac{L}{i_0} = \frac{2l}{i_0}.$$

¹⁾ Przypominamy, że każdy pręt będzie miał na ogół różne wartości E_0^* , zależnie od rozpatrywanego kierunku wybożenia.

Wielkość tę będziemy nazywali *smukłością dolną* pręta niepryzmatycznego. Z jednej bowiem strony obrany przez nas przekrój podstawowy pręta w większości konstrukcyj będzie się znajdował na dole, z drugiej zaś strony spośród wszystkich możliwych smukłości pręta, określonych jako stosunek L/i , λ_0 posiadać będzie z reguły wartość najmniejszą, inaczej wartość dolną. Przypomnimy tu, że każdy pręt niepryzmatyczny o stałych kierunkach głównych posiada dwie smukłości dolne, ponieważ oprócz rozpatrywanego przez nas wybożenia w płaszczyźnie xy jest również możliwe wybożenie w płaszczyźnie xz .

Podstawiając (3.2.11) do (3.2.15) otrzymujemy w przypadku wybożenia sprężystego

$$(3.2.17) \quad \sigma_{k0} = -4f''(0) \frac{E}{\lambda_0^2}.$$

W przypadku wybożenia sprężysto-plastycznego będzie to wartość pozorna którą oznaczymy przez $\bar{\sigma}_{k0}$. Rzeczywiste naprężenie wyniesie

$$(3.2.18) \quad \sigma_{k0} = \bar{\sigma}_{k0} \frac{E_0^*}{E}.$$

Określiliśmy już wartość siły krytycznej i naprężenia krytycznego dla pręta, choć nie wiemy jeszcze, jaki jest jego kształt — jak zmienia się sztywność wzdłuż osi. Wstawiając (3.2.9) do (3.2.7) i zakładając, że $\delta \rightarrow 0$, otrzymamy

$$(3.2.19) \quad b = b(t) = \frac{f''(0)f(t)}{f''(t)},$$

co przy przyjęciu sztywności przekroju podstawowego równej B_0 określa poszukiwany kształt pręta.

Ponieważ jednym z warunków, które spełnia funkcja $f(t)$, jest $f(1) = 0$, więc ze wzoru (3.2.19) widzimy, że $b(1)$, oznaczone dalej krótko przez b_1 , może być tylko wtedy różne od zera, gdy $f''(1) = 0$, co podkreślaliśmy już wyżej; wtedy

$$(3.2.20) \quad b_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f''(0)f(t)}{f''(t)} = \frac{f''(0)f'(1)}{f'''(1)},$$

zgodnie z regułą de l'Hospitala.

Analogiczne wzory wyprowadzimy bez trudu dla drugiego przypadku wybożenia. Po wprowadzeniu oznaczeń (3.2.1) i (3.2.2) otrzymujemy tu także równanie (3.2.5). Równanie linii ugięcia założymy w postaci (3.2.6), zmieniają się jedynie warunki brzegowe: mamy tu $f(0) = 0$ i $f(1) = 0$, a jeżeli założymy, że sztywność w przekrojach $t = 0$ i $t = 1$ ma być różna od zera, to muszą być również spełnione warunki $f''(0) = 0$ i $f''(1) = 0$, co jest widoczne z równania (3.2.5). Po podstawieniu otrzymujemy równanie (3.2.7).

Wstawiając $t = 0$ mamy

$$\delta f''(0) + \frac{P \delta l^2}{B_0} f(0) = 0,$$

skąd

$$P_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[-\frac{B_0 \delta f''(0)}{\delta l^2 f(0)} \right] = -\frac{B_0 f''(0)}{l^2 f(0)}.$$

Z warunków brzegowych wynika, że $f''(0) = f(0) = 0$, więc siłę krytyczną znajdziemy jako granicę

$$(3.2.21) \quad P_k = \lim_{t \rightarrow 0} \left[-\frac{B_0 f''(t)}{l^2 f(t)} \right] = -\frac{B_0 f'''(0)}{l^2 f'(0)}.$$

Współczynnik stateczności ϑ i naprężenie krytyczne σ_{k0} będą tu określone wzorami

$$(3.2.22) \quad \vartheta = -\frac{f'''(0)}{f'(0)},$$

$$(3.2.23) \quad \sigma_{k0} = -\frac{f'''(0)}{f'(0)} \frac{E}{\lambda_0^2}.$$

W przypadku wyboczenia sprężystego będą to wartości rzeczywiste, w przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego — pozorne, które oznaczymy, jak poprzednio, kreską u góry.

Funkcję $b = b(t)$, określającą kształt pręta, otrzymamy z równania (3.2.7) wstawiając wartość siły krytycznej (3.2.21) i zakładając, że $\delta \rightarrow 0$:

$$(3.2.24) \quad b = b(t) = \frac{f'''(0)f(t)}{f'(0)f''(t)}.$$

Podobnie, jak w poprzednim przypadku, $b(1) = b_1$ znajdziemy jako granicę

$$(3.2.25) \quad b_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f'''(0)f(t)}{f'(0)f''(t)} = \frac{f'''(0)f'(1)}{f'(0)f'''(1)}$$

korzystając z reguły de l'Hospitala.

W trzecim i czwartym przypadku wyboczenia wyprowadzenie analogicznych wzorów jest nieco trudniejsze. Nie zajmując się nimi szczegółowo pokażemy jedynie, w jaki sposób można otrzymać wzór na siłę krytyczną dla pręta dwustronnie utwierdzonego, zakładając odpowiednie równanie linii ugięcia. Moment gnący jest tu określony wzorem $M = -Py + M_u - R_A lt$, gdzie M_u i R_A są reakcjami statycznie niewyznaczalnymi. Zakładając równanie linii ugięcia w postaci (3.2.6) z odpowiednimi warunkami brzegowymi, po wstawieniu do (3.2.4) otrzymujemy

$$(3.2.26) \quad \frac{\delta b B_0}{l^2} f''(t) + P \delta f(t) = M_u - R_A lt.$$

Zanim przejdziemy do określenia siły krytycznej, musimy najpierw obliczyć reakcje M_u i R_A . Założona przez nas linia ugięcia musi posiadać dwa punkty przegięcia; oznaczmy ich odcięte przez t_{p1} i t_{p2} . Mamy więc $f''(t_{p1}) = f''(t_{p2}) = 0$, a po wstawieniu do (3.2.26) otrzymujemy układ dwóch równań, z którego obliczymy M_u i R_A :

$$(3.2.27) \quad \begin{cases} P\delta f(t_{p1}) = M_u - R_A l t_{p1}, \\ P\delta f(t_{p2}) = M_u - R_A l t_{p2}. \end{cases}$$

Po wstawieniu obliczonych wartości do (3.2.26) i podstawieniu $t = 0$ oraz $\delta \rightarrow 0$ otrzymujemy ostatecznie

$$(3.2.28) \quad P_k = \frac{B_0 \cdot (t_{p2} - t_{p1}) f''(0)}{l^2 t_{p2} f'(t_{p1}) - t_{p1} f'(t_{p2})}.$$

Kształt pręta można teraz określić z równania (3.2.26).

3.3. Prawo Ylлина. Przypadek wyboczenia sprężysto-plastycznego. Za pomocą wyprowadzonych wyżej wzorów możemy obliczyć efektywnie siłę krytyczną i kształt pręta tylko w przypadku wyboczenia sprężystego, a więc stałego modułu wyboczenia $E^* = E$. Przypadek wyboczenia sprężysto-plastycznego możemy rozwiązać dopiero po przyjęciu zależności $E^* = E^*(\sigma)$, a więc zależności modułu wyboczenia od naprężenia, uwzględniającej własności plastyczne materiału. Wyboczenie pręta niepryzmatycznego będzie wyboczeniem sprężystym tylko wtedy, gdy naprężenie krytyczne w najmniejszym z przekrojów pręta nie przekroczy granicy sprężystości. Łatwo przewidzieć, że dzięki nierównomiernemu rozkładowi naprężeń będziemy tu mieli znacznie częściej do czynienia z wyboczeniem sprężysto-plastycznym niż w przypadku prętów przyzmatycznych. Tak, na przykład, dla stożka ściętego, którego średnica podstawy górnej jest dwa razy mniejsza od średnicy podstawy dolnej ($\sigma_{k1} = 4 \sigma_{k0}$), czyli nawet gdy σ_{k0} jest znacznie mniejsze od granicy sprężystości, σ_{k1} może ją już przekroczyć.

Oprzemy się tu na prawie, które sformułował badacz fiński A. Ylлина, [21]. Podobnie jak prawo Hooke'a ujmuje zależność między odkształceniami i naprężeniami we wzór

$$(3.3.1) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E = \text{const},$$

tak (dla materiałów plastycznych o rzeczywistej granicy plastyczności σ_{pl}) prawo Ylлина można wyrazić wzorem

$$(3.3.2) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_{pl}} \right)^n \right],$$

przy czym wykładnik n jest traktowany jako stała materiałowa. Wartości tej stałej dla różnych materiałów wyznaczyli Gehler, Roß, Ylлина i inni.

Wzór Ylinena różni się od wzoru Hooke'a o czynnik $[1 - (\sigma/\sigma_{pl})^n]$; czynnik ten można by nazwać poprawką Ylinena lub poprawką na plastyczność. Ponieważ wykładnik n jest stosunkowo duży (dla stali $n = 6$ do 18), to przy niewielkich naprężeniach czynnik ten jako bliski jedności nie posiada wpływu i prawo Ylinena sprowadza się do prawa Hooke'a. Przy większych naprężeniach obniża on wartość pochodnej $d\sigma/d\varepsilon$, co jest zgodne z wynikami doświadczeń. Dlatego też prawo Ylinena można uważać za uogólnienie prawa Hooke'a: podczas gdy prawo Hooke'a jest ważne tylko wtedy, gdy naprężenie nie przekracza granicy proporcjonalności zarówno przy ściskaniu, jak i przy rozciąganiu (granicy tej nie da się określić, zresztą, ściśle na podstawie doświadczeń), to prawo Ylinena jest ważne aż do granicy plastyczności. We wzorze (3.3.2) przez σ należy rozumieć bezwzględną wartość naprężenia (jeżeli wykładnik n jest parzysty, to nie odgrywa to roli).

Stosując teorię wyboczenia sprężysto-plastycznego Kármána, Ylinen wprowadza podobny wzór na moduł wyboczenia:

$$(3.3.3) \quad E^* = E \left[1 - \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_{pl}} \right)^m \right],$$

przy czym w przybliżeniu $m = 1,3n$. Wzorem tym, który Ylinen zastosował do obliczenia siły krytycznej dla prętów pryzmatycznych, posłużymy się teraz przy rozwiązywaniu zagadnienia wyboczenia sprężysto-plastycznego prętów niepryzmatycznych metodą «założenia równania ścisłego».

Obliczymy najpierw wartość siły krytycznej dla pręta, którego linię ugięcia założyliśmy. W tym celu wystarczy obliczyć naprężenie krytyczne σ_{k0} ; jest ono określone wzorem (3.2.18) (ogólnie ważnym dla wszystkich przypadków wyboczenia), w którym występuje niewiadoma dotąd wartość E_0^* . Ponieważ ze wzoru (3.3.3)

$$(3.3.4) \quad E_0^* = \left[1 - \left(\frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{pl}} \right)^m \right] E,$$

to po wstawieniu do (3.2.18)

$$(3.3.5) \quad \sigma_{k0} - \left[1 - \left(\frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{pl}} \right)^m \right] \bar{\sigma}_{k0} = 0.$$

Jest to zależność uwikłana, z której mamy wyznaczyć $\sigma_{k0} = f(\bar{\sigma}_{k0})$. Wobec wysokiej wartości wykładnika m , a więc wysokiego stopnia równania, rozwiązanie ogólne jest tu niemożliwe; możemy jednak łatwo określić funkcję odwrotną $\bar{\sigma}_{k0} = f(\sigma_{k0})$, mianowicie

$$(3.3.6) \quad \bar{\sigma}_{k0} = \frac{\sigma_{k0}}{1 - \left(\frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{pl}} \right)^m},$$

wartości jej zestawień w formie tablicy i przez interpolację otrzymać σ_{k0} dla danego $\bar{\sigma}_{k0}$. W równaniu (3.3.6) występują jako parametry dwie stałe ma-

materialowe, σ_{pl} i m ; dla każdego materiału musimy zatem sporządzić osobną tablicę funkcji $\bar{\sigma}_{k0} = f(\sigma_{k0})$. W naszych rozważaniach ograniczymy się do stali St 37, odpowiadającej dość dokładnie polskiej stali 015; dla stali tej według Ylлина $\sigma_{pl} = 2370 \text{ kG/cm}^2$ oraz $m = 13$. Wprowadzimy wygodne w dalszych obliczeniach oznaczenie bezwymiarowego stosunku

$$(3.3.7) \quad \frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{pl}} = S;$$

wtedy

$$(3.3.8) \quad \bar{\sigma}_{k0} = \frac{S}{1 - S^m} \sigma_{pl},$$

a więc dla stali 015

$$(3.3.9) \quad \bar{\sigma}_{k0} = \frac{S}{1 - S^{13}} 2370 \text{ kG/cm}^2.$$

Wartości tej funkcji zebrane są w tablicy 2. Dla $S < 0,5$ można z dostateczną dokładnością przyjąć $\bar{\sigma}_{k0} = \sigma_{k0}$.

Zakres tablicy 2, mianowicie $0 \leq S \leq 1$, obejmuje wszystkie możliwe przypadki, ponieważ naprężenie krytyczne nie może nigdy przekroczyć rzeczywistej granicy plastyczności σ_{pl} , na co zwraca uwagę wielu autorów, np. [3], [5] i [11] (aczkolwiek technicznie ważne naprężenie niszczące dla prętów o bardzo małej smukłości może być znacznie wyższe od granicy plastyczności).

Obliczenie siły krytycznej dla pręta o założonej linii ugięcia w przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego nie przedstawia już teraz żadnych trudności; ze wzorów (3.2.17), (3.2.23) lub podobnych obliczamy naprężenie pozorne $\bar{\sigma}_{k0}$, a z tablicy 2 dla stali 015 lub z analogicznych tablic dla innych materiałów odczytujemy rzeczywiste naprężenie krytyczne σ_{k0} , które mnożone przez powierzchnię przekroju podstawowego F_0 daje w wyniku siłę krytyczną.

Przejdziemy teraz do określenia wymiarów pręta. W tym celu musimy założyć pewne prawo zmiany przekroju pręta wzdłuż jego osi. Rozważymy tu, technicznie najważniejsze, pręty przestrzennie równomiernie i płasko afiniczne. Jak widać z wzorów (2.12) i (2.14), wymiary takich prętów będą w zupełności określone dowolnie, zresztą, przyjętymi wymiarami przekroju podstawowego i funkcją $\kappa(x)$, którą dzięki oznaczeniu (3.2.1) zastąpimy teraz przez $\kappa(t)$. Wymiary liniowe przekroju prętów przestrzennie równomiernie afinicznych (np. średnicę, bok, przekątną itp.) można przedstawić jako iloczyn odpowiednich wymiarów przekroju podstawowego przez κ ; wymiary liniowe przekroju prętów płasko afinicznych w kierunku osi z będą stałe, a w kierunku osi y będą iloczynami odpowiednich wymiarów przekroju podstawowego przez κ . Celem naszym będzie zatem określenie funkcji $\kappa = \kappa(t)$.

Dla prętów przestrzennie równomiernie afinicznych obowiązują związki (2.14). Załóżmy, że $I_{z_0} \leq I_{y_0}$, zawsze bowiem można obrócić układ osi w ten sposób, aby powyższy warunek był spełniony. W takim razie dla prętów tych mamy stale $I_z \leq I_y$, z uwagi na stałość współczynników kształtu prze-

Tablica 2. Wartości funkcji $\bar{\sigma}_{k0} = f(\sigma_{k0})$ dla stali 015

S	σ_{k0}	$\bar{\sigma}_{k0}$	S	σ_{k0}	σ_{k0}
0,50	1185	1185	0,75	1778	1821
1	1209	1209	6	1801	1854
2	1232	1232	7	1825	1888
3	1256	1256	8	1849	1925
4	1280	1280	9	1872	1964
0,55	1304	1304	0,80	1896	2006
6	1327	1328	1	1920	2052
7	1351	1352	2	1943	2103
8	1375	1376	3	1967	2159
9	1398	1400	4	1991	2221
0,60	1422	1424	0,85	2015	2292
1	1446	1448	6	2038	2372
2	1469	1472	7	2062	2465
3	1493	1497	8	2086	2574
4	1517	1521	9	2109	2704
0,65	1541	1546	0,90	2133	2860
6	1564	1571	1	2157	3052
7	1588	1597	2	2180	3295
8	1612	1622	3	2204	3609
9	1635	1649	4	2228	4031
0,70	1659	1675	0,95	2252	4626
1	1683	1703	6	2275	5525
2	1706	1731	7	2299	7031
3	1730	1760	8	2323	10056
4	1754	1790	9	2346	19157
0,75	1778	1821	1,00	2370	∞

kroju φ . Kierunkiem niebezpiecznym ze względu na wyboczenie będzie zatem kierunek y i możemy rozpatrywać wyboczenie jedynie w płaszczyźnie xy .

W przypadku wyboczenia sprężystego

$$(3.3.10) \quad b = \frac{EI_z}{EI_{z_0}} = \alpha^4,$$

więc wprost

$$(3.3.11) \quad \alpha = \sqrt[4]{b}$$

przy czym funkcja $b = b(t)$ jest określona wzorami (3.2.19), (3.2.24) lub analogicznymi dla innych przypadków wyboczenia.

W przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego

$$(3.3.12) \quad b = \frac{E^* I_z}{E_0^* I_{z0}} = \alpha^4 \frac{E^*}{E_0^*},$$

a po podstawieniu wzoru Ylлина (3.3.3)

$$(3.3.13) \quad b = \alpha^4 \frac{1 - \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_p}\right)^m}{1 - \left(\frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{pl}}\right)^m},$$

czyli po wprowadzeniu oznaczenia (3.3.7) i po podstawieniu

$$(3.3.14) \quad \frac{\sigma_k}{\sigma_{pl}} = \frac{P_k}{F \sigma_{pl}} = \frac{P_k}{\alpha^2 F_0 \sigma_{pl}} = \frac{S}{\alpha^2}$$

otrzymujemy do obliczenia α równanie

$$(3.3.15) \quad \alpha^4 \left[1 - \left(\frac{S}{\alpha^2}\right)^m \right] - b(1 - S^m) = 0.$$

Jest to równanie algebraiczne stopnia $2m$ ze względu na α . Rozwiązanie ogólne tego równania i otrzymanie stąd poszukiwanej zależności $\alpha = f(b, m, S)$ jest niemożliwe [podobnie jak równania (3.3.5)]. Dla danych b , m i S można jednak równanie to rozwiązać ze względu na α jedną z metod przybliżonych. Podobnie jak poprzednio ograniczymy się tu do stali 015. Wtedy według Ylлина $m = 13$ i ilość parametrów równania (3.3.15) zredukujemy do dwóch:

$$(3.3.16) \quad \alpha^4 \left[1 - \left(\frac{S}{\alpha^2}\right)^{13} \right] - b(1 - S^{13}) = 0.$$

Rozwiązując to równanie dwudziestego szóstego stopnia przy różnych wartościach parametrów b i S i zestawiając wyniki otrzymujemy tablicowe przedstawienie funkcji $\alpha = f(b, S)$. Podaje je tablica 3, którą możemy posługiwać się w przypadku prętów ze stali 015 lub z innych materiałów posiadających wykładnik Ylлина $m = 13$ (na przykład ze stali St 52). Tablica ta ogranicza się do $b \leq 1$, ponieważ w praktyce z reguły przekrój podstawowy jest przekrojem największym i dalsze jej rozszerzanie, nieco żmudne, wydaje się niecelowe.

Dla prętów płasko afinicznych nie możemy na ogół określić z góry kierunku niebezpiecznego, musimy więc rozpatrzyć wyboczenie zarówno w płas-

Tablica 3. Dodatnie pierwiastki równania (3.3.16) przy różnych b i S

$\frac{S}{b}$	0	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
0	0,000	447	500	548	592	632	671	707	742	775	806	837	866	894	922	949
0,02	0,376	459	507	553	596	636	674	709	744	776	808	838	867	895	923	949
0,04	0,447	474	516	559	600	639	676	712	746	778	809	839	868	897	924	950
0,06	0,494	501	529	566	605	643	679	714	748	780	811	841	870	898	925	951
0,08	0,532	533	546	575	611	647	683	717	750	782	812	842	871	899	926	951
0,10	0,562	563	565	587	618	652	686	720	752	784	814	844	872	900	926	952
0,12	0,588	588	590	602	627	658	690	723	755	786	816	845	874	901	927	952
0,14	0,611	611	612	619	637	664	695	726	758	788	818	847	875	902	928	953
0,16	0,632	632	633	636	648	671	700	730	760	790	820	849	877	903	929	954
0,18	0,651	651	651	653	660	680	705	734	763	793	822	850	879	904	930	955
0,20	0,668	668	668	670	674	689	711	738	767	795	824	852	881	906	931	956
0,25	0,707	707	707	707	709	715	729	750	776	803	830	857	884	909	934	958
0,30	0,740	740	740	740	741	743	750	766	786	811	836	862	888	912	937	960
0,35	0,770	770	770	770	770	771	774	783	799	820	844	868	892	916	940	962
0,40	0,795	795	795	795	795	795	797	803	814	831	852	874	897	920	943	964
0,45	0,819	819	819	819	819	819	820	823	830	843	861	881	903	924	946	966
0,50	0,841	841	841	841	841	841	841	843	848	857	871	889	909	929	950	969
0,55	0,861	861	861	861	861	861	861	862	865	871	883	898	915	934	954	972
0,60	0,880	880	880	880	880	880	880	880	882	887	895	907	922	940	958	974
0,65	0,898	898	898	898	898	898	898	898	899	902	907	918	930	946	962	977
0,70	0,915	915	915	915	915	915	915	915	916	918	921	928	939	953	966	980
0,75	0,931	931	931	931	931	931	931	931	931	932	934	940	948	960	971	983
0,80	0,946	946	946	946	946	946	946	946	946	947	948	952	958	967	976	986
0,85	0,960	960	960	960	960	960	960	960	960	961	962	964	968	974	981	989
0,90	0,974	974	974	974	974	974	974	974	974	975	975	977	979	982	987	993
0,95	0,987	987	987	987	987	987	987	987	987	987	987	988	990	991	993	996
1,00	1,000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000

szczyźnie xy , jak i w płaszczyźnie xz . Wobec tego, że wymiary przekroju pręta płasko afinicznego zmieniają się tylko w płaszczyźnie xy (rys. 3), to wyboczenie w płaszczyźnie xy nazwiemy wyboczeniem w płaszczyźnie zbieżności, a wyboczenie w płaszczyźnie xz — wyboczeniem z płaszczyzny zbieżności.

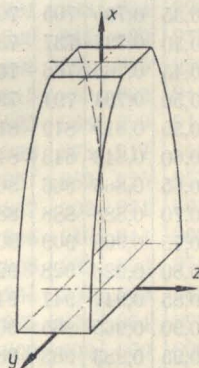
W przypadku wyboczenia sprężystego w płaszczyźnie zbieżności

$$(3.3.17) \quad b = \frac{EI_z}{EI_{z0}} = x^3,$$

więc wprost

$$(3.3.18) \quad x = \sqrt[3]{b}.$$

W przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego w płaszczyźnie zbieżności jest natomiast



Rys. 3

$$(3.3.19) \quad b = \frac{E^* I_z}{E_0^* I_{z0}} = \alpha^3 \frac{E^*}{E_0^*},$$

a ponieważ dla prętów płasko afinicznych

$$(3.3.20) \quad \frac{\sigma_k}{\sigma_{pl}} = \frac{P_k}{F \sigma_{pl}} = \frac{P_k}{\alpha F_0 \sigma_{pl}} = \frac{S}{\alpha},$$

więc korzystając ze wzoru (3.3.3) Ylinena otrzymujemy do obliczenia α równanie

$$(3.3.21) \quad \alpha^3 \left[1 - \left(\frac{S}{\alpha} \right)^m \right] - b(1 - S^m) = 0.$$

Ograniczając się do stali 015 i podstawiając $m = 13$ mamy

$$(3.3.22) \quad \alpha^3 \left[1 - \left(\frac{S}{\alpha} \right)^{13} \right] - b(1 - S^{13}) = 0.$$

Pierwiastki tego równania podaje tablica 4.

Tablica 4. Dodanie pierwiastki równania (3.3.22) przy różnych b i S

$S \backslash b$	0	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
0	0,000	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0,02	0,271	273	288	322	365	412	459	506	555	604	654	703	753	802	852	901
0,04	0,342	342	344	356	385	424	469	514	561	609	658	706	756	805	854	903
0,06	0,391	391	391	395	410	440	479	522	568	614	662	710	759	807	856	904
0,08	0,431	431	431	432	439	459	491	531	574	619	666	714	762	810	858	906
0,10	0,464	464	464	464	467	480	505	540	581	625	670	717	765	812	860	907
0,12	0,493	493	493	493	495	502	521	551	589	631	675	721	768	815	862	909
0,14	0,519	519	519	519	520	524	538	563	598	637	680	725	771	817	864	910
0,16	0,543	543	543	543	544	546	555	576	607	644	685	729	774	820	866	912
0,18	0,565	565	565	565	565	567	573	590	617	651	690	733	778	823	868	913
0,20	0,585	585	585	585	585	586	591	604	627	658	696	738	782	826	871	915
0,25	0,630	630	630	630	630	630	633	639	654	679	712	750	791	833	876	919
0,30	0,669	669	669	669	669	669	671	674	683	702	729	762	801	841	882	924
0,35	0,705	705	705	705	705	705	706	707	713	726	747	776	812	850	889	928
0,40	0,737	737	737	737	737	737	737	738	742	751	767	792	824	859	896	932
0,45	0,766	766	766	766	766	766	766	767	770	776	788	808	836	868	903	937
0,50	0,794	794	794	794	794	794	794	794	796	800	809	825	849	878	910	942
0,55	0,819	819	819	819	819	819	819	819	820	824	830	842	863	888	917	947
0,60	0,843	843	843	843	843	843	843	843	844	847	851	860	877	899	925	952
0,65	0,866	866	866	866	866	866	866	866	866	869	872	879	892	910	933	958
0,70	0,888	888	888	888	888	888	888	888	888	890	892	897	907	922	942	963
0,75	0,909	909	909	909	909	909	909	909	909	910	912	915	923	935	951	969
0,80	0,928	928	928	928	928	928	928	928	928	928	928	930	933	939	948	960
0,85	0,947	947	947	947	947	947	947	947	947	947	947	948	950	954	961	970
0,90	0,965	965	965	965	965	965	965	965	965	965	965	965	967	970	974	980
0,95	0,983	983	983	983	983	983	983	983	983	983	983	983	984	985	987	990
1,00	1,000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000

W przypadku wyboczenia sprężystego z płaszczyzny zbieżności

$$(3.3.23) \quad x = b.$$

W przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego z płaszczyzny zbieżności otrzymujemy natomiast do rozwiązania równanie

$$(3.3.24) \quad x \left[1 - \left(\frac{S}{x} \right)^m \right] - b(1 - S^m) = 0,$$

które dla stali 015, przy założeniu $m=13$, sprowadza się do postaci

$$(3.3.25) \quad x \left[1 - \left(\frac{S}{x} \right)^{13} \right] - (1 - S^{13}) = 0.$$

Dodatnie pierwiastki tego równania trzynastego stopnia ze względu na x podaje tablica 5.

Tablica 5. Dodatnie pierwiastki równania (3.3.25) przy różnych b i S

$S \backslash b$	0	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
0	0,000	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900
0,02	0,020	202	252	301	351	401	451	501	551	601	651	701	751	801	851	901
0,04	0,040	203	253	303	353	403	453	503	553	603	653	703	753	803	852	902
0,06	0,060	205	255	305	355	405	455	505	555	605	655	705	755	805	854	904
0,08	0,080	207	257	307	357	407	457	507	557	607	657	707	756	806	856	905
0,10	0,100	210	260	309	359	409	459	509	559	608	658	708	758	808	857	906
0,12	0,120	213	262	312	361	411	461	511	560	610	660	710	760	809	859	907
0,14	0,140	217	265	314	364	413	463	513	562	612	662	712	762	811	860	908
0,16	0,160	222	268	317	366	416	465	515	565	614	664	714	764	813	862	910
0,18	0,180	227	273	320	369	418	467	517	567	617	666	716	766	815	864	911
0,20	0,200	234	277	324	372	420	470	519	569	619	668	718	768	817	865	913
0,25	0,250	260	291	334	380	428	477	526	575	625	674	723	772	821	869	916
0,30	0,300	302	316	350	392	438	485	534	582	631	680	729	778	826	874	920
0,35	0,350	351	354	372	408	450	495	542	590	638	687	736	784	832	879	924
0,40	0,400	400	401	408	430	466	508	553	600	647	695	743	791	838	884	928
0,45	0,450	450	450	452	462	488	525	566	611	657	704	751	798	844	889	932
0,50	0,500	500	500	501	505	520	546	582	624	668	714	760	806	851	895	936
0,55	0,550	550	550	550	552	559	575	604	641	682	726	770	815	859	902	941
0,60	0,600	600	600	600	601	603	612	632	662	699	740	781	825	868	909	946
0,65	0,650	650	650	650	650	651	655	667	688	720	756	796	838	878	917	951
0,70	0,700	700	700	700	700	700	702	708	722	746	776	813	851	889	925	957
0,75	0,750	750	750	750	750	750	751	754	762	778	801	832	867	902	934	963
0,80	0,800	800	800	800	800	800	800	802	807	816	831	856	886	916	944	969
0,85	0,850	850	850	850	850	850	850	851	853	858	868	885	908	932	956	976
0,90	0,900	900	900	900	900	900	900	901	901	904	909	919	934	951	969	984
0,95	0,950	950	950	950	950	950	950	950	951	951	954	958	965	974	984	992
1,00	1,000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000

Dzięki tablicom od 2 do 5 możemy z łatwością obliczyć siłę krytyczną i wymiary pręta przestrzennie równomiernie lub płasko afinicznego, wykonanego ze stali 015 i poddanego wyboczeniu sprężysto-plastycznemu. W przypadku prętów wykonanych z innych materiałów należałoby sporządzić tablice analogiczne.

3.4. Przykłady stosowania wyprowadzonych wzorów i tablic. Zanim przejdziemy do zasadniczego zastosowania metody «założenia równania ścisłego», jakim jest obliczenie siły krytycznej dla prętów niepryzmatycznych, podanych wyboczeniu sprężysto-plastycznemu, podamy kilka przykładów «pobocznego» zastosowania tej metody. Sprawdzimy, mianowicie, kilka równań linii ugięcia, stosowanych najczęściej przy posługiwaniu się metodą Ritza-Timoszenki.

Założmy najpierw dla pierwszego przypadku wyboczenia (rys. 2)

$$(3.4.1) \quad y = \delta \cos \frac{\pi x}{2l} = \delta \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Jak wiadomo, jest to równanie linii ugięcia pręta pryzmatycznego, ściśle w przypadku ugięć nieskończenie małych, jakimi wyłącznie się zajmujemy. Ze wzoru (3.2.6) wynika więc, że

$$(3.4.2) \quad f(t) = \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Korzystając ze wzorów (3.2.9 i (3.2.19) otrzymujemy

$$(3.4.3) \quad P_k = -\frac{B_0}{l^2} \left(-\frac{\pi^2}{4} \cos 0 \right) = \frac{\pi^2 B_0}{4l^2},$$

$$(3.4.4) \quad b = \frac{-\frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} t}{-\frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} t} = 1.$$

Zgodnie z przewidywaniami otrzymaliśmy w wyniku pręt pryzmatyczny i wzór Eulera-Kármána.

Weźmiemy teraz pod uwagę funkcję, której druga pochodna zmienia się liniowo,

$$(3.4.5) \quad y'' = C \left(1 - \frac{x}{l} \right) = C(1 - t),$$

i założmy, że przedstawia ona równanie linii ugięcia pewnego pręta. Jest to jedno z najczęściej używanych równań przybliżonych dla pierwszego

przypadku wybożenia. Po scałkowaniu i uwzględnieniu warunków brzegowych

$$(3.4.6) \quad y = C \left(-\frac{1}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right),$$

a ponieważ $y(0) = \delta$, więc $C = -3\delta$, i ostatecznie

$$(3.4.7) \quad y = \delta \left(1 - \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{2} \right) = \delta f(t).$$

Ze wzorów (3.2.9) i (3.2.19) otrzymamy teraz siłę krytyczną i wymiary pręta:

$$(3.4.8) \quad P_k = -\frac{B_0}{l^2} f''(0) = \frac{3B_0}{l^2},$$

$$b = \frac{2 - 3t^2 + t^3}{2 - 2t},$$

lub po uproszczeniu

$$(3.4.9) \quad b = 1 + t - \frac{t^2}{2}.$$

Przyjmijmy, że pręt jest prętem przestrzennie równomiernie afinicznym o przekroju kołowym. Przy założeniu wybożenia sprężystego obowiązuje wzór (3.3.11). Przyjmując x za stosunek średnicy bieżącego przekroju pręta do średnicy przekroju podstawowego (utwierdzonego) otrzymujemy

$$(3.4.10) \quad d = d_0 \sqrt[4]{1 + t - \frac{t^2}{2}}.$$

Wymiary pręta przy założeniu $d_0 = 1$ podaje tablica 6. Jest to więc pręt, którego najmniejszy przekrój jest przekrojem utwierdzonym. Największe odchylenie od wymiarów pręta przyzmatycznego o średnicy $d = 1$ wynosi 10,7%, jest więc dość duże. Błąd, jaki popełniamy przy podstawieniu równania (3.4.7), jako przybliżonego równania linii ugięcia pręta przyzmatycznego, do wzoru Ritza-Timoszenki (3.1.2), wynosi 1,32%.

Tablica 6. Wymiary pręta o równaniu linii ugięcia (3.4.7) przy wybożeniu

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
b	1	1,095	1,180	1,255	1,320	1,375	1,420	1,455	1,480	1,495	1,500
d	1	1,023	1,042	1,058	1,072	1,083	1,092	1,098	1,103	1,106	1,107

Przy założeniu wybożenia sprężysto-plastycznego wymiary pręta będą mniejsze od podanych w tablicy 6 z nieznacznymi różnicami. Wymiarów tych

nie można otrzymać bezpośrednio z tablicy 3, ponieważ nie obejmuje ona zakresu $b > 1$. Jednak prętów takich (o najmniejszym przekroju utwierdzonym) w praktyce na ogół się nie stosuje i rozbudowanie tablicy 3 jest właściwie niepotrzebne, jak to stwierdziliśmy poprzednio.

Dla prętów dwuprzegubowych często zakłada się równanie linii ugięcia w postaci wielomianu trygonometrycznego, na przykład

$$(3.4.11) \quad y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Potraktujemy równość (3.4.11) za ścisłą i obliczymy wymiary pręta oraz siłę krytyczną. Po sprowadzeniu do postaci (3.2.6) będzie to równanie z jednym parametrem. Przyjmując na przykład $a_1 = \delta$ i $a_2 = a\delta$ i stosując oznaczenie (3.2.1) mamy

$$(3.4.12) \quad y = \delta(\sin \pi t + a \sin 2\pi t).$$

Ze wzoru (3.2.21) otrzymujemy

$$(3.4.13) \quad P_k = \frac{1 + 8a}{1 + 2a} \frac{\pi^2 B_0}{l^2},$$

a ze wzoru (3.2.24) określamy sztywność pręta

$$(3.4.14) \quad b = \frac{(1 + 8a)(\sin \pi t + a \sin 2\pi t)}{(1 + 2a)(\sin \pi t + 4a \sin 2\pi t)}.$$

Przyjmijmy $a = 0,5$ i podstawmy $t = 0,75$:

$$b(0,75) = \frac{5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right)}{2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right)} = -0,400.$$

Sztywność pręta, dla którego założyliśmy równanie linii ugięcia w postaci (3.4.12), przy przyjęciu wartości parametru $a = 0,5$ musiałaby być zatem w pewnych przedziałach ujemna. Jest to, oczywiście, pozbawione fizycznego sensu, zatem posługiwanie się równaniem (3.4.12) przy tej wartości parametru nie może prowadzić do prawidłowych wyników.

Dla ustalenia przedziału, z którego można wybierać wartości parametru a w równaniu (3.4.12), aby sens fizyczny metody Ritz-Timoszenki był zachowany, musimy rozwiązać nierówność $b > 0$, przy czym b jest określone wzorem (3.4.14). Nierówność ta ma obowiązywać dla każdego t z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. W wyniku otrzymujemy $-1/8 < a < 1/8$, przeto stosowność wzoru (3.4.12) jest ograniczona do takiego zakresu zmienności parametru a . Przy posługiwaniu się wielomianami trygonometrycznymi, jako przybliżo-

nymi równaniami linii ugięcia, należy zatem zachować szczególną ostrożność, by nie zatracić fizycznego sensu metody.

Bardzo interesujący przykład zastosowania metody Ritza-Timoszenki podaje Mutermilch, [8]. Dla obliczenia ugięć skończonych jednostronnie utwierdzonego idealnie sprężystego pręta pryzmatycznego, ścisłanego osiowo i mimośrodowo siłą skupioną, założono tam łuk koła jako przybliżoną postać linii ugięcia. Zajmiemy się teraz określeniem kształtu pręta, dla którego równanie łuku koła byłoby ścisłym równaniem linii ugięcia.

Ponieważ zajmiemy się ugięciami skończonymi, to wzory wyprowadzone w p. 3.2 przy założeniu ugięć nieskończenie małych nie mogą znaleźć zastosowania. Jednak wyprowadzenie analogicznych wzorów dla ugięć skończonych nie sprawi trudności, jeżeli linią ugięcia ma być łuk koła o promieniu r . Zamiast równania (3.2.5) będziemy tu mieli

$$(3.4.15) \quad -\frac{1}{r} + \frac{P}{bB_0} y = 0,$$

a jeżeli przez s oznaczymy zmienną mierzoną po łuku koła, to z rys. 4 widać, że

$$(3.4.16) \quad \delta = r - r \cos \frac{l}{r},$$

$$(3.4.17) \quad y = \delta - r + r \cos \frac{s}{r} = r \left(\cos \frac{s}{r} - \cos \frac{l}{r} \right).$$

Po wstawieniu (3.4.17) do (3.4.15) otrzymujemy

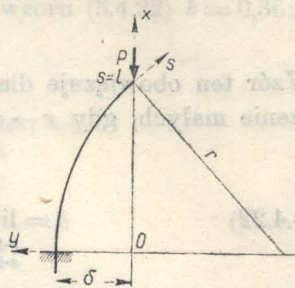
$$(3.4.18) \quad \frac{Pr^2}{bB_0} \left(\cos \frac{s}{r} - \cos \frac{l}{r} \right) = 1.$$

Równanie to ma być spełnione dla każdej wartości zmiennej s . Zakładając $s=0$ otrzymujemy stąd zależność $P=f(r)$:

$$(3.4.19) \quad P = \frac{B_0}{r^2 \left(1 - \cos \frac{l}{r} \right)}.$$

Wartość siły krytycznej obliczymy z warunku $r \rightarrow \infty$:

$$(3.4.20) \quad P_k = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{B_0}{r^2 \left(1 - \cos \frac{l}{r} \right)} = \frac{2B_0}{l^2},$$



Rys. 4

natomiast kształt pręta, określony tym razem funkcją $b = b(s)$, otrzymamy przez podstawienie (3.4.19) do (3.4.18):

$$(3.4.21) \quad b = \frac{\cos \frac{s}{r} - \cos \frac{l}{r}}{1 - \cos \frac{l}{r}}$$

Wzór ten obowiązuje dla ugięć skończonych, natomiast dla ugięć nieskończenie małych, gdy $r \rightarrow \infty$ i $s \rightarrow x$, otrzymujemy w granicy

$$(3.4.22) \quad b = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ s \rightarrow x}} \frac{\cos \frac{s}{r} - \cos \frac{l}{r}}{1 - \cos \frac{l}{r}} = 1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 = 1 - t^2.$$

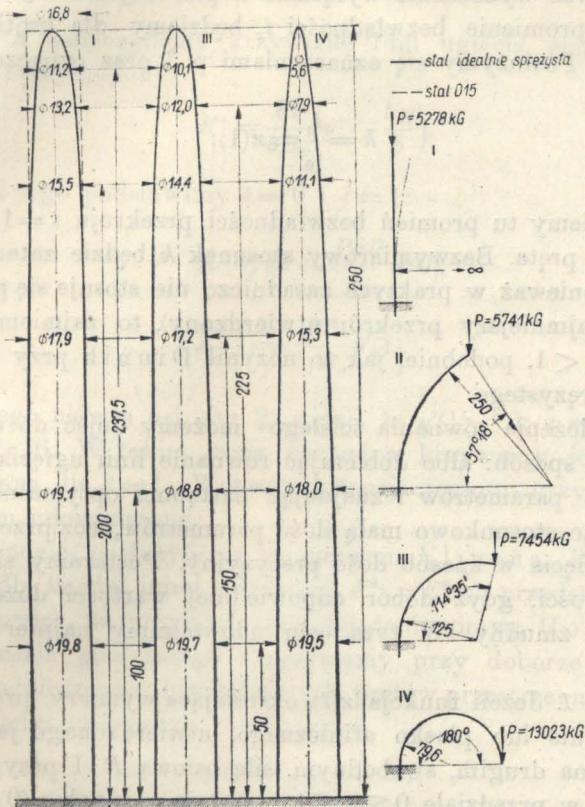
Podstawiając do równania (3.4.21) różne wartości r otrzymujemy w wyniku różne zależności $b = b(s)$. Różne pręty ugną się po łukach kół o różnych promieniach, zatem równania (3.4.19) nie można traktować jako zależności między siłą i promieniem krzywizny dla tego samego pręta. Zakładając pewne r otrzymujemy z (3.4.19) wartość siły P , która spowoduje ugięcie po łuku koła o tym promieniu, ale tylko w przypadku pręta, którego sztywność określa wzór (3.4.21), po podstawieniu doń tej samej wartości r . Zauważmy wreszcie, że dla omawianych prętów nie znamy siły krytycznej [z wyjątkiem pręta (3.4.22)], ale znamy jedynie siłę, która wywoła ugięcie pręta po łuku koła.

Weźmy pod uwagę liczbowe dane. Załóżmy, że rozpatrywane pręty są prętami przestrzennie równomiernie afinicznymi o długości $l = 25$ cm i o przekrojach kołowych; niech $d_0 = 2$ cm. Jako materiał przyjmijmy stal o module Younga $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm². Załóżmy dalej, że pręty wybaczą się po łukach kół o promieniach $r = 25/\pi$ cm (półkoło), 12,5 cm, 25 cm i, w granicy, ∞ . Przy przyjęciu idealnej sprężystości stali odpowiednie wartości sił obliczymy ze wzorów (3.4.19) i (3.4.20), a poszczególne średnice prętów ze wzorów (3.4.21) i (3.4.22) oraz (3.3.11). Rysunek 5 przedstawia kształty trzech spośród tych prętów oraz podaje schematy wszystkich czterech prętów, poddanych działaniu siły P wywołującej ugięcie po łuku koła.

Jeżeli materiałem pręta ma być stal «rzeczywista», na przykład stal 015, to będzie można rozważyć jedynie przypadek ugięć nieskończenie małych, czyli przypadek $r \rightarrow \infty$. Podstawiając tym razem do wzoru (3.4.20) $B_0 = EI_0$ otrzymamy tylko pozorną wartość siły krytycznej, którą oznaczymy przez \bar{P}_k ; dla obliczenia wartości rzeczywistej będziemy musieli skorzystać z tablicy 2. Mamy, mianowicie, $\bar{P}_k = 5278$ kG, a ponieważ $F_0 = \pi$ cm², więc $\bar{\sigma}_{k0} = \bar{P}_k/F_0 = 1680$ kG/cm². Z tablicy 2 otrzymujemy, interpolując, $\sigma_{k0} = 1663$ kG/cm², stąd rzeczywista wartość siły krytycznej $P_k = 1663 \pi = 5230$ kG. Siła kry-

tyczna jest tu więc nieco niższa niż w przypadku pręta idealnie sprężystego, sam pręt natomiast, jak zobaczymy zaraz, wypadnie grubszy.

Wymiary pręta określimy posługując się tablicą 3. W tym celu obliczamy $S = 1663 : 2370 = 0,702$ (lub interpolujemy tę wartość z tablicy 2) i dla obliczonych ze wzoru (3.4.22) wartości b odczytujemy z tablicy 3 odpowiednie wartości α . Na przykład dla $t = 0,8$ ze wzoru (3.4.22) $b = 0,36$;



Rys. 5. Pręty, których linia ugięcia przy wyobczeniu jest łukiem koła

z tablicy 3 odczytujemy (dwukrotnie interpolując) $\alpha = 0,870$, a więc średnica pręta dla tej wartości t wyniesie $d = \alpha d_0 = 0,870 \cdot 2 = 1,740 \text{ cm}$. W ten sposób uzyskany zarys pręta został oznaczony na rys. 5 linią przerywaną.

Rysunek 5 wskazuje wyraźnie, że pręty, dla których łuk koła będzie linią ugięcia przy wyobczeniu, odbiegają znacznie swymi kształtami od pryzmatycznych. Stosunkowo dokładne wyniki, jakie otrzymał w swej pracy Mutermilch, [8], osiągnięto jedynie dzięki umiejętnemu wprowadzeniu pewnej poprawki w obliczeniach.

4. Wyboczenie sprężysto-plastyczne prętów zbieżnych

4.1. Wyboczenie sprężysto-plastyczne jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych. Zastosujemy teraz metodę «założenia równania ścisłego» do obliczenia siły krytycznej dla prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych, podlegających wyboczeniu sprężysto-plastycznemu. Jak zwykle przyjmiemy układ osi w ten sposób (rys. 2), aby $I_{z_0} \leq I_{y_0}$, co pozwoli rozpatrywać wyboczenie wyłącznie w płaszczyźnie xy . Momenty bezwładności I_x i promienie bezwładności i_x będziemy dla krótkości oznaczać przez I oraz i . Posłużymy się oznaczeniami p. 3 oraz oznaczeniem

$$(4.1.1) \quad k = \frac{i_1}{i_0} = \alpha(1);$$

przez i_1 rozumiemy tu promień bezwładności przekroju $t=1$, tzn. na swobodnym końcu pręta. Bezwymiarowy stosunek k będzie zatem miarą zbieżności pręta. Ponieważ w praktyce zasadniczo nie stosuje się prętów o zbieżności $k > 1$ (najmniejszy przekrój utwierdzony), to zajmiemy się jedynie przypadkiem $k < 1$, podobnie, jak to uczynił Dinnik przy rozpatrywaniu wyboczenia sprężystego.

Metodą «założenia równania ścisłego» możemy dojść do dobrych wyników w dwojaki sposób: albo dobierając równanie linii ugięcia o dużej ilości nieoznaczonych parametrów i znajdując następnie optymalne ich wartości, albo przyjmując stosunkowo małą ilość parametrów, lecz przewidując z góry kształt linii ugięcia w sposób dość precyzyjny. Postaramy się obrać drugą z tych możliwości, gdyż dobór odpowiedniej wartości dużej liczby parametrów byłby żmudny. W tym celu udowodnimy najpierw następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja $\alpha(t)$, określająca wymiary pręta przestrzennie równomiernie lub płasko afinicznego, utwierdzonego jednym końcem i obciążonego na drugim, swobodnym, siłą osiową P (I przyp. wyboczenia) jest klasy $C^{(1)}$ w przedziale $0 \leq t \leq 1$ i spełnia warunek $\alpha'(0) < 0$, to krzywizna osi pręta ugiętego osiąga wartość maksymalną w pewnym punkcie t_m leżącym wewnątrz przedziału $(0, 1)$.

Dowód. Z równań (3.3.15), (3.3.21) i (3.3.24) można wyrazić b w postaci ogólnej

$$(4.1.2) \quad b = \frac{\alpha^{n_1}}{1 - S^m} \left[1 - \left(\frac{S}{\alpha^{n_2}} \right)^m \right],$$

gdzie $n_1 = 4, 3, 1$ oraz $n_2 = 2, 1, 1$ odpowiednio dla prętów przestrzennie równomiernie afinicznych oraz dla prętów płasko afinicznych przy wyboczeniu w płaszczyźnie i z płaszczyzny zbieżności. Różniczkując równanie (4.1.2) względem t i oznaczając dla skrótowania $db/dt = b'$ oraz $d\alpha/dt = \alpha'$, otrzymujemy

$$(4.1.3) \quad b' = \left(\frac{n_1 b}{z} + \frac{m n_2 S^m}{1 - S^m} z^{n_1 - m n_2 - 1} \right) z',$$

skąd jest rzeczą widoczną, że pochodne b' i z' są tego samego znaku. Z zasadniczego równania zginania (3.2.5), napisanego w postaci ścisłej

$$(4.1.4) \quad K = \frac{Pl^2 y}{b B_0},$$

gdzie przez K oznaczyliśmy krzywiznę linii ugięcia pisząc dla krótkości $dK/dt = K'$ otrzymujemy

$$(4.1.5) \quad K' = \frac{Pl^2}{b B_0} \left(y' - \frac{b' y}{b} \right).$$

Do równania tego podstawimy $t = 0$ i $t = 1$:

$$(4.1.6) \quad K'(0) = - \frac{P \delta l^2}{B_0} b'(0),$$

$$(4.1.7) \quad K'(1) = \frac{Pl^2}{b_1 B_0} y'(1).$$

Z przyjętego układu osi (rys. 2) widać, że $y'(1) < 0$; z założenia i z (4.1.3) wynika $b'(0) < 0$. W takim razie pochodna krzywizny jest dodatnia dla $t = 0$, a ujemna dla $t = 1$. Wobec założonej ciągłości krzywizny twierdzenie jest zatem udowodnione.

Przy dowodzie posłużyliśmy się prawem Ylinena. Pozostaje on jednak w mocy dla każdej innej zależności $E^* = E^*(\sigma)$, przedstawionej funkcją nierosnącą, a więc, na przykład, przy założeniu prawa Hooke'a.

Z twierdzenia powyższego skorzystamy przy doborze równania linii ugięcia dla jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych. Mamy tu bowiem

$$(4.1.8) \quad z(t) = 1 - (1 - k)t,$$

$$(4.1.9) \quad z'(0) = -(1 - k),$$

więc, z uwagi na ograniczenie naszych rozważań do przypadku $k < 1$, założenia twierdzenia 1 są spełnione.

Dobór bezpośredni odpowiedniego równania linii ugięcia byłby trudny z uwagi na stosunkowo dużą ilość narzuconych warunków. Dobierzemy więc najpierw drugą pochodną (krzywiznę), a następnie przez scałkowanie uzyskamy samą linię ugięcia. Krzywizna musi spełniać warunki wynikające z twierdzenia 1, mianowicie $K'(0) > 0$ oraz $K'(1) < 0$. Wiadomo również, że $K(0) \neq 0$, a $K(1) = 0$, gdy chcemy otrzymać pręt o różnej od zera sztywności przekroju swobodnego. Nie wiemy natomiast, w jakim punkcie wystąpi maksimum krzywizny, o którym mówi twierdzenie 1, i musimy

dobrac taką funkcję, aby przy odpowiednim doborze wartości parametrów mogła osiągać maksimum w całym przedziale $(0, 1)$. Funkcją taką będzie, na przykład, funkcja

$$(4.1.10) \quad K = C(1 + at)(1 - t^n)$$

o dwóch nieoznaczonych parametrach a i n , spełniających warunki $a > 0$ oraz $n > 1$; dodatnią stałą C wyznaczmy z warunków brzegowych. Ponieważ z przyjętego układu osi wynika, że $K = -y''$ (przy założeniu ugięć nieskończenie małych), więc całkowaniu ulega równanie

$$(4.1.11) \quad y'' = -C(1 + at)(1 - t^n).$$

Po scałkowaniu i uwzględnieniu warunków $y'(0) = 0$ oraz $y(0) = \delta$ mamy

$$(4.1.12) \quad y = -C \left(\frac{t^2}{2} + \frac{at^3}{6} - \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{at^{n+3}}{(n+2)(n+3)} \right) + \delta,$$

a z warunku $y(1) = 0$ obliczymy stałą C :

$$(4.1.13) \quad C = \frac{6\delta(n+1)(n+2)(n+3)}{(a+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6a(n+1) - 6(n+3)}.$$

Wstawiając (4.1.13) do (4.1.12) otrzymujemy ostatecznie równanie linii ugięcia w postaci (3.2.6), mianowicie

$$(4.1.14) \quad y = \delta \left[1 - \frac{(at+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6at^{n+1}(n+1) - 6t^n(n+3)}{(a+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6a(n+1) - 6(n+3)} t^2 \right].$$

Wartość pozornego współczynnika stateczności otrzymamy teraz ze wzoru (3.2.11):

$$(4.1.15) \quad \bar{J} = \frac{24(n+1)(n+2)(n+3)}{(a+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6a(n+1) - 6(n+3)}.$$

Pozorna wartość naprężenia krytycznego w przekroju podstawowym wyniesie

$$(4.1.16) \quad \bar{\sigma}_{k0} = \bar{J} \frac{E}{\lambda_0^2}.$$

Korzystając z tablicy 2 w przypadku prętów ze stali 015 lub z analogicznych tablic opracowanych dla innych materiałów, możemy już bez trudu znaleźć rzeczywistą wartość naprężenia krytycznego σ_{k0} , a więc również siłę krytyczną.

Podstawiając (4.1.14) do (3.2.19) otrzymujemy

$$(4.1.17) \quad b = \frac{1 - \frac{(at+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6at^{n+1}(n+1) - 6t^n(n+3)}{(a+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6a(n+1) - 6(n+3)} t^2}{(1+at)(1-t^n)}$$

Wzór ten określa b dla każdej wartości t różnej od 1; b_1 obliczymy ze wzoru (3.2.20); po wstawieniu i uproszczeniu

$$(4.1.18) \quad b_1 = \frac{3(n+3)[(a+2)(n+1)(n+2) - 2a(n+1) - 2(n+2)]}{n(a+1)[(a+3)(n+1)(n+2)(n+3) - 6a(n+1) - 6(n+3)]}$$

Znając b dla poszczególnych wartości zmiennej t możemy dla tych samych t odczytać z tablicy 3 odpowiednie wartości α , a tym samym określić kształt pręta.

Wobec posiadania gotowych tablic 2 do 5 ograniczymy nasze rozważania do prętów ze stali 015, co nie przeszkadza rozszerzeniu tych rozważań również na inne materiały po opracowaniu, oczywiście, odpowiednich tablic.

Dochodzimy teraz do następującego zagadnienia: dany jest pręt przestrzennie równomiernie zbieżny (znamy więc charakteryzujące go wielkości k i λ_0). Czy można się posłużyć wyprowadzonymi równaniami do określenia siły krytycznej dla tego pręta, a jeśli tak, to w jaki sposób dobrać odpowiednie wartości parametrów a i n ? Inaczej mówiąc, w jaki sposób dobrać a i n , aby wyznaczony z równań (4.1.17), (4.1.18) i z tablicy 3 kształt pręta możliwie najmniej odbiegał od kształtu pręta danego?

Odpowiedź na tak postawione pytania byłaby trudna, a obliczenie optymalnej wartości parametrów bezpośrednio z warunku (3.1.5) jest nawet teoretycznie niemożliwe, ponieważ przy wyboczeniu sprężysto-plastycznym nie można określić sztywności pręta B , dopóki nie jest znana siła krytyczna. Dobór tych wartości mógłby nastąpić przy pomocy prób, ale należy wątpić, czy w ten sposób uzyskane rozwiązanie mogłoby być całkowicie wykorzystane w praktyce inżynierskiej.

Obierzemy zatem inną drogę, wymagającą większego jednorazowego nakładu pracy, ale prowadzącą do wyników, które dadzą się bezpośrednio stosować w praktyce. Będziemy, mianowicie, zakładali z góry pewne wartości parametrów a i n , a następnie dobierali λ_0 i k w ten sposób, aby uzyskany pręt możliwie najmniej odbiegał od pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego. Takie postępowanie będzie znacznie łatwiejsze od poprzedniego. W ten sposób uzyskamy wartości naprężeń krytycznych σ_{k0} i współczynników stateczności ϑ , tzn. również sił krytycznych, dla szeregu prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych (w przybliżeniu), o zupełnie, zresztą, przypadkowych wartościach λ_0 i k . Po dokonaniu odpowiednio dużej liczby przeliczeń będziemy mogli drogą interpolacji otrzymać σ_{k0} oraz ϑ również dla innych, pośrednich, wartości λ_0 i k . Uzyskane wyniki można zebrać w tablice i wykresy, aby umożliwić korzystanie z nich w każdym przypadku bez dodatkowych przeliczeń.

Postępowanie uwidoczni się najlepiej na przykładzie. Założmy wartości parametrów $n=5$ oraz $a=1$. Ze wzorów (4.1.17) i (4.1.18) obliczamy $b(0,5) = 0,527$ oraz $b(1) = 0,191$; pamiętamy również, że $b(0) = 1$, co jest

oczywiste według oznaczeń (3.2.1) i (3.2.2). Przyjmując wartość S mogli-
 byśmy teraz z tablicy 3 odczytać odpowiednie wartości $\kappa(0,5)$ i $\kappa(1)$. Dla
 pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego wartości te powinny spełniać
 równanie

$$(4.1.19) \quad \kappa(0,5) = \frac{\kappa(0) + \kappa(1)}{2} = \frac{1 + \kappa(1)}{2}.$$

Wyberzemy jednak drogę odwrotną: założymy, mianowicie, że ma być
 spełniony warunek (4.1.19) i z tablicy 3 dobierzemy wartość S , dla której
 warunek ten zachodzi. Łatwo przekonać się, że w danym przypadku war-
 tością taką jest $S = 0,441$, bowiem przy tej wartości S i przy podanych
 wyżej b możemy — stosując dwukrotną interpolację — odczytać z tablicy 3
 $\kappa(0,5) = 0,852$ oraz $\kappa(1) = 0,704$. W istocie zatem warunek (4.1.19) jest speł-
 niony. Nasuwa się jednak pytanie, w jaki sposób można szybko znaleźć S
 o takiej własności. Jest to łatwe o tyle, że, jak wynika z tablicy 3, dla
 większych wartości b a małych S , κ zależy jedynie od b . Tak, na przykład,
 dla $b = 0,527$ otrzymujemy przez interpolację $\kappa = 0,852$ dla wszystkich S
 mniejszych od około 0,5. Zakładając $\kappa(0,5) = 0,852$ możemy obliczyć z wa-
 runku (4.1.19)

$$(4.1.20) \quad \kappa(1) = 2\kappa(0,5) - 1,$$

czyli w naszym przypadku $\kappa(1) = 0,704$. Ponieważ znamy $b(1) = 0,191$, więc
 z tablicy 3 można odczytać odpowiednią wartość S , mianowicie $S = 0,441$.
 Otrzymaliśmy $S < 0,5$, więc dla $b = 0,527$ w istocie $\kappa = 0,852$, jak przewi-
 dywaliśmy. Gdyby natomiast $\kappa(0,5)$ uległo pewnej zmianie, co się zresztą
 zdarza rzadko, to należałoby również nieco zmienić (powiększyć) S , aby
 warunek (4.1.19) był spełniony.

Dla upewnienia się dodatkowo, o ile otrzymany pręt zbliża się kształtem
 do przestrzennie równomiernie zbieżnego, obliczmy jeszcze $\kappa(0,25)$ i $\kappa(0,75)$.
 Ponieważ zmiana κ powinna być liniowa, to powinniśmy otrzymać

$$\kappa(0,25) = \frac{\kappa(0) + \kappa(0,5)}{2} = \frac{1 + 0,852}{2} = 0,926,$$

$$\kappa(0,75) = \frac{\kappa(0,5) + \kappa(1)}{2} = \frac{0,852 + 0,704}{2} = 0,778.$$

Ze wzoru (4.1.17) mamy $b(0,25) = 0,757$ oraz $b(0,75) = 0,333$; z tablicy 3
 przy założeniu $S = 0,441$ odczytujemy $\kappa(0,25) = 0,933$ oraz $\kappa(0,75) = 0,765$.
 Różnice wynoszą 0,007 jako nadmiar dla $t = 0,25$ i 0,013 jako niedomiar
 dla $t = 0,75$ — są więc nieznaczne, jak na jedyne błędy w obliczeniu. Od-

chylenia takie może zresztą posiadać również sam pręt wskutek pewnych niedokładności obróbki. Poza tym są to odchylenia o znakach przeciwnych, a więc w pewnym stopniu nawzajem się znoszące. Łatwo się przekonać, iż dla innych wartości t odchylenia nie będą większe.

Należy jednak zbadać, jakie odchylenia zwiększają bezpieczeństwo, a jakie je zmniejszają. Jeżeli dla pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego ma α przy pewnym t przybrać określoną wartość, gdy tymczasem pręt, którego siłę krytyczną obliczyliśmy, ma mniejszą wartość α dla tej samej wartości t (błąd przez niedomiar), to oznacza to, że w rzeczywistości siła krytyczna dla pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego jako grubszego jest nie mniejsza niż siła obliczona dla pręta cieńszego; błędy zwiększają zatem bezpieczeństwo. Stąd, oczywiście, wynika, że błędy popełniane wskutek nadmiarów zmniejszają bezpieczeństwo.

Obliczymy jeszcze naprężenie krytyczne σ_{k0} , współczynnik stateczności ϑ i smukłość «dolną» dla rozpatrywanego pręta. Z (3.3.7) otrzymujemy wprost $\sigma_{k0} = S\sigma_{pl} = 0,441 \cdot 2370 = 1045 \text{ kG/cm}^2$. Z (4.1.15) obliczamy teraz pozorny współczynnik stateczności uzyskując $\bar{\vartheta} = 6,40$. Rzeczywisty współczynnik stateczności uzyskamy najłatwiej ze wzoru

$$(4.1.21) \quad \vartheta = \bar{\vartheta} \frac{\sigma_{k0}}{\sigma_{k0}}$$

Wartość $\bar{\sigma}_{k0}$ dla danego σ_{k0} znajdziemy w tablicy 2; w danym przypadku $\bar{\sigma}_{k0} = \sigma_{k0} = 1045 \text{ kG/cm}^2$, więc także $\vartheta = \bar{\vartheta} = 6,40$. Z odwróconego wzoru (3.2.15) obliczamy ostatecznie

$$(4.1.22) \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{\vartheta E}{\sigma_{k0}}}$$

otrzymując w danym przypadku $\lambda_0 = 113,5$.

Wyniki obliczeń są następujące: dla jednostronnie utwierdzonego pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego, wykonanego ze stali 015, o zbieżności $k = i_1/i_0 = \alpha(1) = 0,704$ oraz o smukłości dolnej $\lambda_0 = 113,5$, naprężenie krytyczne w przekroju podstawowym (utwierdzonym) jest równe $\sigma_{k0} = 1045 \text{ kG/cm}^2$, a współczynnik stateczności wynosi $\vartheta = 6,40$.

Wyniki powyższe otrzymaliśmy przyjmując wartość parametrów w równaniu (4.1.14) $n = 5$ oraz $a = 1$. Podobnie przyjmując $n = 4$ oraz $a = 0,5$ otrzymujemy pręt, dla którego $k = 0,791$, $\lambda_0 = 108,5$, $\sigma_{k0} = 1325 \text{ kG/cm}^2$, $\vartheta = 7,44$ itd. Wyniki obliczeń naniesiemy na wykres o osiach λ_0 i k , a po uzyskaniu kilkudziesięciu punktów przeprowadzimy bez trudu linie stałych naprężeń krytycznych σ_{k0} i stałych współczynników stateczności ϑ . Sporządzenie tych wykresów przyjdzie tym łatwiej, że ich «brzeży» są znane. Mianowicie w przypadku małych smukłości λ_0 mamy do czynienia z wyboczeniem czysto plastycznym i praktycznie $\sigma_{k1} = \sigma_{pl}$, więc $\sigma_{k0} = k^2 \sigma_{pl}$;

w przypadkach dużych smukłości wyboczenie będzie sprężyste, zatem rozpatrzone przez Dinnika; wreszcie przypadek pręta pryzmatycznego ($k=1$) został rozwiązany przez Ylinena. Należy pamiętać, że w przypadku wyboczenia sprężystego współczynnik stateczności \mathfrak{F} zależy tylko od k (Dinnik).

Sporządzone w ten sposób wykresy zamieszczone są na rysunkach 6 i 7. Dla pewnych zastosowań korzystniejsze jest przedstawienie funkcji jak na tablicach 7 i 8²⁾.

Obliczenie siły krytycznej dla danego pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego, jednostronnie utwierdzonego nie przedstawia już teraz żadnych trudności. Znając, mianowicie, k i λ_0 odczytujemy z wykresu na rys. 6 lub 7 albo z tablicy 7 lub 8 odpowiednią wartość \mathfrak{F} lub σ_{k0} i obliczamy siłę krytyczną za pomocą wzoru (3.2.10) lub (3.2.13).

Ponieważ siła krytyczna dla jednostronnie utwierdzonego pręta zbieżnego jest zarazem siłą krytyczną dla odpowiedniego dwuprzegubowego pręta dwuzbieżnego, to rozwiązaliśmy równocześnie zagadnienie wyboczenia sprężysto-plastycznego dwuprzegubowych prętów przestrzennie równomiernie dwuzbieżnych (rys. 1, pręt 11212).

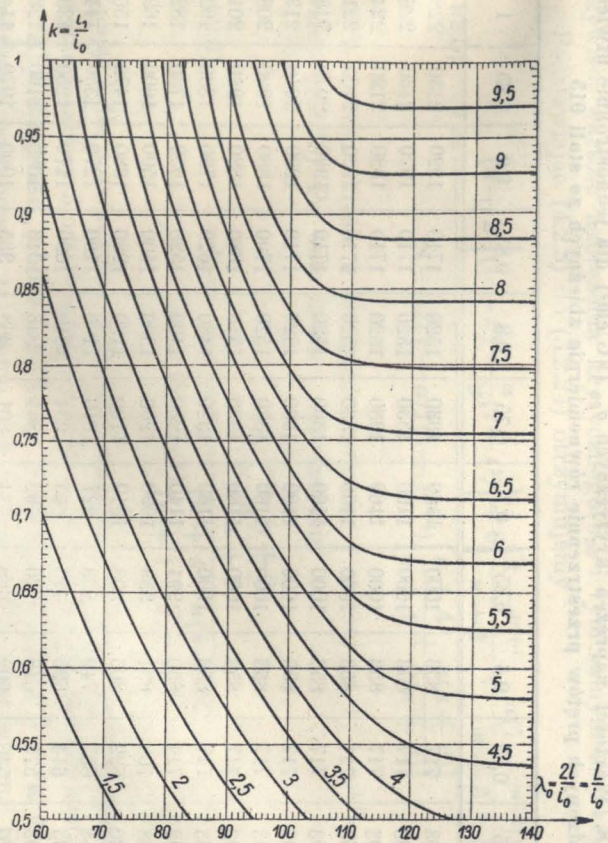
4.2. Wyboczenie sprężysto-plastyczne dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych. Obierzemy układ osi w ten sposób, aby przekrój podstawowy był przekrojem największym. Będziemy zatem zakładali $k \leq 1$ nie ograniczając ogólności rozważań. Podobnie jak w przypadku poprzednim będziemy zajmowali się tylko wyboczeniem w płaszczyźnie xy , gdyż zawsze można obrać osie y i z w ten sposób, aby kierunek osi y był kierunkiem niebezpiecznym przy wyboczeniu.

Aby należycie dobrać równanie linii ugięcia skorzystamy z twierdzenia 2, którego dowód pominiemy jako analogiczny do dowodu twierdzenia 1.

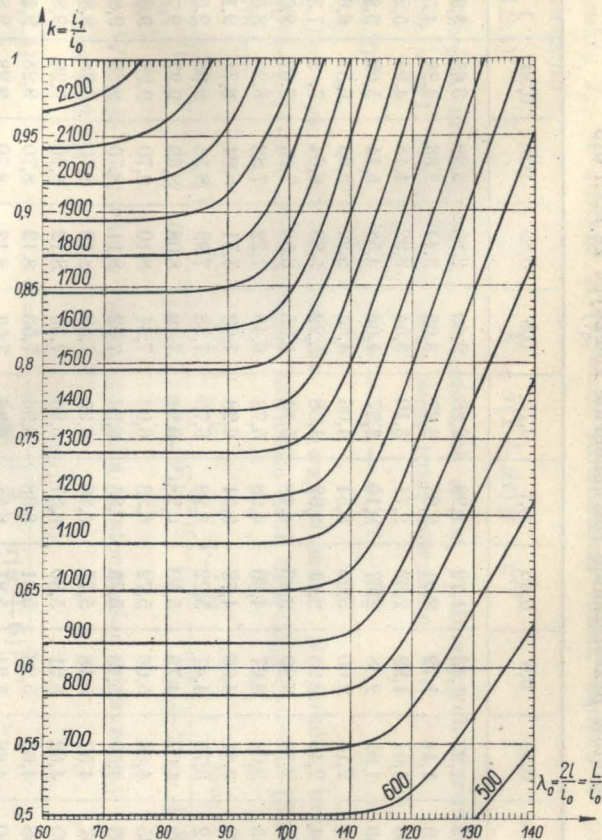
Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja $x(t)$ określająca wymiary pręta przestrzennie równomiernie lub płasko afinicznego, zamocowanego dwuprzegubowo (II przyp. wyboczenia), jest klasy $C^{(2)}$ w przedziale $0 \leq t \leq 1$ i spełnia warunek $x'(0) \cdot x'(1) > 0$, to istnieje wewnątrz przedziału $(0, 1)$ taki punkt t_p , w którym druga pochodna krzywizny osi pręta ugiętego (a więc czwarta pochodna ugięcia) w punkcie zero zmienia znak (krzywizna posiada punkt przegięcia).

W przypadku prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych $x'(t) = -(1-k) = \text{const}$, więc gdy wyłączymy możliwość $k=1$ (pręt pryzmatyczny), to założenia twierdzenia 2 są spełnione. Podobnie jak poprzednio, zamiast dobrać bezpośrednio równanie linii ugięcia, dobierzemy najpierw równanie krzywizny; mamy tu jedynie do spełnienia warunki

²⁾ Ograniczymy się przy tym do zakresu $0,5 \leq k \leq 1$ z dwóch powodów: z jednej strony pręty o $k < 0,5$ są rzadko stosowane w praktyce, z drugiej — równanie (4.1.14) daje tu mniej dokładne wyniki.



Rys. 6. Wartości współczynnika stateczności φ dla jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015



Rys. 7. Wartości naprężeń krytycznych σ_{R0} (kg/cm²) dla jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

Tablica 7. Wartości współczynnika stateczności β dla jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda_0$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1,02	1,23	1,46	1,72	1,99	2,28	2,60	2,93	3,29	3,65	3,91
65	1,19	1,44	1,72	2,01	2,33	2,67	3,05	3,44	3,86	4,28	4,53
70	1,38	1,67	1,99	2,33	2,71	3,10	3,54	3,99	4,48	4,94	5,21
75	1,59	1,92	2,38	2,67	3,10	3,57	4,06	4,58	5,14	5,62	5,91
80	1,81	2,18	2,60	3,05	3,54	4,06	4,63	5,22	5,85	6,31	6,63
85	2,04	2,46	2,93	3,44	3,99	4,58	5,22	5,88	6,64	7,2	7,35
90	2,29	2,76	3,29	3,86	4,48	5,14	5,85	6,56	7,25	7,67	8,03
95	2,55	3,08	3,67	4,30	4,98	5,72	6,49	7,22	7,82	8,25	8,65
100	2,82	3,41	4,06	4,76	5,51	6,28	7,03	7,71	8,24	8,71	9,18
105	3,12	3,75	4,47	5,22	5,98	6,73	7,38	7,99	8,56	9,08	9,54
110	3,39	4,07	4,79	5,52	6,28	6,91	7,49	8,08	8,69	9,27	9,74
115	3,65	4,36	5,06	5,72	6,33	6,93	7,51	8,10	8,70	9,28	9,84
120	3,83	4,50	5,13	5,75	6,35	6,94	7,52	8,11	8,70	9,28	9,87
125	3,97	4,57	5,18	5,77	6,36	6,95	7,53	8,12	8,70	9,28	9,87
130	4,05	4,62	5,21	5,80	6,37	6,96	7,53	8,12	8,70	9,28	9,87
135	4,08	4,65	5,23	5,81	6,38	6,96	7,53	8,12	8,70	9,28	9,57
140	4,10	4,66	5,24	5,81	6,38	6,96	7,53	8,12	8,70	9,28	9,87

Tablica 8. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0} (kG/cm²) dla jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda_0$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2130	2280
65	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2130	2260
70	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2120	2240
75	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2100	2210
80	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2070	2180
85	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1900	2040	2130
90	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1700	1880	1990	2080
95	593	717	853	1000	1160	1330	1510	1680	1820	1920	2010
100	593	717	853	1000	1160	1320	1480	1620	1730	1830	1930
105	592	714	850	994	1140	1280	1400	1520	1630	1730	1820
110	588	706	831	959	1090	1200	1300	1400	1500	1600	1690
115	580	692	803	908	1010	1100	1190	1290	1380	1470	1560
120	558	657	749	839	927	1010	1100	1180	1270	1350	1440
125	533	614	695	775	855	934	1010	1090	1170	1250	1330
130	503	575	648	720	792	864	936	1010	1080	1160	1230
135	470	536	602	668	734	801	868	935	1000	1070	1140
140	438	500	561	622	683	745	808	870	933	995	1060

$K(0) = K(1) = 0$ oraz wynikający z twierdzenia 2 warunek istnienia punktu t_p , w którym $K''(t_p) = 0$. Równaniem takim będzie, na przykład, równanie

$$(4.2.1) \quad K = \delta(1 + at)(t - t^n)$$

o dwóch nieoznaczonych parametrach a i n , spełniających warunki $a > 0$ oraz $n > 1$. Scalkowaniu ulega więc tutaj równanie

$$(4.2.2) \quad y'' = -\delta(1 + at)(t - t^n).$$

Po wykonaniu całkowania i uwzględnieniu warunków brzegowych $y(0) = y(1) = 0$ otrzymujemy równanie linii ugięcia w postaci (3.2.6), mianowicie

$$(4.2.3) \quad y = \delta t \left[\frac{1 - t^2}{6} - \frac{1 - t^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + a \frac{1 - t^3}{12} - a \frac{1 - t^{n+2}}{(n+2)(n+3)} \right].$$

Wartość pozornego współczynnika stateczności otrzymamy teraz ze wzoru (3.2.22):

$$(4.2.4) \quad \vartheta = \frac{6(n+2)}{(n-1) \left[\frac{n+4}{n+1} + \frac{a(n+6)}{2(n+3)} \right]},$$

a pozorną wartość naprężenia krytycznego w przekroju podstawowym określi wzór (4.1.16). Korzystając z tablicy 2 możemy bez trudu znaleźć rzeczywistą wartość naprężenia krytycznego σ_{k0} i tym samym siłę krytyczną.

Podstawiając (4.2.3) do (3.2.24) otrzymujemy

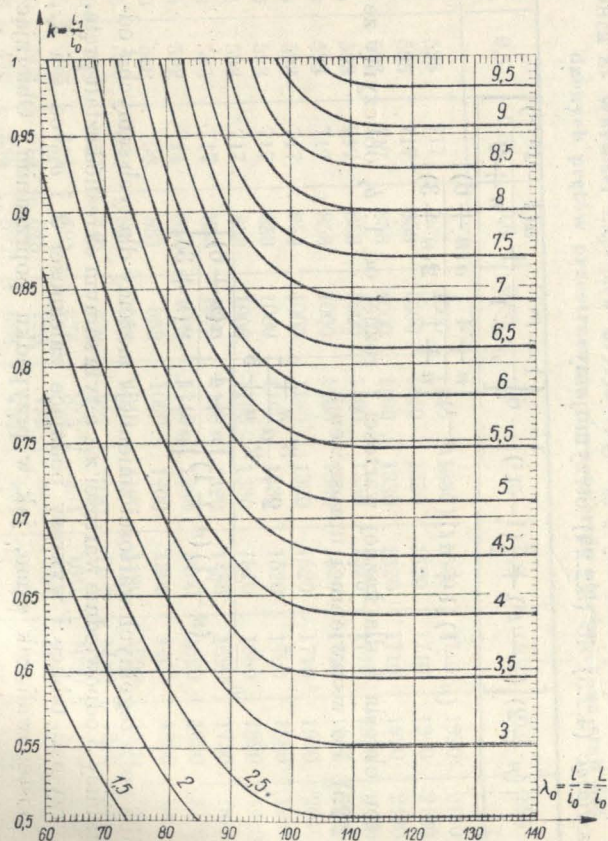
$$(4.2.5) \quad b = \frac{(n+2) \left[(1-t^2) + \frac{a}{2}(1-t^3) \right] - 6 \left[\frac{1-t^{n+1}}{n+1} + \frac{a(1-t^{n+2})}{n+3} \right]}{(n-1)(1+at)(1-t^{n-1}) \left[\frac{n+4}{n+1} + \frac{a(n+6)}{2(n+3)} \right]}$$

Wzór ten określa b dla każdej wartości t różnej od 1; b_1 obliczymy ze wzoru (3.2.25). Po wstawieniu i uproszczeniu

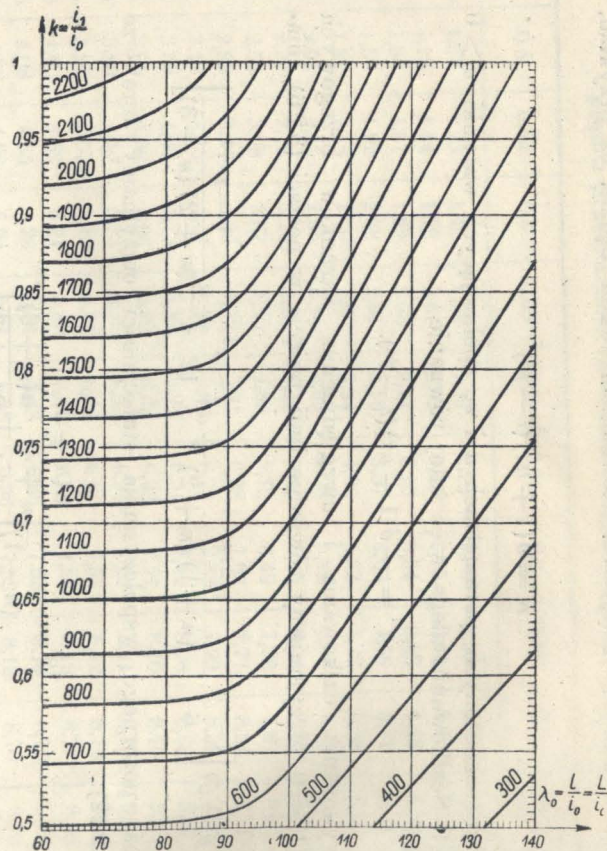
$$(4.2.6) \quad b_1 = \frac{2 + \frac{3}{2}a \frac{n+2}{n+3}}{(n-1)(a+1) \left[\frac{n+4}{n+1} + \frac{a(n+6)}{2(n+3)} \right]}.$$

Znając b dla poszczególnych wartości zmiennej t możemy dla tych samych t odczytać z tablicy 3 odpowiednie wartości α_1 , a tym samym określić kształt pręta.

Aby otrzymać tablice i wykresy podające zależności ϑ i σ_{k0} od h i λ_0 , będziemy postępowali tak samo, jak w przypadku poprzednim. Obierając zatem różne wartości parametrów a i n otrzymamy w wyniku pręty o róż-



Rys. 8. Wartości współczynnika stateczności ϕ dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali S235



Rys. 9. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0} (kg/cm²) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali S235

Tablica 9. Wartości współczynnika stateczności β dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

$\lambda_0 \backslash k$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1,02	1,23	1,46	1,72	1,99	2,28	2,60	2,93	3,29	3,62	3,91
65	1,19	1,44	1,72	2,01	2,33	2,67	3,05	3,44	3,86	4,23	4,53
70	1,38	1,67	1,99	2,33	2,71	3,10	3,54	3,99	4,48	4,85	5,21
75	1,59	1,92	2,28	2,67	3,10	3,57	4,06	4,56	5,09	5,51	5,91
80	1,80	2,17	2,59	3,04	3,52	4,03	4,58	5,18	5,73	6,22	6,63
85	2,02	2,44	2,90	3,40	3,92	4,49	5,09	5,75	6,36	6,92	7,35
90	2,22	2,67	3,18	3,72	4,29	4,92	5,59	6,29	6,98	7,58	8,03
95	2,36	2,85	3,38	3,96	4,59	5,25	5,96	6,71	7,44	8,12	8,65
100	2,45	2,96	3,51	4,11	4,75	5,43	6,17	6,95	7,77	8,52	9,18
105	2,46	2,98	3,53	4,15	4,81	5,52	6,27	7,06	7,91	8,74	9,54
110	2,46	2,98	3,54	4,16	4,82	5,54	6,30	7,09	7,96	8,82	9,74
115	2,46	2,98	3,54	4,16	4,83	5,54	6,31	7,11	7,98	8,88	9,84
120	2,47	2,99	3,55	4,17	4,84	5,55	6,32	7,13	7,99	8,91	9,87
125	2,47	2,99	3,55	4,17	4,84	5,55	6,32	7,13	7,99	8,91	9,87
130	2,47	2,99	3,55	4,17	4,84	5,55	6,32	7,13	7,99	8,91	9,87
135	2,47	2,99	3,55	4,17	4,84	5,55	6,32	7,13	7,99	8,91	9,87
140	2,47	2,99	3,55	4,17	4,84	5,55	6,32	7,13	7,99	8,91	9,87

Tablica 10. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0} (kg/cm²) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych ze stali 015

$\lambda_0 \backslash k$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2110	2280
65	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1920	2100	2260
70	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1710	1910	2080	2240
75	593	717	853	1000	1160	1330	1520	1700	1900	2060	2210
80	591	714	850	997	1150	1320	1500	1690	1880	2040	2180
85	587	710	842	989	1140	1310	1480	1670	1850	2010	2130
90	575	693	824	963	1110	1280	1450	1630	1810	1960	2080
95	550	663	786	921	1070	1220	1390	1560	1730	1890	2010
100	515	621	737	862	998	1140	1300	1460	1630	1790	1930
105	470	568	673	790	915	1050	1190	1350	1510	1670	1820
110	430	521	616	722	837	955	1090	1230	1380	1530	1690
115	392	475	565	663	768	880	1000	1130	1270	1410	1560
120	360	435	518	608	705	810	920	1040	1170	1300	1440
125	331	401	477	560	650	746	848	958	1070	1200	1330
130	306	371	441	518	600	690	785	886	994	1110	1230
135	284	344	409	480	556	640	727	821	921	1030	1140
140	264	320	380	446	518	595	676	763	856	955	1060

nych k i λ_0 , nieznacznie odbiegające od prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych, i odpowiednie wartości \mathcal{S} i σ_{k0} . Na przykład, obierając $n=7$ i $a=2$ otrzymamy pręt o $k=0,586$ i $\lambda_0=99,5$, przy czym dla tego pręta $\mathcal{S}=3,36$ oraz $\sigma_{k0}=711 \text{ kG/cm}^2$. Przeliczając odpowiednio dużo takich prętów i postępując podobnie, jak w przypadku poprzednim, możemy otrzymać wykresy i tablice do obliczenia \mathcal{S} i σ_{k0} . Będą to wykresy przedstawione na rysunkach 8 i 9 oraz tablice 9 i 10, za pomocą których można już bez trudu znaleźć wartość siły krytycznej dla dowolnego dwuprzegubowego pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego, który został wykonany ze stali 015³⁾.

4.3. Wyboczenie sprężysto-plastyczne jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych. Musimy tu rozpatrzyć zarówno wyboczenie w płaszczyźnie, jak i z płaszczyzny zbieżności. Dla rozróżnienia będziemy wszystkie wielkości, odnoszące się bezpośrednio do wyboczenia w płaszczyźnie zbieżności, oznaczali jedną, a przy wyboczeniu z płaszczyzny zbieżności dwiema kreskami u góry. W takim razie przy przyjęciu układu osi jak na rys. 2 i 3 oznaczymy $i_z \equiv i'_z$, $i_y \equiv i''_y$; $i'' = \text{const}$, natomiast i'_z dla prętów płasko zbieżnych zmienia się liniowo. Analogicznie do (4.1.1) oznaczymy tu

$$(4.3.1) \quad k = \frac{i'_z}{i''_y} = z(1).$$

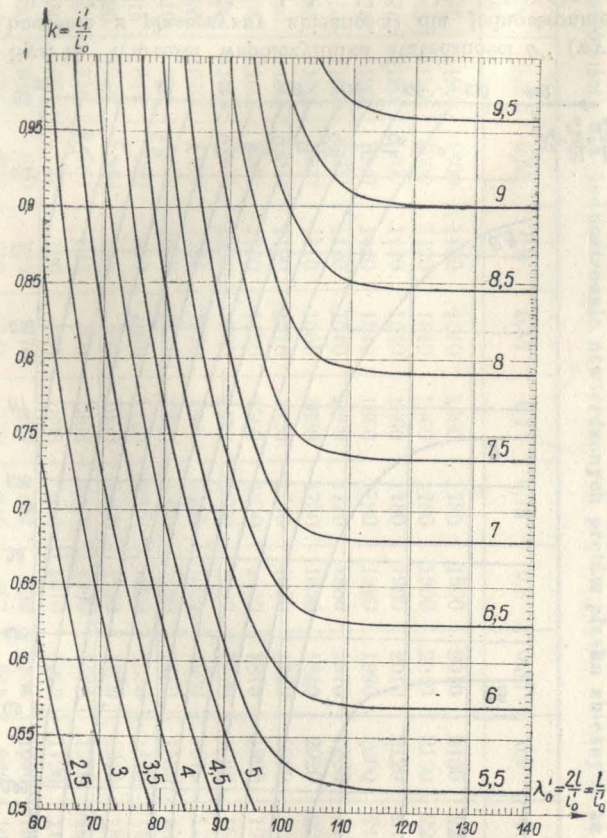
Przypadek $k=1$ jest przypadkiem pręta pryzmatycznego.

Zarówno do wyboczenia w płaszczyźnie, jak i do wyboczenia z płaszczyzny zbieżności prętów płasko zbieżnych odnosi się twierdzenie 1, więc nie stoi na przeszkodzie do zastosowania również i tutaj równania linii ugięcia (4.1.14). Ponieważ tym razem będziemy korzystali z tablic 4 i 5 zamiast tablicy 3, to otrzymamy inne wyniki: tak, na przykład, przyjmując $n=5$ oraz $a=1$ otrzymujemy przy założeniu wyboczenia w płaszczyźnie zbieżności pręt o danych $k=0,619$ oraz $\lambda'_0=102$; dla pręta tego $\mathcal{S}'=6,40$ oraz $\sigma'_{k0}=1290 \text{ kG/cm}^2$. Natomiast zakładając powstanie wyboczenia z płaszczyzny zbieżności nie możemy w ogóle, przy powyższych wartościach parametrów, otrzymać pręta zbliżonego kształtem do zbieżnego; okazuje się, że równanie (4.1.14) daje się tu również zastosować, ale należy dobierać małe wartości parametru n (na przykład $n=2$ lub $n=3$).

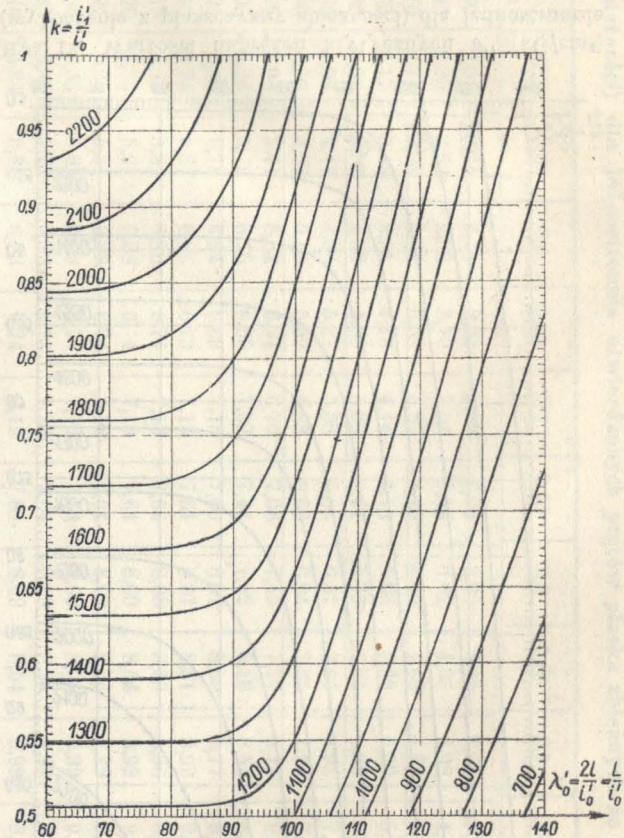
Wyniki obliczeń uwidaczniają wykresy 10-13 oraz tablice 11-14.

Powyższe wykresy i tablice znajdują bezpośrednie zastosowanie również przy obliczaniu siły krytycznej dla dwuprzegubowych prętów płasko dwuzbieżnych. Prętami takimi są, na przykład, korbowody niektórych parowozów

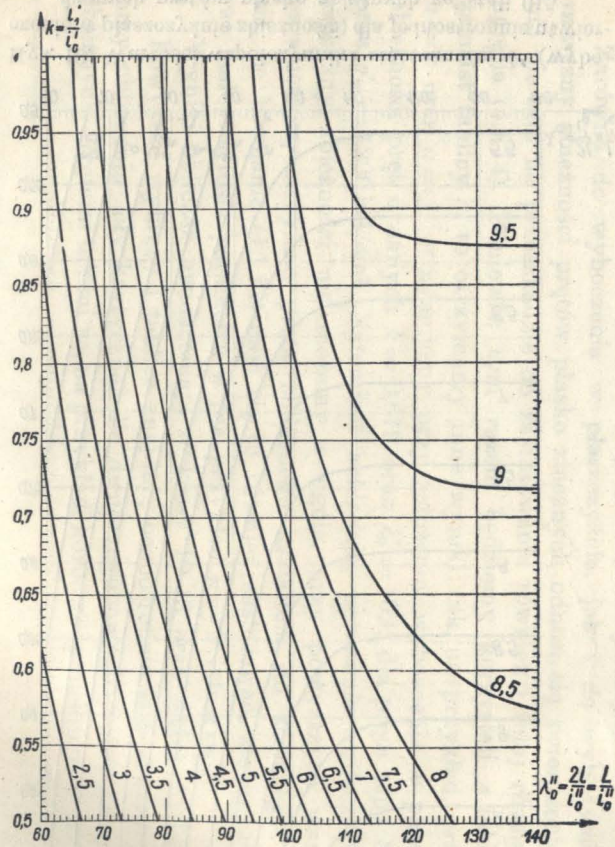
³⁾ Przy założeniu $0,5 \leq k \leq 1$, podobnie jak w przypadku I.



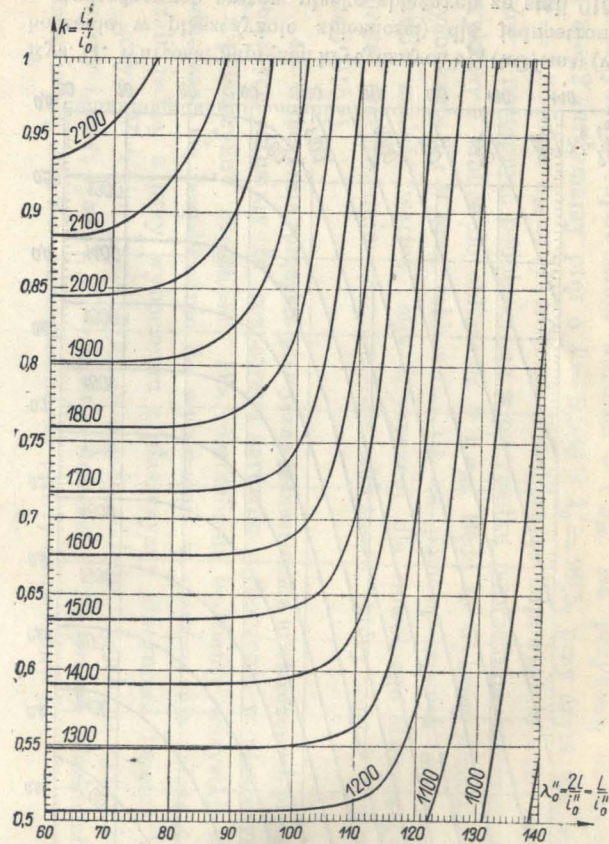
Rys. 10. Wartości współczynnika stateczności β' (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015



Rys. 11. Wartości naprężeń krytycznych σ_{R0}' (kg/cm^2) (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla jednostronnie utwierdzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015



Rys. 12. Wartości współczynnika stateczności ϑ'' (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla jednostronnie utwardzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015



Rys. 13. Wartości naprężeń krytycznych σ'' (kg/cm²) (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla jednostronnie utwardzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

Tablica 11. Wartości współczynnika stateczności β' (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla jednostronnie utwardzonych prętów płasko zbieżnych ze stali O15

$k \backslash \lambda_0$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	2,04	2,24	2,44	2,64	2,85	3,05	3,25	3,45	3,65	3,81	3,91
65	2,39	2,62	2,86	3,10	3,34	3,58	3,82	4,05	4,28	4,44	4,53
70	2,77	3,04	3,32	3,59	3,87	4,15	4,42	4,69	4,93	5,10	5,21
75	3,17	3,49	3,81	4,13	4,44	4,76	5,06	5,33	5,60	5,78	5,91
80	3,61	3,97	4,33	4,69	5,06	5,41	5,73	6,01	6,28	6,49	6,63
85	4,08	4,47	4,86	5,27	5,68	6,04	6,37	6,66	6,95	7,17	7,35
90	4,55	4,97	5,40	5,82	6,23	6,60	6,94	7,25	7,55	7,83	8,03
95	4,98	5,41	5,84	6,27	6,70	7,08	7,43	7,77	8,11	8,42	8,65
100	5,26	5,72	6,15	6,58	7,02	7,44	7,82	8,18	8,53	8,87	9,18
105	5,30	5,78	6,24	6,69	7,15	7,60	8,01	8,39	8,77	9,16	9,54
110	5,34	5,81	6,28	6,73	7,19	7,64	8,07	8,51	8,92	9,34	9,74
115	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,08	8,53	8,96	9,40	9,84
120	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,09	8,54	8,99	9,43	9,87
125	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,09	8,54	8,99	9,43	9,87
130	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,09	8,54	8,99	9,43	9,87
135	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,09	8,54	8,99	9,43	9,87
140	5,35	5,81	6,28	6,74	7,19	7,64	8,09	8,54	8,99	9,43	9,87

Tablica 12. Wartości naprężeń krytycznych σ'_{k0} (kg/cm²) (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla jednostronnie utwardzonych prętów płasko zbieżnych ze stali O15

$k \backslash \lambda_0$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2220	2280
65	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2210	2260
70	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2120	2190	2240
75	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1890	1990	2090	2160	2210
80	1190	1300	1420	1540	1660	1770	1880	1970	2060	2130	2180
85	1190	1300	1410	1530	1650	1750	1850	1940	2020	2080	2130
90	1180	1290	1400	1510	1620	1710	1800	1880	1960	2030	2080
95	1160	1260	1360	1460	1560	1650	1730	1810	1890	1960	2010
100	1100	1200	1290	1380	1470	1560	1640	1720	1790	1860	1930
105	1010	1100	1190	1270	1360	1450	1520	1600	1670	1740	1820
110	924	1010	1090	1170	1250	1330	1400	1480	1550	1620	1690
115	847	922	997	1070	1140	1210	1280	1350	1420	1490	1560
120	779	848	915	981	1050	1120	1180	1250	1310	1380	1440
125	719	781	843	905	966	1030	1090	1150	1210	1270	1330
130	664	722	780	837	893	950	1010	1060	1120	1170	1230
135	616	670	723	776	829	881	933	984	1040	1090	1140
140	573	623	672	721	770	819	867	915	963	1010	1060

Tablica 13. Wartości współczynnika stateczności β'' (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla jednostronnie utwardzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda_0''$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	2,04	2,24	2,44	2,64	2,85	3,05	3,25	3,45	3,65	3,82	3,91
65	2,39	2,62	2,86	3,10	3,34	3,58	3,82	4,05	4,27	4,44	4,53
70	2,77	3,04	3,32	3,59	3,87	4,15	4,42	4,70	4,94	5,12	5,21
75	3,17	3,49	3,81	4,13	4,44	4,76	5,08	5,37	5,62	5,81	5,91
80	3,61	3,97	4,33	4,69	5,06	5,42	5,76	6,06	6,32	6,51	6,63
85	4,08	4,48	4,89	5,30	5,71	6,11	6,47	6,78	7,03	7,20	7,35
90	4,57	5,03	5,48	5,94	6,40	6,82	7,17	7,47	7,71	7,88	8,03
95	5,09	5,60	6,11	6,61	7,09	7,52	7,86	8,12	8,34	8,51	8,65
100	5,63	6,19	6,73	7,24	7,71	8,13	8,44	8,67	8,88	9,05	9,18
105	6,19	6,77	7,34	7,82	8,24	8,61	8,87	9,08	9,28	9,44	9,54
110	6,74	7,32	7,83	8,24	8,60	8,88	9,12	9,32	9,49	9,63	9,74
115	7,24	7,74	8,18	8,50	8,76	9,01	9,24	9,41	9,56	9,71	9,84
120	7,68	8,02	8,36	8,62	8,85	9,06	9,26	9,42	9,57	9,72	9,87
125	7,98	8,25	8,48	8,70	8,90	9,08	9,26	9,42	9,57	9,72	9,87
130	8,12	8,35	8,56	8,75	8,93	9,10	9,26	9,42	9,57	9,72	9,87
135	8,21	8,41	8,59	8,77	8,94	9,10	9,26	9,42	9,57	9,72	9,87
140	8,23	8,42	8,60	8,77	8,94	9,10	9,26	9,42	9,57	9,72	9,87

Tablica 14. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0}'' (kG/cm²) (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla jednostronnie utwardzonych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda_0''$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2220	2280
65	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2120	2210	2260
70	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2110	2190	2240
75	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2100	2170	2210
80	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1890	1990	2070	2130	2180
85	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1880	1970	2040	2090	2130
90	1190	1300	1420	1540	1660	1770	1860	1940	2000	2040	2080
95	1190	1300	1420	1540	1650	1750	1830	1890	1940	1980	2010
100	1180	1300	1410	1520	1620	1710	1770	1820	1860	1900	1930
105	1180	1290	1400	1490	1570	1640	1690	1730	1770	1800	1820
110	1170	1270	1360	1430	1490	1540	1580	1620	1650	1670	1690
115	1150	1230	1300	1350	1390	1430	1470	1500	1520	1540	1560
120	1120	1170	1220	1260	1290	1320	1350	1370	1400	1420	1440
125	1070	1110	1140	1170	1200	1220	1240	1260	1290	1310	1330
130	1010	1040	1060	1090	1110	1130	1150	1170	1190	1210	1230
135	946	969	990	1010	1030	1050	1070	1090	1100	1120	1140
140	881	902	922	940	958	975	992	1010	1030	1040	1060

4.4. Wyboczenie sprężysto-plastyczne dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych. Podobnie jak w przypadku poprzednim musimy tu również rozpatrzeć wyboczenie w płaszczyźnie i z płaszczyzny zbieżności. Przyjmijmy oznaczenie (4.3.1) i inne oznaczenia p. 4.3. Zarówno do wyboczenia w płaszczyźnie, jak i z płaszczyzny zbieżności dwuprzegubowych prętów płasko zbieżnych odnosi się twierdzenie 2, więc posłużymy się i tutaj równaniem linii ugięcia (4.2.3). Jednak tym razem będziemy korzystali z tablic 4 i 5, zamiast z tablicy 3, więc otrzymamy inne wyniki niż w p. 4.2.

Wyniki obliczeń podają wykresy 14-17 oraz tablice 15-18.

4.5. Określenie kierunku niebezpiecznego dla prętów płasko zbieżnych. Znając już wartości sił krytycznych dla prętów płasko zbieżnych, zarówno w przypadku wyboczenia w płaszczyźnie, jak i z płaszczyzny zbieżności, możemy dla prętów tych określić kierunek niebezpieczny ze względu na wyboczenie. W przypadku granicznym (równych sił krytycznych dla obu możliwych kierunków wyboczenia) możemy napisać równość

$$(4.5.1) \quad \mathfrak{P}' \frac{EI_0'}{L^2} = \mathfrak{P}'' \frac{EI_0''}{L^2}$$

lub po uproszczeniu

$$(4.5.2) \quad \mathfrak{P}' \lambda_0'^2 = \mathfrak{P}'' \lambda_0''^2.$$

Oznaczmy teraz charakterystyczną dla każdego pręta wartość

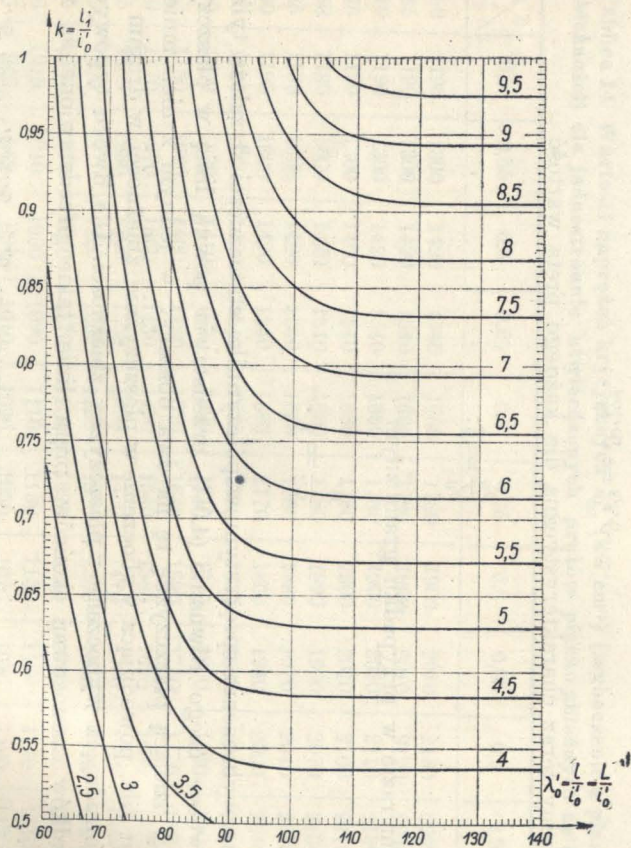
$$(4.5.3) \quad \frac{\lambda_0''}{\lambda_0'} = \xi;$$

w takim razie w przypadku granicznym

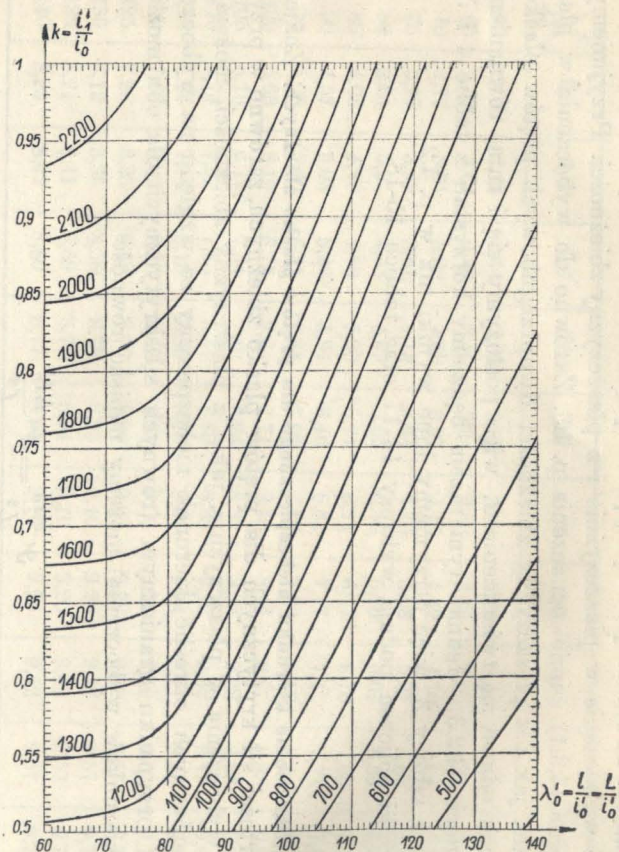
$$(4.5.4) \quad \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}''} = \xi^2.$$

Przy wyboczeniu sprężystym współczynniki stateczności \mathfrak{P} zależą tylko od k , wobec czego równanie (4.5.4) przedstawia pewną linię w płaszczyźnie $k\xi$, dzielącą płaszczyznę tę na dwa obszary: w jednym z nich mniejszą jest siła, powodująca wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności, w drugim — siła, powodująca wyboczenie z płaszczyzny zbieżności. Dla dwóch typowych przypadków zamocowań końców pręta linie takie przedstawione są na rys. 18.

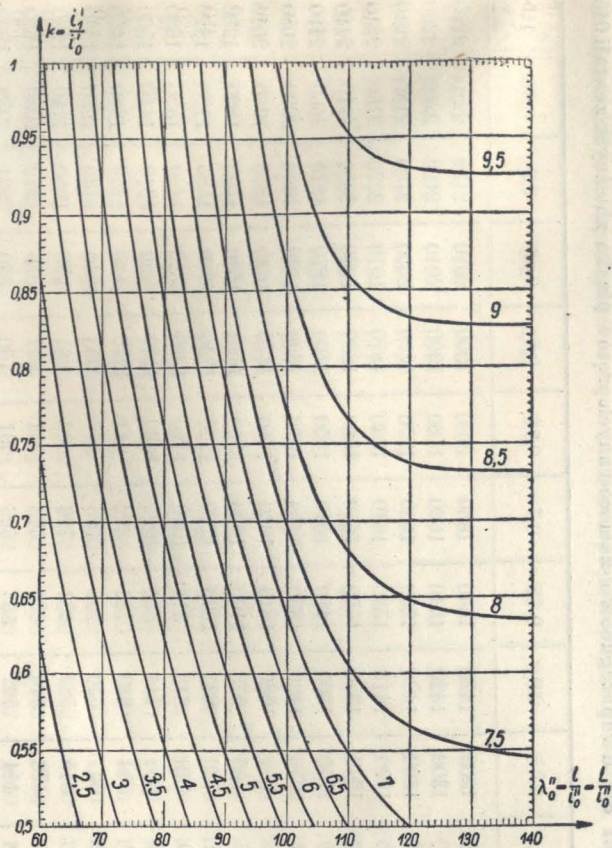
W przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'(k, \lambda_0')$ oraz $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}''(k, \lambda_0'')$, a ponieważ z (4.5.3) wynika, że $\lambda_0'' = \xi \lambda_0'$, więc równanie (4.5.4)



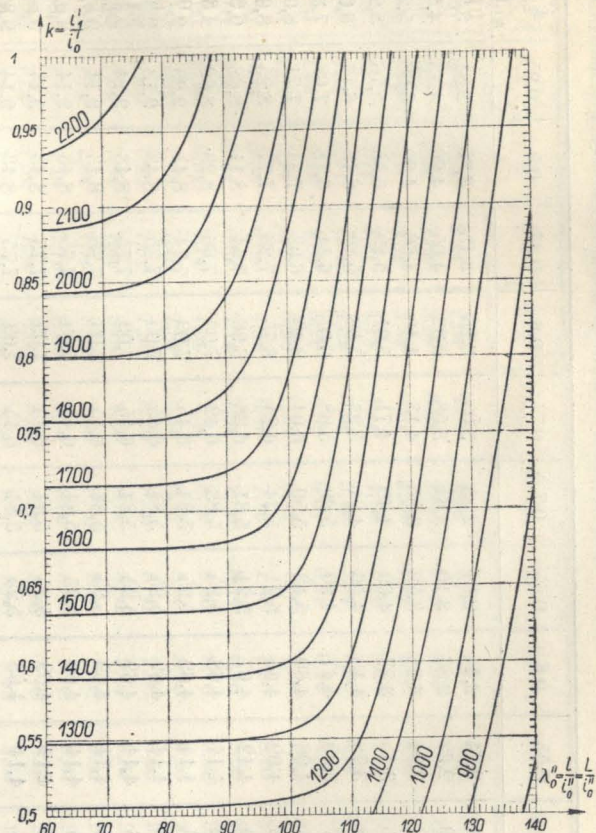
Rys. 14. Wartości współczynnika stateczności \mathcal{D}' (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015



Rys. 15. Wartości naprężeń krytycznych σ'_{k0} (kG/cm^2) (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015



Rys. 16. Wartości współczynnika stateczności β'' (wycoczenie z płaszczyzny zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015



Rys. 17. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0}'' (kG/cm^2) (wycoczenie z płaszczyzny zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

Tablica 15. Wartości współczynnika stateczności ρ' (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda'_0$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	2,04	2,24	2,44	2,64	2,85	3,05	3,25	3,45	3,65	3,81	3,91
65	2,39	2,62	2,86	3,10	3,34	3,58	3,82	4,05	4,26	4,43	4,53
70	2,77	3,04	3,31	3,59	3,86	4,13	4,40	4,66	4,90	5,08	5,21
75	3,13	3,45	3,77	4,09	4,40	4,71	5,01	5,29	5,55	5,76	5,91
80	3,38	3,78	4,18	4,56	4,91	5,25	5,58	5,89	6,18	6,43	6,63
85	3,47	3,99	4,47	4,90	5,29	5,68	6,07	6,44	6,78	7,08	7,35
90	3,51	4,06	4,60	5,13	5,59	6,04	6,49	6,92	7,34	7,71	8,03
95	3,55	4,09	4,65	5,21	5,74	6,24	6,75	7,26	7,77	8,25	8,65
100	3,59	4,12	4,67	5,24	5,81	6,38	6,96	7,54	8,11	8,68	9,18
105	3,62	4,14	4,68	5,25	5,83	6,42	7,03	7,66	8,29	8,92	9,54
110	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,74	8,41	9,09	9,74
115	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,13	9,84
120	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,14	9,87
125	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,14	9,87
130	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,14	9,87
135	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,14	9,87
140	3,63	4,14	4,69	5,25	5,84	6,45	7,09	7,75	8,43	9,14	9,87

Tablica 16. Wartości naprężeń krytycznych σ'_{k0} (kG/cm²) (wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda'_0$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2220	2280
65	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2120	2200	2260
70	1190	1300	1420	1540	1650	1770	1890	2000	2100	2180	2240
75	1170	1290	1410	1530	1640	1760	1870	1970	2070	2150	2210
80	1110	1240	1370	1500	1610	1720	1830	1930	2030	2110	2180
85	1010	1160	1300	1430	1540	1650	1760	1870	1970	2060	2130
90	911	1050	1190	1330	1450	1570	1680	1790	1900	2000	2080
95	828	952	1080	1210	1330	1450	1570	1690	1810	1920	2010
100	756	865	979	1100	1220	1340	1460	1580	1700	1820	1930
105	691	789	893	1000	1110	1220	1340	1460	1580	1700	1820
110	630	719	813	911	1010	1120	1230	1340	1460	1580	1690
115	576	658	744	834	927	1030	1130	1230	1340	1450	1560
120	529	604	683	766	852	941	1030	1130	1230	1330	1440
125	488	557	630	706	785	867	953	1040	1130	1230	1330
130	451	515	582	652	726	802	881	963	1050	1140	1230
135	418	478	540	605	673	744	817	893	972	1050	1140
140	389	444	502	563	626	691	760	830	904	979	1060

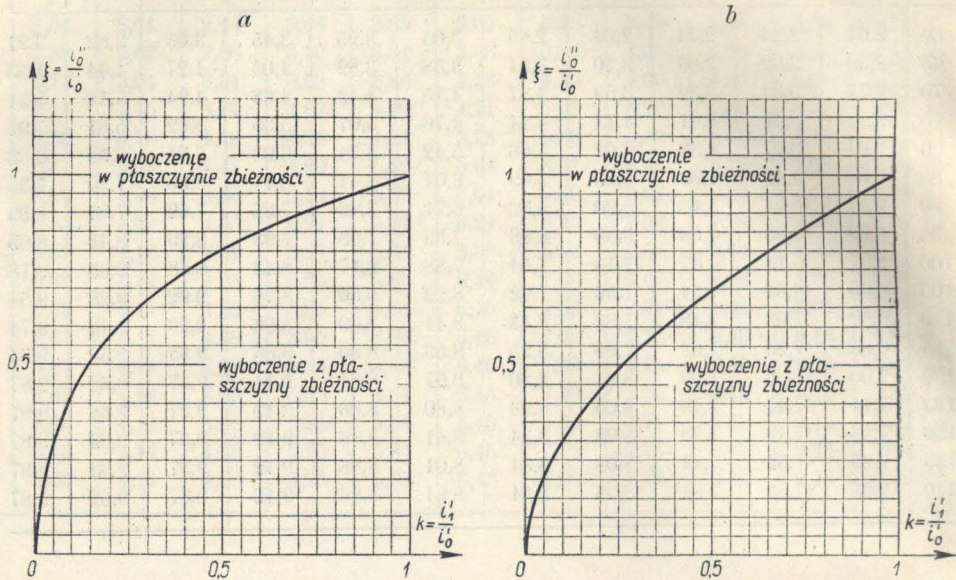
Tablica 17. Wartości współczynnika stateczności β'' (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda_0''$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	2,04	2,24	2,44	2,64	2,85	3,05	3,25	3,45	3,65	3,82	3,91
65	2,39	2,62	2,86	3,10	3,34	3,58	3,82	4,05	4,27	4,44	4,53
70	2,77	3,04	3,32	3,59	3,87	4,15	4,42	4,68	4,94	5,12	5,21
75	3,17	3,49	3,81	4,13	4,44	4,76	5,07	5,35	5,62	5,81	5,91
80	3,61	3,97	4,33	4,69	5,06	5,42	5,74	6,03	6,31	6,52	6,63
85	4,08	4,48	4,89	5,29	5,69	6,07	6,41	6,71	6,98	7,20	7,35
90	4,57	5,03	5,48	5,90	6,32	6,71	7,06	7,36	7,62	7,84	8,03
95	5,08	5,58	6,06	6,53	6,96	7,35	7,68	7,95	8,20	8,43	8,65
100	5,57	6,14	6,67	7,14	7,54	7,88	8,17	8,43	8,68	8,93	9,18
105	6,05	6,61	7,14	7,56	7,92	8,22	8,50	8,76	9,02	9,28	9,54
110	6,52	7,03	7,48	7,83	8,13	8,41	8,69	8,96	9,23	9,49	9,74
115	6,85	7,25	7,62	7,95	8,25	8,53	8,80	9,06	9,32	9,58	9,84
120	7,00	7,36	7,69	8,01	8,30	8,57	8,84	9,11	9,37	9,62	9,87
125	7,11	7,44	7,75	8,05	8,33	8,60	8,86	9,12	9,37	9,62	9,87
130	7,18	7,49	7,79	8,08	8,34	8,61	8,86	9,12	9,37	9,62	9,87
135	7,23	7,52	7,81	8,08	8,34	8,61	8,86	9,12	9,37	9,62	9,87
140	7,25	7,53	7,81	8,08	8,34	8,61	8,86	9,12	9,37	9,62	9,87

Tablica 18. Wartości naprężeń krytycznych σ_{k0}'' (kg/cm²) (wyboczenie z płaszczyzny zbieżności) dla dwuprzegubowo zamocowanych prętów płasko zbieżnych ze stali 015

$k \backslash \lambda_0''$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
60	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2220	2280
65	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2130	2210	2260
70	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2010	2120	2190	2240
75	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1900	2000	2100	2170	2210
80	1190	1300	1420	1540	1660	1780	1880	1980	2070	2140	2180
85	1190	1300	1420	1540	1650	1760	1860	1950	2030	2090	2130
90	1190	1300	1420	1530	1640	1740	1830	1910	1980	2030	2080
95	1180	1300	1410	1520	1620	1710	1790	1850	1910	1960	2010
100	1170	1290	1400	1500	1580	1660	1720	1770	1820	1870	1930
105	1150	1260	1360	1440	1510	1570	1620	1670	1720	1770	1820
110	1130	1220	1300	1360	1410	1460	1510	1550	1600	1640	1690
115	1090	1150	1210	1260	1310	1360	1400	1440	1480	1520	1560
120	1020	1070	1120	1170	1210	1250	1290	1330	1370	1400	1440
125	956	1000	1040	1089	1120	1160	1190	1230	1260	1290	1330
130	893	931	968	1000	1040	1070	1100	1130	1160	1200	1230
135	833	867	900	931	961	992	1020	1050	1080	1110	1140
140	777	807	837	865	894	922	950	977	1000	1030	1060

przedstawia dość skomplikowaną zależność między trzema zmiennymi, na przykład k , ξ i λ_0'' . Łatwo jednak przekonać się na konkretnych przykładach, iż wpływ λ_0'' jest tak nieznaczny, że wykresy na rys. 18 można i tu uważać za obowiązujące.



Rys. 18. Określenie kierunku wyboczenia prętów płasko zbieżnych: *a* — pręty jednostronnie utwierdzone, *b* — pręty zamocowane dwuprzegubowo

4.6. Obliczenie siły krytycznej dla prętów zbieżnych metodami przybliżonymi
 Dokonane przez nas obliczenie siły krytycznej dla prętów zbieżnych można uważać w pewnym sensie za ścisłe, ponieważ błędy nie przekraczające 1% są zasadniczo w technice pomijane, a podane tablice i wykresy niewątpliwie wykazują ten stopień dokładności (wobec nieznacznych i nawzajem się znośzących błędów wymiarowych, wynikających ze stosowania metody «założenia równania ścisłego»). Czasami jednak, dla uzyskania najdalej idącej prostoty obliczeń, dopuszcza się błędy nawet rzędu kilku procent; obliczenia takie będziemy nazywali dalej przybliżonymi.

Najczęściej stosowany przybliżony sposób obliczenia prętów zbieżnych polega na tym, że pręty te traktujemy jako przyzmatyczne, o przekroju równym najmniejszemu przekrojowi danego pręta zbieżnego. W ten sposób uzyskujemy pewność, że błędy obliczenia podwyższają bezpieczeństwo bez względu na to, czy wyboczenie będzie sprężyste, czy też sprężysto-plastyczne. Błędy te, zwłaszcza przy małych wartościach stosunku k , dochodzą jednak do kilkudziesięciu procent, co znacznie obniża lub często przekreśla wartość obliczeń.

Przyglądając się wykresom 6-17 zauważymy możliwość przybliżonego obliczenia siły krytycznej w inny sposób. Wyboczenie prętów o dużych smukłościach odbiega bowiem nieznacznie od wyboczenia sprężystego i, w stosunkowo dużym zakresie smukłości (zależnym od zbieżności k), różnice nie przekraczają 1%. Zakres ten nazwiemy zakresem sprężystym. Linię ograniczającą go można nazwać linią smukłości sprężysto-granicznej; można przyjąć, że dla prętów przyrzmatycznych smukłość ta przechodzi w ogólnie znaną smukłość graniczną. Wyboczenie prętów o małych smukłościach odbiega natomiast nieznacznie od wyboczenia plastycznego: siła krytyczna jest w przybliżeniu równa iloczynowi powierzchni najmniejszego przekroju pręta przez granicę plastyczności σ_{pl} . Zakres, w którym różnice te nie przekraczają 1%, będziemy nazywali zakresem plastycznym, a ograniczającą go linię — linią smukłości plastyczno-granicznej.

Tak więc w pewnych zakresach smukłości możemy zakładać idealną sprężystość, a w innych — idealną plastyczność wyboczenia. Zajmiemy się teraz określeniem linii dzielącej płaszczyznę $\lambda_0 k$ na dwa obszary: w jednym z nich popelnimy mniejszy błąd traktując wyboczenie jako sprężyste, w drugim zaś — jako plastyczne. Linia ta będzie zatem linią równych błędów; nazwiemy ją linią smukłości sprężysto-plastycznej, ponieważ wpływ zarówno własności sprężystych, jak i plastycznych materiału można tu uważać za jednakowy.

Dla określenia przebiegu linii smukłości sprężysto-plastycznej zauważymy, że w obu dopiero co wspomnianych sposobach obliczeń przybliżonych popelniamy błędy na niekorzyść bezpieczeństwa; siła krytyczna jest bowiem w rzeczywistości mniejsza od obliczonej. Stanowi to niewątpliwą wadę obliczeń (podobnie jak metody Ritza-Timoszenki). W istocie, jeżeli zwiększamy smukłość począwszy od wartości najmniejszych, to naprężenie krytyczne w najmniejszym przekroju (a więc σ_{k1} przy założeniu $k \leq 1$), równe σ_{pl} przy wyboczeniu plastycznym, stale maleje; zakładając $\sigma_{k1} = \sigma_{pl}$ przeceniamy wytrzymałość pręta. Podobnie jest w drugim przypadku: gdy zmniejszamy smukłość począwszy od jej dużych wartości, to własności plastyczne materiału obniżają wielkość naprężeń krytycznych; zakładając zatem, że wyboczenie pręta będzie sprężyste, podczas gdy w istocie tak nie jest, przeceniamy również jego wytrzymałość. Oba błędy zrównoważą się, gdy naprężenie krytyczne w najmniejszym przekroju $\bar{\sigma}_{k1}$, obliczone przy założeniu sprężystości odkształceń, będzie równe granicy plastyczności σ_{pl} .

W przypadku pręta przyrzmatycznego ($k = 1$)

$$(4.6.1) \quad \bar{\sigma}_{k1} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2},$$

zatem smukłość sprężysto-plastyczna

$$(4.6.2) \quad \lambda_{sp} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}$$

jest stałą materiałową oczywiście niższą od smukłości granicznej (sprężysto-granicznej). Na przykład dla stali 015 (St 37) podstawiając dane według Ylлина otrzymujemy $\lambda_{sp} = 93,5$.

W przypadku prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych

$$(4.6.3) \quad \bar{\sigma}_{k1} = \frac{1}{k^2} \bar{\sigma}_{k0} = \bar{\mathfrak{F}} \frac{E}{k^2 \lambda_0^2}$$

Przez $\bar{\mathfrak{F}} = \bar{\mathfrak{F}}(k)$ oznaczyliśmy tu, jak zwykle, współczynnik stateczności obliczony przy założeniu prawa Hooke'a. Linię dolnej smukłości sprężysto-plastycznej, którą oznaczymy przez λ_{0sp} , określi równanie

$$(4.6.4) \quad \lambda_{0sp} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\bar{\mathfrak{F}} E}{\sigma_{pl}}}$$

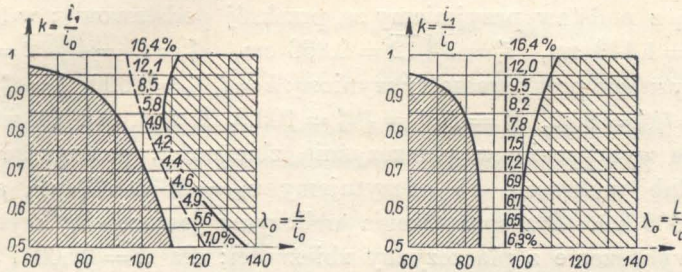
W przypadku prętów płasko zbieżnych otrzymamy natomiast

$$(4.6.5) \quad \lambda_{0sp} = \sqrt{\frac{\bar{\mathfrak{F}} E}{k \sigma_{pl}}}$$

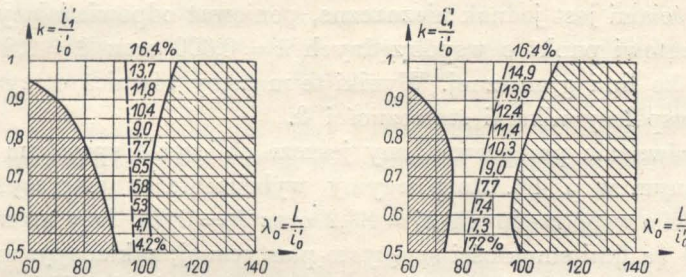
Rysunek 19 uwidacznia linie smukłości dolnej plastyczno-granicznej, sprężysto-granicznej i sprężysto-plastycznej dla prętów zbieżnych ze stali 015, jednostronnie utwierdzonych i opartych dwuprzegubowo. Obok linii smukłości sprężysto-plastycznej jako linii równych błędów w obu sposobach obliczeń podano procentowe wartości tych błędów. Jedynie dla błędów przyrządowych błędy dochodzą do 16,4%; w przypadku prętów o mniejszych wartościach zbieżności k możemy w przybliżeniu traktować wyboczenie jako idealnie sprężyste lub idealnie plastyczne, nie popełniając błędu większego od kilku procent.

Przy obliczaniu siły krytycznej dla prętów zbieżnych podanym wyżej sposobem przybliżonym odpada konieczność posługiwania się dużą liczbą tablic lub wykresów. Przebiegi linii, podanych na rys. 19 dla stali 015 lub analogicznych dla innych materiałów, można bowiem zapamiętać w ogólnej formie i od razu z tych danych zorientować się, czy wyboczenie pręta będzie bardziej zbliżone do wyboczenia sprężystego, czy do wyboczenia plastycznego. Obliczenie jednak za pomocą tablic 7-18 lub podobnych dla innych materiałów nie wymaga jednak więcej pracy, a jest znacznie dokładniejsze.

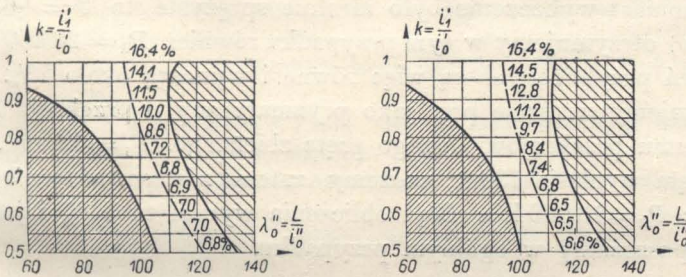
1. Pręty jednostronnie utwierdzone 2. Pręty zamocowane dwuprzegubowo
 a. Pręty przestrzennie równomiernie zbieżne



b. Pręty płasko zbieżne, wyoboczenie w płaszczyźnie zbieżności



c. Pręty płasko zbieżne, wyoboczenie z płaszczyzny zbieżności



Zakres plastyczny: błąd mniejszy od 1% przy obliczeniu przyjmującym naprężenia krytyczne σ_{k1} równe granicy plastyczności σ_{pl}

Zakres sprężysty: błąd mniejszy od 1% przy obliczeniu przyjmującym sprężystość odkształceń

Linia równych błędów przy obu sposobach obliczeń przybliżonych (smukłość sprężysto-plastyczna). Wielkości tych błędów są podane w procentach.

Rys. 19. Zakres stosowalności przybliżonych obliczeń sił krytycznych dla prętów zbieżnych ze stali 015

4.7. Przykład liczbowy. Obliczymy siłę krytyczną dla pręta zamocowanego dwuprzegubowo, płasko zbieżnego, o przekrojach prostokątnych; wymiary jednej z podstaw wynoszą 5×4 cm, a drugiej odpowiednio 3×4 cm; długość pręta $l = 120$ cm. Założymy, że materiałem pręta jest stal 015.

Większą z podstaw przyjmijmy za przekrój podstawowy; w takim razie $i'_0 = 5 \sqrt{12} = 1,443$ cm, $i'_1 = 3 \sqrt{12} = 0,866$ cm, $i''_0 = i''_1 = 4 \sqrt{12} = 1,155$ cm, a charakteryzujące pręt parametry wyniosą: $k = i'_1/i'_0 = 0,600$, $\xi = i''_0/i'_0 = 0,800$, $\lambda'_0 = L/i'_0 = l/i'_0 = 83,2$, $\lambda''_0 = L/i''_0 = l/i''_0 = 103,9$. Z wykresu 18 wnosimy, że pręt ulegnie wyboczeniu w płaszczyźnie zbieżności; posługując się zatem tablicą 16 lub wykresem 15 odczytujemy $\sigma'_{k0} = 1330$ kG/cm², skąd $P_k = P'_k = 26\,600$ kG. Dla sprawdzenia obliczymy jeszcze siłę krytyczną, powodującą wyboczenie z płaszczyzny zbieżności: dla $k = 0,600$ i $\lambda''_0 = 103,9$ odczytujemy z tablicy 18 lub z wykresu 17 $\sigma''_{k0} = 1370$ kG/cm²; siła krytyczna $P''_k = 27\,400$ kG jest więc istotnie większa od P'_k . Różnica między tymi wartościami jest jednak nieznaczna, ponieważ odpowiadający rozpatrywanemu prętowi punkt o współrzędnych $k = 0,600$ oraz $\xi = 0,800$ leży na rys. 18 blisko linii granicznej. Wyniki te możemy również otrzymać posługując się współczynnikami stateczności \mathfrak{F} .

Dla porównania przeprowadzimy jeszcze obliczenie sposobem przybliżonym, opisanym w p. 4.6. Rozpatrzmy wyboczenie w płaszczyźnie zbieżności. Punkt o współrzędnych $\lambda''_0 = 83,2$ oraz $k = 0,600$ leży na wykresie 2b rysunku 19 na linii smukłości sprężysto-plastycznej; zakładając więc sprężystość lub plastyczność wyboczenia popełniamy równe błędy. W istocie, gdyby wyboczenie było idealnie plastyczne, to $P_k = \sigma_{pl} F_1 = 2370 \cdot 3 \cdot 4 = 28\,400$ kG; gdyby natomiast wyboczenie było idealnie sprężyste, to $\mathfrak{F} = 4,68$; stosując wzór (3.2.10) otrzymujemy w tym przypadku również $P_k = 28\,400$ kG. Błędy obu obliczeń przybliżonych są więc równe i wynoszą około 7%.

Potraktujemy wreszcie pręt jako pryzmatyczny o przekroju F , równym najmniejszemu przekrojowi danego pręta zbieżnego, $F_1 = 12$ cm². Smukłość takiego pręta wyniesie 138,6; możemy zatem zastosować wzór Eulera, otrzymując $P_k = 13\,000$ kG. Błąd obliczenia wynosi tu 51% i jest, oczywiście, niedopuszczalny w ogólnym przypadku.

5. Uwagi końcowe i wnioski

Metoda «założenia równania ściślego» pozwoliła rozwiązać zagadnienie wyboczenia sprężysto-plastycznego prętów przestrzennie równomiernie i płasko zbieżnych w głównej mierze dzięki ominięciu całkowań, występujących zarówno przy rozwiązywaniu odpowiednich równań różniczkowych zginania, jak i przy zastosowaniu metod przybliżonych Ritz'a, Galerkin'a i innych. Posługiwanie się rozważaną metodą może napotykać na trudności przy bezpośrednim obliczaniu siły krytycznej dla danego pręta niepryzmatycz-

nego, jednak metoda ta dobrze nadaje się do sporządzenia zbiorczych wykresów i tablic, z których korzystanie w praktyce inżynierskiej nie przedstawia żadnych trudności.

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. N. Dinnik, *Ustojcziwost' uprugich sistem*, Akad. Nauk ZSSR, Moskwa-Leningrad 1950.
- [2] B. G. Galerkin, *Sobranje sočinienij t. 1*, Akad. Nauk ZSSR, Moskwa 1952.
- [3] M. T. Huber, *Stereomechanika techniczna*, t. 2 i 4, Państw. Zakł. Wyd. Szkoln., Warszawa 1951.
- [4] F. S. Jasiński, *Izbrannyje raboty po ustojcziwosti szatych stierżniej*, Gos-
techizdat, Moskwa-Leningrad 1952.
- [5] K. Ježek, *Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl*, Springer, Wiedeń 1937.
- [6] T. Kármán, *Untersuchungen über Knickfestigkeit*, Perlin 1910.
- [7] S. E. Mikieladze, *Nowyje metody intiegrirowanja differencjalnych uraw-
nienij*, Gos-
techizdat, Moskwa-Leningrad 1951.
- [8] J. Mutermilch, *Ścisły wzór na krzywiznę w zastosowaniu do mimośrod-
kowego ściskania*, Arch. Mech. Stos., t. 1, Gdańsk 3 (1949).
- [9] J. Naleszkiewicz, *Rozważania ogólnie nad zginaniem prostych belek
ściskanych*, Księga Jubil. dla Uczcz. Zasług Prof. M. T. Hubera, Gdańsk 1950.
- [10] J. Naleszkiewicz, *Wytrzymałość konstrukcji lotniczych*, Państw. Zakł.
Wyd. Szkoln., 1950.
- [11] J. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Wydawn. Komu-
nik., Warszawa 1953.
- [12] W. Nowacki *Z zastosowań rachunku różnic skończonych w mechanice
budowli*, Arch. Mech. Stos., t. 3, Gdańsk 1951.
- [13] M. Piątek, *Linia ugięcia belki obustronnie utwierdzonej przy dowolnym
obciążeniu i zmiennym przekroju*, cz. III Mat. nadesł. na VI Zjazd Nauk. PZITB
w Gdańsku, Wydawn. Min. Pudown., Nr 37.
- [14] A. Pflüger, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer, Berlin-Getynga-
Heidelberg 1950.
- [15] S. D. Ponomariew i inni. *Osnowy sowremiennych metodow rasczeta na
procnost' w maszynostrojenji*, Maszgiz., 1952.
- [16] M. Stark, *Geometria analityczna*, Polskie Tow. Matem., Warszawa-Wroc-
ław 1951.
- [17] R. V. Southwell, *An Introduction to the Theory of Elasticity*, wyd. 2
1941 (tłum. ros. Moskwa 1948).
- [18] F. Szelański, *W sprawie stateczności prętów o zmiennym momencie
bezwładności*, Wydawn. Przgl. Techn., Warszawa 1927.
- [19] F. Szelański, *W sprawie wyznaczania krytycznych wartości obciążeń
prętów o zmiennym momencie bezwładności*, cz. III Mat. nadesł. na VI Zjazd Nauk.
PZITB w Gdańsku, Wydawn. Min. Budown., Nr 37.
- [20] I. W. Urban, *Ustojcziwost' szatno stierżnja w zonie pieriechodnoj krivoj
diagrammy szatja*, Trudy MEMIT, z. 60, Transzeldo izdat, Moskwa 1951
- [21] A. Ylinen, *Die Knickfestigkeit eines zentrisch gedrückten Stabes im ela-
stischen und unelastischen Bereich*, rozpr. doktorska, Helsinki 1938 (cyt. według [3]).
- [22] K. Z weiling, *Gleichgewicht und Stabilität*, VEB Verl. Technik, Berlin 1953.