


JERZY LEYKO

WYTRZYMAŁOŚĆ ŻEBROWANEJ POWŁOKI STOŻKOWEJ
OBCIĄŻONEJ KOŁOWO SYMETRYCZNIE



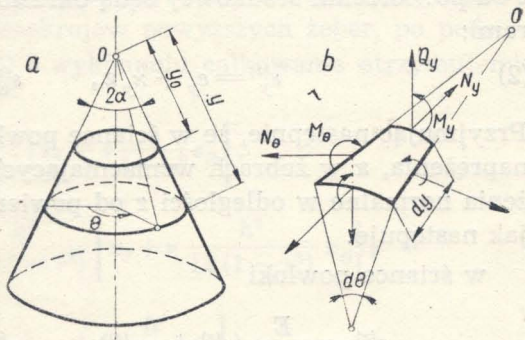
ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XLVII

W wielu przypadkach dla zwiększenia wytrzymałości i sztywności powłok stosuje się wzmocnienia w postaci żeber, które dla powłoki o środkowej powierzchni będącej powierzchnią obrotową przebiegają z reguły wzdłuż równoleżników i południków tej powierzchni. Gdy żebra wzmocniające powłokę są umieszczone dostatecznie gęsto, powłokę taką można rozpatrywać jako ortotropową, której sposób obliczenia wykazuje jednakże pewne różnice w porównaniu ze sposobem obliczenia powłoki wykonanej z materiału o własnościach ortotropowych o stałej grubości. Celem niniejszej pracy jest podanie metody obliczenia powłoki stożkowej wzmocnionej żebrami symetrycznie położonymi w stosunku do jej środkowej powierzchni i poddanej działaniu kołowo symetrycznego obciążenia.

Położenie dowolnego punktu na środkowej powierzchni powłoki stożkowej możemy określić za pomocą dwóch parametrów: odległości y mierzonych od wierzchołka stożka wzdłuż tworzącej oraz kąta θ odmierzanego w płaszczyźnie prostopadłej do osi stożka, tak jak to pokazano na rys. 1a. Ponieważ rozpatrywać będziemy przypadek symetrycznego obciążenia powłoki, siły wewnętrzne wywołane tym obciążeniem nie będą zależały od kąta θ i będą jedynie funkcjami parametru y . Rys. 1b przedstawia element wycięty myślowo z powłoki normalnymi poprowadzonymi wzdłuż linii $y = \text{const}$, $y + dy = \text{const}$,

$\theta = \text{const}$ i $\theta + d\theta = \text{const}$; na rysunku tym zaznaczono również siły wewnętrzne działające w odpowiednich przekrojach. Zgodnie z powyższym rysunkiem używać będziemy dalej następujących oznaczeń: N_y oznacza jednostkową siłę normalną w przekroju $y = \text{const}$, Q_y jednostkową siłę tnącą w przekroju $y = \text{const}$, M_y jednostkowy moment gnący

w tymże przekroju, N_θ jednostkową siłę normalną w przekroju $\theta = \text{const}$, M_θ jednostkowy moment gnący w tymże przekroju; Y i Z oznaczają



Rys. 1

składowe obciążenia zewnętrznego odpowiednio wzdłuż tworzącej i wzdłuż normalnej do środkowej powierzchni powłoki, odniesione do jednostki pola tej powierzchni.

Równania równowagi rozpatrywanego elementu powłoki stożkowej, będące szczególnym przypadkiem równań równowagi dla powłoki obrotowej obciążonej symetrycznie, mają następującą postać:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dy}(N_y y) - N_\theta + yY = 0, \\ N_\theta \cos \alpha + \sin \alpha \frac{d}{dy}(Q_y y) + yZ = 0, \\ \frac{d}{dy}(M_y y) - M_\theta - Q_y y = 0. \end{cases}$$

W równaniach tych α oznacza kąt, pod którym tworzące stożka są nachylone do jego osi (rys. 1a). Pierwsze dwa z powyższych równań otrzymujemy przyrównując do zera sumy rzutów sił działających na element powłoki na tworzącą oraz na normalną do powierzchni stożka; trzecie równanie jest równaniem momentów.

Ponieważ w układzie trzech równań różniczkowych (1) występuje pięć niewiadomych funkcji, należy wyrazić zgodnie z przybliżonymi założeniami ogólnej teorii powłok siły wewnętrzne N_y , N_θ , M_y i M_θ przez składowe przemieszczeń punktów środkowej powierzchni powłoki. Oznaczamy przez ε_y i ε_θ wydłużenie względne elementu środkowej powierzchni powłoki w kierunku tworzącej i kierunku obwodowym, a przez κ_y i κ_θ odpowiednie zmiany krzywizny powstałe wskutek odkształcenia powłoki. Wydłużenia względne elementów położonych w odległości z od powierzchni środkowej będą określone wówczas następującymi wzorami:

$$(2) \quad \varepsilon_y^{(z)} = \varepsilon_y + \kappa_y z, \quad \varepsilon_\theta^{(z)} = \varepsilon_\theta + \kappa_\theta z.$$

Przyjmując następnie, że w ścianie powłoki panuje dwukierunkowy stan naprężenia, a w żebrach wzmacniających stan jednokierunkowy, naprężenia normalne w odległości z od powierzchni środkowej określone będą jak następuje:

w ścianie powłoki

$$\sigma_y^{(z)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^{(z)} + \nu \varepsilon_\theta^{(z)}), \quad \sigma_\theta^{(z)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta^{(z)} + \nu \varepsilon_y^{(z)}),$$

w żebrach wzdłużnych

$$(3.1) \quad \sigma_y^{(z)} = E \varepsilon_y^{(z)},$$

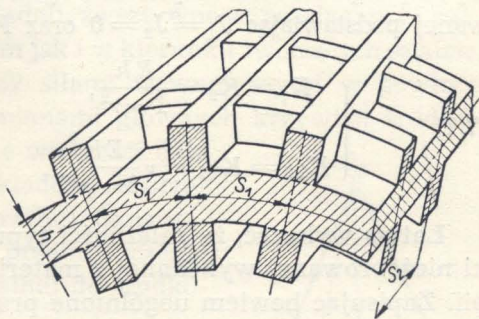
w żebrach obwodowych

$$(3.2) \quad \sigma_{\Theta}^{(z)'} = E \varepsilon_{\Theta}^{(z)}.$$

Oznaczając przez s_1 i s_2 podziałki rozstawienia żeber wzdłużnych i obwodowych (rys. 2), a przez h grubość ścianki powłoki, średnie wartości jednostkowych sił normalnych i momentów gnących wyrazimy, jak następuje:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y^{(z)} dz + \frac{1}{s_1} \int_{F_1} \sigma_y^{(z)'} dF, \quad N_{\Theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\Theta}^{(z)} dz + \frac{1}{s_2} \int_{F_2} \sigma_{\Theta}^{(z)'} dF, \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y^{(z)} dz + \frac{1}{s_1} \int_{F_1} z \sigma_y^{(z)'} dF, \quad M_{\Theta} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\Theta}^{(z)} dz + \frac{1}{s_2} \int_{F_2} z \sigma_{\Theta}^{(z)'} dF. \end{array} \right.$$

Drugie z całek występujących po prawej stronie powyższych równań odnoszą się do żeber podłużnych i poprzecznych powłoki i obszar całkowania jest rozciągnięty wobec tego na powierzchni przekroju poprzecznego odpowiednich żeber. Powierzchnie te zostały gęsto zakreskowane na rysunku 2. Oznaczając zgodnie ze wzorami (4) przez F_1 pole przekroju poprzecznego żebra wzdłużnego, przez F_2 pole przekroju poprzecznego żebra obwodowego, a przez J_1 i J_2 momenty bezwładności przekrojów powyższych żeber, po podstawieniu wzorów (3) do równań (4) i wykonaniu całkowania otrzymujemy



Rys. 2

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_y = E \left[\left(\frac{F_1}{s_1} + \frac{h}{1-\nu^2} \right) \varepsilon_y + \nu \frac{h}{1-\nu^2} \varepsilon_{\Theta} \right], \\ M_y = E \left\{ \left[\frac{J_1}{s_1} + \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \right] \varkappa_y + \nu \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \varkappa_{\Theta} \right\}, \\ N_{\Theta} = E \left[\left(\frac{F_2}{s_2} + \frac{h}{1-\nu^2} \right) \varepsilon_{\Theta} + \nu \frac{h}{1-\nu^2} \varepsilon_y \right], \\ M_{\Theta} = E \left\{ \left[\frac{J_2}{s_2} + \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \right] \varkappa_{\Theta} + \nu \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \varkappa_y \right\}. \end{array} \right.$$

Wprowadzając jeszcze następujące oznaczenia:

$$(6) \quad \begin{cases} K_1 = E \left(\frac{F_1}{s_1} + \frac{h}{1-\nu^2} \right), & D_1 = E \left[\frac{J_1}{s_1} + \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \right], \\ K_2 = E \left(\frac{F_2}{s_2} + \frac{h}{1-\nu^2} \right), & D_2 = E \left[\frac{J_2}{s_2} + \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \right], \\ K_{1,2} = K_{2,1} = \nu \frac{h}{1-\nu^2}, & D_{1,2} = D_{2,1} = \nu \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}, \end{cases}$$

wzory (5) możemy przepisać w postaci:

$$(7) \quad \begin{cases} N_y = K_1 \varepsilon_y + K_{1,2} \varepsilon_\theta, & N_\theta = K_2 \varepsilon_\theta + K_{2,1} \varepsilon_y, \\ M_y = D_1 \varkappa_y + D_{1,2} \varkappa_\theta, & M_\theta = D_2 \varkappa_\theta + D_{2,1} \varkappa_y. \end{cases}$$

W powyższych zależnościach K_1 i K_2 oznaczają zastępcze sztywności rozciągania powłoki w kierunku tworzącej i w kierunku obwodowym, zaś D_1 i D_2 odpowiednie sztywności zginania. W przypadku powłoki nieźebrowanej podstawiając $J_1 = J_2 = 0$ oraz $F_1 = F_2 = 0$, otrzymujemy

$$(7.1) \quad \begin{cases} K_1 = K_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}, & D_1 = D_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \\ K_{1,2} = K_{2,1} = \nu \frac{Eh}{1-\nu^2}, & D_{1,2} = D_{2,1} = \nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \end{cases}$$

Łatwo wykazać, że zależności typu (7) stosują się również dla powłoki nieźebrowanej wykonanej z materiału o kołowo symetrycznej ortotropii. Zapisując bowiem uogólnione prawo Hooke'a w postaci

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_1} - \nu_1 \frac{\sigma_\theta}{E_1}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_2} - \nu_2 \frac{\sigma_y}{E_2},$$

po wykonaniu prostych rachunków dochodzimy do wzorów w postaci (7), przy czym otrzymujemy w tym przypadku

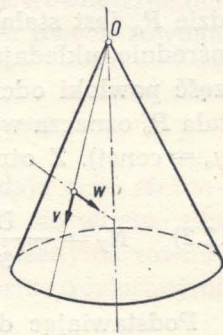
$$(7.2) \quad \begin{cases} K_1 = \frac{E_1 h}{1-\nu_1 \nu_2}, & D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, \\ K_2 = \frac{E_2 h}{1-\nu_1 \nu_2}, & D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, \\ K_{1,2} = \nu_1 \frac{E_2 h}{1-\nu_1 \nu_2}, & D_{1,2} = \nu_1 \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, \\ K_{2,1} = \nu_2 \frac{E_1 h}{1-\nu_1 \nu_2}, & D_{2,1} = \nu_2 \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}. \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę zależność $\nu_1/E_1 = \nu_2/E_2$ mamy tak jak poprzednio $K_{1,2} = K_{2,1}$, $D_{1,2} = D_{2,1}$.

Ze wzorów (6) wynika, że w przypadku gdy ścianka powłoki ma stałą grubość ($h = \text{const}$), zastępcze sztywności w kierunku obwodowym tj. K_2 i D_2 będą stałe, jeżeli podziałka żeber obwodowych s_2 i przekrój tych żeber będą niezmiennie. Co się tyczy odpowiednich sztywności w kierunku tworzącej, to z uwagi na to, że przy symetrycznym rozłożeniu żeber wzdłużnych s_1 wzrasta proporcjonalnie do odległości od wierzchołka stożka, zastępcze sztywności K_1 i D_1 będą pozostawały stałe (czyli niezależne od zmiennej y) tylko w przypadku, gdy przekrój żeber wzdłużnych będzie zmieniał się w odpowiedni sposób. Przy stałej wysokości wspomnianych żeber uzyskamy stałe sztywności K_1 i D_1 , jeżeli szerokości żeber wzdłużnych będą proporcjonalne do odległości y od wierzchołka stożka. W przybliżeniu uzyskujemy również stałe sztywności w omawianym kierunku, jeżeli żebra wzdłużne mają niezmienny przekrój, a ich liczba na obwodzie powłoki stopniowo wzrasta wraz z odległością od wierzchołka. W tym ostatnim przypadku należy brać pod uwagę wartości średnie. W dalszych naszych rozważaniach będziemy zakładali, że sztywności rozciągania i zginania zarówno w kierunku obwodowym jak i w kierunku tworzących są stałe.

Wzory (7) podają związki między siłami wewnętrznymi w powłoce i wydłużeniami względnymi oraz zmianami głównych krzywizn środkowej powierzchni powłoki. Te ostatnie wielkości dają się wyrazić z kolei w zależności od składowych przemieszczeń punktów środkowej powierzchni. Oznaczając przez v i w (rys. 3) składowe przemieszczenie wzdłuż tworzącej oraz wzdłuż normalnej do środkowej powierzchni mamy, [1],

$$(8) \quad \begin{cases} \varepsilon_y = \frac{dv}{dy}, & \varepsilon_\theta = \frac{v}{y} - \frac{w}{y} \operatorname{ctg} \alpha, \\ \kappa_y = \frac{d^2 w}{dy^2}, & \kappa_\theta = \frac{1}{y} \frac{dw}{dy}. \end{cases}$$



Rys. 3

Po rozwiązaniu pierwszych dwóch równań (7) względem ε_y i ε_θ uwzględniając wyżej podane zależności otrzymujemy

$$(9) \quad \begin{cases} \varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = \frac{K_2 N_y - K_{1,2} N_\theta}{K_1 K_2 - K_{1,2}^2}, \\ \varepsilon_\theta = \frac{v}{y} - \frac{w}{y} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{K_1 N_\theta - K_{1,2} N_y}{K_1 K_2 - K_{1,2}^2}. \end{cases}$$

Mnożąc stronami drugie z powyższych równań przez $y \operatorname{tg} \alpha$ i różniczkując je następnie względem zmiennej y znajdujemy

$$\frac{dv}{dy} \operatorname{tg} \alpha - \frac{dw}{dy} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{K_1 K_2 - K_{1,2}^2} \frac{d}{dy} [y (K_1 N_\theta - K_{1,2} N_y)].$$

Z otrzymanego wyżej równania i pierwszego równania (9) wyznaczamy pochodną dw/dy :

$$(10) \quad \frac{K_1 K_2 - K_{1,2}^2}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{dw}{dy} = (K_2 N_y - K_{1,2} N_\theta) - \frac{d}{dy} [y (K_1 N_\theta - K_{1,2} N_y)].$$

Wprowadzimy nowe zmienne U i V , tzw. zmienne Meissnera, [1], określone jak następuje:

$$(11) \quad U = Q_y y, \quad V = \frac{dw}{dy}.$$

W zależności od zmiennej U możemy wyrazić niewiadome siły jednostkowe N_y i N_θ . Na podstawie drugiego z równań równowagi (1) mamy

$$(12.1) \quad N_\theta = -\operatorname{tg} \alpha \frac{dU}{dy} - y \frac{Z}{\cos \alpha}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do pierwszego równania równowagi i całkując następnie to równanie względem y znajdujemy

$$N_y y + U \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \int_{y_0}^y y Z dy + \int_{y_0}^y y Y dy + P_0 = 0,$$

gdzie P_0 jest stałą całkowania. Ostatnie równanie można otrzymać bezpośrednio, układając warunek rzutów na oś stożka dla sił działających na część powłoki odciętą przekrojem $y = \text{const}$. Jak łatwo przekonać się, stała P_0 oznacza wypadkową sił przyłożonych do górnego brzegu powłoki ($y_0 = \text{const}$). Z otrzymanego wyżej równania znajdujemy

$$(12.2) \quad N_y = -\frac{U}{y} \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{y \cos \alpha} \int_{y_0}^y y Z dy - \frac{1}{y} \int_{y_0}^y y Y dy - \frac{P_0}{y}.$$

Podstawiając do równania (10) wyrażenie (12.1) i (12.2) określające N_y oraz N_θ w zależności od nowej zmiennej U otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$(13) \quad y \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{dU}{dy} - \frac{K_2}{K_1} \frac{U}{y} = \frac{K_1 K_2 - K_{1,2}^2}{K_1 \operatorname{tg}^2 \alpha} V + f(y).$$

Występująca z prawej strony powyższego równania funkcja zmiennej y zależy od składowych Y i Z obciążenia zewnętrznego powłoki i ma postać

$$f(y) = \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ \frac{K_2}{K_1} \frac{1}{y} \left[\int_{y_0}^y y (Z + Y \cos \alpha) dy + P_0 \right] - y \left(2Z + y \frac{dZ}{dy} \right) + \frac{K_{1,2}}{K_1} Y y \cos \alpha \right\}.$$

Aby otrzymać drugie równanie różniczkowe służące do określenia niewiadomych funkcji U i V , podstawiamy do trzeciego z równań równowagi (1) wyrażenia na momenty gnące; wyrażenia te po uwzględnieniu związków (7), (8) i (11) przybierają następującą postać:

$$(14) \quad M_1 = -D_1 \frac{dV}{dy} - D_{1,2} \frac{V}{y}, \quad M_\theta = -D_2 \frac{V}{y} - D_{1,2} \frac{dV}{dy}.$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do wymienionego poprzednio równania równowagi i wykonaniu prostych przekształceń otrzymujemy

$$(15) \quad y \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{dV}{dy} - \frac{D_2}{D_1} \frac{V}{y} = -\frac{1}{D_1} U.$$

Równania (13) i (15) stanowią układ równań różniczkowych liniowych niejednorodnych, których ogólne rozwiązania równe są sumom rozwiązań szczególnych równań niejednorodnych i rozwiązań ogólnych odpowiedniego układu równań jednorodnych. Rozwiązania szczególne zależą od postaci funkcji $f(y)$, która z kolei zależy od zewnętrznego obciążenia powłoki. Jako rozwiązanie szczególne dla rozpatrywanego przypadku można w przybliżeniu przyjąć rozwiązanie odpowiadające błonowemu stanowi napięcia w powłoce, dla którego $M_y = M_\theta = Q_y = 0$. Siły wewnętrzne dla tego przypadku wyznacza się bezpośrednio z pierwszych dwóch równań układu (1), które przyjmują wówczas postać

$$(16) \quad \frac{d}{dy} (N_y y) - N_\theta + y Y = 0, \quad N_\theta \cos \alpha + y Z = 0.$$

Rozwiązania układu równań jednorodnych odpowiadają tzw. efektowi brzegowemu, to jest stanowi napięcia pojawiającemu się wtedy, gdy powłoka obciążona jest tylko na brzegach siłami rozłożonymi równomiernie i prostopadłymi do osi powłoki oraz równomiernie rozłożonymi momentami zginającymi.

Jednorodne równania różniczkowe dla rozpatrywanego przypadku na podstawie (13) i (15) mają następującą postać:

$$(17) \quad \begin{cases} y \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{dU}{dy} - \frac{K_2}{K_1} \frac{U}{y} = \lambda_1 V, \\ y \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{dV}{dy} - \frac{D_2}{D_1} \frac{V}{y} = -\lambda_2 U. \end{cases}$$

W równaniach tych wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(18) \quad \lambda_1 = \frac{K_1 K_2 - K_{1,2}^2}{K_1 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{D_1}.$$

Gdy stosunek sztywności rozciągania w kierunku obwodowym do sztywności rozciągania w kierunku tworzącej równy jest stosunkowi od-

powiednich sztywności zginania, rozwiązanie układu równań różniczkowych sprowadzić można metodą podaną przez *Meissnera* do rozwiązania jednego równania różniczkowego rzędu drugiego. Oznaczając wówczas przez m wspólną wartość tych stosunków, tj. przyjmując

$$m = \frac{K_2}{K_1} = \frac{D_2}{D_1}$$

oraz zakładając, że

$$(19) \quad \lambda_1 V = \pm i \mu^2 U, \quad -\lambda_2 U = \pm i \mu^2 V,$$

otrzymujemy dla funkcji U następujące równania różniczkowe:

$$y \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{dU}{dy} - m \frac{U}{y} \pm i \mu^2 U = 0.$$

Identyczne równania spełnia oczywiście również funkcja V .

Z równań (19) znajdujemy

$$(20) \quad \mu^4 = \lambda_1 \lambda_2, \quad \mu = \sqrt[4]{\lambda_1 \lambda_2} = \sqrt[4]{\frac{K_1 K_2 - K_{1,2}^2}{K_1 D_1 \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Każde z rozwiązań równań (20) oraz analogicznych równań dla funkcji V spełnia układ równań różniczkowych (17). Ponieważ równania (20) są względem siebie sprzężone, gdyż różnią się tylko znakiem przy wyrazie $i \mu^2 U$, to część rzeczywista jak i część urojona rozwiązania któregośkolwiek z równań (20) jest także rozwiązaniem układu równań (17). Wystarczy wobec tego znaleźć dwa niezależne od siebie rozwiązania szczególne jednego z równań (20), a liniowa kombinacja części rzeczywistych i urojonych tych rozwiązań będzie poszukiwanym rozwiązaniem ogólnym równania.

Wprowadzając nową zmienną niezależną

$$(21) \quad \eta = 2\mu \sqrt{i} \sqrt{y}$$

i biorąc pod uwagę pierwsze z równań (20) otrzymujemy po prostych przekształceniach następujące równanie różniczkowe:

$$(22) \quad \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dU}{d\eta} + \left(1 - \frac{4m}{\eta^2}\right) U = 0.$$

Jest to równanie *Bessela* rzędu $p = 2\sqrt{m}$, którego rozwiązanie wyraża się w znany sposób przez funkcje walcowe. Ogólne rozwiązanie równania dla funkcji U otrzymujemy następnie w podany poprzednio sposób. Funkcje V określamy z pierwszego równania (17), na podstawie którego znajdziemy

$$V = \frac{1}{\lambda_1} \left(y \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{dU}{dy} - \frac{K_2}{K_1} \frac{U}{y} \right).$$

Równanie różniczkowe (22), a tym samym i rozwiązanie dla szczególnego przypadku stożkowej powłoki żebrowanej, dla której $K_2/K_1 = D_2/D_1 = m$, pokrywa się z rozwiązaniem uzyskanym przez *Steuermann*, [2], dla powłoki o stałej grubości z materiału ortotropowego¹⁾.

Zgodnie ze wzorami (7.2) mamy bowiem wówczas

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{E_2}{E_1}.$$

Rozpatrzony poprzednio przypadek jest dla powłoki żebrowanej przypadkiem wyjątkowym, gdyż jak wynika ze wzorów (6) na ogół $K_2/K_1 \neq D_2/D_1$.

Równania różniczkowe (17) nie dają się wówczas scałkować w podany poprzednio sposób i są równaniami tego samego typu, co otrzymane przez *Lo ve' a*, [3], przy badaniu izotropowej powłoki stożkowej o stałej grubości niesymetrycznie obciążonej. Wprowadzając nową zmienną

$$(23) \quad \zeta = 2\sqrt{y},$$

układ równań różniczkowych (17) otrzymamy w postaci:

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d^2 U}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dU}{d\zeta} - 4 \frac{K_2}{K_1} \frac{U}{\zeta^2} = \lambda_1 V, \\ \frac{d^2 V}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dV}{d\zeta} - 4 \frac{D_2}{D_1} \frac{V}{\zeta^2} = -\lambda_2 U. \end{cases}$$

Rugując z powyższych dwóch równań funkcję V otrzymujemy dla funkcji U następujące równanie różniczkowe czwartego rzędu:

$$(25) \quad \frac{d^4 U}{d\zeta^4} + \frac{2}{\zeta} \frac{d^3 U}{d\zeta^3} + \left[1 + 4 \left(\frac{K_2}{K_1} + \frac{D_2}{D_1} \right) \right] \frac{1}{\zeta^2} \frac{d^2 U}{d\zeta^2} + \left[1 + 4 \left(3 \frac{K_2}{K_1} - \frac{D_2}{D_1} \right) \right] \frac{1}{\zeta^3} \frac{dU}{d\zeta} + \left[\lambda_1 \lambda_2 - 16 \frac{K_2}{K_1} \left(1 - \frac{D_2}{D_1} \right) \frac{1}{\zeta^4} \right] U = 0.$$

Rozwiązania szczególnego powyższego równania poszukiwać będziemy w postaci

$$(26) \quad U = e^{\zeta} u.$$

¹⁾ Równanie różniczkowe uzyskane przez *Steuermann* w cytowanej pracy pokrywa się z równaniem (22) po uwzględnieniu ogólnej zależności $\nu_1/E_1 = \nu_2/E_2$.

Funkcja u musi spełniać następujące równanie różniczkowe:

$$(27) \quad \frac{d^4 u}{d\zeta^4} + \left(4r + \frac{2}{\zeta}\right) \frac{d^3 u}{d\zeta^3} + \left[6r^2 + \frac{6r}{\zeta} - \frac{1 + 4\left(\frac{K_2}{K_1} + \frac{D_2}{D_1}\right)}{\zeta^2}\right] \frac{d^2 u}{d\zeta^2} +$$

$$+ \left[4r^3 + \frac{6r^2}{\zeta} - 2r \frac{1 + 4\left(\frac{K_2}{K_1} + \frac{D_2}{D_1}\right)}{\zeta^2} + \frac{1 + 4\left(3\frac{K_2}{K_1} - \frac{D_2}{D_1}\right)}{\zeta^3}\right] \frac{du}{d\zeta} +$$

$$+ \left[r^4 + \lambda_1 \lambda_2 + \frac{2r^3}{\zeta} - r^2 \frac{1 + 4\left(\frac{K_2}{K_1} + \frac{D_2}{D_1}\right)}{\zeta^2} + \right.$$

$$\left. + r \frac{1 + 4\left(3\frac{K_2}{K_1} - \frac{D_2}{D_1}\right)}{\zeta^3} - 16\frac{K_2}{K_1} \frac{1 - \frac{D_2}{D_1}}{\zeta^4}\right] u = 0.$$

Gdy wprowadzimy jeszcze raz nową zmienną niezależną $z = 1/\zeta$, to otrzymane równanie przybierze postać:

$$(28) \quad z^8 \frac{d^4 u}{dz^4} + [12z^7 - (4r + 2z)z^6] \frac{d^3 u}{dz^3} + \left\{36z^6 - 6(4r + 2z)z^5 + \right.$$

$$+ \left[6r^2 + 6rz - \left(1 + 4\frac{K_2}{K_1} + 4\frac{D_2}{D_1}\right)z^2\right] z^4 \frac{d^2 u}{dz^2} + \left\{24z^5 - 6(4r + 2z)z^4 + \right.$$

$$+ 2\left[6r^2 + 6rz - \left(1 + 4\frac{K_2}{K_1} + 4\frac{D_2}{D_1}\right)z\right] z^3 - \left[4r^3 + 6r^2 z - 2r\left(1 + 4\frac{K_2}{K_1} + \right.\right.$$

$$\left. + 4\frac{D_2}{D_1}\right)z^2 + \left(1 + 12\frac{K_2}{K_1} - 4\frac{D_2}{D_1}\right)z^3 \left. \right\} \frac{du}{dz} + \left[r^4 + \lambda_1 \lambda_2 + 2r^3 z - \right.$$

$$\left. - r^2\left(1 + 4\frac{K_2}{K_1} + 4\frac{D_2}{D_1}\right)z^2 + r\left(1 + 12\frac{K_2}{K_1} - 4\frac{D_2}{D_1}\right)z^3 - 16\frac{K_2}{K_1}\left(1 - \frac{D_2}{D_1}\right)z^4\right] u = 0.$$

Założymy teraz, że rozwiązanie szczególne powyższego równania różniczkowego ma postać następującego szeregu:

$$(29) \quad u = z^n (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots), \quad z = \frac{1}{\zeta}.$$

Podstawiając ten szereg do równania (28) i przyrównując do zera współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej z możemy obliczyć współczynniki a_1, a_2, \dots w zależności od współczynnika a_0 , który może być przyjęty dowolnie. Przy z^n i z^{n+1} otrzymujemy następujące współczynniki:

$$a_0 (r^4 + \lambda_1 \lambda_2), \quad a_0 (2 - 4n) r^3.$$

Stąd wynika, iż aby istniało rozwiązanie w postaci szeregu (29), muszą być spełnione następujące dwa związki:

$$(30) \quad r^4 = -\lambda_1 \lambda_2 = -\frac{K_1 K_2 - K_{1,2}^2}{K_1 D_1 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad n = \frac{1}{2}.$$

Otrzymujemy więc cztery niezależne rozwiązania szczególne równania (25) posiadające postać (26) i odpowiadające czterem pierwiastkom zespolonym pierwszego z równań (30), a tym samym mamy wyznaczone ogólne rozwiązanie dla funkcji U .

Należy zaznaczyć, że szereg o postaci (29) określa tzw. asymptotyczne przedstawienie rozwiązania równania (28). Ograniczając się do skończonej liczby wyrazów tego szeregu można z wystarczającą dokładnością obliczyć wartość funkcji u pomimo tego, że szereg (29) jest na ogół rozbieżny, [3], [4].

Gdy mamy już ogólne rozwiązanie dla funkcji $U(\zeta)$, drugą niewiadomą funkcję $V(\zeta)$ znajdujemy bezpośrednio z pierwszego równania (24).

Po określeniu funkcji $U(\zeta)$ i $V(\zeta)$ momenty gnące w powłoce znajdujemy z równań (14) biorąc pod uwagę, że $\zeta = 2\sqrt{y}$.

Siły N_y i N_θ wyznaczamy na podstawie zależności (12.1) i (12.2), które w rozpatrywanym przypadku ($Y = Z = P_0 = 0$) przybierają postać

$$(31) \quad N_\theta = -\operatorname{tg} \alpha \frac{dU}{dy}, \quad N_y = -\operatorname{tg} \alpha \frac{U}{y}.$$

Podany powyżej sposób rozwiązania zagadnienia wymaga żmudnych rachunków liczbowych, zwłaszcza przy obliczaniu współczynników szeregu (29). Dlatego też dla określenia efektu brzegowego dla krawędzi leżącej w dużej odległości od wierzchołka stożka można uciec się do metody asymptotycznego całkowania układu równań różniczkowych (17), stosowanej z powodzeniem do powłok obrotowych izotropowych o stałej grubości, [5]. W tym celu w równaniach (24) wprowadzimy nową zmienną niezależną

$$(32) \quad \xi = \mu_1 \zeta = 2\mu_1 \sqrt{y},$$

gdzie

$$(33) \quad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{K_1 K_2 - K_{1,2}^2}{K_1 D_1 \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

oraz nowe niewiadome funkcje U_1 i V_1 określone poniższymi zależnościami:

$$(34) \quad U = \frac{U_1}{\sqrt{\xi}}, \quad V = \frac{V_1}{\sqrt{\xi}}.$$

Równania (24) po wprowadzeniu nowych zmiennych przybierają postać

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{d^2 U_1}{d \xi^2} - \frac{4}{\xi^2} \left(\frac{K_2}{K_1} - \frac{1}{4} \right) U_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1^2} V_1, \\ \frac{d^2 V_1}{d \xi^2} - \frac{4}{\xi^2} \left(\frac{D_2}{D_1} - \frac{1}{4} \right) V_1 = -\frac{\lambda_2}{\mu_1^2} U_1. \end{cases}$$

Ponieważ w powłoce obciążonej tylko na brzegach siły wewnętrzne i odkształcenia maleją bardzo szybko w miarę oddalania się od obciążonego brzegu, przeto w punktach odległych od wierzchołka stożka drugie pochodne funkcji U_1 i V_1 są znacznie większe od wartości samych funkcji podzielonych przez ξ^2 . Stąd wynika, że w równaniach (35) można w lewych stronach pominąć wyrazy, w których występują funkcje U_1 i V_1 i pozostawić tylko drugie pochodne. Równania (35) zostają zastąpione wówczas następującymi przybliżonymi równaniami wystarczająco dokładnymi dla punktów leżących w dużej odległości od wierzchołka stożka:

$$(36) \quad \frac{d^2 U_1}{d \xi^2} = \frac{\lambda_1}{\mu_1^2} V_1, \quad \frac{d^2 V_1}{d \xi^2} = -\frac{\lambda_2}{\mu_1^2} U_1.$$

Rugując z powyższych równań V_1 otrzymujemy równanie różniczkowe czwartego rzędu określające funkcję U_1 :

$$(37) \quad \frac{d^4 U_1}{d \xi^4} + 4 U_1 = 0.$$

Ogólne rozwiązanie powyższego równania jest następujące:

$$(38.1) \quad U_1 = e^\xi (c_1 \cos \xi + c_2 \sin \xi) + e^{-\xi} (c_3 \cos \xi + c_4 \sin \xi).$$

Z pierwszego równania układu (36) znajdujemy następnie V_1 :

$$(38.2) \quad V_1 = \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} \frac{d^2 U_1}{d \xi^2} = \frac{2 \mu_1^2}{\lambda_1} [e^\xi (-c_1 \sin \xi + c_2 \cos \xi) + e^{-\xi} (c_3 \sin \xi - c_4 \cos \xi)].$$

Po określeniu funkcji U_1 i V_1 możemy wyznaczyć wszystkie siły wewnętrzne w rozważanej powłoce. Biorąc pod uwagę, że $\xi = 2 \mu_1 \sqrt{y}$, i uwzględniając zależności (34) na podstawie równań (31) znajdujemy:

$$(39.1) \quad \begin{cases} N_y = -4 \mu_1^2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\xi^2 \sqrt{\xi}} [e^\xi (c_1 \cos \xi + c_2 \sin \xi) + e^{-\xi} (c_3 \cos \xi + c_4 \sin \xi)], \\ N_\theta = -2 \mu_1^2 \operatorname{tg} \alpha \frac{e^\xi}{\xi \sqrt{\xi}} \left\{ c_1 \left[\left(1 - \frac{1}{2 \xi} \right) \cos \xi - \sin \xi \right] + c_2 \left[\left(1 - \frac{1}{2 \xi} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin \xi + \cos \xi \right] \right\} + 2 \mu_1^2 \operatorname{tg} \alpha \frac{e^{-\xi}}{\xi \sqrt{\xi}} \left\{ c_3 \left[\left(1 + \frac{1}{2 \xi} \right) \cos \xi + \sin \xi \right] + \right. \\ \left. + c_4 \left[\left(1 + \frac{1}{2 \xi} \right) \sin \xi - \cos \xi \right] \right\}. \end{cases}$$

Opierając się na wzorach (14) otrzymujemy dalej następujące wyrażenia na momenty gńące:

$$(39.2) \quad \left\{ \begin{aligned} M_y &= \frac{e^\xi}{\xi \sqrt{\xi}} \left\{ c_1 \left[\left(1 - \frac{1}{2\xi} \right) \sin \xi + \cos \xi + \frac{2}{\xi} \frac{D_{1,2}}{D_1} \sin \xi \right] + \right. \\ &\quad \left. + c_2 \left[- \left(1 - \frac{1}{2\xi} \right) \cos \xi + \sin \xi - \frac{2}{\xi} \frac{D_{1,2}}{D_1} \cos \xi \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{e^{-\xi}}{\xi \sqrt{\xi}} \left\{ c_3 \left[\left(1 + \frac{1}{2\xi} \right) \sin \xi - \cos \xi - \frac{2}{\xi} \frac{D_{1,2}}{D_1} \sin \xi \right] + \right. \\ &\quad \left. + c_4 \left[- \left(1 + \frac{1}{2\xi} \right) \cos \xi - \sin \xi + \frac{2}{\xi} \frac{D_{1,2}}{D_1} \cos \xi \right] \right\}, \\ M_\theta &= \frac{e^\xi}{\xi \sqrt{\xi}} \left\{ c_1 \left[\frac{2}{\xi} \frac{D_2}{D_1} \sin \xi + \frac{D_{1,2}}{D_1} \left(\sin \xi - \frac{1}{2\xi} \sin \xi + \cos \xi \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + c_2 \left[- \frac{2}{\xi} \frac{D_2}{D_1} \cos \xi - \frac{D_{1,2}}{D_1} \left(\cos \xi - \frac{1}{2\xi} \cos \xi - \sin \xi \right) \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{e^{-\xi}}{\xi \sqrt{\xi}} \left\{ c_3 \left[- \frac{2}{\xi} \frac{D_2}{D_1} \sin \xi + \frac{D_{1,2}}{D_1} \left(\sin \xi + \frac{1}{2\xi} \sin \xi - \cos \xi \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + c_4 \left[\frac{2}{\xi} \frac{D_2}{D_1} \cos \xi - \frac{D_{1,2}}{D_1} \left(\cos \xi + \frac{1}{2\xi} \cos \xi + \sin \xi \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wzory (39.1) i (39.2) określają siły wewnętrzne w powłocie dla dużych wartości zmiennej ξ . Możemy je wobec tego dalej jeszcze uprościć pomijając w nawiasach te wyrazy, w których występuje ξ w mianowniku. Mamy wówczas

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} N_y &= -4 \mu_1^2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\xi^2 \sqrt{\xi}} [e^\xi (c_1 \cos \xi + c_2 \sin \xi) + e^{-\xi} (c_3 \cos \xi + c_4 \sin \xi)], \\ N_\theta &= -2 \mu_1^2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\xi \sqrt{\xi}} \{ e^\xi [c_1 (\cos \xi - \sin \xi) + c_2 (\sin \xi + \cos \xi)] - \\ &\quad - e^{-\xi} [c_3 (\cos \xi + \sin \xi) + c_4 (\sin \xi - \cos \xi)] \}, \\ M_y &= \frac{1}{\xi \sqrt{\xi}} \{ e^\xi [c_1 (\sin \xi + \cos \xi) - c_2 (\cos \xi - \sin \xi)] + \\ &\quad + e^{-\xi} [c_3 (\sin \xi - \cos \xi) - c_4 (\cos \xi + \sin \xi)] \}, \\ M_\theta &= \frac{D_{1,2}}{D_1} M_y. \end{aligned} \right.$$

Zgodnie z wprowadzonymi poprzednio oznaczeniami zmienna ξ wyraża się przez odległość y od wierzchołka stożka w sposób następujący:

$$\xi = \sqrt[4]{\frac{K_1 K_2 - K_{1,2}^2}{K_1 D_1 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \sqrt{y}.$$

W zależności od N_y i N_θ możemy określić przyrost promienia dowolnego koła równoleżnikowego na środkowej powierzchni powłoki. Oznaczając powyższy przyrost przez δ mamy

$$\delta = y \sin \alpha \varepsilon_\theta,$$

a stąd na podstawie wzorów (9) i (31)

$$(41) \quad \delta = \frac{y \sin \alpha}{K_1 K_2 - K_{1,2}^2} (K_1 N_\theta - K_{1,2} N_y).$$

Otrzymane powyżej wzory określające siły wewnętrzne w powłoce odpowiadają asymptotycznym wyrażeniom, do których dochodzi się przy badaniu izotropowej powłoki stożkowej o stałej grubości, [6]. Z równań (40) wynika, że w przypadku żebrowanej powłoki stożkowej w jej części oddległej od wierzchołka siły i momenty wewnętrzne praktycznie nie zależą od sztywności zginania w kierunku obwodowym (tj. od D_2).

Podobnie jak dla powłoki izotropowej moment gnący M_θ ma tu znaczenie drugorzędne jako znacznie mniejszy od M_y , gdyż $D_{1,2}/D_1 \ll 1$. W omówionych wyżej wzorach (40) występują cztery stałe dowolne, które wyznaczyć możemy z czterech warunków brzegowych dla obu brzegów powłoki w przypadku, gdy ma ona kształt stożka ściętego. Jeżeli powłoka jest dostatecznie długa, obciążenia zewnętrzne przyłożone do jednego brzegu nie wpływają praktycznie na siły wewnętrzne w pobliżu drugiego brzegu i zagadnienie efektu brzegowego można rozwiązywać niezależnie dla każdego z brzegów powłoki. Dla brzegu położonego bliżej wierzchołka stożka ($y_0 = \text{const}$, rys. 1) należy wziąć pod uwagę te części wyrażań (40), w których występuje czynnik $e^{-\xi}$, a więc rozwiązanie odpowiadające stałym c_3 i c_4 , natomiast dla brzegu położonego dalej od wierzchołka należy wziąć pod uwagę wyrażenia odpowiadające c_1 i c_2 .

Podane wyżej rozwiązanie odnosiło się do powłoki żebrowanej, dla której zastępcze sztywności zginania i rozciągania w obu głównych kierunkach były stałe. Gdy żebra wzmacniające, biegnące wzdłuż tworzących stożka, mają — jak to się najczęściej spotyka — stały przekrój poprzeczny, powyższy warunek nie jest spełniony. W przypadku tym można jednakże podzielić powłokę na części o postaci stożków ściętych i zastosować do każdej z tych części otrzymane poprzednio wzory przyjmując średnie wartości sztywności K_1 i D_1 . Stałe całkowania występujące w rozwiązaniach równań różniczkowych odnoszących się do poszczególnych części, na które została podzielona powłoka, wyznaczamy z warunków ciągłości odkształceń i sił wewnętrznych między sąsiadującymi ze sobą częściami powłoki.

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, New York 1940.
- [2] E. Steuermann, *Zur Theorie der polarsymmetrischen Deformation der elastischen anisotropen Schalen*, Zeitschr. Angew. Math. Mech., t. 5, 6 (1925).
- [3] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, New York 1944.
- [4] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, t. 2, Bologna 1949.
- [5] J. Geckeler, *Über die Festigkeit achsensymmetrischen Schalen*, Berlin 1926.
- [6] W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*, Berlin 1934.

Резюме

ПРОЧНОСТЬ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, НАГРУЖЕННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНО

В работе рассматривается случай осесимметричной нагрузки конической оболочки с ребрами жесткости, расположенными по окружностям и по образующим. Задача решена при предположении, что ребра размещены достаточно густо, вследствие чего оболочку можно считать ортотропной. Выводятся общие дифференциальные уравнения, а также приводится метод определения асимптотических решений этих уравнений. В особенности, когда отношение жесткостей растяжения в главных направлениях равно отношению соответствующих жесткостей изгиба, получается такое же решение, как и для конической оболочки постоянной толщины, изготовленной из ортотропного материала. Выводятся также — в общем случае — приближенные формулы для определения внутренних сил в оболочке, аналогичные формулам, получаемым при исследовании изотропных конических оболочек постоянной толщины.

Summary

THE STRENGTH OF A CONICAL SHELL WITH RIBS SUBJECTED TO AN AXIALLY SYMMETRICAL LOAD

The case of an axially symmetrical loading of a conical shell reinforced with circumferential and longitudinal ribs (along the generators) is considered. The problem is solved assuming that the ribs are closely spaced so that the shell can be treated as orthotropic. General different-

ial equations are derived and a method of determining asymptotic solutions of these equations is developed. In particular, when the ratio of the tensile rigidities in both principal directions is equal to that of the corresponding flexural rigidities, the solution is the same as in the case of a conical orthotropic shell of constant thickness. In the general case approximate relations are derived. These relations determine the internal forces in the shell and are analogous to those for isotropic conical shells of constant thickness.

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 grudnia 1955 r.