O PEWNYM QUASI-USTALONYM ZAGADNIENIU TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

Celem pracy jest wyznaczenie stanu przemieszczenia i stanu naprężenia w półprzestrzeni sprężystej, wywołanych działaniem źródła ciepła o wydajności W, posuwającego się z jednostajną prędkością v w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą.

Zakładamy izotropię materiału zarówno w stosunku do jego własności termicznych, jak i sprężystych; wielkości charakteryzujące materiał niech będą stałe i niezależne od temperatury i naprężeń.

Pole temperatur i naprężeń zmieniać się będzie w czasie w miarę posuwania się źródła ciepła. W nieruchomym układzie współrzędnych ξ, η, ζ równanie przewodnictwa cieplnego jest następujące:

$$\nabla^2 T(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 \zeta^2} = \frac{1}{k}\,\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1}$$

Tutaj $k=\lambda/\varrho c$ przy czym λ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, ϱ gęstością, a c ciepłem właściwym.

Przyjmując ruchomy układ współrzędnych x, y, z (w którego początku umieścimy źródło ciepła, a którego osie x i y leżą w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą) posuwający się wraz ze źródłem ciepła ze stałą prędkością v w kierunku osi ξ i stosując transformację

$$x=\xi - vt, \qquad y=\eta, \qquad z=\zeta,$$

otrzymamy równanie (1) w postaci, [1],

$$\nabla^2 T(x,y,z) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{v}{k}\,\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{2}$$

W równaniu tym nie występuje już czas t. Dla obserwatora posuwającego się wzdłuż osi ξ wraz ze źródłem ciepła pole temperatury i pole naprężeń będą niezmienne w czasie.

Rozpatrzmy najpierw zadanie pomocnicze, mianowicie wyznaczmy stan naprężenia wywołany działaniem poruszającego się źródła ciepła w nieograniczonej przestrzeni sprężystej.

Rozwiązaniem równania (2) jest, [2].

$$T = \frac{W}{4\pi k} R^{-1} e^{-\mu(x+R)}, \tag{3}$$

gdzie $\mu = v/2k$. Ilość ciepła Q wytwarzana przez źródło ciepła na jednostkę czasu obojętności wynosi $Q = W \varrho c$.

Rozwiązanie to można przedstawić również w postaci całek F o u r i e- r a, zatem w postaci, która będzie przydatna w dalszych rozważaniach:

$$T = \frac{W}{2\pi^2 k} e^{-\mu x} \int_0^\infty K_0 (r \sqrt{\beta^2 + \mu^2}) \cos \beta y \, d\beta = \tag{4}$$

$$= \frac{W}{2\pi^2 k} e^{-\mu x} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-x\delta}}{\delta} \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma =$$

$$= \frac{W}{\pi^3 k} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z}{\alpha^2 + \eta^2} d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

gdzie

$$r = (y^2 + z^2)^{1/2}, \qquad \delta = (\beta^2 + \gamma^2)^{1/2}, \qquad \eta = \mu + (\mu^2 + \delta^2)^{1/2}.$$

Dla wyznaczenia składowych stanu naprężenia wygodnie będzie posłużyć się tak zwanym potencjałem termosprężystego przemieszczenia Φ. Ta funkcja związana jest ze składowymi u, v i w stanu przemieszczenia następującymi związkami:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = w. \tag{5}$$

Wprowadzenie związków (5) do trzech równań przemieszczeniowych teorii sprężystości sprowadza je do jednego równania, [3],

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t T. \tag{6}$$

Tutaj α_t jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej, a ν liczbą P o i s- s o n' a. Różniczkując (6) względem x i korzystając z równania (2) otrzymamy

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_t}{2\mu} \nabla^2 T, \tag{7}$$

skąd

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_t}{2\mu} T, \qquad \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_t}{2\mu} \int T \, dx. \tag{8}$$

Całka szczególna równania (6) będzie zatem miała postać:

$$(9)\qquad \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{a_t W}{8\mu\pi k}\int_0^x R^{-1}\exp\left[-\mu(x+R)\right]dx =$$

$$= -\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{a_t W}{8\pi\mu k} Ei\left[-\mu(x+R)\right],$$

gdzie

$$Ei(-s) = \int_s^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

Funkcję Φ wyrazić można również całką

$$(10)\qquad \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{a_t W}{\pi^3 k}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x\cos\beta y\cos\gamma z}{(\alpha^2+\eta^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Składowe stanu naprężenia wywołane działaniem źródła uzyskamy ze związków, [3],

$$(11)\qquad \sigma_{ij} = -2G\left(\nabla^2\Phi\delta_{ij} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial i\partial j}\right) \qquad (i,j = x,y,z),$$

gdzie δ_{ij} oznacza symbol K r o n e c k e r a.

Wyliczamy kolejno

$$(12)\qquad \begin{cases} \sigma_{xx} = -\dfrac{KGe^{-\mu(x+R)}}{R(x+R)}\left[1-\dfrac{r^2}{R^2}\left(\mu R+\dfrac{R}{\mu+R}\right)\right], \\[2ex] \sigma_{yy} = -\dfrac{GKe^{-\mu(x+R)}}{R(x+R)}\left\{1-\dfrac{z^2}{R^2}\left(1+\dfrac{R}{x+R}+\mu R\right)-\right. \\ \qquad\qquad \left.-\left(\dfrac{x+R}{R}\right)\left[\dfrac{x}{R}+\mu(x+R)\right]\right\}, \\[2ex] \sigma_{zz} = -\dfrac{GKe^{-\mu(x+R)}}{R(x+R)}\left\{1-\dfrac{y^2}{R}\left(1+\dfrac{R}{x+R}+\mu R\right)-\right. \\ \qquad\qquad \left.-\left(\dfrac{x+R}{R}\right)\left[\dfrac{x}{R}+\mu(x+R)\right]\right\}, \\[2ex] \sigma_{xy} = GKy\dfrac{e^{-\mu(x+R)}}{R^3}(1+\mu R), \qquad \sigma_{xz} = GKz\dfrac{e^{-\mu(x+R)}}{R^3}(1+\mu R), \\[2ex] \sigma_{yz} = GKyz\dfrac{e^{-\mu(x+R)}}{R^3(x+R)}\left(1+\mu R+\dfrac{R}{x+R}\right), \end{cases}$$

gdzie

$$K=\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a_t W}{8\mu\pi k}.$$

Składowe stanu przemieszczenia otrzymamy ze wzorów (5):

$$(13)\qquad \begin{cases} u=Ke^{-\mu(x+R)}R^{-1}, & v=-Kye^{-\mu(x+R)}R^{-1}(x+R)^{-1},\\ w=-Kze^{-\mu(x+R)}R^{-1}(x+R)^{-1}. \end{cases}$$

W przypadku szczególnym $v\to 0$ $(\mu\to 0)$ otrzymamy ze wzorów (11) i (12) znane rozwiązania dla zagadnienia stacjonarnego, [3].

Umieśćmy w początku układu współrzędnych sprężystej przestrzeni dipolowe źródło ciepła. W tym przypadku otrzymamy w płaszczyźnie $z=0$ rozwiązanie $T=0$ (z wyjątkiem punktu stanowiącego początek układu współrzędnych). W nieskończoności będzie również $T=0$. W ten sposób zrealizowaliśmy pole temperatury w półprzestrzeni sprężystej, wywołane działaniem źródła ciepła znajdującego się w płaszczyźnie $z=0$ ograniczającej półprzestrzeń.

Zgodnie z równaniami (3) i (4) otrzymamy

$$(14)\qquad T=-\frac{W}{4\pi k}\frac{\partial}{\partial z}\left(R^{-1}e^{-\mu(x+R)}\right)=\frac{W}{4\pi k}\frac{z}{R^3}e^{-\mu(x+R)}(1+\mu R)$$

albo

$$(15)\qquad T=\frac{W}{\pi^3 k}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{\alpha\gamma\sin\alpha x\cos\beta y\sin\gamma z}{\alpha^2+\eta^2}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Analogicznie otrzymamy funkcję Φ w postaci

$$(16)\qquad \Phi=\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a_t W}{8\mu\pi k}\frac{\partial}{\partial z}\{Ei[-\mu(x+R)]\}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a_t W}{8\mu\pi k}\frac{ze^{-\mu(x+R)}}{R(x+R)}$$

albo w postaci całki F o u r i e r a

$$(17)\qquad \Phi=-\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a_t W}{\pi^3 k}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{\alpha\gamma\sin\alpha x\cos\beta y\sin\gamma z}{(\alpha^2+\eta^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Znajomość funkcji Φ pozwoli na wyznaczenie składowych stanu naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})$ ze wzorów (11).

Otrzymamy

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx} &= -2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)=\frac{GKze^{-\mu(x+R)}}{R^2(x+R)}\left\{\left(\mu+\frac{1}{R}+\frac{1}{x+R}\right)\times\right.\\
&\quad\left.\times\left(1+\frac{3x^2}{R^2}\right)-\frac{z^2+y^2}{R(x+R)^2}\left[2+2\mu(x+R)+\mu^2(R+x)^2\right]\right\},\\
\bar{\sigma}_{yy} &= -2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)=-\frac{GKze^{-\mu(x+R)}}{R^2}\left\{\left(\mu+\frac{1}{R}\right)\left(\mu+\frac{3}{R}-\right.\right.\\
&\quad\left.-\frac{3}{x+R}-\frac{3y^2}{R^2(R+x)}\right)-\frac{1}{R^2(R+x)^2}\left[3(x^2+y^2)-\right.\\
&\quad\left.\left.-z^2\left(2\mu R+\frac{2R}{x+R}+\mu^2R(x+R)\right)\right]\right\},\\
\bar{\sigma}_{zz} &= -2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)=-\frac{GKze^{-\mu(x+R)}}{R^2}\left\{\left(\mu+\frac{1}{R}\right)\left(\mu+\frac{3}{R}-\right.\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{R+x}+\frac{2y^2}{R(R+x)^2}-\frac{3z^2}{R^2(R+x)}\right)-\frac{z^2+x^2}{R^2(R+x)^2}+\\
&\quad\left.+\frac{2y^2}{R(R+x)^3}+\frac{\mu^2y^2}{R(x+R)}\right\},\\
\bar{\sigma}_{xy} &= 2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=\frac{GKyze^{-\mu(x+R)}}{R^3}\left[\mu^2+3\left(\mu+\frac{1}{R}\right)\right],\\
\bar{\sigma}_{xz} &= 2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}=\frac{GKe^{-\mu(x+R)}}{R^2}\left[\frac{\mu^2z^2}{R}-\left(\mu+\frac{1}{R}\right)\left(1-\frac{3z^2}{R^2}\right)\right],\\
\bar{\sigma}_{yz} &= 2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}=\frac{GKye^{-\mu(x+R)}}{R^2(x+R)}\left[\left(\mu+\frac{1}{R}+\frac{1}{R+x}\right)\left(\frac{3z^2}{R^2}+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{2z^2}{R(x+R)}-1\right)-\frac{2z^2}{R^2(x+R)}+\frac{\mu^2z^2}{R}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Zauważmy, że stan naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})$ nie spełnia wszystkich warunków brzegowych w płaszczyźnie $z=0$. Mianowicie w płaszczyźnie tej znika naprężenie $\bar{\sigma}_{zz}$, pozostają jednak naprężenia tnące $\bar{\sigma}_{xz}$ i $\bar{\sigma}_{yz}$. Do stanu naprężeń $(\bar{\sigma}_{ij})$ dodać należy stan naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ będący rozwiązaniem zagadnienia przestrzennego izotermicznego, polegającego na wyznaczeniu stanu naprężeń $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ w półprzestrzeni sprężystej, wywołanego działaniem naprężeń stycznych $-\bar{\sigma}_{xz}$ i $-\bar{\sigma}_{yz}$, działających w płaszczyźnie $z=0$. Składowe stanu $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ otrzymamy przy użyciu funkcji przemieszczeniowej φ B. G. Galerkina. Wyrażone są one przy użyciu funkcji φ następującymi związkami:

$$
(19)\quad \begin{cases}
\bar{\bar{\sigma}}_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu \nabla^2 \varphi - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right), & \bar{\bar{\sigma}}_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu \nabla^2 \varphi - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right), \\
\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[(1-\nu)\nabla^2 \varphi + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right], & \bar{\bar{\sigma}}_{xy} = -\dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x\, \partial y\, \partial z}, \\
\bar{\bar{\sigma}}_{xz} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi\right), & \bar{\bar{\sigma}}_{yz} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi\right].
\end{cases}
$$

Funkcja φ spełniać powinna równanie biharmoniczne

$$
(20)\qquad \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0
$$

z warunkami brzegowymi

$$
(21)\qquad [\bar{\sigma}_{xz} + \bar{\bar{\sigma}}_{xz}]_{z=0} = 0, \qquad [\bar{\sigma}_{yz} + \bar{\bar{\sigma}}_{yz}]_{z=0} = 0, \qquad [\bar{\bar{\sigma}}_{zz}]_{z=0} = 0,
$$

oraz $\varphi = 0$ w nieskończoności.

Funkcję $\varphi = 0$ przyjmiemy w postaci

$$
(22)\qquad \varphi = \int_0^\infty \int_0^\infty Z(\alpha, \beta, z) \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta,
$$

gdzie

$$
Z = (A + B\vartheta z)\, e^{-\vartheta z}, \qquad \vartheta = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}.
$$

Występujące w warunkach brzegowych funkcje $\bar{\sigma}_{xz}$ i $\bar{\sigma}_{yz}$ wyrazimy również za pomocą całki Fouriera:

$$
(23)\quad \begin{cases}
[\bar{\sigma}_{xz}]_{z=0} = \left[2G \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial z}\right]_{z=0} = -2KG \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^2 P(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta, \\
[\bar{\sigma}_{yz}]_{z=0} = \left[2G \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z}\right]_{z=0} = 2KG \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha\beta P(\alpha, \beta) \sin \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta,
\end{cases}
$$

gdzie

$$
P(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\gamma^2 \, d\gamma}{(\alpha^2 + \eta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}.
$$

Trzeci warunek brzegowy (21) prowadzi do związku $A = -B(1 - 2\nu)$.

Dwa pierwsze warunki grupy (21) prowadzą do tego samego związku, mianowicie

$$
(24)\qquad B = -2GK \frac{\alpha P(\alpha, \beta)}{\vartheta^2}.
$$

Zatem

$$\varphi = -2KG \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{\vartheta^2} P(\alpha,\beta)(1-2\nu-\vartheta z) e^{-\vartheta z} \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta. \tag{25}$$

Stąd już ze wzorów (19) wyznaczamy składowe stanu naprężenia ($\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$):

$$\left\{\begin{aligned}
\bar{\bar{\sigma}}_{xx} &= -2KG \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha P(\alpha,\beta)}{\vartheta^2} [2(\alpha^2+\nu\beta^2)-\alpha^2\vartheta z] e^{-\vartheta z} \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{yy} &= 2KG \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha P(\alpha,\beta)}{\vartheta^2} [2(\beta^2+\nu\alpha^2)-\beta^2\vartheta z] e^{-\vartheta z} \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{zz} &= -2KGz \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha P(\alpha,\beta) \vartheta^2 e^{-\vartheta z} \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{xz} &= -2KG \int_0^\infty \int_0^\infty P(\alpha,\beta) \alpha^2 (1-\vartheta z) e^{-\vartheta z} \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{yz} &= -2KG \int_0^\infty \int_0^\infty P(\alpha,\beta) \alpha\beta (1-\vartheta z) e^{-\vartheta z} \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{xy} &= 2KG \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2\beta}{\vartheta} P(\alpha,\beta)(2-2\nu-\vartheta z) e^{-\vartheta z} \cos \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta.
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

Superpozycja składowych stanu naprężenia ($\bar{\sigma}_{ij}$) oraz ($\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$) daje ostateczne składowe stanu (σ_{ij}). Zauważmy, że dla $v \to 0$ ($\mu \to 0$) przechodzimy do zagadnienia stacjonarnego. W tym przypadku, jak to wykazano w pracy [4], znikają naprężenia σ_{xz}, σ_{yz} i σ_{zz}, a naprężenia σ_{xx}, σ_{yy} i σ_{xy} można przedstawić w postaci zamkniętej.

Rozważmy przypadek szczególny liniowego źródła ciepła posuwającego się z jednostajną szybkością v w nieograniczonej przestrzeni sprężystej. Niech źródło to będzie rozmieszczone ze stałą wydajnością w wzdłuż osi z. Wtedy pole temperatury określone jest za pomocą funkcji

$$T = \frac{w}{4\pi k} e^{-\mu x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} dz = \frac{w}{2\pi k} e^{-\mu x} K_0(\mu \sqrt{x^2+y^2}), \tag{27}$$

gdzie

$$r_0 = (x^2+y^2)^{1/2}, \qquad K_0(\mu r_0) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(i\mu r_0),$$

a $H_0^{(1)}(i\mu r_0)$ jest funkcją H a n k e l a pierwszego rodzaju i zerowego rzędu.

Analogicznie funkcja Φ zgodnie ze wzorem (8) przyjmie postać

$$\Phi = -N \int\limits_0^x e^{-\mu x} K_0(\mu r_0)\, dx, \qquad N = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a_t w}{4\mu\pi k}, \tag{28}$$

co jest zgodne z wynikiem uzyskanym przez E. Melana, [5].

Niech teraz źródło liniowe równomiernie rozłożone wzdłuż osi z posuwa się w kierunku osi x z jednostajną prędkością v w płaszczyźnie $y = 0$ ograniczającej półprzestrzeń sprężystą. Pole temperatury określone jest tu funkcją

$$T = -\frac{w}{2\pi k} e^{-\mu x} \frac{\partial}{\partial y} [K_0(\mu r_0)] = \frac{w\mu}{2\pi k} \frac{y}{r_0} e^{-\mu x} K_1(\mu r_0), \tag{29}$$

albo też

$$T = \frac{w}{\pi^2 k} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{\alpha\beta \sin\alpha x \sin\beta y}{\alpha^2 + \eta_0^2}\, d\alpha\, d\beta, \tag{30}$$

gdzie $\eta_0 = \mu + (\mu^2 + \beta^2)^{1/2}$.

W analogiczny sposób znajdziemy, że

$$\Phi = -N\mu y \int\limits_0^x \frac{e^{-\mu x} K_1[\mu(x^2+y^2)^{1/2}]}{(x^2+y^2)^{1/2}}\, dx \tag{31}$$

albo

$$\Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{w a_t}{\pi^2 k} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{\alpha\beta \sin\alpha x \sin\beta y}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\eta_0^2)}\, d\alpha\, d\beta. \tag{32}$$

Znajomość funkcji Φ zezwala na wyznaczenie składowych stanu naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})$.

Tak więc

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2GN\mu^2 \frac{e^{-\mu x}}{r_0^2} xy K_2(\mu r_0), \\ \bar{\sigma}_{yy} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -2GN\mu^2 \frac{e^{-\mu x}}{r_0} \left[K_1(\mu r_0) + \frac{x}{r_0} K_2(\mu r_0)\right], \\ \bar{\sigma}_{zz} &= -2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = -4GN \frac{\mu^2 y}{r_0} e^{-\mu x} K_1(\mu r_0), \\ \bar{\sigma}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -2GN \frac{\mu}{r_0} e^{-\mu x} \left[(1-\mu y) K_1(\mu r_0) - \mu \frac{y^2}{r_0} K_2(\mu r_0)\right], \\ \bar{\sigma}_{xz} &= 0, \qquad \bar{\sigma}_{yz} = 0. \end{aligned} \right. \tag{33}$$

Dla $y = 0$ jest $\bar{\sigma}_{yy} = 0$, ale $\bar{\sigma}_{xy} \neq 0$.

Do stanu $(\bar{\sigma}_{ij})$ dodajemy stan naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ tak dobrany, aby spełnione były wszelkie warunki brzegowe na brzegu $y = 0$. Dla wyznaczenia stanu $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ posłużymy się funkcją Airy'ego. Rozwiązać należy równanie biharmoniczne

(34) $$\nabla^2 \nabla^2 F = 0$$

z warunkami brzegowymi dla $y = 0$

(35) $$\bar{\sigma}_{xy} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Funkcję F przyjmujemy w postaci

(36) $$F = \int_0^\infty (A + B\alpha y) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha.$$

Z drugiego warunku grupy (35) wynika, że $A = 0$.

Z pierwszego warunku (35), zważywszy na (32) otrzymamy

(37) $$F = \frac{8\mu G N y}{\pi} \int_0^\infty P(\alpha)\, \alpha\, e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha,$$

gdzie

$$P(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\beta^2 \, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \eta_0^2)}.$$

Znajomość funkcji F pozwoli na wyznaczenie składowych stanu $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$.

Otrzymamy tu

(38) $$\left\{\begin{aligned}
\bar{\bar{\sigma}}_{xx} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{8\mu G N}{\pi} \int_0^\infty P(\alpha)\, \alpha^2 e^{-\alpha y} (2 - \alpha y) \sin \alpha x \, d\alpha,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{yy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{8\mu G N}{\pi} y \int_0^\infty P(\alpha)\, \alpha^3 e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{zz} &= -\nu \nabla^2 F = \frac{16\mu\nu G N}{\pi} \int_0^\infty P(\alpha)\, \alpha^2 e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{8\mu G N}{\pi} \int_0^\infty P(\alpha)\, \alpha^2 e^{-\alpha y} (1 - \alpha y) \cos \alpha x \, d\alpha.
\end{aligned}\right.$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xz} = 0, \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{yz} = 0.$$

Ostateczne naprężenia otrzymamy ze związków $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij}$. Dla $v \to 0$ $(\mu \to 0)$, a więc w przypadku nieruchomego i ustalonego źródła ciepła znikają naprężenia σ_{xx}, σ_{yy} i σ_{xy}, a pozostaje jedynie naprężenie σ_{zz}.

Literatura cytowana w tekście

[1] D. Rosenthal, R. H. Cameron, *Temperature Distribution in Cylinder Heated by Point Source Moving Along Its Axis*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engr., t. 68, 1947.

[2] D. Rosenthal, *The Theory of Moving Sources of Heat and Its Applications to Metal Treatments*, Trans. Amer. Soc. Engr., t. 68, 1946.

[3] E. Melan, H. Parcus, *Wärmespannungen stationärer Temperaturfelder*, Wiedeń 1953.

[4] W. Nowacki, *O pewnym ustalonym zagadnieniu przestrzennym termosprężystości*, Rozpr. Inżyn. 3 (1957).

[5] E. Melan, *Wärmespannungen in einer Scheibe infolge einer wandernden Wärmequelle*, Ing. Archiv., 1953.

Резюме

О НЕКОТОРОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Работа имеет целью определить напряженное состояние в упругом полупространстве, вызванное действием источника тепла с производительностью W, перемещающегося с постоянной скоростью v в плоскости, ограничивающей полупространство. Помещая в плоскости $z = 0$ дипольный источник тепла, получено поле температуры (1.14) и (1.15), удовлетворяющее краевым условиям ($T = 0$) в плокости $z = 0$ и в бесконечности.

Составляющие напряженного состояния $(\bar{\sigma}_{ij})$ были определены при использовании потенциала термоупругого перемещения Φ, удовлетворяющего уравнению (1.6). Знание частного интеграла этого уравнения [формулы (1.16) и (1.17)] дает возможность на основании зависимостей (1.11), определить составляющие напряженного состояния $\bar{\sigma}_{ij}$. Эти составляющие, однако, не удовлетворяют всем краевым условиям, а именно — напряжения $\bar{\sigma}_{xz}$ и $\bar{\sigma}_{yz}$ отличны от нуля в плоскости $z = 0$. К напряженному состоянию $(\bar{\sigma}_{ij})$ следует прибавить состояние $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ удовлетворяющее в плоскости $z = 0$ краевым условиям (1.21). Составляющие состояния $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ были определены при использовании функции перемещений Б. Г. Галеркина. Суперпозиция состояний $(\bar{\sigma}_{ij})$ и $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ дает искомое напряженное состояние (σ_{ij}). Наконец, обсуждается особый случай, а именно напряженное состояние, вызванное в упругом полупространстве действием линейного источника тепла расположенного равномерно вдоль оси z и передвигающегося по направлению оси x с постоянной скоростью.

Summary

A QUASI-STEADY STATE THREE-DIMENSIONAL THERMO-ELASTIC PROBLEM

The object here is to determine the state of stress in an elastic semi-space due to the action of a source of heat of intensity W, moving with a constant velocity v in the plane bounding the semi-space. Allowing

a heat dipole to act in the plane $z = 0$, a temperature field is obtained, (1.14) and (1.15), satisfying the boundary conditions ($T = 0$) in the plane $z = 0$, and at infinity. The stress components $(\bar{\sigma}_{ij})$ are determined by means of the thermo-elastic potential of displacements Φ satisfying the equation (1.6). The knowledge of a particular integral of this equation the Eqs. (1.16) and (1.17) enables us to determine, on the basis of the Eqs. (1.11), the stress components $(\bar{\sigma}_{ij})$. These components do not, however, satisfy all boundary conditions, the stresses $\bar{\sigma}_{xz}$ and $\bar{\sigma}_{yz}$ not vanishing in the plane $z = 0$. The state $(\bar{\sigma}_{ij})$ satisfying the boundary conditions (1.21) in the plane $z = 0$, should be superposed over the stresses $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$. The $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ components are determined by means of the displacement function of B. G. Galerkin. The superposition of the stresses $(\bar{\sigma}_{ij})$ and $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ gives the stress (σ_{ij}), which is sought. Finally, consideration is given to the particular case of the state of stress due to a linear heat source uniformly distributed along the z-axis and moving in the x-direction with a constant velocity.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1957 r.