CZESŁAW EIMER

PODSTAWY TEORII PEŁZANIA USTROJÓW HIPERSTATYCZNYCH WSTĘPNIE SPRĘŻONYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXXV

SPIS TREŚCI

1. Uwagi o stanie obecnym rozpatrywanego zagadnienia

Zagadnienie odkształceń opóźnionych gra istotną rolę w teorii konstrukcji wstępnie sprężonych. W ustrojach statycznie wyznaczalnych z betonu sprężonego (za pomocą armatury stalowej) pełzanie betonu, pozostającego pod działaniem trwałych sił ściskających, wywołuje skrócenie naciągniętej armatury, a tym samym spadek siły sprężającej (w praktyce w granicach około 15 do 20%). Spadek ten zmniejsza stopień sprężenia i rysoodporność ustroju.

W ustrojach statycznie niewyznaczalnych problem staje się bardziej złożony, a jednocześnie ważniejszy. Niezależnie od zmiany stopnia sprężenia mamy tu z reguły do czynienia z przegrupowaniem rozkładu sił wewnętrznych, związanym ze zmianą wielkości hiperstatycznych. Występowanie tych zjawisk w stopniu zaakcentowanym należy przewidywać w tych przypadkach, gdy w obliczeniach statycznych (w zakresie sprężystym) nie można wyeliminować z równań modułu sprężystości. Zmiany naprężeń wstępnych mogą tu być rzędu kilkudziesięciu procent, przy czym zmienia się ogólny obraz ich rozkładu. O ile w ustrojach sprężonych statycznie wyznaczalnych wystarczające dla celów praktycznych bywa szacunkowe określenie strat naprężeń, o tyle w ustrojach hiperstatycznych (zwłaszcza ramowych) konieczne jest oparcie obliczeń na teorii ściślejszej.

Problem omawiany nie należy do łatwych, jeżeli rozpatrujemy go w sposób ogólny, tzn. z uwzględnieniem zarówno niejednorodności elementu (złożonego z betonu i współodkształcalnej z nim armatury), jak i statycznej niewyznaczalności ustroju jako całości, jeżeli ponadto uwzględniamy odkształcenia opóźnione niezależne od pełzania (np. skurcz betonu, odkształcenia termiczne). Toteż żadna z dotychczasowych teorii nie ujmuje zagadnienia w sposób ogólny. Próbę takiego ujęcia stanowi praca niniejsza.

Wszystkie dotychczasowe teorie opierają się na następujących ogólnych założeniach, z których będziemy również korzystali w dalszym ciągu:

(1) problem rozpatruje się jako jednowymiarowy (w ramach teorii S a i n t - V e n a n t a), przy czym korzysta się z założenia płaskich przekrojów;

(2) przyjmuje się założenie pełzania liniowego, w myśl którego odkształcenia wywołane pełzaniem są proporcjonalne do naprężeń;

(3) nie uwzględnia się wpływu naprężeń i odkształceń stycznych.

Istniejące teorie wprowadzają ponadto szereg założeń upraszczających, idących w kilku następujących kierunkach:

(a) Ustrój sprężony hiperstatyczny rozpatruje się jako jednorodny, dochodząc do teorii, którą moglibyśmy nazwać teorią «pierwszego rzędu». Zmiany naciągu armatury wskutek odkształceń opóźnionych betonu uwzględnia się zazwyczaj w sposób szacunkowy.

(b) Wprowadza się różne uproszczenia dotyczące sposobu obciążenia ustroju, np. uwzględnia się tylko wpływ sprężenia wstępnego, przyjmuje się obciążenia zewnętrzne jako niezmienne w czasie itp.

(c) Rozważania opiera się na podstawie uproszczonej teorii pełzania, nie uwzględniającej wieku betonu w chwili obciążenia.

(d) Moduł sprężystości betonu przyjmuje się jako stały (niezmienny w czasie).

(e) Krzywe pełzania i skurczu betonu przyjmuje się jako jednokładne (o tej samej zmienności w czasie).

Założenia upraszczające są niezbędne dla zastosowań praktycznych w celu uniknięcia zbytnich trudności rachunkowych.

Ujęcia dotychczasowe różnią się z jednej strony sposobem ułożenia układu równań dla odkształceń i wielkości hiperstatycznych, z drugiej strony — przyjętą funkcją pełzania betonu; wreszcie w różny sposób podchodzą one do efektywnego rozwiązania problemów praktycznych, wprowadzając różne uproszczone metody obliczeniowe.

Pierwsze z wymienionych zagadnień zostało dotychczas rozwiązane najogólniej na podstawie teorii odkształceń narzuconych i związanych z nimi stanów współakcji (koakcji), podanej przez G. Colonnettiego, [4], zastosowanej do szeregu przypadków praktycznych przez F. Leviego i G. Pizzettiego, [12], lub na podstawie teorii odkształceń początkowych i związanych z nimi naprężeń początkowych (samonaprężeń), opracowanej przez P. Lardyego, [9], i w nieco odmiennej formie przez A. R. Rżanicyna, [16].

Obie teorie nie różnią się niczym istotnym, aczkolwiek używają odmiennego słownictwa i znalazły zastosowanie w odmiennych zespołach zagadnień. W szczególności teoria G. Colonnettiego została zastosowana w przypadkach odkształceń pełzania i odkształceń plastycznych, [5] (stany współakcji sprężysto-plastycznej), teoria P. Lardyego — do obliczania elementów strunobetonowych, [15]. Podstawowe założenia tych teorii, na których oprzemy również nasze rozważania, zostaną omówione bliżej w następnym paragrafie.

Równania dla ustrojów hiperstatycznych niejednorodnych, mogące znaleźć bezpośrednie zastosowanie w konstrukcjach sprężonych, zostały podane w formie dotychczas najogólniejszej przez F. Leviego, [12], w oparciu o twierdzenie o minimum pracy odkształcenia całkowitego sprężysto-plastycznego. Autor ten wskazuje także odmienną drogę rozwiązania przy wykorzystaniu twierdzenia V. Volterry o wzajemności odkształceń narzuconych, [18] i [19]. Przez F. Leviego zostały również zapoczątkowane prace nad uwzględnieniem w ustrojach hiperstatycznych opóźnienia sprężystego, [11] i [12]. We wszystkich tych pracach opartych zresztą na uproszczonej funkcji pełzania nie zostały jednak podane metody rozwiązania układu równań wyznaczających wielkości hiperstatyczne.

Możliwości efektywnego stosowania teorii wiążą się z przyjęciem odpowiedniego wyrażenia dla funkcji pełzania betonu, opisującej przebieg odkształcenia w czasie. Problem ten posiada bogatą literaturę. W odniesieniu do konstrukcji sprężonych (lub niejednorodnych) statycznie wyznaczalnych najogólniejszą postać funkcji pełzania przyjął N. Ch. Arutiunian, [1]:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \varphi(\tau)\,[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

gdzie

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}.$$

W powyższych wzorach $\bar{\varepsilon}_0$ oznacza odkształcenie pełzania, t czas, τ wiek betonu w chwili obciążenia; pozostałe parametry są stałymi wyznaczanymi empirycznie. Funkcja ta prowadzi do równań całkowych dających się sprowadzić do równań różniczkowych. Autor ten uwzględnia również zmienny w czasie moduł sprężystości betonu według zależności

$$E(\tau) = E_0(1 - \beta\, e^{-\alpha\tau}).$$

Rozwiązanie oparte na jeszcze ogólniejszej funkcji pełzania, jednak przy stałym module sprężystości, podał Z. Bychawski, [3]. Funkcja ta ma postać

$$\bar{\varepsilon}_0 = B_1\, e^{-\gamma_1(t-\tau)} + B_2\, e^{-\gamma_2(t-\tau)}.$$

Jest to szczególny przypadek funkcji pełzania o formie ogólnej

$$\bar{\varepsilon}_0 = \sum_k C_k\, e^{-\gamma_k(t-\tau)},$$

dającej się przedstawić w postaci sumy iloczynów funkcji wykładniczych parametrów odpowiednio t i τ. Przyjęcie to pozwala na zastąpienie równań całkowych równaniami różniczkowymi n-go rzędu, jeśli suma iloczynów posiadała n składników (A. J. Iszlinski, [8], Z. Bychawski,

[3]); zagadnienie rozwiązuje się w ramach teorii Maxwella-Thomsona ciała sprężysto-lepkiego lub sprężysto-relaksującego.

Doświadczenia wykazały, że teoria pełzania liniowego ujmuje rzeczywisty przebieg zjawiska z zadowalającym przybliżeniem tylko w przypadku betonu dostatecznie dojrzałego i przy naprężeniach nie przekraczających orientacyjnie połowy wytrzymałości betonu na ściskanie. W związku z tym zapoczątkowano badania nad teorią nieliniową, która nie znalazła jednak dotąd zastosowania do ustrojów sprężonych. Na możliwości wykorzystania teorii nieliniowej w konstrukcjach sprężonych (w szczególności jeśli chodzi o pełzanie i relaksację stali strunowej) w oparciu o uogólniony model reologiczny wskazali W. Olszak i J. Litwiniszyn, [13].

W teorii ustrojów sprężonych hiperstatycznych najogólniejszą zastosowaną dotychczas funkcją pełzania była funkcja

$$\bar{\varepsilon}_0 = C(1 - e^{-\gamma t}),$$

w której nie występuje parametr τ, tzn. nie uwzględnia się zależności od wieku betonu, co pozwala na ograniczenie się do równań różniczkowych. Warto zaznaczyć, że za pomocą powyższej funkcji zostało opracowane — jako jedyny dotąd problem przestrzenny w teorii ustrojów sprężonych — zagadnienie słupów z uzwojeniem wstępnie naprężonym (W. Olszak, [14]).

Nawet przyjęcie uproszczonej funkcji pełzania prowadzi w przypadku ustrojów hiperstatycznych do wyrażeń zbyt skomplikowanych dla zastosowań praktycznych. Toteż wysiłki skoncentrowano na opracowaniu łatwych i efektywnych metod rozwiązania, opierających się na dalszych założeniach upraszczających, prowadzących do teorii o charakterze użytkowym, technicznym. Sposoby ujęcia różnią się w zakresie obliczania strat siły sprężającej, jak również w zakresie przejścia od elementu podstawowego osiowo ściskanego do ustrojów zginanych.

Jeśli chodzi o pierwsze z wymienionych zagadnień, to należałoby wymienić dwie metody.

(1) Metodę podaną przez F. Dischingera, [6], rozszerzoną i uzupełnioną później przez kilku autorów, polegającą na ułożeniu równania różniczkowego problemu dla elementu ściskanego osiowo, co pozwala wyrazić ogólnie spadek siły sprężającej w zależności od odkształceń pełzania (lub zmian współczynnika pełzania).

(2) Metodę obliczania spadku siły sprężającej «stopniami», tj. zastosowanie rachunku różnic skończonych; metoda ta pozwala na wykorzystanie bezpośrednie krzywej empirycznej pełzania betonu, której nie musi się aproksymować funkcją pełzania (F. Leonhardt, [10]).

Na podstawie tych metod opracowano szereg przybliżonych sposobów obliczania, znajdujących bezpośrednie zastosowanie w praktyce. Ujęcia te ograniczają się z reguły do określenia końcowego spadku naprężeń wstępnych (dla $t = \infty$) i nie badają przebiegu zjawiska w czasie.

Przejście do belek sprężonych oraz ustrojów hiperstatycznych dokonuje się również w sposób uproszczony. Wymienimy tu znowu dwie metody, które znalazły szersze zastosowanie w praktyce.

(1) Metodę R. Busemanna, [2], polegającą na zastąpieniu belki zginanej dwoma fikcyjnymi elementami osiowo obciążonymi. Metoda ta została rozszerzona i uzupełniona przez kilku autorów, m. in. przystosowana do konstrukcji hiperstatycznych wstępnie sprężonych (A. Habel, [7]).

(2) Metodę K. Sattlera, [17], opierającą się na założeniu upraszczającym, że wielkości hiperstatyczne są związane zależnością liniową ze współczynnikiem pełzania.

Efektywne rozwiązania przy użyciu wspomnianych metod uproszczonych przeprowadzono dotychczas dla belek ciągłych i dla ram prostokątnych wstępnie sprężonych.

Poniżej przedstawimy w sposób ogólny podstawy teorii pełzania ustrojów hiperstatycznych wstępnie sprężonych nie uciekając się do omówionych powyżej założeń upraszczających.

2. Teoria ogólna

Weźmy pod uwagę ustrój nośny poddany dowolnemu obciążeniu zewnętrznemu (do którego zaliczymy również ciężar własny konstrukcji). Przypuśćmy, że w pewnej chwili usunęliśmy wspomniane obciążenia i że po ich usunięciu w ustroju pozostaje pewien stan naprężenia różny od zera. Stan ten, niezależny bezpośrednio od obciążeń zewnętrznych, został nazwany przez G. Colonnettiego stanem współakcji (koakcji).

Na to, aby mógł powstać stan współakcji, potrzeba i wystarcza, by spełnione były dwa warunki.

(1) W ustroju muszą występować odkształcenia różne od odkształceń sprężystych wywołanych obciążeniami zewnętrznymi. Gdyby bowiem tylko te ostatnie miały miejsce, to — z uwagi na ich odwracalny charakter — przy odciążeniu ustroju zniknąłby stan odkształcenia i stan naprężenia. Te odkształcenia niezależne od efektu sprężystego obciążeń zewnętrznych nazywamy odkształceniami narzuconymi lub początkowymi. Przykładami odkształceń narzuconych, wywołujących stany koakcji, mogą być: wstępny naciąg armatury wywołujący sprężenie ustroju, skurcz betonu wywołujący zmiany naprężeń (naprężenia skurczowe), odkształcenia plastyczne spowodowane siłami zewnętrznymi wywołujące stany koakcji elasto-plastycznej itd.

(2) Muszą istnieć więzy nie zezwalające na swobodne odkształcenia narzucone, tj. wywołujące współodkształcalność różnych elementów ustroju; odkształcenia zachodzące swobodnie nie wywołałyby bowiem żadnego stanu naprężenia [1]. Zagadnienie jest więc z natury rzeczy problemem statycznie niewyznaczalnym. Ta statyczna niewyznaczalność może nosić charakter niewyznaczalności «wewnętrznej», np. w przypadku ustrojów niejednorodnych lub zespolonych z różnych materiałów współodkształcających się lub «zewnętrznej», np. w przypadku podpór nadliczbowych (w ustrojach hiperstatycznych).

Stany koakcji są, ogólnie biorąc, zmienne w czasie, jeżeli zmianom ulegają odkształcenia narzucone (np. skurcz i pełzanie betonu, osiadanie podpór); zadanie nasze polega na określeniu wielkości i przebiegu tych zmian. Rozwiązanie tego zadania pozwala rozwiązać wszelkie zagadnienia praktyczne, gdyż każdy stan naprężenia powstaje z superpozycji stanu koakcji i stanu naprężenia wywołanego siłami zewnętrznymi i obliczanego na podstawie teorii sprężystości.

W dalszym ciągu będziemy rozważali stany współakcji wywołane dwiema kategoriami odkształceń narzuconych:

(a) odkształceniami niezależnymi od naprężeń, jak np. skurcz betonu, odkształcenia termiczne (z wyłączeniem odkształceń plastycznych),

(b) odkształceniami pełzania, które przyjmujemy za proporcjonalne do naprężeń: założenie proporcjonalności prowadzące do teorii pełzania liniowej znacznie upraszcza wszelkie wywody.

Odkształcenie całkowite włókna η w materiale podlegającym pełzaniu wyrazimy, zgodnie z N. Ch. Arutiunianem, [1], w postaci [2]

$$\eta(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}+\varepsilon(t)-\int_0^t \sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau. \tag{2.1}$$

Pierwszy składnik z prawej strony oznacza odkształcenie sprężyste w chwili t, drugi odkształcenie narzucone wewnętrzne, niezależne od naprężeń (np. skurcz betonu), trzeci odkształcenie pełzania; δ oznacza

[1] Odkształcenia narzucone mogłyby zachodzić swobodnie w elemencie jednorodnym, gdyby rozkład ich w przekroju był liniowy (nie przeczyłoby to założeniu płaskich przekrojów); oczywiście nie miałyby miejsca wówczas żadne zmiany naprężeń.

[2] W oryginalnym zapisie całkowanie rozciąga się na zakres czasu od chwili τ_1 do t; całkując od 0 do t — co uzasadnione jest przejściem do zależności uproszczonych — nie zmniejszamy ogólności wzoru; wystarczy przyjąć $\sigma(\tau)=0$ od chwili $\tau=0$ do chwili $\tau=\tau_1$. Początek skali czasu (wspólny dla parametrów t i τ) może być dowolnie wybrany; najlepiej przyjąć go w chwili początku obciążenia. Ujemną stroną przyjętego zapisu jest okoliczność, że czasu nie liczymy od momentu związania betonu.

odkształcenie właściwe (przy naprężeniu jednostkowym) określone ogólnie wzorem

$$\delta(t,\tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau), \tag{2.2}$$

w którym pierwszy składnik wyraża odkształcenie właściwe sprężyste w chwili τ przy uwzględnieniu zmienności w czasie modułu sprężystości, drugi odkształcenie pełzania. W tym ujęciu, zgodnie z teorią pełzania Volterry-Boltzmanna, odkształcenia zależą od czasu w dwojaki sposób: od czasu, który upłynął od chwili obciążenia do momentu rozpatrywanego (parametr t) i od wieku materiału w chwili obciążenia (parametr τ). Znak minus przed całką we wzorze (2.1) wypływa z faktu, że $\partial\delta/\partial\tau < 0$ (odkształcenia są tym mniejsze, im mniejsza jest różnica $t-\tau$, nadto im dojrzalszy jest beton w chwili obciążenia).

W postaci uproszczonej możemy uważać przebieg pełzania jak również moduł sprężystości za niezależne od wieku materiału, co prowadzi do wzoru prostszego

$$\eta(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \varepsilon(t) + \int_0^t \sigma(t)\frac{dC(t)}{dt}\,dt. \tag{2.3}$$

W tym przypadku odkształcenie właściwe pełzania C jest funkcją tylko parametru t. Wzór uproszczony pozwala na zastąpienie równań całkowych problemu równaniami różniczkowymi [3]. W niniejszym punkcie będziemy posługiwali się zależnością ogólną (2.1).

Dogodność liniowej teorii pełzania wypływa z faktu, że zachowane jest w niej prawo superpozycji. Jeżeli mianowicie

$$\sigma(\tau) = \sigma_1(\tau) + \sigma_2(\tau) + \cdots + \sigma_n(\tau),$$

to ma miejsce zależność

$$\int_0^t [\sigma_1(\tau) + \sigma_2(\tau) + \cdots + \sigma_n(\tau)]\,\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \sigma_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau + \int_0^t \sigma_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau + \cdots + \int_0^t \sigma_n(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau.$$

Oznacza to, że możemy oddzielnie obliczać, a następnie dodawać odkształcenia pełzania wywołane naprężeniami cząstkowymi.

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywali elementy (niejednorodne) złożone z materiału podlegającego pełzaniu i materiału sprężystego (nie

[3] Jak wiadomo, jest to możliwe również w formie ogólniejszej na podstawie wzoru (2.1) przy odpowiednim przyjęciu funkcji pełzania; zagadnienie to zostanie bliżej omówione w p. 3.4. Jeżeli rezygnujemy z uwzględnienia parametru τ, to najprościej jest wyjść od razu ze wzoru (2.3).

pełzającego), przy czym zakładamy ścisłą współpracę (współodkształcalność) obu materiałów. Przyjmujemy ogólnie elementy o zmiennym przekroju, zmiennej ilości i różnym usytuowaniu armatury oraz zmiennej sile sprężającej wzdłuż elementu. Mając na myśli konstrukcje z betonu sprężonego będziemy mówili wprost o betonie i armaturze stalowej nie zmniejszając tym, rzecz jasna, zakresu zastosowania teorii. Będziemy stosowali w miarę potrzeby wskaźniki b i a odpowiednio dla betonu i armatury.

Rozważania nasze opieramy na założeniu płaskich przekrojów. Zgodnie z tym odkształcenie rozpatrywanego włókna betonu można wyrazić w postaci

$$\eta = \eta_0 + z\,\omega, \tag{2.4}$$

gdzie η_0 oznacza odkształcenie w osi przekroju (samego) betonu, z odległość włókna od tej osi (braną algebraicznie), $\omega = 1/r = d\alpha/ds$ obrót jednostkowy przekroju na skutek odkształcenia.

W dalszym ciągu będziemy uważali odkształcenia wywołane naprężeniami ściskającymi, tj. skrócenia, za dodatnie; nadto będziemy przyjmowali za dodatnie odległości z «poniżej» osi obojętnej i obroty jednostkowe ω wywołujące wygięcie belki ku «górze» (tak jak to ma miejsce z reguły przy samym sprężeniu).

Zgodnie z powyższymi określeniami zakładamy, że spełniony jest związek

$$\int_{A_b} E_b z\,dA = 0. \tag{2.5}$$

Z porównania wzorów (2.1) i (2.4) otrzymujemy

$$\eta_0 + z\,\omega = \frac{\sigma}{E_b} + \varepsilon - \int_0^t \sigma \frac{\partial \delta}{\partial \tau}\,d\tau. \tag{2.6}$$

Pomnóżmy powyższe równanie obustronnie odpowiednio przez E_b oraz przez E_b i z i scałkujmy po przekroju betonu. Wprowadzając oznaczenie

$$K(t,\tau) = E(t)\,\frac{\partial \delta(t,\tau)}{\partial \tau},$$

w którym $K(t,\tau)$ jest wielkością bezwymiarową, jeśli chodzi o wielkości statyczne, otrzymamy

$$\left\{\begin{aligned} &\eta_0 \int_{A_b} E_b\,dA + \omega \int_{A_b} E_b z\,dA = \int_{A_b} \sigma\,dA + \int_{A_b} \varepsilon E_b\,dA - \int_0^t \int_{A_b} \sigma K\,d\tau\,dA, \\ &\eta_0 \int_{A_b} E_b z\,dA + \omega \int_{A_b} E_b z^2\,dA = \int_{A_b} \sigma z\,dA + \int_{A_b} \varepsilon E_b z\,dA - \int_0^t \int_{A_b} \sigma z K\,d\tau\,dA. \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

Zakładamy, że dany przekrój jest obciążony następującymi siłami:

(1) Siłami sprężającymi normalnymi, wywieranymi przez poszczególne kable (w liczbie r), umieszczone w różnych na ogół poziomach. Siły te oznaczymy przez $S_1, S_2, \ldots, S_r$. Jeżeli w przekroju znajduje się armatura pomocnicza (nie naprężona), to siły mogące w niej powstać (np. na skutek skurczu betonu) zaliczamy również do sił S.

(2) Momentami wywieranymi przez te siły, odpowiednio $S_1e_1, S_2e_2, \ldots, S_re_r$, gdzie e oznacza mimośród siły względem osi przekroju betonu (brany algebraicznie).

(3) Siłą zewnętrzną normalną N, którą uważamy za znaną.

(4) Momentem zewnętrznym znanym M.

Wszystkie powyższe wielkości są, ogólnie biorąc, funkcjami czasu. Jeśli chodzi o wielkości N i M, to na razie przyjmujemy, że zmienność ich w czasie jest znana. Natomiast zmienność sił S będzie musiała zostać określona z warunku współodkształcalności armatury.

Przy tych założeniach warunki równowagi w przekroju (betonu) przyjmą ogólnie postać

$$
\left\{\begin{aligned}
&\int\limits_{A_b} \sigma\, dA = N + \sum_{i=1}^{r} S_i = N + S,\\
&\int\limits_{A_b} \sigma z\, dA = M + \sum_{i=1}^{r} S_i e_i = M + M_S,
\end{aligned}\right. \tag{2.8}
$$

gdzie S i M_S oznaczają odpowiednio wypadkową siłę sprężającą i moment sprężający.

Uwzględniając te warunki oraz związki (2.5) otrzymamy z równań (2.7)

$$
\left\{\begin{aligned}
&\eta_0 = \frac{N + \Sigma S + \int\limits_{A_b} \varepsilon E_b\, dA - \int\limits_0^t (N + \Sigma S) K\, d\tau}{E_b A_b},\\
&\omega = \frac{M + \Sigma Se + \int\limits_{A_b} \varepsilon E_b z\, dA - \int\limits_0^t (M + \Sigma Se) K\, d\tau}{E_b I_b}.
\end{aligned}\right. \tag{2.9}
$$

W celu uproszczenia zapisów przyjmiemy w dalszym ciągu następujące oznaczenia:

$N_\varepsilon = \int\limits_{A_b} \varepsilon E_b\, dA$ oznacza siłę fikcyjną normalną odpowiadającą odkształceniom narzuconym w betonie (w szczególności skurczowi betonu),

$M_\varepsilon = \int\limits_{A_b} \varepsilon E_b z\, dA$ oznacza moment fikcyjny określony jak wyżej,

$$N^* = N^*(t) = N(t) - \int_0^t N(\tau) K(t, \tau) d\tau,$$

$$M^* = M(t) - \int_0^t M(\tau) K(t, \tau) d\tau,$$

$$S^* = S(t) - \int_0^t S(\tau) K(t, \tau) d\tau.$$

Wielkości N_ε i M_ε oraz N^* i M^*, zgodnie z naszymi założeniami, są znanymi funkcjami czasu, przy czym zakładamy, że $\varepsilon = 0$ (a zatem $N_\varepsilon = 0$, $M_\varepsilon = 0$) dla $t = 0$. Należy zauważyć, że zamiast wprowadzać wielkości «zredukowane» (oznaczone gwiazdką), można by operować bezpośrednio *zmianami* wielkości statycznych, odpowiednio ΔN, ΔM i ΔS, które wyrażają się w powyższych wzorach składnikami całkowymi; ujęcie takie spotyka się często w teoriach «uproszczonych», o których mówiliśmy w p. 1. Posługiwanie się wartościami «zredukowanymi» prowadzi jednak do bardziej przejrzystych wzorów; pozwala, jak zobaczymy w dalszym ciągu, rozłożyć rozwiązanie niejako na dwa etapy (najpierw wyznaczamy wielkości z gwiazdkami, a od nich przechodzimy do wielkości rzeczywistych za pomocą powyższych równań całkowych).

Przy tych oznaczeniach wzory (2.9) przyjmą postać

(2.9.1) $$\eta_0 = \frac{N^* + N_\varepsilon + \Sigma S^*}{E_b A_b}, \qquad \omega = \frac{M^* + M_\varepsilon + \Sigma S^* e}{E_b I_b}.$$

Wielkości η_0 i ω określają w całości odkształcenia przekroju (wskutek założenia płaskich przekrojów); dla ich obliczenia musimy jeszcze wyznaczyć S^* jako funkcję czasu. W tym celu wykorzystamy warunek współodkształcalności armatury i betonu, który pozwala na wypisanie następujących ogólnych związków:

(2.10) $$S_i = S_{0i} - E_a A_{ai} \eta_i = S_{0i} - E_a A_{ai} (\eta_0 + e_i \omega).$$

Symbol S_{0i} oznacza tutaj siłę sprężającą początkową (przed wystąpieniem odkształceń i naprężeń w betonie) z uwzględnieniem ewentualnej relaksacji stali. W armaturze pomocniczej (nie naprężonej) będzie oczywiście $S_{0i} = 0$. Przy okazji zauważmy, że w elementach strunobetonowych S_0 oznacza zatem naciąg początkowy armatury, w ustrojach kablobetonowych (sprężanych w oparciu o stwardniały beton) — siłę odczytywaną na manometrze naciągarki zwiększoną o wartość odpowiadającą doraźnemu (sprężystemu) skróceniu betonu w danym przekroju. To ostatnie może być dla każdego kabla wyznaczone w myśl teorii elementarnej (jako odkształcenie sprężyste) z uwzględnieniem swobodnego ruchu armatury w kanale kablowym (z ewentualnym włączeniem do rachunku strat siły sprężającej wywołanych tarciem kabla). S_0 należy zatem wyznaczyć dla ustroju zastępczego (zarówno wewnętrznie jak i zewnętrznie statycznie wyznaczalnego).

Ponadto przyjmujemy, że S_0 jest wielkością zredukowaną o wartość całkowitą relaksacji armatury. Przyjęcie to jest równoznaczne z założeniem, że relaksacja zachodzi momentalnie. W rzeczywistości prawie całkowity spadek naprężenia w armaturze wskutek relaksacji zachodzi w ciągu kilku dni, a więc w czasie znikomo krótkim w porównaniu do okresu pełzania betonu.

Skorzystamy w dalszym ciągu z następujących zależności i oznaczeń:

$\Sigma S_{0i} = S_0$ — całkowita siła sprężająca początkowa,

$\Sigma S_{0i} e_i = M_{S_0}$ — wypadkowy moment sprężający początkowy,

$\Sigma A_{ai} = A_a$ — pole przekroju łącznego armatury,

$\Sigma A_{ai} e_i = A_a e_a$ — moment statyczny armatury względem osi ciężkości przekroju (samego) betonu, przy czym e_a oznacza odległość środka ciężkości armatury od osi ciężkości betonu,

$\Sigma A_{ai} e_i^2 = i_a^2 A_a = I_a$ — moment bezwładności armatury względem osi przekroju betonu, przy czym i_a oznacza promień bezwładności armatury,

$i_b^2 A_b = I_b$ — moment bezwładności betonu, przy czym i_b oznacza promień bezwładności betonu.

Ponadto wprowadzamy następujące współczynniki (liczby niemianowane):

$$n = \frac{E_a}{E_b}, \qquad \mu = \frac{A_a}{A_b}, \qquad \nu_e = \left(\frac{e_a}{i_b}\right)^2, \qquad \nu_i = \left(\frac{i_a}{i_b}\right)^2.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymamy

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma S_i &= S_0 - E_a \eta_0 A_a - E_a \omega e_a A_a, \\ \Sigma S_i e_i &= M_{S_0} - E_a \eta_0 e_a A_a - E_a \omega I_a . \end{aligned}\right. \tag{2.11}$$

Wstawiając zależności (2.11) do równań (2.9.1) otrzymamy

$$\left\{\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{N^* + N_\varepsilon + S_0^*}{E_b A_b} - n\mu\eta_0^* - n\mu e_a \omega^*, \\ \omega &= \frac{M^* + M_\varepsilon + M_{S_0}^*}{E_b I_b} - n\mu\frac{\nu_e}{e_a}\eta_0^* - n\mu\nu_i\omega^*. \end{aligned}\right. \tag{2.12}$$

Wielkości oznaczone gwiazdką mają znaczenie, które wyjaśniliśmy już powyżej. W przypadku S_0 i M_{S_0}, z uwagi na ich stałą wartość, otrzymujemy

$$S_0^* = S_0 - \int_0^t S_0 K(t,\tau)\,d\tau = S_0[1+\varphi(t)]$$

i analogicznie

$$M^* = M_0[1+\varphi(t)],$$

gdzie

$$\varphi(t) = -\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau = -\int_0^t E\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau$$

jest w przypadku stałego E współczynnikiem pełzania znanym z elementarnej teorii konstrukcji sprężonych; wyraża on stosunek odkształcenia pełzania do odkształcenia sprężystego [4].

Równania (2.12) przedstawiają układ równań całkowych liniowych typu Volterry (drugiego rodzaju) o niewiadomych funkcjach $\eta_0(t)$, $\omega(t)$. Rozwijając wyrażenia η_0^* i ω^* i przeprowadzając odpowiednie obliczenia, których tu nie przytaczamy, otrzymujemy następujące wyraźne przedstawienie powyższych równań:

$$(2.13)\quad \begin{cases} \eta_0(t) = \Theta_{\eta,N}(N^* + N_\varepsilon + S_0^*) - \Theta_{\eta,M}(M^* + M_\varepsilon + M_{S_0}^*) + \\ \qquad + \lambda_{\eta,\eta}\int_0^t \eta_0(\tau)K(t,\tau)\,d\tau + \lambda_{\eta,\omega}\int_0^t \omega(\tau)K(t,\tau)\,d\tau, \\ \omega(t) = \Theta_{\omega,M}(M^* + M_\varepsilon + M_{S_0}^*) - \Theta_{\omega,N}(N^* + N_\varepsilon + S_0^*) + \\ \qquad + \lambda_{\omega,\eta}\int_0^t \eta_0(\tau)K(t,\tau)\,d\tau + \lambda_{\omega,\omega}\int_0^t \omega(\tau)K(t,\tau)\,d\tau, \end{cases}$$

---

[4] W ogólnym przypadku

$$\varphi(t) = -E(t)\int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau = E(t)[\delta(t,0) - \delta(t,t)].$$

Korzystając ze związku (2.2) i biorąc pod uwagę, że $C(t,t) = 0$, otrzymamy

$$\varphi(t) = \frac{E(t)}{E(0)} - 1 + E(t)\,C(t,0).$$

Przy stałym naprężeniu σ możemy powyższe wyrażenie napisać w postaci równoważnej

$$\varphi(t) = \frac{\dfrac{\sigma}{E(0)}}{\dfrac{\sigma}{E(t)}} - 1 + \frac{\sigma C(t,0)}{\dfrac{\sigma}{E(t)}} = \frac{\varepsilon_{spr}(0) - \varepsilon_{spr}(t)}{\varepsilon_{spr}(t)} + \frac{\varepsilon_{pełz}}{\varepsilon_{spr}(t)},$$

gdzie ε_{spr} oznaczają odkształcenia sprężyste w odpowiednich chwilach, zaś $\varepsilon_{pełz}$ odkształcenia pełzania. Dla niezmiennego E oczywiście $\varepsilon_{spr}(0) = \varepsilon_{spr}(t) = \text{const}$.

przy czym wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\Theta_{\eta,N}=\frac{1}{E_b A_b}\,\frac{1}{1+n\mu-\dfrac{n^2\mu^2\nu_e}{1+n\mu\nu_i}},\qquad \Theta_{\eta,M}=\frac{e_a}{E_b I_b}\,\frac{1}{\dfrac{(1+n\mu)(1+n\mu\nu_i)}{n\mu}-n\mu\nu_e},$$

$$\Theta_{\omega,M}=\frac{1}{E_b I_b}\,\frac{1}{1+n\mu\nu_i-\dfrac{n^2\mu^2\nu_e}{1+n\mu}},\qquad \Theta_{\omega,N}=\frac{1}{e_a E_b A_b}\,\frac{1}{\dfrac{(1+n\mu)(1+n\mu\nu_i)}{n\mu\nu_e}-n\mu},$$

$$\lambda_{\eta,\eta}=\frac{n\mu[1+n\mu(\nu_i-\nu_e)]}{(1+n\mu)(1+n\mu\nu_i)-n^2\mu^2\nu_e},\qquad \lambda_{\eta,\omega}=e_a\frac{n\mu}{(1+n\mu)(1+n\mu\nu_i)-n^2\mu^2\nu_e},$$

$$\lambda_{\omega,\eta}=\frac{1}{e_a}\,\frac{n\mu\nu_e}{(1+n\mu)(1+n\mu\nu_i)-n^2\mu^2\nu_e},\qquad \lambda_{\omega,\omega}=\frac{n\mu[\nu_i+n\mu(\nu_i-\nu_e)]}{(1+n\mu)(1+n\mu\nu_i)-n^2\mu^2\nu_e}.$$

O ile moduł E_b uważamy za funkcję parametru t, to współczynniki λ będą funkcjami czasu i możemy je wprowadzić pod znaki całek i pomnożyć przez nie jądra $K(t,\tau)$; nie zmieni to zresztą w niczym istotnym sposobu rozwiązania równań.

W powyższych wzorach wartości λ oznaczone wskaźnikami niejednakowymi nie są bezwymiarowe. Aby tego uniknąć i doprowadzić równania (2.13) do wzajemnej zgodności wymiarowej, należałoby pomnożyć drugie z równań (2.13) przez e_a i wprowadzić jako drugą niewiadomą (zamiast ω) wydłużenie włókna betonu w poziomie środka ciężkości armatury, wywołane samym obrotem przekroju, tj. $\eta_{a\omega}=\omega e_a$. Aby ujednolicić również współczynniki Θ, można wyrazić momenty w postaci $M=N_a e_a$ i wprowadzić do rozważań siłę «zastępczą» N_a w poziomie armatury. W dalszym ciągu pozostaniemy jednak przy nieco ogólniejszej postaci równań (2.13).

Mając na uwadze zastosowanie do ustrojów hiperstatycznych przekształcimy nieco postać równań (2.13). Mianowicie wyrażenia N^* i M^* rozbijemy na dwa składniki:

$$N^*=N_0^*+N_x^*,\qquad M^*=M_0^*+M_x^*.$$

Pierwszy składnik po prawej stronie oznacza odpowiednie wielkości statyczne obliczone dla ustroju zastępczego (statycznie wyznaczalnego), drugi składnik wielkości wywołane reakcjami podpór nadliczbowych (w przypadku ustrojów statycznie wyznaczalnych składnik ten znika).

Ponadto wprowadzimy oznaczenia:

$$F_\eta(t)=\Theta_{\eta,N}(N_0^*+N_\varepsilon+S_0^*)-\Theta_{\eta,M}(M_0^*+M_\varepsilon+M_{S_0}^*),$$

$$F_\omega(t)=\Theta_{\omega,M}(M_0^*+M_\varepsilon+M_{S_0}^*)-\Theta_{\omega,N}(N_0^*+N_\varepsilon+S_0^*).$$

Przy tych oznaczeniach równania (2.13) przyjmą postać

$$
\text{2.13.1)}\quad \begin{cases} \eta_0(t) = F_\eta(t) + \Theta_{\eta,N} N_x^*(t) - \Theta_{\eta,M} M_x^*(t) + \\ \qquad + \lambda_{\eta,\eta} \int\limits_0^t \eta_0(\tau) K(t,\tau)\, d\tau + \lambda_{\eta,\omega} \int\limits_0^t \omega(\tau) K(t,\tau)\, d\tau, \\ \omega(t) = F_\omega(t) + \Theta_{\omega,M} M_x^*(t) - \Theta_{\omega,N} N_x^*(t) + \\ \qquad + \lambda_{\omega,\eta} \int\limits_0^t \eta_0(\tau) K(t,\tau)\, d\tau + \lambda_{\omega,\omega} \int\limits_0^t \omega(\tau) K(t,\tau)\, d\tau. \end{cases}
$$

W przypadku ustrojów statycznie wyznaczalnych swobodne wyrazy równań są znanymi funkcjami czasu; układ (2.13.1) może być wówczas rozwiązany i odkształcenia η_0 i ω wyznaczone jako funkcje czasu. Rozwiązując równanie całkowe (2.6) możemy wówczas wyznaczyć naprężenia w rozpatrywanym przekroju.

W ogólnym przypadku rozwiązywanie układu równań całkowych można sprowadzić, jak wiadomo, do rozwiązania jednego równania całkowego, w którym całkowanie rozciąga się na obszar złożony z obszarów częściowych odpowiadających poszczególnym równaniom. W odpowiedni sposób może być również rozłożona rezolwenta jądra. W naszym przypadku jądra równań (2.13) różnią się tylko stałymi parametrami i rozwiązanie może być przedstawione w postaci:

$$
(2.14)\quad \begin{cases} \eta_0(t) = [F_\eta(t) + \Theta_{\eta,N} N_x^*(t) - \Theta_{\eta,M} M_x^*(t)] + \\ \qquad + \int\limits_0^t [F_\eta(\tau) + \Theta_{\eta,\Lambda} N_x^*(\tau) - \Theta_{\eta,M} M_x^*(\tau)] R_{\eta,\eta}(t,\tau,\lambda)\, d\tau + \\ \qquad + \int\limits_0^t [F_\omega(\tau) + \Theta_{\omega,M} M_x^*(\tau) - \Theta_{\omega,N} N_x^*(\tau)] R_{\eta,\omega}(t,\tau,\lambda)\, d\tau, \\ \omega(t) = [F_\omega(t) + \Theta_{\omega,M} M_x^*(t) - \Theta_{\omega,N} N_x^*(t)] + \\ \qquad + \int\limits_0^t [F_\eta(\tau) + \Theta_{\eta,N} N_x^*(\tau) - \Theta_{\eta,M} M_x^*(\tau)] R_{\omega,\eta}(t,\tau,\lambda)\, d\tau + \\ \qquad + \int\limits_0^t [F_\omega(\tau) + \Theta_{\omega,M} M_x^*(\tau) - \Theta_{\omega,N} N_x^*(\tau)] R_{\omega,\omega}(t,\tau,\lambda)\, d\tau, \end{cases}
$$

gdzie ogólnie

$$
R(t,\tau,\lambda) = R(t,\tau,\lambda_{\eta,\eta},\lambda_{\eta,\omega},\lambda_{\omega,\eta},\lambda_{\omega,\omega})
$$

oznaczają składowe rezolwenty, zależne od funkcji pełzania i warunków geometrycznych przekroju, natomiast niezależne od wyrazów swobodnych, a więc od warunków statycznych. Mogą one być napisane w różnej postaci, zależnie od metody rozwiązania równań. Np. przy użyciu ogólnej metody jąder iterowanych dadzą się przedstawić w postaci szeregów potęgowych, w których współczynnikami poszczególnych wyrazów będą sumy odpowiednich potęg i iloczynów liczb λ. Równania (2.14) można by przedstawić w nieco innej postaci zastępując wyrazy oznaczone gwiazdkami odpowiadającymi im funkcjami. Sposób taki zostanie przedstawiony w następnym punkcie, tutaj natomiast będziemy uważali za niewiadome bezpośrednio wyrażenia z gwiazdkami, co pozwala na bardziej zwarte przedstawienie toku obliczeń.

Przejdziemy obecnie do ustrojów hiperstatycznych. W tym przypadku wyrażenia N_x i M_x nie znikają; nie są one znane z góry, gdyż zależą od reakcji hiperstatycznych i ich zmienności w czasie. Aby je wyznaczyć, musimy najpierw obliczyć odkształcenia elementu sprężonego jako całości. W celu nadania wywodom charakteru w miarę możności ogólnego skorzystamy z zasady prac przygotowanych w postaci podanej przez Müllera-Breslaua. Odpowiednie równanie dla ustrojów zginanych, przy pominięciu wpływu naprężeń stycznych i naprężeń normalnych poprzecznych, przybiera postać

$$\Sigma \overline{Q}_m \delta_m = \int_s \int_A \overline{\sigma} \eta \, dA \, ds. \tag{2.15}$$

Symbole $\overline{Q}_m$ oznaczają tu siły wirtualne, $\overline{\sigma}$ odpowiadające tym siłom naprężenia normalne wirtualne ($\overline{Q}_m$ i $\overline{\sigma}$ spełniają warunki równowagi), η odkształcenia rzeczywiste normalne, δ_m przemieszczenia rzeczywiste w kierunku Q_m, odpowiadające tym odkształceniom (δ_m i η spełniają warunki więzów). Całkujemy po objętości całego elementu.

Wprowadzając odpowiednio siły i momenty wirtualne

$$\overline{N} = \int_A \overline{\sigma} \, dA, \qquad \overline{M} = \int_A \overline{\sigma} z \, dA$$

przekształcamy wyrażenie (2.15) do postaci

$$\Sigma \overline{Q}_m \delta_m = \int_s \int_A \overline{\sigma} (\eta_0 + \omega z) \, dA \, ds = \int_s \overline{N} \eta_0 \, ds + \int_s \overline{M} \omega \, ds, \tag{2.16}$$

przy czym momenty w ustroju (zastępczym) izostatycznym oblicza się względem środka ciężkości przekroju (samego) betonu.

Jeżeli w szczególności zamierzamy obliczyć pewne przemieszczenie δ_m, to jak wiadomo ze statyki elementarnej, bierzemy pod uwagę układ obciążeń wirtualnych redukujący się do siły (uogólnionej) $Q_m = 1$.

Za wielkości η_0 i ω należy podstawić prawe strony równań (2.14), przy czym wielkości N_x i M_x muszą być wyrażone jako funkcje reakcji nadliczbowych. Zależności te mają postać

$$\begin{cases} N_x = X_a N_a + X_b N_b + \cdots + X_n N_n, \\ M_x = X_a M_a + X_b M_b + \cdots + X_n M_n. \end{cases} \tag{2.17}$$

W powyższych równaniach N_k i M_k oznaczają odpowiednio siłę normalną i moment w danym przekroju pod wpływem reakcji $X_k = 1$; są one obliczone w sposób znany ze statyki elementarnej. Wielkości X_k są tutaj funkcjami czasu i równanie (2.17) jest spełnione w każdym momencie. Reakcje nadliczbowe X_k obejmują wpływ obciążeń zewnętrznych, sił sprężających, jak również wszelkich odkształceń opóźnionych. Z uwagi na prawo superpozycji na podstawie równań (2.17) możemy napisać

$$\left\{\begin{aligned} N_x^* &= X_a^* N_a + X_b^* N_b + \cdots + X_n^* N_n, \\ M_x^* &= X_a^* M_a + X_b^* M_b + \cdots + X_n^* M_n. \end{aligned}\right. \tag{2.18}$$

Wstawiając wyrażenia (2.18) do (2.14) i oznaczając

$$\bar{\eta}_0(t) = F_\eta(t) + \int_0^t F_\eta(\tau) R_{\eta,\eta}(t,\tau,\lambda)\,d\tau + \int_0^t F_\omega(\tau) R_{\eta,\omega}(t,\tau,\lambda)\,d\tau,$$

$$\bar{\omega}(t) = F_\omega(t) + \int_0^t F_\eta(\tau) R_{\omega,\eta}(t,\tau,\lambda)\,d\tau + \int_0^t F_\omega(\tau) R_{\omega,\omega}(t,\tau,\lambda)\,d\tau,$$

otrzymamy

$$\left\{\begin{aligned}
\eta_0(t) = \bar{\eta}_0(t) &+ X_a^*(t)\,(\Theta_{\eta,N} N_a - \Theta_{\eta,M} M_a) + \\
&+ \int_0^t X_a^*(\tau)\,[(\Theta_{\eta,N} N_a - \Theta_{\eta,M} M_a) R_{\eta,\eta}(t,\tau,\lambda) + \\
&\quad + (\Theta_{\omega,M} M_a - \Theta_{\omega,N} N_a) R_{\eta,\omega}(t,\tau,\lambda)]\,d\tau + \\
&+ X_b^*(t)\,(\Theta_{\eta,N} N_b - \Theta_{\eta,M} M_b) + \\
&+ \int_0^t X_b^*(\tau)\,[(\Theta_{\eta,N} N_b - \Theta_{\eta,M} M_b) R_{\eta,\eta}(t,\tau,\lambda) + \\
&\quad + (\Theta_{\omega,M} M_b - \Theta_{\omega,N} N_b) R_{\eta,\omega}(t,\tau,\lambda)]\,d\tau + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ X_n^*(t)\,(\Theta_{\eta,N} N_n - \Theta_{\eta,M} M_n) + \\
&+ \int_0^t X_n^*(\tau)\,[(\Theta_{\eta,N} N_n - \Theta_{\eta,M} M_n) R_{\eta,\eta}(t,\tau,\lambda) + \\
&\quad + (\Theta_{\omega,M} M_n - \Theta_{\omega,N} N_n) R_{\eta,\omega}(t,\tau,\lambda)]\,d\tau, \\
\omega(t) = \omega(t) &+ X_a^*(t)\,(\Theta_{\omega,M} M_a - \Theta_{\omega,N} N_a) + \\
&+ \int_0^t X_a^*(\tau)\,[(\Theta_{\eta,N} N_a - \Theta_{\eta,M} M_a) R_{\omega,\eta}(t,\tau,\lambda) + \\
&\quad + (\Theta_{\omega,M} M_a - \Theta_{\omega,\Lambda} N_a) R_{\omega,\omega}(t,\tau,\lambda)]\,d\tau + \\
&+ X_b^*(t)\,(\Theta_{\omega,M} M_b - \Theta_{\omega,N} N_b) + \\
&+ \int_0^t X_b^*(\tau)\,[(\Theta_{\eta,N} N_b - \Theta_{\eta,M} M_b) R_{\omega,\eta}(t,\tau,\lambda) + \\
&\quad + (\Theta_{\omega,M} M_b - \Theta_{\omega,N} N_b) R_{\omega,\omega}(t,\tau,\lambda)]\,d\tau + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ X_n^*(t)\,(\Theta_{\omega,M} M_n - \Theta_{\omega,N} N_n) + \\
&+ \int_0^t X_n^*(\tau)\,[(\Theta_{\eta,N} N_n - \Theta_{\eta,M} M_n) R_{\omega,\eta}(t,\tau,\lambda) + \\
&\quad + (\Theta_{\omega,M} M_n - \Theta_{\omega,N} N_n) R_{\omega,\omega}(t,\tau,\lambda)]\,d\tau.
\end{aligned}\right. \tag{2.19}$$

Powyższe wyrażenia należy wstawić do równania prac przygotowanych (2.16). Jako stany obciążenia (wirtualne) ustroju zastępczego izostatycznego bierzemy kolejno stany $X_a = 1$, $X_b = 1$, ..., $X_n = 1$. Przyjmiemy, że podpory wykazały przesunięcia (np. osiadania w kierunku reakcji podporowych) odpowiednio $c_a, c_b, ..., c_n$, będące w wyniku poczynionych obserwacji znanymi funkcjami czasu. Ogólnie dla stanu $X_m = 1$ praca przygotowana sił zewnętrznych wyraża się wzorem

$$\Sigma \overline{Q}_m \delta_m = 1 \cdot \delta_m + \Sigma C_m c,$$

w którym δ_m oznacza rzeczywiste przesunięcie (uogólnione) odpowiadające sile (uogólnionej) $X_m = 1$; C_m oznaczają reakcje podporowe dla stanu $X_m = 1$; sumowanie na prawej stronie rozciąga się na wszystkie podpory ustroju zastępczego. W powyższym zapisie jak również w dalszym ciągu pomijamy kreski poziome oznaczające siły wirtualne.

Przy tych oznaczeniach otrzymamy na podstawie relacji (2.16) następujące wyrażenia na pracę przygotowaną dla stanu $X_m = 1$:

$$1 \cdot \delta_m + \Sigma C_m c = \overline{\delta}_{0m}(t) + X_a^*(t)\,\delta_{am} + X_b^*(t)\,\delta_{bm} + \cdots + X_n^*(t)\,\delta_{nm} + \\ + \int_0^t X_a^*(\tau)\,\overline{\delta}_{am}(t,\tau)\,d\tau + \int_0^t X_b^*(\tau)\,\overline{\delta}_{bm}(t,\tau)\,d\tau + \cdots + \int_0^t X_n^*(\tau)\,\overline{\delta}_{nm}(t,\tau)\,d\tau. \tag{2.20}$$

W wyrażeniu tym oznaczają ogólnie:

$$\delta_{km} = \int_s \Theta_{\eta.N} N_k N_m\,ds - \int_s \Theta_{\eta.M} M_k N_m\,ds + \int_s \Theta_{\omega.M} M_k M_m\,ds + \\ + \int_s \Theta_{\omega.N} N_k M_m\,ds,$$

$$\overline{\delta}_{km}(t,\tau) = \int_s (\Theta_{\eta.N} N_k - \Theta_{\eta.M} M_k)\,N_m R_{\eta.\eta}(t,\tau,\lambda)\,ds + \\ + \int_s (\Theta_{\omega.M} M_k - \Theta_{\omega.N} N_k)\,N_m R_{\eta.\omega}(t,\tau,\lambda)\,ds + \\ + \int_s (\Theta_{\eta.N} N_k - \Theta_{\eta.M} M_k)\,M_m R_{\omega.\eta}(t,\tau,\lambda)\,ds + \\ + \int_s (\Theta_{\omega.M} M_k - \Theta_{\omega.N} N_k)\,M_m R_{\omega.\omega}(t,\tau,\lambda)\,ds,$$

$$\overline{\delta}_{0m}(t) = \int_s \overline{\eta}_0(t)\,N_m\,ds + \int_s \overline{\omega}(t)\,M_m\,ds.$$

Zachodzą oczywiście związki: $\delta_{km} = \delta_{mk}$, $\overline{\delta}_{km} = \overline{\delta}_{mk}$.

Wypisując wzór (2.20) dla każdej podpory nadliczbowej i oznaczając ogólnie

$$\varkappa_m(t) = 1 \cdot \delta_m(t) + \Sigma C_m c(t) - \overline{\delta}_{0m}(t)$$

dochodzimy do następującego podstawowego układu równań dla wielkości hiperstatycznych:

$$
(2.21)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\delta_{aa} X_a^* + \delta_{ba} X_b^* + \cdots + \delta_{na} X_n^* = \\
&\qquad = \varkappa_a - \int_0^t X_a^* \bar{\delta}_{aa}\, d\tau - \int_0^t X_b^* \bar{\delta}_{ba}\, d\tau - \cdots - \int_0^t X_n^* \bar{\delta}_{na}\, d\tau, \\
&\delta_{ab} X_a^* + \delta_{bb} X_b^* + \cdots + \delta_{nb} X_n^* = \\
&\qquad = \varkappa_b - \int_0^t X_a^* \bar{\delta}_{ab}\, d\tau - \int_0^t X_b^* \bar{\delta}_{bb}\, d\tau - \cdots - \int_0^t X_n^* \bar{\delta}_{nb}\, d\tau, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\delta_{an} X_a^* + \delta_{bn} X_b^* + \cdots + \delta_{nn} X_n^* = \\
&\qquad = \varkappa_n - \int_0^t X_a^* \bar{\delta}_{an}\, d\tau - \int_0^t X_b^* \bar{\delta}_{bn}\, d\tau - \cdots - \int_0^t X_n^* \bar{\delta}_{nn}\, d\tau.
\end{aligned}
\right.
$$

Jest to układ n równań całkowych liniowych V o l t e r r y o znanych jądrach $\bar{\delta}_{aa}(t,\tau)$, $\bar{\delta}_{ab}(t,\tau), \ldots, \bar{\delta}_{nn}(t,\tau)$.

Rozwiązanie tego układu możemy przedstawić w postaci

$$
(2.22)\quad \left\{
\begin{aligned}
X_a^*(t) &= \beta_{aa}\varkappa_a(t) + \beta_{ab}\varkappa_b(t) + \cdots + \beta_{an}\varkappa_n(t) + \\
&\quad + \int_0^t \varkappa_a(\tau) Q_{aa}(t,\tau)\, d\tau + \int_0^t \varkappa_b(\tau) Q_{ab}(t,\tau)\, d\tau + \\
&\quad + \cdots + \int_0^t \varkappa_n(\tau) Q_{an}(t,\tau)\, d\tau, \\
X_b^*(t) &= \beta_{ba}\varkappa_a(t) + \beta_{bb}\varkappa_b(t) + \cdots + \beta_{bn}\varkappa_n(t) + \\
&\quad + \int_0^t \varkappa_a(\tau) Q_{ba}(t,\tau)\, d\tau + \int_0^t \varkappa_b(\tau) Q_{bb}(t,\tau)\, d\tau + \\
&\quad + \cdots + \int_0^t \varkappa_n(\tau) Q_{bn}(t,\tau)\, d\tau, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_n^*(t) &= \beta_{na}\varkappa_a(t) + \beta_{nb}\varkappa_b(t) + \cdots + \beta_{nn}\varkappa_n(t) + \\
&\quad + \int_0^t \varkappa_a(\tau) Q_{na}(t,\tau)\, d\tau + \int_0^t \varkappa_b(\tau) Q_{nb}(t,\tau)\, d\tau + \\
&\quad + \cdots + \int_0^t \varkappa_n(\tau) Q_{nn}(t,\tau)\, d\tau.
\end{aligned}
\right.
$$

Do powyższych wzorów można dojść w sposób następujący. Rozwiązujemy układ równań algebraicznych liniowych (2.21) uważając prawe strony równań za wyrazy wolne i wyrażamy niewiadome X_k^* jako funkcje liniowe prawych stron (o współczynnikach $\beta_{ka}, \beta_{kb}, \ldots, \beta_{kn}$). Przegrupowując odpowiednio otrzymane wielomiany dochodzimy do układu równań całkowych w postaci wyraźnej o jądrach formy $\beta_{ka}\overline{\delta}_{ma} + \beta_{kb}\overline{\delta}_{mb} + \cdots + \beta_{kn}\overline{\delta}_{mn}$. Znajdujemy składowe rezolwenty będące funkcjami $\overline{\delta}_{aa}, \overline{\delta}_{ab}, \ldots$ i przegrupowując wyrazy w rozwiązaniach dochodzimy do wzorów (2.22), w których $Q(t, \tau)$ są odpowiednimi liniowymi funkcjami tych rezolwent. Nie przytaczamy tutaj powyższych przekształceń z uwagi na ich formalny charakter. Istotne w zapisie (2.22) jest to, że wyrażenia $Q(t, \tau)$ zależą tylko od funkcji pełzania i od warunków geometrycznych ustroju (ukształtowanie przekroju, rozmieszczenie podpór itd.). Obliczywszy wspomniane wielkości dla danego ustroju możemy korzystać ze wzorów (2.22) dla różnych warunków obciążeń. Jeżeli do rozwiązania układu (2.21) stosujemy np. metodę iteracji, to nie jest konieczne przedstawianie go w postaci wyraźnej; po każdej iteracji możemy ponownie rozwiązywać układ równań liniowych.

Wyznaczywszy z zależności (2.22) niewiadome $X^*(t)$ jako funkcje czasu przechodzimy do funkcji $X(t)$ rozwiązując równania całkowe typu

$$X(t) = X^*(t) + \int_0^t X(\tau) K(t, \tau) d\tau.$$

Znając wielkości nadliczbowe $X(t)$ możemy na podstawie równań (2.17) wyznaczyć $N(t)$ i $M(t)$. Jeżeli nie zależy na wyznaczeniu wszystkich reakcji, to można wstawić znalezione wartości $X^*(t)$ bezpośrednio do równań (2.18) i wyznaczyć N i M z równań typu

$$N(t) = N^*(t) + \int_0^t N(\tau) K(t, \tau) d\tau,$$

$$M(t) = M^*(t) + \int_0^t M(\tau) K(t, \tau) d\tau.$$

Z kolei na podstawie równań (2.14) można wyznaczyć odkształcenia η_0, ω oraz — rozwiązując równanie (2.6) — naprężenia dla dowolnego przekroju. Rozwiązania równań typu powyższego możemy oczywiście od razu wypisać, ponieważ znamy rezolwentę jądra $K(t, \tau)$. Tym samym problem jest w całości rozwiązany.

Podsumujmy dotychczasowe wywody. Rozwiązanie zagadnienia na podstawie ogólnej teorii pełzania liniowego Volterry-Boltzmanna przebiega w następujących etapach:

(1) rozwiązanie zadania w ramach teorii sprężystości jako zadania wstępnego w celu wyznaczenia odkształceń poszczególnych przekrojów i określenia na tej podstawie zmienności S_0;

(2) rozwiązanie problemu wewnętrznie statycznie niewyznaczalnego dla danego przekroju, polegające na wyznaczeniu rezolwenty jądra $K(t, \tau)$ oraz współczynników δ wchodzących do wzoru (2.20), charakteryzujących odkształcenia ustroju jako całości;

(3) rozwiązanie problemu zewnętrznie statycznie niewyznaczalnego, polegające na rozwiązaniu układu równań całkowych (2.21) i wyznaczenie na tej podstawie wielkości hiperstatycznych «zredukowanych» $X^*(t)$;

(4) przejście do wielkości hiperstatycznych właściwych $X(t)$, a stąd do wartości M, N oraz odkształceń i naprężeń dla danego przekroju.

Oczywiście wywody niniejszego punktu opierały się na założeniu, że od chwili sprężenia i obciążenia ustroju zabezpieczona jest współpraca armatury z betonem. Na możliwości odstąpienia od tego założenia wskażemy w p. 3.3.

3. Rozwiązanie zagadnień praktycznych

Wyprowadzony w poprzednim punkcie układ równań całkowych nie nadaje się do bezpośrednich zastosowań praktycznych, gdyż rozwiązanie jego w ogólnym przypadku jest zbyt uciążliwe. Toteż przechodząc do konkretnych zadań przyjmuje się rozmaite założenia upraszczające, omówione już częściowo w p. 1.

Tutaj poświęcimy uwagę tylko głównym kierunkom, w których idą wspomniane uproszczenia, konkretyzując je tylko w tej mierze, w jakiej nie jest konieczne założenie określonej funkcji pełzania. Omówimy kolejno:

(1) uproszczenie równań statycznej niewyznaczalności wewnętrznej, które może znaleźć zastosowanie w przypadku armatury skoncentrowanej w jednym poziomie w przekroju;

(2) uproszczenie równań statycznej niewyznaczalności zewnętrznej, które ma miejsce w szczególności w przypadku belek ciągłych;

(3) uniknięcie problemu statycznej niewyznaczalności wewnętrznej przez zastąpienie ustroju niejednorodnego jednorodnym;

(4) uproszczenia wynikające z zastąpienia zależności całkowych zależnościami różniczkowymi.

3.1. Uproszczenie równań niewyznaczalności wewnętrznej. Armatura skoncentrowana. Zagadnienie statycznej niewyznaczalności wewnętrznej uprościłoby się znacznie, gdybyśmy układ równań całkowych (2.12) mogli sprowadzić do jednego równania. Byłoby to równoznaczne ze sprowadzeniem problemu zginania do zagadnienia ściskania osiowego. Na takiej koncepcji opiera się, jak wiadomo, metoda R. Busemanna, [2], do tego też sprowadzają się rozwiązania N. Ch. Arutiuniana, [1]. Uproszczenie takie jest możliwe przy poczynieniu pewnych założeń co do rozmieszczenia armatury w przekroju. Przyjmijmy mianowicie w równaniach (2.12) $\nu_e = \nu_i = \nu$, tzn. $e_a = i_a$, co zachodzi w przypadku armatury skoncentrowanej w jednym poziomie (ściślej, gdy moment bezwładności armatury względem jej własnej osi ciężkości można pominąć).

Mnożąc drugie z równań (2.12) przez $e_a/\nu = i_b^2/e_a$ i odejmując od równania pierwszego otrzymamy wówczas

$$\eta_0 - \frac{i_b^2}{e_a}\omega = \frac{N^* + N_\varepsilon + S_0^*}{E_b A_b} - \frac{i_b^2}{e_a}\frac{M^* + M_\varepsilon + M_{S_0}^*}{E_b I_b}. \tag{3.1}$$

Z drugiej strony pomnóżmy drugie z równań (2.12) przez e_a i dodajmy do równania pierwszego; otrzymamy

$$\eta_0 + e_a\omega = \frac{N^* + N_\varepsilon + S_0^*}{E_b A_b} + e_a \frac{M^* + M_\varepsilon + M_{S_0}^*}{E_b I_b} - n\mu(1+\nu)(\eta_0^* + e_a\omega^*)$$

lub wyraźniej

$$\eta_0 + e_a\omega = \frac{N^* + N_\varepsilon + S_0^*}{[1+n\mu(1+\nu)]E_b A_b} + \frac{M^* + M_\varepsilon + M_{S_0}}{[1+n\mu(1+\nu)]E_b I_b} + \tag{3.2}$$
$$+ \frac{n\mu(1+\nu)}{1+n\mu(1+\nu)}\int_0^t (\eta_0 + e_a\omega)K(t,\tau)\,d\tau.$$

Zinterpretujmy otrzymane wyniki. Lewe strony równań (3.1) i (3.2) przedstawiają zgodnie ze wzorem (2.4) wydłużenia całkowite włókien η_b i η_a, znajdujących się w odległościach od osi ciężkości betonu odpowiednio $z = z_b = -i_b^2/e_a$ oraz $z = e_a$. Jeżeli ograniczymy obciążenie przekroju do siły sprężającej, tj. zredukujemy liczniki ułamków po prawej stronie zależności (3.1) do wyrażeń odpowiednio S_0^* i $M_{S_0}^* = S_0^* e_a$, to otrzymamy

$$\eta_b = \eta_0 + z_b\omega = \frac{S_0^*}{E_b A_b} - \frac{i_b^2}{e_a}\frac{S_0^* e_a}{E_b I_b} = 0.$$

Znaczy to, że z_b określa włókno, w którym odkształcenia i naprężenia pod wpływem (samego) sprężenia równe są zeru (punkt ten może leżeć oczywiście również poza przekrojem). Konstrukcja geometryczna wyznaczająca położenie tego włókna znana jest ze statyki elementarnej (por. [10]).

Podstawmy wartości η do równań (3.1) i (3.2); korzystając z wypisanej powyżej zależności otrzymamy

$$\eta_b(t) = \frac{N^* + N_\varepsilon}{E_b A_b} + z_b \frac{M^* + M_\varepsilon}{E_b I_b}, \tag{3.1.1}$$

$$\eta_a(t) = \gamma\frac{N^* + N_\varepsilon + S_0^*}{E_b A_b} + \gamma e_a \frac{M^* + M_\varepsilon + M_0^*}{E_b I_b} + (1-\gamma)\int_0^t \eta_a(\tau)K(t,\tau)\,d\tau, \tag{3.2.1}$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$\gamma = \frac{1}{1+n\mu(1+\nu)}.$$

Z równań (3.1.1) i (3.2.1) możemy wyprowadzić następujące wnioski.

(1) Odkształcenia obu włókien możemy wyznaczyć oddzielnie, co jest równoważne sprowadzeniu elementu do dwóch elementów fikcyjnych, osiowo ściskanych.

(2) Dla włókna w odległości z_b wyznaczenie odkształceń staje się zadaniem statycznie wyznaczalnym, tzn. zmiany naprężeń w armaturze nie wywierają wpływu na odkształcenie. W ogólnym przypadku otrzymujemy

$$\eta_b(t) = F_b(t) + \frac{N_x^*(t)}{E_b A_b} + z_b \frac{M_x^*(t)}{E_b I_b}, \tag{3.3}$$

gdzie

$$F_b(t) = \frac{N_0^* + N_\varepsilon}{E_b A_b} + z_b \frac{M_0^* + M_\varepsilon}{E_b I_b},$$

a pozostałe oznaczenia są te same co w poprzednim punkcie.

(3) Odkształcenia armatury (włókno w odległości e_a) dają się wyznaczyć z równania całkowego (3.2.1). Rozwiązanie tego równania może być zapisane ogólnie w postaci [por. (2.14)]

$$\eta_a(t) = F_a(t) + \gamma \frac{N_x^*(t)}{E_b A_b} + \gamma e_a \frac{M_x^*(t)}{E_b I_b} + \tag{3.4}$$

$$+ (1-\gamma) \int_0^t \left[F_a(\tau) + \gamma \frac{N_x^*(\tau)}{E_b A_b} + \gamma e_a \frac{M_x^*(\tau)}{E_b I_b} \right] R(t, \tau, 1-\gamma)\, d\tau,$$

gdzie

$$F_a(t) = \gamma \frac{N_0^* + N_\varepsilon + S_0^*}{E_b A_b} + \gamma e_a \frac{M_0^* + M_\varepsilon + M_{S_0}^*}{E_b I_b}$$

oraz $R(t, \tau, 1-\gamma)$ oznacza rezolwentę jądra $K(t, \tau)$ przy parametrze $1-\gamma$. Równania powyższe nie trudno byłoby przekształcić do postaci, w której występowałyby naprężenia, co jest jednak mniej dogodne w przypadku ustrojów hiperstatycznych.

Wzór (3.4) możemy także — jak to zapowiedzieliśmy w poprzednim punkcie — sprowadzić do postaci, w której nie będą występowały wyrażenia oznaczone gwiazdkami. W tym celu musimy przekształcić wyrażenia

$$X^*(t) + (1-\gamma) \int_0^t X^*(\tau) R(t, \tau, 1-\gamma)\, d\tau,$$

typu występującego we wzorze (3.4). Wypisując wyraźnie wyrażenie X^* otrzymamy

$$X^*(t) + (1-\gamma) \int_0^t X^*(\tau) R(t, \tau, 1-\gamma)\, d\tau =$$

$$= X(t) - \int_0^t X(s) K(t, s)\, ds + (1-\gamma) \int_0^t \left[X(\tau) - \int_0^\tau X(s) K(\tau, s)\, ds\right] R(t, \tau, 1-\gamma)\, d\tau =$$

$$= X(t) - \int_0^t X(s) K(t,s)\, ds + (1-\gamma) \int_0^t X(\tau) R(t,\tau,1-\gamma)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t \left[(1-\gamma) \int_\tau^t R(t,\tau,1-\gamma) K(\tau,s)\, d\tau\right] X(s)\, ds =$$

$$= X(t) - \int_0^t X(s) K(t,s)\, ds + (1-\gamma) \int_0^t X(\tau) R(t,\tau,1-\gamma)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t [R(t,s,1-\gamma) - K(t,s)]\, X(s)\, ds = X(t) - \gamma \int_0^t X(\tau)\, R(t,\tau,1-\gamma)\, d\tau .$$

W powyższym wywodzie zastosowaliśmy przekształcenie Dirichleta oraz skorzystaliśmy z zależności całkowej dla rezolwenty znanej z teorii równań całkowych [5].

Na tej podstawie równanie (3.4) możemy zapisać w postaci

$$\eta_a(t) = \bar{\eta}_a(t) + \gamma \frac{N_x(t)}{E_b A_b} + \gamma e_a \frac{M_x(t)}{E_b I_b} - \gamma \int_0^t \left[\gamma \frac{N_x(\tau)}{E_b A_b} + \gamma e_a \frac{M_x(\tau)}{E_b I_b}\right] R(t,\tau,1-\gamma)\, d\tau, \tag{3.4.1}$$

gdzie

$$\bar{\eta}_a(t) = F_a(t) + (1-\gamma) \int_0^t F_a(\tau)\, R(t,\tau,1-\gamma)\, d\tau .$$

Od funkcji $\eta_b(t)$ oraz $\eta_a(t)$ możemy przejść bezpośrednio do funkcji $\omega(t)$ i $\eta_0(t)$ korzystając z zależności

$$\omega = \frac{\eta_a - \eta_b}{e_a - z_b}, \qquad \eta_0 = \eta_a - e_a \omega = \frac{e_a \eta_b - z_b \eta_a}{e_a - z_b}. \tag{3.5}$$

Rozwijając wyrazy oznaczone gwiazdką we wzorze (3.3) i wstawiając wyrażenia (3.3) i (3.4.1) do (3.5), dojdziemy do wzorów podobnych do (2.19), a następnie korzystając z równania prac przygotowanych (2.16) do związ-

[5] Jak wiadomo, w ogólnym przypadku równanie całkowe dla rezolwenty ma postać

$$R(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda \int_y^x R(s,y,\lambda)\, K(x,s)\, ds$$

i analogicznie dla drugiego argumentu.

ków analogicznych do (2.20), przy czym wyrażenia δ przyjmą następujące postaci, które podajemy bez przytaczania obliczeń:

$$\delta'_{km}=\int_s \frac{e_a-\gamma z_b}{e_a-z_b}\frac{N_k N_m}{E_b A_b}ds+\int_s \frac{\gamma-1}{e_a-z_b}\frac{N_k M_m}{E_b A_b}ds+$$

$$+\int_s \frac{e_a z_b(1-\gamma)}{e_a-z_b}\frac{M_k N_m}{E_b I_b}ds+\int_s \frac{\gamma e_a-z_b}{e_a-z_b}\frac{M_k M_m}{E_b I_b}ds,$$

$$\overline{\delta}'_{km}(t,\tau)=-\int_s \frac{e_a K(t,\tau)-\gamma^2 z_b R(t,\tau,1-\gamma)}{e_a-z_b}\frac{N_k N_m}{E_b A_b}ds+$$

$$+\int_s \frac{K(t,\tau)-\gamma^2 R(t,\tau,1-\gamma)}{e_a-z_b}\frac{N_k M_m}{E_b A_b}ds-$$

$$-\int_s \frac{e_a z_b[K(t,\tau)-\gamma^2 R(t,\tau,1-\gamma)]}{e_a-z_b}\frac{M_k N_m}{E_b I_b}ds+$$

$$+\int_s \frac{z_b K(t,\tau)-\gamma^2 e_a R(t,\tau,1-\gamma)}{e_a-z_b}\frac{M_k M_m}{E_b I_b}ds,$$

$$\overline{\delta}'_{0m}(t)=\int_s \frac{\overline{\eta}_a(t)-F_b(t)}{e_a-z_b}M_m ds+\int_s \frac{e_a F_b(t)-z_b\overline{\eta}_a(t)}{e_a-z_b}N_m ds.$$

Ponadto

$$\varkappa'_m(t)=1\cdot\delta_m(t)+\Sigma C_m c(t)-\overline{\delta}'_{0m}(t).$$

Przy powyższych oznaczeniach wyrażenia na przemieszczenia i układ równań całkowych dla wielkości hiperstatycznych przyjmą postać analogiczną odpowiednio do (2.20) i (2.21), z tym że znikną gwiazdki oznaczające wielkości hiperstatyczne «zredukowane» i po rozwiązaniu równań nie będzie trzeba przechodzić od wielkości «zredukowanych» do rzeczywistych.

3.2. Uproszczenie równań niewyznaczalności zewnętrznej. Belki ciągłe. W tym przypadku zakładamy, że nie występują siły podłużne wywołane obciążeniami zewnętrznymi i reakcjami podporowymi, wobec czego wielkości N i N^* znikają w równaniach (2.9), (2.12) i (2.13). Ponadto nie występują odpowiednie składowe reakcji nadliczbowych, tzn. ogólnie wielkości N nie występują we wzorach (2.17), (2.18) i (2.19). W związku z tym wyrażenia δ wchodzące w równania (2.20) i (2.21) przyjmą postać

$$(3.6)\quad \begin{cases} \delta_{km}=\int_s \Theta_{\omega,M} M_k M_m ds, \\ \overline{\delta}_{km}(t,\tau)=\int_s [\Theta_{\omega,M} R_{\omega,\omega}(t,\tau)-\Theta_{\eta,M} R_{\omega,\eta}(t,\tau)] M_k M_m ds, \\ \overline{\delta}_{0m}(t)=\int_s \omega(t) M_m ds \end{cases}$$

lub w przypadku armatury skoncentrowanej

$$\delta'_{km} = \int_s \frac{\gamma e_a - z_b}{e_a - z_b} \frac{M_k M_m}{E_b I_b} ds,$$

$$\bar{\delta}'_{km}(t,\tau) = -\int_s \frac{z_b K(t,\tau) - \gamma^2 e_a R(t,\tau,1-\gamma)}{e_a - z_b} \frac{M_k M_m}{E_b I_b} ds,$$

$$\delta'_{0m}(t) = \frac{\bar{\eta}_a(t) - F_b(t)}{e_a - z_b} M_m ds.$$

W przypadku belek ciągłych podobnie jak w statyce elementarnej za układ zastępczy (statycznie wyznaczalny) przyjmujemy układ belek wolnopodpartych powstających z rozcięcia nad podporami belki ciągłej, a za wielkości hiperstatyczne X_a, X_b, ... odpowiednie momenty podporowe. Wówczas wielkości δ_{km} przedstawią odpowiednio «zredukowane» obroty wzajemne końców przęseł nad podporą k pod wpływem stanu obciążenia $X_m = 1$. Wartości ich będą różne od zera tylko dla podpór $k-1$, k, $k+1$. Dla podpory k otrzymamy zatem równanie

$$\begin{aligned}(3.7)\qquad \delta_{k-1,k} X^*_{k-1}(t) + \delta_{k,k} X^*_k(t) + \delta_{k+1,k} X^*_{k+1}(t) &= \\ = \varkappa_k(t) - \int_0^t X^*_{k-1}(\tau)\, \bar{\delta}_{k-1,k}(t,\tau)\, d\tau &- \\ - \int_0^t X^*_k(\tau)\, \bar{\delta}_{k,k}(t,\tau)\, d\tau - \int_0^t X^*_{k+1}(\tau)\, \bar{\delta}_{k+1,k}(t,\tau)\, d\tau&\end{aligned}$$

lub w przypadku posługiwania się wielkościami «nie zredukowanymi» (bez gwiazdek) i przy armaturze skoncentrowanej

$$\begin{aligned}(3.8)\qquad \delta'_{k-1,k} X_{k-1}(t) + \delta'_{k,k} X_k(t) + \delta'_{k+1,k} X_{k+1}(t) &= \\ = \varkappa'_k(t) - \int_0^t X_{k-1}(\tau)\, \bar{\delta}'_{k-1,k}(t,\tau)\, d\tau &- \\ - \int_0^t X_k(\tau)\, \bar{\delta}'_{k,k}(t,\tau)\, d\tau - \int_0^t X_{k+1}(\tau)\, \bar{\delta}'_{k+1,k}(t,\tau)\, d\tau&.\end{aligned}$$

Równania powyższe są analogiczne do równań trzech momentów znanych ze statyki elementarnej. Przez wypisanie ich dla każdej podpory nadliczbowej otrzymamy układ równań całkowych analogiczny do (2.21), którego rozwiązanie pozwoli określić momenty podporowe jako funkcje czasu.

Dalsze uproszczenia można by uzyskać przez poczynienie pewnych założeń co do warunków geometrycznych ustroju. Weźmy np. pod uwagę belkę ciągłą o stałym przekroju i o armaturze skoncentrowanej prostoliniowej; załóżmy więc, że wielkości z_b, e_a, γ, E, I i $R(t,\tau,1-\gamma)$ mają stałe wartości wzdłuż belki. Ponadto zakładamy, że skrajne podpory belki są swobodne. W tym przypadku wyrażenia pod całkami we wzorach na δ' zawierające powyższe składniki mają stałe wartości, zaś całki iloczynów

$M_k M_m$ — jak wiadomo z teorii elementarnej — wartości odpowiednio $l_k/6$, $(l_k + l_{k+1})/3$, $l_{k+1}/6$. Po elementarnych przekształceniach równania (3.8) przyjmą postać

$$(3.9) \quad l_k X_{k-1}(t) + 2(l_k + l_{k+1}) X_k(t) + l_{k+1} X_{k+1}(t) =$$
$$= \varkappa_k'(t) \frac{6 E_b I_b (e_a - z_b)}{\gamma e_a - z_b} + \int_0^t [l_k X_{k-1}(\tau) + 2(l_k + l_{k+1}) X_k(\tau) + l_{k+1} X_{k+1}(\tau)] \times$$
$$\times \frac{z_b K(t,\tau) - \gamma^2 e_a R(t,\tau,1-\gamma)}{\gamma e_a - z_b} d\tau.$$

Jak widać, w tym przypadku dla każdej podpory nadliczbowej możemy rozwiązać oddzielnie równanie całkowe (3.9) o funkcji niewiadomej

$$l_k X_{k-1}(t) + 2(l_k + l_{k+1}) X_k(t) + l_{k+1} X_{k+1}(t).$$

Wyznaczywszy tę funkcję dla każdej podpory obliczymy wielkości hiperstatyczne X_k rozwiązując otrzymany układ równań algebraicznych liniowych.

Jeszcze większe uproszczenia uzyskalibyśmy zakładając stałe warunki obciążenia w poszczególnych przęsłach. Np. przy przęsłach równej długości, obciążonych w ten sam sposób, bez osiadania podpór, otrzymamy to samo $\varkappa_k'$ dla poszczególnych przęseł i wystarczy rozwiązać tylko jedno równanie całkowe (wyraz wolny i jądro byłyby dla wszystkich równań takie same).

3.3. Przejście do ustroju jednorodnego i metody pokrewne. Dotychczasowe rozważania były oparte na założeniu, że od chwili, w której rozpoczyna się pełzanie betonu, kable są zespolone z betonem za pomocą iniekcji wiążącej, co zapewnia ich współodkształcalność z betonem. Jeśli tak nie jest, tzn. jeśli kable mogą swobodnie ślizgać się w swoich kanałach, to należy obliczenie rozbić na dwa etapy obejmujące okres od chwili sprężenia do chwili iniekcji oraz okres po jej dokonaniu. Zajmiemy się obecnie pierwszym etapem pomijając dla uproszczenia ścisłe uwzględnienie wpływu armatury pomocniczej, zespolonej od pierwszej chwili z betonem.

Ustrojem zastępczym (statycznie wyznaczalnym) jest tutaj sam element betonowy osłabiony kanałami kablowymi po usunięciu podpór nadliczbowych. Uwzględniając tę okoliczność możemy podać analogicznie do relacji (2.17) wyrażenia na wielkości statyczne, uwzględniając oddzielnie siły zewnętrzne i siły sprężające:

$$(3.10) \quad \begin{cases} N = N_0 + X_a N_a + X_b N_b + \cdots + X_n N_n, \\ S = X_A S_A + X_B S_B + \cdots + X_N S_N, \\ M = M_0 + X_a M_a + X_b M_b + \cdots + X_n M_n, \\ M_S = X_A M_A + X_B M_B + \cdots + X_N M_N = \\ \qquad = X_A S_A e_A + X_B S_B e_B + \cdots + X_N S_N e_N. \end{cases}$$

Wskaźniki wielkoliterowe odnoszą się do kolejnych kabli $A, B, \ldots, N$. Ogólnie X_K oznacza siłę sprężającą wywieraną przez kabel K; S_K i M_K oznaczają odpowiednio siłę sprężającą i moment sprężający w danym przekroju pod wpływem $X_K = 1$ itd. Jeżeli nie uwzględniamy nachylenia trasy kabla, strat siły sprężającej wskutek tarcia kabla (przy założeniu ich proporcjonalności do siły S) itp., to możemy przyjąć ogólnie $S_K = 1$. Analogiczne zależności można wypisać dla wielkości oznaczonych gwiazdką.

Dla uzyskania równań wyznaczających wielkości hiperstatyczne korzystamy bezpośrednio ze wzorów (2.9.1), którym zgodnie z (3.10) nadajemy postać

$$(3.11)\quad \begin{cases} \eta_0 = \dfrac{N_0^* + N_\varepsilon}{E_b A_b} + X_a^* \dfrac{N_a}{E_b A_b} + X_b^* \dfrac{N_b}{E_b A_b} + \cdots + X_n^* \dfrac{N_n}{E_b A_b} + \\ \qquad + X_A^* \dfrac{S_A}{E_b A_b} + X_B^* \dfrac{S_B}{E_b A_b} + \cdots + X_N^* \dfrac{S_N}{E_b A_b}, \\ \omega = \dfrac{M_0 + M_\varepsilon}{E_b I_b} + X_a^* \dfrac{M_a}{E_b I_b} + X_b^* \dfrac{M_b}{E_b I_b} + \cdots + X_n^* \dfrac{M_n}{E_b I_b} + \\ \qquad + X_A^* \dfrac{S_A e_A}{E_b I_b} + X_B^* \dfrac{S_B e_B}{E_b I_b} + \cdots + X_N^* \dfrac{S_N e_N}{E_b I_b}. \end{cases}$$

Wielkości te wstawiamy do równania prac przygotowanych (2.16) i dochodzimy do następujących wzorów na przemieszczenia (przy pominięciu osiadania podpór):

dla przemieszczeń podporowych

$$\delta_m = \delta_{0m} + \delta_{am} X_a^* + \delta_{bm} X_b^* + \cdots + \delta_{nm} X_n^* + \\ + \delta_{Am} X_A^* + \delta_{Bm} X_B^* + \cdots + \delta_{Nm} X_N^*,$$

dla przemieszczeń kablowych

$$\delta_M = \delta_{0M} + \delta_{aM} X_a^* + \delta_{bM} X_b^* + \cdots + \delta_{nM} X_n^* + \\ + \delta_{AM} X_A^* + \delta_{BM} X_B^* + \cdots + \delta_{NM} X_N^*,$$

gdzie oznaczają ogólnie:

$$\delta_{km} = \int_s \frac{N_k N_m}{E_b A_b} ds + \int_s \frac{M_k M_m}{E_b I_b} ds,$$

$$\delta_{Km} = \int_s \frac{S_K N_m}{E_b A_b} ds + \int_s \frac{S_K e_K M_m}{E_b I_b} ds \approx \int_s \frac{N_m}{E_b A_b} ds + \int_s \frac{e_K M_m}{E_b I_b} ds,$$

$$\delta_{kM} = \int_s \frac{N_k S_M}{E_b A_b} ds + \int_s \frac{M_k S_M e_M}{E_b I_b} ds \approx \int_s \frac{N_k}{E_b A_b} ds + \int_s \frac{M_k e_M}{E_b I_b} ds,$$

$$\delta_{KM}=\int_s \frac{S_K S_M}{E_b A_b} ds+\int_s \frac{S_K e_K S_M e_M}{E_b I_b} ds \approx \int_s \frac{1}{E_b A_b} ds+\int_s \frac{e_K e_M}{E_b I_b} ds,$$

$$\delta_{0m}=\int_s \frac{N_0^* N_m}{E_b A_b} ds+\int_s \frac{N_\varepsilon N_m}{E_b A_b} ds+\int_s \frac{M_0^* M_m}{E_b I_b} ds+\int_s \frac{M_\varepsilon M_m}{E_b I_b} ds,$$

$$\delta_{0M}=\int_s \frac{N_0^* S_M}{E_b A_b} ds+\int_s \frac{N_\varepsilon S_M}{E_b A_b} ds+\int_s \frac{M_0^* S_M e_M}{E_b I_b} ds+\int_s \frac{M_\varepsilon S_M e_M}{E_b I_b} ds \approx$$

$$\approx \int_s \frac{N_0^*}{E_b A_b} ds+\int_s \frac{N_\varepsilon}{E_b A_b} ds+\int_s \frac{M_0^* e_M}{E_b I_b} ds+\int_s \frac{M_\varepsilon e_M}{E_b I_b} ds.$$

Wyrażenia przybliżone po prawych stronach uzyskano przyjmując ogólnie $S_K = 1$.

We wzorach powyższych δ_{km} oznacza przesunięcie uogólnione punktu k (w kierunku przyjętej siły uogólnionej nadliczbowej) dla stanu $X_m = 1$, δ_{Km} wydłużenie całkowite kanału kablowego K dla stanu $X_m = 1$ itd.

Aby dojść do układu równań dla wielkości hiperstatycznych, należy określić warunki dla przemieszczeń δ.

Jeżeli uwzględnimy ogólnie przesunięcia podpór, to analogicznie jak w p. 2 dojdziemy do odpowiedniego wyrażenia na pracę przygotowaną sił zewnętrznych i możemy wprowadzić oznaczenie

$$\varkappa_m(t) = 1 \cdot \delta_m(t) + \Sigma C_m c(t) - \delta_{0m}(t).$$

Jeżeli osiadania podpór nie stwierdzono, to oczywiście $\varkappa_m = -\delta_{0m}$.

Dla przemieszczeń kablowych δ_M należy wykorzystać warunek równości wydłużeń całkowitych kanału kablowego i armatury. Jeżeli oznaczymy przez S_{0M} siłę początkową w kablu M (przed nastąpieniem odkształceń betonu), to warunek ten przyjmie postać

$$\delta_M = \frac{(S_{0M} - X_M)\, l_M}{E_a A_{aM}}, \tag{3.12}$$

gdzie l_M oznacza długość początkową kabla M.

W ustrojach kablobetonowych znamy z reguły nie siłę S_{0M}, lecz siłę odczytywaną na manometrze naciągarki, odpowiadającą stanowi, w którym nastąpiło już sprężyste skrócenie betonu.

Przy ścisłym obliczeniu można fakt ten uwzględnić w sposób znany z teorii konstrukcji kablobetonowych. Należy zaznaczyć, że siły kablowe stanowią układ sił samozrównoważonych, zatem nie wywołują reakcji podporowych w ustroju zastępczym (izostatycznym). Z tego powodu ewentualne przesunięcia podpór nie mają wpływu na pracę przygotowaną sił zewnętrznych.

Wprowadzając oznaczenia

$$\varkappa'_m(t) = \frac{S_{0M}\, l_m}{E_a A_{aM}} - \delta_{0M}, \qquad a_M = \frac{l_m}{E_a A_{aM}}, \tag{3.13}$$

dojdziemy do następującego układu równań dla wielkości hiperstatycznych:

$$
(3.14)\qquad \begin{cases} \delta_{aa} X_a^* + \cdots + \delta_{na} X_n^* + \delta_{Aa} X_A^* + \cdots + \delta_{Na} X_N^* = \varkappa_a, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{an} X_a^* + \cdots + \delta_{nn} X_n^* + \delta_{An} X_A^* + \cdots + \delta_{Nn} X_N^* = \varkappa_n, \\ \delta_{aA} X_a^* + \cdots + \delta_{nA} X_n^* + \delta_{AA} X_A^* + \cdots + \delta_{NA} X_N^* = \varkappa'_A - a_A X_A, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{aN} X_a^* + \cdots + \delta_{nN} X_n^* + \delta_{AN} X_A^* + \cdots + \delta_{NN} X_N^* = \varkappa'_N - a_N X_N. \end{cases}
$$

Powyższy układ jest układem równań algebraicznych liniowych, którego rozwiązanie możemy napisać w postaci

$$
(3.15.1)\qquad X_k^* = \beta_{ka}\varkappa_a + \cdots + \beta_{kn}\varkappa_n + \beta_{kA}\varkappa'_A + \cdots + \beta_{kN}\varkappa'_N - \\ - \beta_{kA} a_A X_A - \cdots - \beta_{kN} a_N X_N,
$$

$$
(3.15.2)\qquad X_K^* = \beta_{Ka}\varkappa_a + \cdots + \beta_{Kn}\varkappa_n + \beta_{KA}\varkappa'_A + \cdots + \beta_{KN}\varkappa'_N - \\ - \beta_{KA} a_A X_A - \cdots - \beta_{KN} a_N X_N.
$$

Zamiast symbolu z gwiazdką po lewej stronie równania należy podstawiać odpowiadającą mu funkcję, nadto w równaniu (3.15.2) przenieść na lewą stronę wyrażenie zawierające X_K. Otrzymamy w ten sposób równanie całkowe o jądrze $K(t, \tau)$. Równania (3.15.2) przedstawiają układ N równań całkowych; rozwiązując go otrzymamy wartości $X_A, X_B, \ldots, X_N$, które następnie wstawiamy do równań (3.15.1). Tak więc w ogólnym przypadku nie możemy uwolnić się od rozwiązania układu równań całkowych. Jeżeli armatura jest skoncentrowana lub jeśli zakładamy w przybliżeniu taki jej przebieg, układ (3.15.2) zredukuje się do jednego równania całkowego.

Przejście do ustroju jednorodnego wymaga założenia, że reakcje podporowe nadliczbowe nie wywierają wpływu na zmiany naciągu armatury. Wówczas równania (2.9.1) przedstawimy w postaci [por. (3.11)]

$$
(3.16)\qquad \begin{cases} \eta_0 = \dfrac{N_0^* + N_\varepsilon + S^*}{E_b A_b} + X_a^* \dfrac{N_a}{E_b A_b} + \cdots + X_n^* \dfrac{N_n}{E_b A_b}, \\[2ex] \omega = \dfrac{M_0^* + M_\varepsilon + S^* e}{E_b A_b} + X_a^* \dfrac{M_a}{E_b I_b} + \cdots + X_n^* \dfrac{M_n}{E_b I_b} \end{cases}
$$

i układ (3.14) przyjmie postać

$$
(3.17)\qquad \begin{cases} \delta_{aa} X_a^* + \delta_{ba} X_b^* + \cdots + \delta_{na} X_n^* = \varkappa_a, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{an} X_a^* + \delta_{bn} X_b^* + \cdots + \delta_{nn} X_n^* = \varkappa_n, \end{cases}
$$

gdzie współczynniki $\delta_{aa}, \delta_{ba}, \ldots, \delta_{nn}$ mają znaczenie jak powyżej, natomiast wielkości δ_0 wchodzące do wyrazu swobodnego określone są wzorami

$$\delta_{0m} = \int\limits_s \frac{N_0^* N_m}{E_b A_b} ds + \int\limits_s \frac{N_\varepsilon N_m}{E_b A_b} ds + \int\limits_s \frac{S^* N_m}{E_b A_b} ds +$$

$$+ \int\limits_s \frac{M_0^* M_m}{E_b I_b} ds + \int\limits_s \frac{M_\varepsilon M_m}{E_b I_b} ds + \int\limits_s \frac{S^* e M_m}{E_b I_b} ds.$$

Rozwiązanie układu równań algebraicznych (3.17) pozwala na obliczenie każdej z niewiadomych hiperstatycznych z osobna z równań całkowych typu

$$X_k(t) = \beta_{ka} \varkappa_a(t) + \cdots + \beta_{kn} \varkappa_n(t) + \int\limits_0^t X_k(\tau) K(t, \tau) d\tau; \tag{3.18}$$

jest to znacznym uproszczeniem rachunku.

Zastosowanie tej metody wymaga przyjęcia pewnej funkcji zmienności w czasie siły S lub, w dalszym jeszcze uproszczeniu, przyjęcia tej siły za stałą. Uproszczenia tego typu są wystarczające dla zastosowań praktycznych.

Równania (3.17) możemy zinterpretować także w inny sposób. Nadajmy mianowicie wyrażeniom δ i $\varkappa$ taki sam sens jak w p. 2, tzn. przyjmijmy, że zostały one obliczone przy założeniu współodkształcalności armatury z betonem. Załóżmy, że układ równań (2.21) rozwiązujemy metodą kolejnych iteracji. Wówczas układ (3.17) będzie odpowiadał pierwszemu kolejnemu przybliżeniu. Układ (3.17) może być więc traktowany jako pierwsze przybliżenie zarówno w przypadku armatury swobodnie ślizgającej się, jak i współodkształcalnej z betonem.

Dalsze iteracje układu (2.21) tą metodą prowadzą do wyrażeń zbyt skomplikowanych dla zastosowań praktycznych. Natomiast uproszczone rozwiązania można uzyskać przyjmując *a priori* pewną funkcję zmienności w czasie wielkości hiperstatycznych. Założenia tego rodzaju możemy stosować w przypadku, gdy obciążenia zewnętrzne mają charakter stały (niezmienny w czasie). Szczególnym przypadkiem tej metody jest np. założenie K. Sattlera, że reakcje hiperstatyczne zmieniają się proporcjonalnie do współczynnika pełzania, co możemy zapisać w postaci

$$X_k(t) = X_{0k}[1 + a_k \varphi(t)],$$

gdzie X_{0k} oznacza reakcję początkową (obliczoną według teorii elementarnej), a_k współczynnik proporcjonalności, nadto oczywiście

$$\varphi(\tau) = -\int\limits_0^\tau K(\tau, s) ds.$$

Na tej podstawie możemy wyrazić wielkości oznaczone gwiazdkami w sposób następujący:

$$X_k^*(t) = X_{0k}[1+a_k\varphi(t)] - X_{0k}\int_0^t [1+a_k\varphi(\tau)]\,K(t,\tau)\,d\tau =$$

$$= X_{0k} + X_{0k}(1+a_k)\,\varphi(t) + X_{0k}\,a_k \int_0^t \left[\int_0^\tau K(\tau,s)\,ds\right] K(t,\tau)\,d\tau\,.$$

Wyrażenie pod całką jest jądrem iterowanym; całe to wyrażenie możemy uważać za «poprawkowy» współczynnik pełzania.

Z uwagi na założony stały charakter obciążenia zewnętrznego podobne wzory uzyskamy dla wyrażenia M_0^* wchodzącego do wolnego wyrazu $\varkappa$. Jeżeli uwzględniamy skurcz betonu, to należy przyjąć funkcję skurczu proporcjonalną do funkcji pełzania.

Zastępując w równaniach (2.21) symbole z gwiazdkami przez odpowiadające im wyrażenia i uwzględniając powyższe wnioski sprowadzimy zagadnienie do rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych o niewiadomych a_k, które będziemy mogli wyznaczyć jako funkcje czasu (tzn. będą one zależały od rozpatrywanego momentu «końcowego» t; w okresie od $t = 0$ do t będą oczywiście stałymi). Zazwyczaj będzie chodziło o wyznaczenie ich wartości «końcowych» (dla $t \to \infty$).

3.4. Przejście od zależności całkowych do zależności różniczkowych. Dotychczasowe wywody były oparte na ogólnej teorii pełzania Volterry-Boltzmanna, prowadzącej do układów równań całkowych, które mogą być rozwiązane metodą iteracji. Rozwiązania tego rodzaju w ustrojach wielokrotnie statycznie niewyznaczalnych wymagają mozolnych rachunków już dla drugiego stopnia przybliżenia. Toteż w praktyce dążymy najczęściej do zastąpienia równań całkowych równaniami różniczkowymi i sprowadzenia problemu do rozwiązania układu równań różniczkowych liniowych, co pozwala w wielu przypadkach przedstawić wyniki w formie zamkniętej. Zagadnienie to posiada bogatą literaturę i na tym miejscu ograniczymy się do zupełnie ogólnego naszkicowania drogi rozwiązania w zastosowaniu do ustrojów sprężonych hiperstatycznych.

Przejście do równań różniczkowych wymaga założenia funkcji pełzania i jądra $K(t, \tau)$ w odpowiedniej postaci. Dostatecznie ogólne odwzorowanie rzeczywistego przebiegu pełzania, pozwalające na przejście do równań różniczkowych, polega na przyjęciu funkcji pełzania w postaci skończonej sumy iloczynów funkcji parametrów odpowiednio t i τ, mianowicie

$$K(t,\tau) = \sum_{k=1}^{r} u_k(t)\,v_k(\tau). \tag{3.19}$$

Przy zastosowaniu tej funkcji należy rozwiązać układ (2.13) lub (2.13.1), któremu nadajemy postać

$$
\text{(3.20)}\quad
\begin{cases}
\eta_0(t) = \Phi_\eta(t) + \lambda_{\eta\eta}\int\limits_0^t \eta_0(\tau)\left[\sum\limits_{k=1}^{r} u_k(t)\, v_k(\tau)\right] d\tau + \\
\qquad + \lambda_{\eta\omega}\int\limits_0^t \omega(\tau)\left[\sum\limits_{k=1}^{r} u_k(t)\, v_k(\tau)\right] d\tau, \\
\omega(t) = \Phi_\omega(t) + \lambda_{\omega\eta}\int\limits_0^t \eta_0(\tau)\left[\sum\limits_{k=1}^{r} u_k(t)\, v_k(\tau)\right] d\tau + \\
\qquad + \lambda_{\omega\omega}\int\limits_0^t \omega(\tau)\left[\sum\limits_{k=1}^{r} u_k(t)\, v_k(\tau)\right] d\tau,
\end{cases}
$$

gdzie $\Phi(t)$ oznaczają odpowiednie wolne wyrazy w równaniach (2.13) lub (2.13.1).

Zróżniczkujmy powyższe funkcje p-krotnie względem t. W celu zróżniczkowania wyłączamy przed całki funkcje $u(t)$ i zmieniamy porządek całkowania i sumowania. Dla obliczenia p-tej pochodnej iloczynu funkcji korzystamy ze wzoru Leibniza. Wynik zapisujemy w postaci

$$
\text{(3.21)}\quad
\begin{cases}
\eta_0^{(p)}(t) = \Phi_\eta^{(p)}(t) + \lambda_{\eta\eta}\sum\limits_{k=1}^{r} u_k^{(p)}(t)\int\limits_0^t \eta_0(\tau)\, v_k(\tau)\, d\tau + \\
\qquad + \lambda_{\eta\omega}\sum\limits_{k=1}^{r} u_k^{(p)}(t)\int\limits_0^t \omega(\tau)\, v_k(\tau)\, d\tau + \\
\qquad + \lambda_{\eta\eta}\sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{m=1}^{p}\binom{p}{m} u_k^{(p-m)}(t)\,[\eta_0(t)\, v_k(t)]^{(m-1)} + \\
\qquad + \lambda_{\eta\omega}\sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{m=1}^{p}\binom{p}{m} u_k^{(p-m)}(t)\,[\omega(t)\, v_k(t)]^{(m-1)}, \\
\omega^{(p)}(t) = \Phi_\omega^{(p)}(t) + \lambda_{\omega\eta}\sum\limits_{k=1}^{r} u_k^{(p)}(t)\int\limits_0^t \eta_0(\tau)\, v_k(\tau)\, d\tau + \\
\qquad + \lambda_{\omega\omega}\sum\limits_{k=1}^{r} u_k^{(p)}(t)\int\limits_0^t \omega(\tau)\, v_k(\tau)\, d\tau + \\
\qquad + \lambda_{\omega\eta}\sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{m=1}^{p}\binom{p}{m} u_k^{(p-m)}(t)\,[\eta_0(t)\, v_k(t)]^{(m-1)} + \\
\qquad + \lambda_{\omega\omega}\sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{m=1}^{p}\binom{p}{m} u_k^{(p-m)}(t)\,[\omega(t)\, v_k(t)]^{(m-1)}.
\end{cases}
$$

Przez pochodne rzędu zerowego rozumiemy funkcje pierwotne (3.20), w których nie występują wyrazy zawierające podwójne sumy. Podstawiając w powyższych wyrażeniach kolejno $p = 0, 1, 2, \ldots, r$ otrzymujemy dwie grupy po $r + 1$ równań. W każdej z nich możemy wyeliminować wyrażenia z całkami [6] uzyskując równanie różniczkowe r-go rzędu ze względu na niewiadome funkcje $\eta_0(t)$ i $\omega(t)$; sprowadzamy więc układ (3.21) do układu dwóch równań różniczkowych rzędu r. Oczywiście muszą być spełnione odpowiednie założenia o występujących funkcjach; ma to z reguły miejsce przy przyjmowanych zazwyczaj funkcjach pełzania, toteż nie zatrzymujemy się nad szczegółową dyskusją warunków rozwiązania.

W szczególności otrzymujemy np. dla $r = 1$, tj. dla $K(t, \tau) = u(t)\, v(\tau)$ następujący układ równań liniowych o postaci normalnej Cauchy'ego:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\eta_0'(t) &= \left[\Phi_\eta'(t) - \frac{u'(t)}{u(t)}\Phi_\eta(t)\right] + \\
&\quad + \left[\frac{u'(t)}{u(t)} + \lambda_{\eta\eta}\, u(t)\, v(t)\right]\eta_0(t) + \lambda_{\eta\omega}\, u(t)\, v(t)\, \omega(t), \\
\omega'(t) &= \left[\Phi_\omega'(t) - \frac{u'(t)}{u(t)}\Phi_\omega(t)\right] + \\
&\quad + \left[\frac{u'(t)}{u(t)} + \lambda_{\omega\omega}\, u(t)\, v(t)\right]\omega(t) + \lambda_{\omega\eta}\, u(t)\, v(t)\, \eta_0(t).
\end{aligned}
\right.
\tag{3.22}
$$

W zastosowaniach praktycznych równania (3.22) są zazwyczaj zupełnie wystarczające. Układ (3.22) możemy także sprowadzić do jednego równania rzędu drugiego.

Jeżeli funkcje u i v mają postać wykładniczą, np. $u(t) = C e^{-\gamma t}$, $v(\tau) = e^{+\gamma\tau}$, tzn. $u(t)\, v(\tau) = C e^{-\gamma(t-\tau)}$, to jak łatwo sprawdzić, równania (3.22) sprowadzają się do równań o stałych współczynnikach i rozwiązanie znacznie się upraszcza.

Dalszy tok rozwiązania jest analogiczny do podanego w p. 2. Uzyskawszy konkretną postać rozwiązania równań jednorodnych przechodzimy do rozwiązania ogólnego równań niejednorodnych, zawierającego odpowiednie funkcje wyrazów obciążeniowych, w sposób znany z teorii równań różniczkowych (np. metodą uzmiennienia stałych). Wyrazy obciążeniowe należy przy tym wyrazić przez wielkości hiperstatyczne [por. wyrażenia

---

[6] Możemy w tym celu przedstawić je w postaci [np. dla pierwszego z równań (3.21)]

$$\sum_{k=1}^{r} u_k^{(p)}(t) \int_0^t [\lambda_{\eta\eta}\eta_0(\tau) + \lambda_{\eta\omega}\,\omega(\tau)]\, v_k(\tau)\, d\tau .$$

(2.14)]. Powtarzając odpowiednio wywody p. 2 dojdziemy w rezultacie do układu równań różniczkowych, odpowiadającego układowi równań całkowych (2.21), z którego wyznaczymy wielkości hiperstatyczne jako funkcje czasu. Oczywiście wszelkie uproszczenia omówione w p. 3.1, 3.2 i 3.3 dadzą się zastosować w odpowiedni sposób. Ograniczamy się na tym miejscu do tych ogólnych uwag.

Jak widać teoria pełzania ustrojów hiperstatycznych wstępnie sprężonych jest na ogół dość skomplikowana i rozwiązanie każdego konkretnego ustroju stanowi dla siebie oddzielne zagadnienie. Toteż celem niniejszego studium było tylko naszkicowanie ogólnych metod i dróg rozwiązania. Przejście do konkretnych przypadków wymaga przyjęcia odpowiedniej funkcji pełzania, jak również poczynienia założeń co do sposobu i przebiegu w czasie obciążeń działających na konstrukcję. Powstaje tutaj od razu problem określenia, które z omówionych uproszczeń i w jakim zasięgu mogą być w konkretnym przypadku zastosowane. Zagadnienia te będą przedmiotem oddzielnej pracy.

Literatura cytowana w tekście

[1] N. Ch. Arutiunian, *Niekotoryje woprosy tieorji połzuczesti*, Moskwa-Leningrad 1952.

[2] R. Busemann, *Kriechberechnung von Verbundträgern unter Benutzung von zwei Kriechfasern*, Bauing., 11 (1950).

[3] Z. Bychawski, *Resolving Kernel of the Volterra Equation in the Case of the Generalized Creep Function*, Arch. Mech. Stos. 2 (1957).

[4] G. Colonnetti, *Scienza delle Construzioni*, Turyn 1941.

[5] G. Colonnetti, *Deformazioni plastiche e deformazioni viscose*, Pont. Ac. Sci. Acta, t. 6, 24.

[6] F. Dischinger, *Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken*, Bauing. 35/36, 39/40 (1937).

[7] A. Habel, *Der Einfluss des Kriechens und Schwindens auf die statisch unbestimmten Grössen vorgespannter Durchlaufträger und Zweigelenkrahmen*, Bet. Stahlb., 4 (1955).

[8] A. J. Iszlinski, *Prodolnyje kolebanja stierżnia pri naliczii liniejnowo zakona poslediejstwja i relaksacji*, Prikł. Mat. Mech. 1 (1940).

[9] P. Lardy, *Eigenspannungen und vorgespannter Beton*, Schweiz. Bauztg, 5 (1943).

[10] F. Leonhardt, *Spannbeton für die Praxis*, Berlin 1955.

[11] F. Levi, *Sulla valutazione degli effetti dell elastizita ritardata nei solidi iperstatici*, Giorn. Gen. Civ. 7/8 (1949).

[12] F. Levi, G. Pizzetti, *Fluage plasticité précontrainte*, Paryż 1951.

[13] W. Olszak i J. Litwiniszyn, *Nieliniowe zjawisko pewnego przepływu cieczy jako model reologiczny*, Arch. Mech. Stos. 4 (1953).

[14] W. Olszak, *Z zagadnień teorii elementów uzwojonych w świetle reologicznych własności materiałów*, Arch. Mech. Stos. 2 (1954).

[15] M. Ritter, P. Lardy, *Vorgespannter Beton*, Zurych 1946.

[16] A. R. Rżanicyn, *Niekotoryje woprosy miechaniki sistiem dieformirujuszczichsja wo wriemieni*, Moskwa-Leningrad 1949.

[17] K. Sattler, *Kriechen und Schwinden bei vorgespannten Verbund-Stahlbetonkonstruktionen*, Bet. Stahlb., 1, 2 (1954).

[18] V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, Paryż 1907.

[19] V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de ligne*, Paryż 1913.

Резюме

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ГИПЕРСТАТИЧЕСКИХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ

Работа задается целью привести основы общей теории ползучести гиперстатических, предварительно напряженных систем, а в особенности вывести системы уравнений, дающие возможность определить гиперстатические величины, как функции времени, а также рассмотреть методы решения систем этих уравнений.

Вопрос представлен на основании общей теории линейной ползучести Вольтерри - Больцманна, приводящей к системам интегральных уравнений, см. (2.21).

Основываясь на точном решении, рассматриваются главные направления упрощения теории, а именно: упрощение уравнений, касающихся статической внутренней неопределимости (применимое при сосредоточенной арматуре); упрощение уравнений, касающихся внешней неопределимости (неразрезные балки); переход к однородной системе (а также случай напрягающей арматуры, скользящей свободно по своим каналам); замена интегральных уравнений — дифференциальными. В настоящих исследованиях не приводятся примеры эффективных решений. Они будут рассмотрены в отдельной работе.

Summary

THE FOUNDATIONS OF THE THEORY OF CREEP OF STATICALLY INDETERMINATE PRESTRESSED STRUCTURES

Dealt with in this paper are the foundations of a general theory of creep in statically indeterminate prestressed structures, in particular the derivation of systems of equations enabling the determination of the redundant quantities as functions of time; a general discussion of methods for solving such equations is included.

The considerations are based on the Volterra-Boltzmann general theory of linear creep, leading to systems of linear equations [see the system (2.21)].

On the basis of accurate solutions, consideration is given to the principal ways in which the theory can be simplified. These ways are: simplification of the equations of internal statical indeterminacy (in the case of concentrated reinforcement); simplification of the equations of external statical indeterminacy (continuous beams); transition to a homogeneous system (together with the case of prestressing reinforcement allowed to slide in its channels); and replacement of integral equations by differential equations. No practical examples are solved in this investigation. They will constitute the subject of a separate paper.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 sierpnia 1956 r.