

STATYCZNA PĘTLA HISTEREZY SPRĘŻYSTEJ NIEKTÓRYCH METALI  
WYWOŁANA ODKSZTAŁCENIEM PLASTYCZNYM

J. KLEPACZKO, J. LITOŃSKI (WARSZAWA)

Od dawna wiadomo, że miękka stal po odkształceniu plastycznym na zimno nie podlega ściśle prawu Hooke'a, a odkształcenie przy danym naprężeniu będzie większe niż wykazałby je materiał w stanie pierwotnym. Praca [3] zawiera wyniki badań, jedne z pierwszych, w których stwierdzono tego rodzaju zjawiska. Oprócz odchyień od prawa Hooke'a odkształcenie plastyczne na zimno wywołuje histerezę sprężystą, rozumianą jako zjawisko niepokrywania się w zakresie sprężystym wykresów naprężenie-odkształcenie przy obciążaniu i odciążaniu. Ten typ histerezy zaobserwowano później w wielu metalach przy użyciu metod statystycznych [2 i 5], a tłumienie związane z istnieniem tego rodzaju zjawiska było przedmiotem prac [1 i 4] i innych.

Badanie histerezy odkształceniowej w warunkach statycznych może być pożytecznym uzupełnieniem badań dynamicznych, gdyż dostarcza informacji o tłumieniu przy częstościach bliskich zeru.

Niniejsza praca poświęcona jest pewnym geometrycznym własnościom statycznej pętli histerezy odkształconego plastycznie metalu.

Zajmiemy się najpierw oszacowaniem współczynnika dysypacji  $\theta^{-1}$ , który definiuje się w następujący sposób:

$$\theta^{-1} = \frac{\Delta W}{W},$$

gdzie  $\Delta W$  jest energią utraconą na jednym cyklu (pole pętli histerezy) a  $W$  maksymalną energią próbki. Po przyjęciu naprężenia za zmienną niezależną energię utraconą w jednym cyklu obciążanie-odciążanie można przedstawić w postaci

$$\Delta W = \int_0^{\sigma_w} f_{\text{odc}}(\sigma) d\sigma - \int_0^{\sigma_w} f_{\text{obc}}(\sigma) d\sigma,$$

$$\Delta W = \int_0^{\sigma_w} [f_{\text{odc}}(\sigma) - f_{\text{obc}}(\sigma)] d\sigma.$$

Funkcje  $f_{\text{odc}}(\sigma)$  i  $f_{\text{obc}}(\sigma)$  są odpowiednio funkcjami obciążenia i odciążenia, różnicę tych funkcji oznaczymy przez  $F(\sigma)$  i nazwiemy ją funkcją szerokości pętli histerezy:

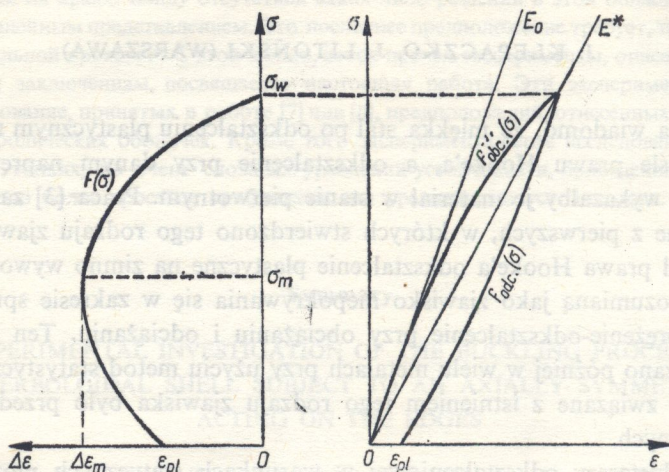
$$F(\sigma) = f_{\text{odc}}(\sigma) - f_{\text{obc}}(\sigma).$$



Stąd

$$(1) \quad \Delta W = \int_0^{\sigma_w} F(\sigma) d\sigma.$$

Wykres funkcji  $F(\sigma)$  został podany na rys. 1, przy czym  $\Delta\epsilon$  oznacza bieżącą szerokość pętli histerezy,  $E_0$  moduł Younga materiału w stanie wyjściowym,  $E^*$  moduł sieczny pętli histerezy po danym odkształceniu plastycznym



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie pętli histerezy oraz funkcji jej szerokości  $\Delta\epsilon = F(\sigma)$

Funkcja  $F(\sigma)$  posiada trzy charakterystyczne punkty:

$$\sigma = 0 \quad F(0) = \epsilon_{pl},$$

$$\sigma = \sigma_m \quad F(\sigma_m) = \Delta\epsilon_m,$$

$$\sigma = \sigma_w \quad F(\sigma_w) = 0.$$

Jak wynika z rozpatrzenia kształtu pętli, funkcje  $F(\sigma)$  dają się przybliżyć z dowolną dokładnością za pomocą funkcji parabolicznych

$$F(\sigma) = \epsilon_{pl} + A_1 \sigma + A_2 \sigma^2 + A_3 \sigma^3 + \dots + A_q \sigma^q.$$

Stosując wzór interpolacyjny Lagrange'a funkcję  $F(\sigma)$  można aproksymować wielomianem stopnia  $q$ .

Przeprowadzone badania wykazały, że w rozpatrywanym przypadku już  $q = 2$  pozwala na dostatecznie dokładne przybliżenie funkcji, co sprowadza się do zastosowania wzoru Lagrange'a dla trzech wymienionych poprzednio punktów charakterystycznych pętli. Po podstawieniu i uporządkowaniu względem  $\sigma$  otrzymamy

$$(2) \quad F(\sigma) = \frac{(\sigma - \sigma_m)(\sigma - \sigma_w)}{(0 - \sigma_m)(0 - \sigma_w)} \epsilon_{pl} + \frac{(\sigma - 0)(\sigma - \sigma_w)}{(\sigma_m - 0)(\sigma_m - \sigma_w)} \Delta\epsilon_m,$$



$$(2) \quad F(\sigma) = \left[ -\frac{\xi \sigma_w}{\sigma_m (\sigma_w - \sigma_m)} + \frac{\varepsilon_{pl}}{\sigma_w \sigma_m} \right] \sigma^2 + \left[ \frac{\xi \sigma_w^2}{\sigma_m (\sigma_w - \sigma_m)} - \varepsilon_{pl} \left( \frac{1}{\sigma_m} + \frac{1}{\sigma_w} \right) \right] \sigma + \varepsilon_{pl},$$

gdzie  $\xi$  oznacza współczynnik kształtu pętli,  $\xi = \Delta \varepsilon_m / \sigma_w$ , [mm<sup>2</sup>/kG]. Po scałkowaniu wielomianu (2) w granicach od  $\sigma = 0$  do  $\sigma = \sigma_w$  otrzymamy pracę  $\Delta W$  utraconą w jednym cyklu obciążanie-odciążanie:

$$(3) \quad \Delta W = \frac{\sigma_w}{6\sigma_m} \left[ \frac{\xi \sigma_w^3}{\sigma_w - \sigma_m} - \varepsilon_{pl} (\sigma_w - 3\sigma_m) \right].$$

Przy założeniu  $\varepsilon_{pl} = 0$  otrzymujemy niezwykle proste zależności zarówno na szerokość pętli, jak i na  $\Delta W$ :

$$\varepsilon_{pl} = 0 \quad F(\sigma) = 4\xi \sigma \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_w} \right), \quad \Delta W = \frac{2}{3} \xi \sigma_w^2.$$

Założenie  $\varepsilon_{pl} = 0$  jest słuszne dla niektórych metali w przypadku statycznej pętli histerezy i jednostronnego cyklu naprężenia (cykl obciążanie-odciążanie zachodzi bez zmiany znaku naprężenia).

Ponieważ opis matematyczny funkcji  $f_{obc}(\sigma)$  i  $f_{odc}(\sigma)$  otrzymanych na drodze eksperymentalnej jest niezwykle trudny, nie daje się więc w prosty sposób wyznaczyć ścisłej wartości  $\theta^{-1}$ , można jednak przyjąć następujące oszacowanie:

$$(4) \quad \overline{\theta^{-1}} = \frac{\int_0^{\sigma_w} F(\sigma) d\sigma}{0,5 \sigma_w \varepsilon_w}, \quad \underline{\theta^{-1}} = \frac{\int_0^{\sigma_w} F(\sigma) d\sigma}{0,5 \sigma_0 \varepsilon_w}, \quad \underline{\theta^{-1}} < \theta^{-1} < \overline{\theta^{-1}}.$$

Jak łatwo zauważyć

$$\frac{\overline{\theta^{-1}}}{\underline{\theta^{-1}}} = \frac{E_0}{E^*} \sigma_0 = E_0 \varepsilon_w.$$

Przy takim oszacowaniu stosunek kresu górnego współczynnika dysypacji do dolnego ma się tak, jak stosunek modułu Younga  $E_0$  materiału w stanie wyjściowym do modułu siecznego pętli histerezy  $E^*$ .

Jak wynika z omówionych niżej wyników badań, po odkształceniu plastycznym rzędu kilkunastu procent i przy naprężeniu bliskim uplastyczniającego modułu  $E^*$  jest mniejszy od  $E_0$  o około 20% w stosunku do  $E_0$ , co określa dokładność oszacowania. Różnica między  $E_0$  i  $E^*$  stopniowo maleje i dla  $\sigma = 0$   $E_0 = E^*$ .

Po podstawieniu (3) do (4) odpowiednio otrzymamy

$$(5) \quad \overline{\theta^{-1}} = \frac{E^*}{3\sigma_m} \left[ \xi \frac{\sigma_w^2}{\sigma_w - \sigma_m} - \varepsilon_{pl} \left( 1 - \frac{3\sigma_m}{\sigma_w} \right) \right],$$

$$\underline{\theta^{-1}} = \frac{(E^*)^2}{3\sigma_m E_0} \left[ \xi \frac{\sigma_w^2}{\sigma_w - \sigma_m} - \varepsilon_{pl} \left( 1 - \frac{3\sigma_m}{\sigma_w} \right) \right],$$



gdy  $\varepsilon_{p1} = 0$

$$(6) \quad \frac{4}{3} \xi \frac{(E^*)^2}{E_0} < \theta^{-1} < \frac{4}{3} \xi E^*.$$

Oszacowanie powyższe pozwala na podanie przybliżonej wartości współczynnika dysypacji bez znajomości matematycznego opisu dróg obciążania-odciążania pętli histerezy na płaszczyźnie naprężenie-odkształcenie. Oczywiście, należy znać wprowadzone do wzoru charakterystyki materiałowe i ich zmiany w zależności od szeregu czynników. Charakterystyki te zależą między innymi od ilości cykli  $n$ , bezwymiarowego naprężenia wierzchołka pętli  $\bar{\sigma}$  i od wielkości wstępnego odkształcenia plastycznego  $\bar{\varepsilon}_p$ , przy czym  $\bar{\sigma}$  oznacza bezwymiarowe naprężenie wierzchołka pętli odniesione do naprężenia uplastyczniającego  $\bar{\sigma} = \sigma_w / \sigma_p$ . Druga część pracy poświęcona jest badaniu zależności tych charakterystyk od niektórych zmiennych i omawia otrzymane wyniki badań eksperymentalnych.

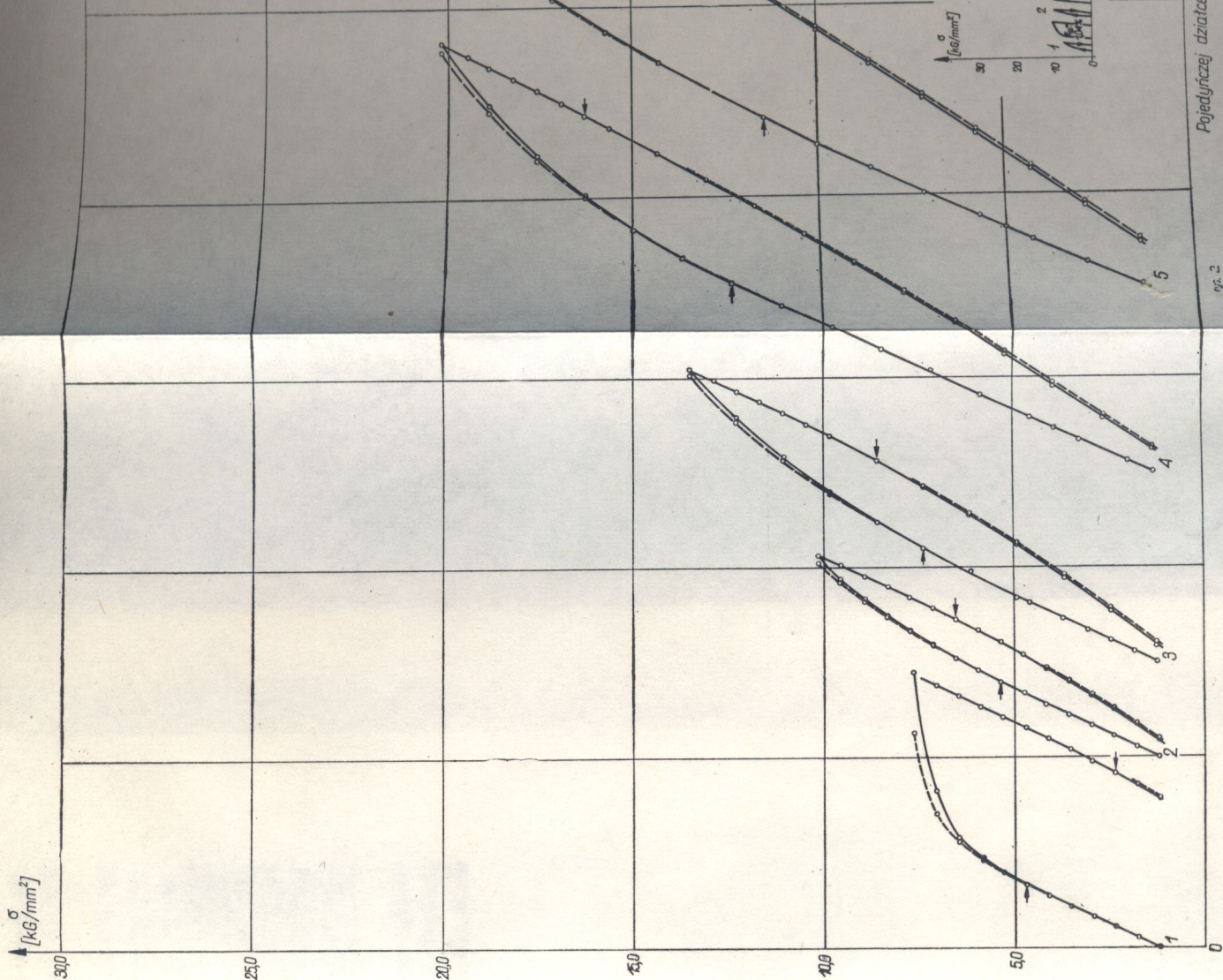
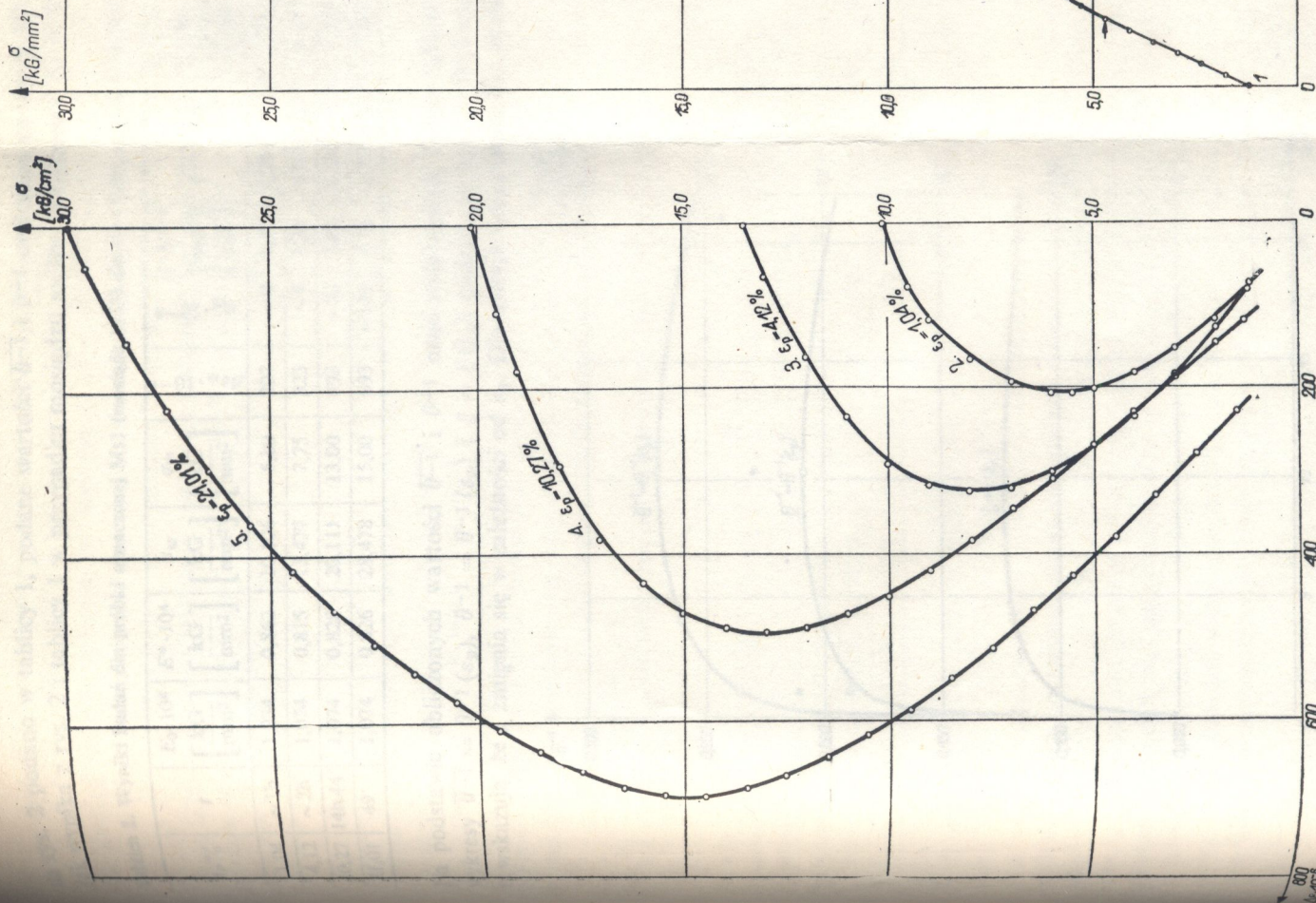
Badania przeprowadzono na dwóch materiałach w stanie wyżarzonym, mianowicie mosiądzu M63 i miękkiej stali o składzie 0,04% C, 0,03% Mn, 0,05% Si, 0,02% P, 0,04% S przy zastosowaniu specjalnie do tego dostosowanej zrywarki uniwersalnej o zakresie pomiaru siły do 5000 kG. Zastosowanie ekstensometru lusterkowego według Martensa i próbek o bazie pomiarowej 200 mm pozwoliło na pomiar odkształcenia z dokładnością  $0,55 \cdot 10^{-6}$ .

Wszystkie badania przeprowadzono stosując dwie prędkości: prędkość odkształcania plastycznego  $\dot{\varepsilon}_p = (3,53 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$  1/sek i prędkość odkształcania stosowaną w zakresie sprężystym  $\dot{\varepsilon}_e = (1,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-6}$  1/sek. Przy tak małych prędkościach odkształcania w zakresie sprężystym pewien wpływ na kształt pętli histerezy wywiera pełzanie, które występuje podczas obciążania powyżej pewnego naprężenia. Podczas odciążania natomiast poniżej pewnego naprężenia pojawia się pełzanie odwrotne. Oba zaobserwowane rodzaje pełzań należą do typu pełzania przejściowego, to jest takiego, gdzie prędkość pełzania szybko maleje z czasem. Zmniejszanie się prędkości pełzania prowadzi po pewnym czasie do ustalenia się odkształcenia, które wynika z przyłożonego naprężenia. Ponieważ równowaga między naprężeniem a odkształceniem ustala się w sposób asymptotyczny, jako kryterium końca pomiaru odkształcenia przy danym naprężeniu przyjęto minimalną prędkość pełzania  $\dot{\varepsilon}_c$ . Jeżeli prędkość pełzania zmalała do wartości  $\dot{\varepsilon}_c$ , pomiar przerywano. Wartości  $\dot{\varepsilon}_c$  odpowiednio wynosiły: dla mosiądzu  $\dot{\varepsilon}_c = 0,92 \cdot 10^{-8}$  1/sek, dla stali  $\dot{\varepsilon}_c = 0,46 \cdot 10^{-8}$  1/sek.

W podanej wyżej metodzie pomiaru statycznej pętli histerezy istnieją dwa rodzaje punktów: punkty o prędkości  $\dot{\varepsilon}_e$  i o prędkości  $\dot{\varepsilon}_c$ . Miejsca geometryczne punktów o prędkości  $\dot{\varepsilon}_c$  zostały na wszystkich wykresach połączone linią ciągłą tworząc pętle przyjęte za podstawowe do dalszej analizy ich kształtu. Tak otrzymane pętle histerezy dla mosiądzu po kolejnych odkształceniach plastycznych wraz z odpowiadającymi im funkcjami  $\Delta\varepsilon = F(\sigma)$  przedstawiono na rys. 2.

W badaniach mosiądzu, przedstawionych na rys. 2, zmieniano jedynie  $\varepsilon_p$  utrzymując inne parametry stałe. W ten sposób otrzymano funkcje  $\Delta\varepsilon = F(\sigma)$  po kolejnych odkształceniach plastycznych. Szczegółowe wyniki badań przedstawione





Próbka M63

$\sigma$  [kg/mm<sup>2</sup>]

$\epsilon$  [%]

Pojedynczej działce osi odciętych odpowiada

rys. 2

Rys. 2. Pętle histerezy i funkcje  $\Delta\epsilon = F(\sigma)$  dla mosiądzu M63 w stanie wyżarzonym (80 min. w temp. 690°C) po kolejnych odkształceniach plastycznych dla  $\bar{\sigma} = 0,95$ ,  $n = 1$ ,  $T = 18^\circ\text{C}$

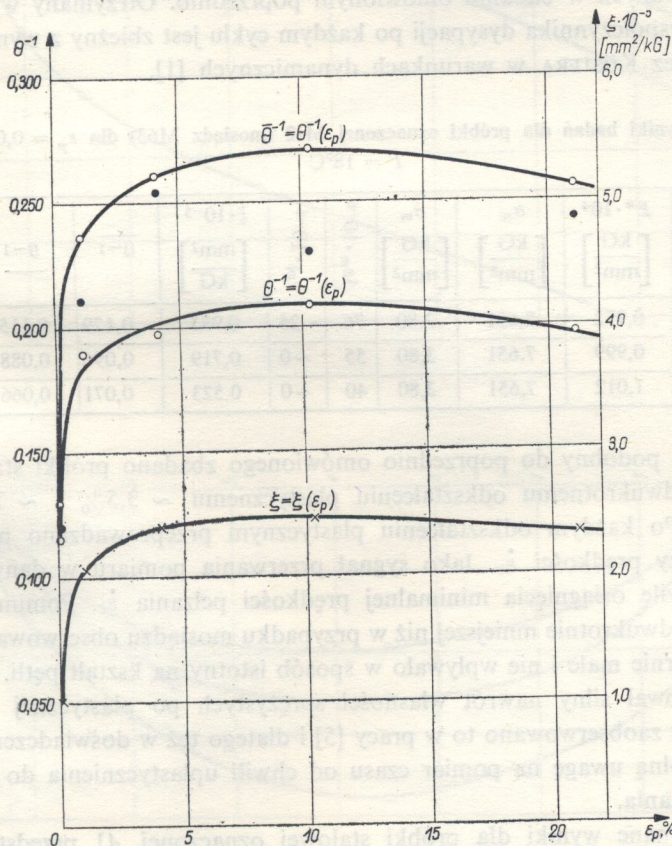


na rys. 2 podano w tabelcy 1, podane wartości  $\bar{\theta}^{-1}$  i  $\theta^{-1}$  obliczono ze wzoru (6). Jak wynika z rys. 2 i tabelcy 1 w przypadku mosiądzu można przyjmować  $\varepsilon_{pl} = 0$ .

Tablica 1. Wyniki badań dla próbki oznaczonej Ms1 (mosiądz M63) dla  $\bar{\sigma} = 0,95$ ,  $n = 1$ ,  $T = 18^\circ\text{C}$

| $\varepsilon_p\%$ | $t$     | $E_0 \cdot 10^4$<br>[kG/mm <sup>2</sup> ] | $E^* \cdot 10^4$<br>[kG/mm <sup>2</sup> ] | $\sigma_w$<br>[kG/mm <sup>2</sup> ] | $\sigma_m$<br>[kG/mm <sup>2</sup> ] | $\Delta \varepsilon_m \cdot 10^{-6}$ | $\varepsilon_{pl} \cdot 10^{-6}$ | $\xi \cdot 10^{-5}$<br>[mm <sup>2</sup> /kG] | $\bar{\theta}^{-1}$ | $\theta^{-1}$ | $\theta^{-1}$<br>Doświadczenie |
|-------------------|---------|---|---|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|--|---------------------|---------------|--------------------------------|
| 1,04              | ~1h     | 1,074                                     | 0,862                                     | 10,106                              | 5,80                                | 207                                  | ~0                               | 2,05   | 0,236               | 0,189         | 0,211                          |
| 4,12              | ~2h     | 1,074                                     | 0,815                                     | 13,477                              | 7,75                                | 323                                  | ~0                               | 2,39   | 0,260               | 0,197         | 0,254                          |
| 10,27             | 14h 44' | 1,074                                     | 0,828                                     | 20,111                              | 13,00                               | 493                                  | ~50                              | 2,45   | 0,270               | 0,208         | 0,227                          |
| 21,01             | 49'     | 1,074                                     | 0,826                                     | 28,478                              | 15,00                               | 693                                  | ~150                             | 2,32   | 0,255               | 0,196         | 0,243                          |

Na podstawie obliczonych wartości  $\bar{\theta}^{-1}$  i  $\theta^{-1}$  oraz zmierzonych  $\xi$  sporządzono wykresy  $\bar{\theta}^{-1} = \bar{\theta}^{-1}(\varepsilon_p)$ ,  $\theta^{-1} = \theta^{-1}(\varepsilon_p)$  i  $\xi = \xi(\varepsilon_p)$  podane na rys. 3. Wykresy te wskazują, że  $\xi$  zmienia się w zależności od  $\varepsilon_p$ . Dla małych odkształceń (do około



Rys. 3. Wykresy  $\theta^{-1}$  i  $\xi$  w zależności od wielkości odkształcenia plastycznego  $\varepsilon_p$  % dla mosiądzu M63 w stanie wyżarzonym (80 min,  $690^\circ\text{C}$ ) dla  $\bar{\sigma} = 0,95$ ;  $n = 1$ ;  $T = 18^\circ\text{C}$ ; oprócz punktu  $\varepsilon_p = 0,0565\%$ , gdzie  $\bar{\sigma} = 1$ . Punkty według danych doświadczalnych oznaczono symbolem ●



3%)  $\xi$  szybko rośnie, później ustala się. Podobny przebieg wykazuje wykres współczynnika dysypacji  $\theta^{-1}$ . Z podobieństwa wykresów można wnioskować, że znajomość współczynnika kształtu pętli  $\xi$  pozwala do pewnego stopnia przewidzieć wartość tłumienia, przy założeniu związku  $\theta^{-1} = C\xi$ , słusznym dla  $\bar{\sigma} = \text{const}$  w zakresie  $3\% < \varepsilon_p < 22\%$ , gdzie  $C$  oznacza stałą w podanym zakresie  $\varepsilon_p$ .

Następny cykl badań wykonanych na próbce mosiężnej oznaczonej Ms2 został przedstawiony na rys. 4 i w tablicy 2. Próbkę w stanie wyżarzonym poddano małemu odkształceniu plastycznemu  $\varepsilon_p = 0,0565\%$ , a następnie obciążano i odciążano cyklicznie z prędkością  $\dot{\varepsilon}_e$  do naprężenia  $\bar{\sigma} = 1$ . Punkty o prędkości  $\dot{\varepsilon}_c$  połączono w poszczególnych pętlach linią ciągłą.

Dla tak otrzymanych pętli sporządzono wykresy funkcji  $F(\sigma)$ . Jak widać z rysunku, pętle stopniowo zwązają się pod wpływem cyklicznie następującego obciążenia, powodując tym samym zmianę postaci funkcji  $F(\sigma)$ , co prowadzi do zależności  $F(\sigma)$  od liczby cykli  $n$ . Współczynnik kształtu pętli  $\xi$  ma w tym przypadku (dla  $n = 1$  i  $\bar{\sigma} = 1$ ) mniejszą wartość niż w przypadku większych odkształceń plastycznych stosowanych w badaniu omówionym poprzednio. Otrzymany wynik zmniejszenia się współczynnika dysypacji po każdym cyklu jest zbieżny z wynikiem otrzymanym przez KÖSTERA w warunkach dynamicznych [1].

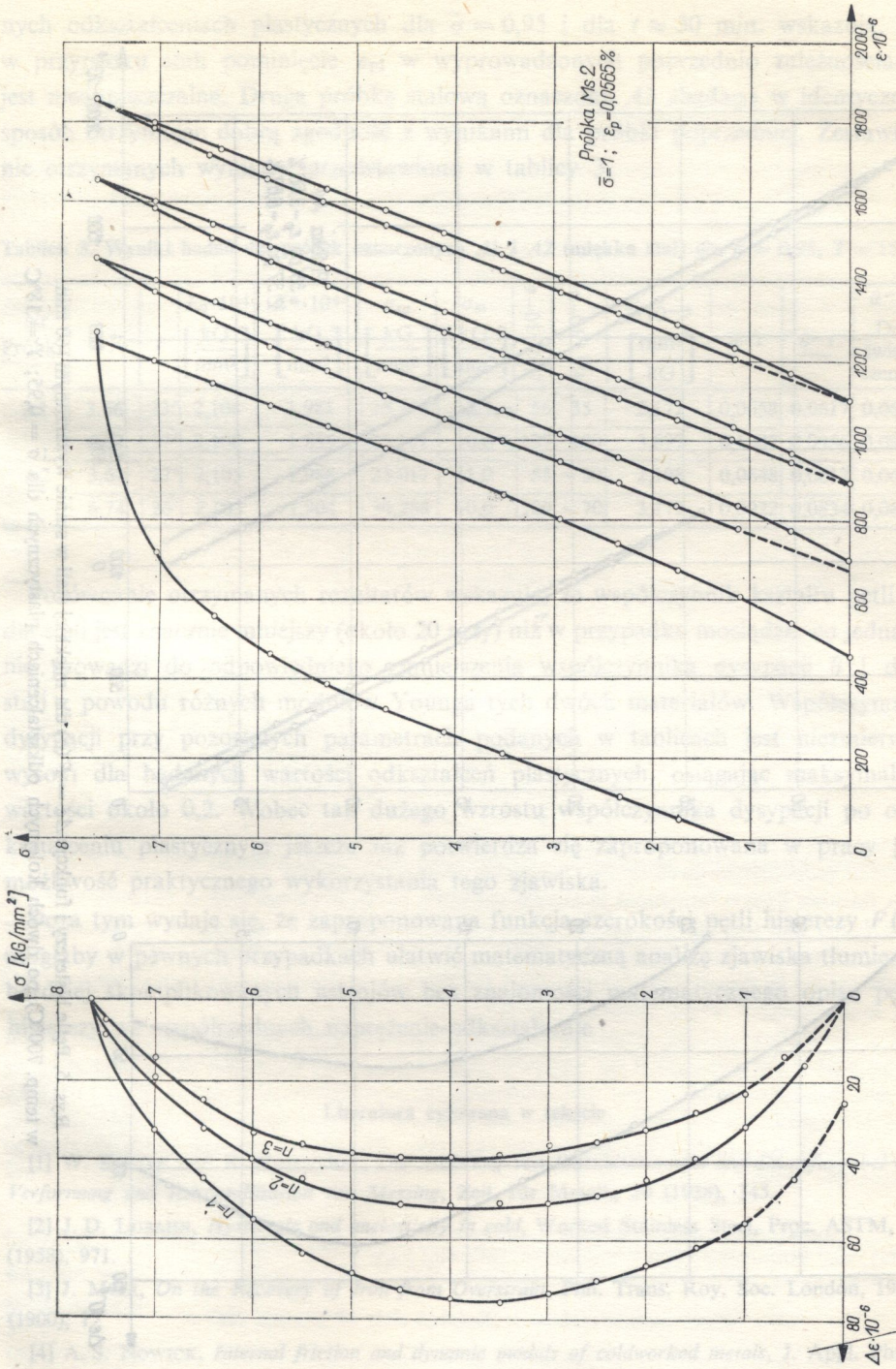
Tablica 2. Wyniki badań dla próbki oznaczonej Ms2 (mosiądz M63) dla  $\varepsilon_p = 0,0565\%$ ,  $\bar{\sigma} = 1$ ,  $T = 18^\circ\text{C}$

| $n$ | $E_0 \cdot 10^4$<br>[kG/mm <sup>2</sup> ] | $E^* \cdot 10^4$<br>[kG/mm <sup>2</sup> ] | $\sigma_w$<br>[kG/mm <sup>2</sup> ] | $\sigma_m$<br>[kG/mm <sup>2</sup> ] | $\Delta \varepsilon_m \cdot 10^{-6}$ | $\varepsilon_{pl} \cdot 10^{-6}$ | $\xi \cdot 10^{-5}$<br>[mm <sup>2</sup> /kG] | $\frac{1}{\theta^{-1}}$ | $\theta^{-1}$ | $\theta^{-1}$<br>Doświadczenie |
|-----|---|---|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|--|-------------------------|---------------|--------------------------------|
| 1   | 1,082                                     | 0,972                                     | 7,651                               | 3,80                                | 76                                   | ~25                              | 0,993  | 0,129                   | 0,115         | 0,120                          |
| 2   | 1,082                                     | 0,999                                     | 7,651                               | 3,80                                | 55                                   | ~0                               | 0,719  | 0,096                   | 0,088         | 0,095                          |
| 3   | 1,082                                     | 1,012                                     | 7,651                               | 3,80                                | 40                                   | ~0                               | 0,523  | 0,071                   | 0,066         | 0,071                          |

W sposób podobny do poprzednio omówionego zbadano próbki stalowe. Podawano je dwukrotnemu odkształceniu plastycznemu  $\sim 3,5\%$  i  $\sim 7\%$  z prędkością  $\dot{\varepsilon}_p$ . Po każdym odkształceniu plastycznym przeprowadzano pomiar pętli histerezy przy prędkości  $\dot{\varepsilon}_e$ . Jako sygnał przerwania pomiaru w danym punkcie przyjęto chwilę osiągnięcia minimalnej prędkości pełzania  $\dot{\varepsilon}_c$ . Pomimo przyjęcia prędkości  $\varepsilon_c$  dwukrotnie mniejszej niż w przypadku mosiądzu obserwowane pełzanie było niezmiernie małe i nie wpływało w sposób istotny na kształt pętli. W badanej stali występował silny nawrót własności sprężystych po plastycznej deformacji, podobnie jak zaobserwowano to w pracy [5] i dlatego też w doświadczeniach zwrócono szczególną uwagę na pomiar czasu od chwili uplastycznienia do chwili rozpoczęcia badania.

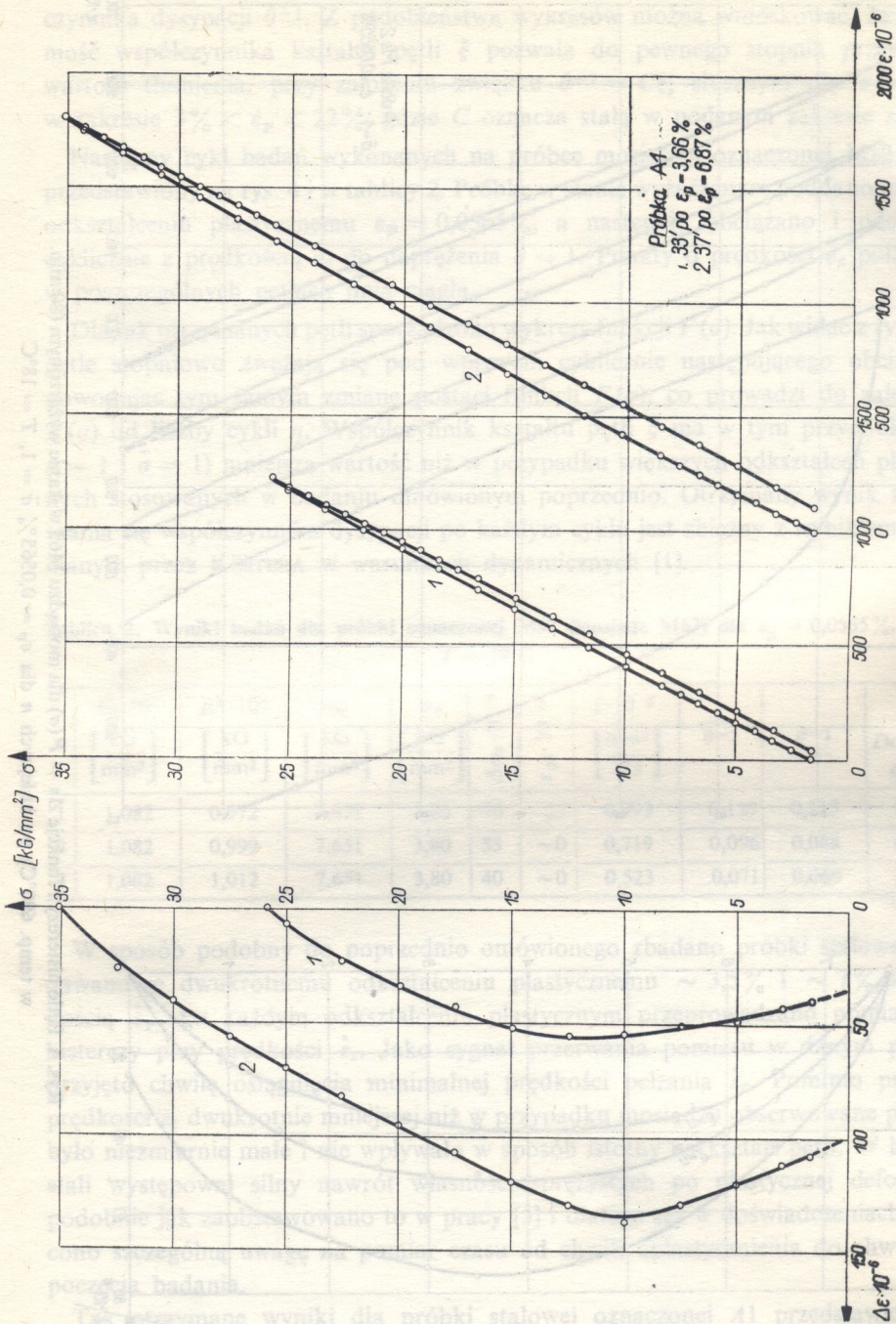
Tak otrzymane wyniki dla próbki stalowej oznaczonej A1 przedstawiono na rys. 5. Pętle histerezy posiadają wyraźny punkt łagodnej zmiany pochylenia przy obciążaniu dla  $\sigma \approx 10$  kG/mm<sup>2</sup>, który jest w przybliżeniu punktem maksymalnej szerokości pętli. Podane obok pętli histerezy wykresy funkcji  $F(\sigma)$  po dwóch kolej-





Rys. 4. Pętle histerezy i funkcje  $\Delta \epsilon = F(\sigma)$  dla mosiądzu M63 w stanie wyważonym (80 min. w temp. 690°C) po kolejnych  $n$  dla  $\epsilon_p = 0,0565\%$   $\bar{\sigma} = 1$ ,  $T = 18^\circ\text{C}$





Rys. 5. Pętle histerezy i funkcje  $\Delta \epsilon = F(\sigma)$  dla miękkiej stali w stanie wyważonym (60 min. w temp. 700°C) po dwóch kolejnych odkształceniach plastycznych dla  $\bar{\sigma} = 0,95$ ;  $T = 18^\circ\text{C}$



nych odkształceniach plastycznych dla  $\bar{\sigma} = 0,95$  i dla  $t \approx 30$  min. wskazują, iż w przypadku stali pominięcie  $\epsilon_{p1}$  w wyprowadzonych poprzednio zależnościach jest niedopuszczalne. Drugą próbkę stalową oznaczoną A2 zbadano w identyczny sposób otrzymując dobrą zgodność z wynikami dla próbki poprzedniej. Zestawienie otrzymanych wyników przedstawiono w tablicy 3.

Tablica 3. Wyniki badań dla próbek oznaczonych A1 i A2 (miękka stal) dla  $\bar{\sigma} = 0,95$ ,  $T = 18^\circ\text{C}$

| Nr<br>Próbki | $\epsilon_p \%$ | $t$ | $E_0 \cdot 10^4$<br>[kG<br>mm <sup>2</sup> ] | $E^* \cdot 10^4$<br>[kG<br>mm <sup>2</sup> ] | $\sigma_w$<br>[kG<br>mm <sup>2</sup> ] | $\sigma_m$<br>[kG<br>mm <sup>2</sup> ] | $\Delta \epsilon_m \cdot 10^{-6}$ | $\epsilon_{p1} \cdot 10^{-6}$ | $\xi \cdot 10^{-5}$<br>[mm <sup>2</sup><br>kG] | $\theta^{-1}$ | $\theta^{-1}$ | $\theta^{-1}$<br>Do-<br>świad-<br>czenie |
|--------------|-----------------|-----|--|--|--|--|-----------------------------------|-------------------------------|--|---------------|---------------|--|
| A1           | 3,66            | 33' | 2,108  | 1,981  | 25,779                                 | 12,3                                   | 56                                | 35                            | 2,172  | 0,0658        | 0,0617        | 0,062                                    |
|              | 6,87            | 37' | 2,108  | 1,855  | 35,151                                 | 10,0                                   | 137                               | 100                           | 3,897  | 0,1087        | 0,0956        | 0,094                                    |
| A2           | 3,67            | 27' | 2,105  | 1,988  | 25,017                                 | 11,0                                   | 55                                | ~ 30                          | 2,198  | 0,0648        | 0,0612        | 0,0614                                   |
|              | 6,74            | 26' | 2,105  | 1,904  | 34,288                                 | 10,0                                   | 109                               | ~ 70                          | 3,179  | 0,0922        | 0,0834        | 0,0871                                   |

Porównanie otrzymanych rezultatów wskazuje, że współczynnik kształtu pętli  $\xi$  dla stali jest znacznie mniejszy (około 20 razy) niż w przypadku mosiądzu, co jednak nie prowadzi do odpowiedniego zmniejszenia współczynnika dysypacji  $\theta^{-1}$  dla stali z powodu różnych modułów Younga tych dwóch materiałów. Współczynnik dysypacji przy pozostałych parametrach podanych w tablicach jest niezmiernie wysoki dla badanych wartości odkształceń plastycznych, osiągając maksymalne wartości około 0,2. Wobec tak dużego wzrostu współczynnika dysypacji po odkształceniu plastycznym jeszcze raz potwierdza się zaproponowana w pracy [2] możliwość praktycznego wykorzystania tego zjawiska.

Poza tym wydaje się, że zaproponowana funkcja szerokości pętli histerezy  $F(\sigma)$  mogłaby w pewnych przypadkach ułatwić matematyczną analizę zjawiska tłumienia bardziej skomplikowanych ustrojów bez znajomości matematycznego opisu pętli histerezy we współrzędnych naprężenie-odkształcenie

Literatura cytowana w tekście

[1] W. KÖSTER und K. ROSENTHAL, *Die Änderung von Elastizitätsmodul und Dämpfung bei der Verformung und Rekristallisation von Messing*, Zeit. für Metall., 30 (1938), 345.  
 [2] J. D. LUBAHN, *Hysteresis and anelasticity in cold, Worked Stainless Steel*, Proc. ASTM, 58 (1958), 971.  
 [3] J. MUIR, *On the Recovery of Iron from Overstrain*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 193A (1900), 1.  
 [4] A. S. NOWICK, *Internal friction and dynamic moduls of coldworked metals*, J. Appl. Phys., 25 (1954), 1129.  
 [5] S. L. SMITH and J. V. HOWARD, *The recovery of proportional elasticity in overstrained steel*, Proc. Roy. Soc., London, 137A (1932), 519.



## Резюме

СТАТИЧЕСКАЯ ПЕТЛЯ УПРУГОГО ГИСТЕРЕЗИСА НЕКОТОРЫХ  
МЕТАЛЛОВ, ВЫЗВАННАЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

Исследуется мало известное, до сих пор, влияние пластической деформации на некоторые характеристики материалов, применяемые в описании явления внутреннего трения.

Вводится функция ширины петли гистерезиса  $F(\sigma)$ , описывающая изменение ширины петли в зависимости от напряжения. Как констатируется, функцию можно в конкретном случае представить в приближении при использовании интерполяционной формулы Лагранжа. Приводится метод оценки коэффициента диссипации  $\theta^{-1}$  при использовании функции  $F(\sigma)$ , модуля Юнга материала в отожженном состоянии и секущего модуля петли  $E^*$  гистерезиса.

Во второй части работы рассматриваются результаты экспериментов. Эксперименты проводились в условиях статического исследования, т.е. при очень малых скоростях деформации, учитывая такие сопутствующие явления, как ползучесть. Исследования ограничились измерением петли и поиском коэффициента диссипации  $\theta^{-1}$  некоторых металлов (мягкая сталь и латунь), для различных значений пластической деформации. В этих исследованиях применялись большие значения напряжения близкие пределу текучести. Результаты даются в виде диаграмм и таблиц.

## Summary

THE STATIC ELASTIC HYSTERESIS LOOP OF SOME METALS PRODUCED  
BY PLASTIC STRAIN

This paper is devoted to the problem (little explored as yet) of influence of plastic strain on certain material properties involved in the description of internal friction.

A function  $F(\sigma)$  is introduced to express the width of the hysteresis loop in function of stress. It is found that this function can, in a certain particular case, be approached by means of the Lagrange interpolation formula. A method is proposed to obtain an estimate of the dissipation coefficient  $\theta^{-1}$  by means of the function  $F(\sigma)$ , the Young modulus in the initial (annealed) state and the secant modulus of the hysteresis loop  $E^*$ .

The second part contains an analysis of the experimental results. The tests have been carried out under static conditions that is for very low strain rates, some accompanying phenomena such as creep being accounted for, and were confined to the measurement of the hysteresis loop and the dissipation coefficient  $\theta^{-1}$  of some metals (mild steel and brass) for various values of plastic strain. High stresses were applied, approaching the yield ones. The results are presented in the form of graphs and tables.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 grudnia 1963 r.