

KSZTAŁTOWANIE PROSTYCH USTROJÓW KRATOWYCH METODĄ WYZNACZANIA KONTURU CAŁKOWITEJ NIEJEDNOZNACZNOŚCI(*)

MARIAN MARKIEWICZ (KRAKÓW)

W pracy podano metodę kształtowania optymalnego prostych kratownic z uwzględnieniem warunku stateczności; jako przykład przeanalizowano kratownicę dwuprętową. Metoda ta polega na określeniu tzw. konturów całkowitej niejednoznaczności. W rozważanym przypadku rozpatrzono trzy postaci utraty stateczności: niestateczność poszczególnych prętów, tak zwaną «niestateczność poziomą» bez wybożenia prętów oraz wybożenie w postaci przeskoku. Dla wszystkich trzech postaci utraty stateczności wyznaczono odpowiednie siły krytyczne w zakresie sprężysto-plastycznym, jak również kontury całkowitej niejednoznaczności.

W roku 1974 W. PRAGER [3] podał pewien przykład całkowitej niejednoznaczności problemu optymalnego kształtowania prostego układu kratowego opartego na sztywnym, z góry danym konturze oporowym. Rozważył mianowicie kratownicę dwuprętową, której zarówno wierzchołek jak i podstawa oparte były na okręgu. Kratownica przenosiła na kontur oporowy siłę rozciągającą przyłożoną w wierzchołku. Następnie poszukiwał takiej kratownicy, która przy danym warunku ograniczającym (w tym przypadku była to jej wytrzymałość) miałaby minimalną objętość. Prager wykazał, że w takim przypadku nie można wyodrębnić jednoznacznego optymalnego kształtu kratownicy, gdyż każda z nich oparta na tym konturze ma przy uwzględnieniu warunku ograniczającego jednakową objętość.

Okazuje się jednak, że sformułowany przez Pragera problem ma nie tylko znaczenie poznawcze, ale może stanowić dogodną i prostą metodę kształtowania w przypadku innych kształtów konturów oporowych. Praca ta uzasadnia tę metodę i uogólnia problem na kształtowanie przy warunkach stateczności w zakresie sprężysto-plastycznym.

Rozważono trzy formy utraty stateczności. Pierwsza polega na wybożeniu poszczególnych prętów, druga forma związana jest z nieskończeniem małym, w przybliżeniu poziomym przemieszczeniem punktu przyłożenia obciążenia. Trzecia forma—to utrata stateczności w postaci przeskoku. Ta forma charakterystyczna jest dla całej klasy konstrukcji, których klasycznym przykładem jest kratownica Misesa. Krzywe stanów równowagi (zależność obciążenia od przemieszczenia) tych konstrukcji posiadają charakterystyczne maksimum, po osiągnięciu którego następuje

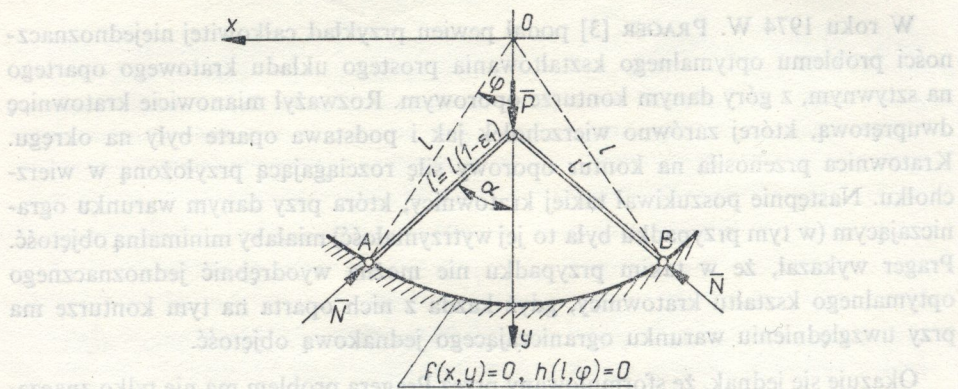
(*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12—10.2.

przeskok układu do nowego położenia równowagi. Druga forma utraty stateczności musi być uwzględniona szczególnie przy smukłych kratownicach o małym kącie wierzchołkowym, a trzecia forma utraty stateczności przy kratownicach o kącie wierzchołkowym bliskim π .

Kontury oporowe mające opisaną przez Pragera własność zostały nazwane w obecnej pracy «konturami całkowitej niejednoznaczności», a wzmiankowana metoda optymalnego kształtowania opiera się głównie na odpowiednim ich wyznaczaniu.

1. SPRECYZOWANIE POJĘCIA KONTURU CAŁKOWITEJ NIEJEDNOZNACZNOŚCI

Postawmy następujące zadanie: na kontur doskonale sztywnej podstawy, opisany w układzie współrzędnych (x, y) równaniem $f(x, y) = 0$ należy przenieść siłę P za pomocą symetrycznej kratownicy dwuprętowej o prętach przyrządowych (rys. 1). Przy danym warunku ograniczającym, którym jak już wspomniano będzie stateczność w zakresie sprężysto-plastycznym, należy określić takie parametry kratownicy, aby jej objętość była minimalna.



Rys. 1

W zależności od kształtu konturu oporowego problem ten może mieć jedno, dwa lub więcej rozwiązań. Naszym zadaniem będzie określenie takiego kształtu konturu, czyli znalezienie postaci równania $f(x, y) = 0$, dla którego istnieje nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych. Jeżeli parametrami określającymi kształt kratownicy są: długość prętów l , pole przekroju poprzecznego pręta F i kąt wierzchołkowy 2φ (rys. 1), to warunek utraty stateczności można opisać równaniem $g(l, \varphi, F) = 0$, a równanie konturu równaniem w układzie biegunowym (l, φ) : $h(l, \varphi) = 0$.

Przy założeniu symetrii kratownicy ograniczono się oczywiście tylko do odpowiednio symetrycznych kształtów konturu podstawy. Objętość układu $V = 2Fl$, po odpowiednim wykorzystaniu warunku ograniczającego i równania konturu, można przedstawić jako $V = V(\varphi)$ i poszukiwać takiego φ , dla którego $V = V_{min}$. Jeżeli ma

istnieć nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych, to musi być spełnione $dV/d\varphi = 0$ dla każdego φ . Stąd wynika, że V musi być stałe, niezależne od φ i równe np. v_0 . Poszukujemy więc takiego kształtu konturu oporowego, zwanego dalej konturem całkowitej niejednoznaczności, że każda kratownica oparta na nim ma objętość $V=V_0$ przy danym warunku utraty stateczności $g(l, \varphi, F)=0$.

Wzory na siły krytyczne dla wszystkich form utraty stateczności wyznaczone zostaną jako funkcje parametrów (l', α) układu po wstępnym odkształceniu pod działaniem obciążenia, a przed utratą stateczności. Oczywiście równanie konturu całkowitej niejednoznaczności należy napisać we współrzędnych stałego układu (l, φ) związanego z kratownicą nieodkształconą. Powoduje to konieczność przetransformowania współrzędnych (l', α) na (l, φ) . W zakresie sprężystym dla wszystkich form utraty stateczności można to zrobić stosunkowo łatwo, otrzymując wzory na siłę krytyczną w postaci uwikłanej; natomiast w zakresie plastycznym jest to praktycznie niemożliwe, gdyż można jedynie uzyskać nieliniowy układ równań na P_k, φ . Obliczenia numeryczne wykazały jednak, że dla tych przedziałów kątów φ , w których poszczególne formy utraty stateczności decydują o stateczności kratownicy, z bardzo dobrym przybliżeniem można przyjąć $\varphi = \alpha$ i $l' = l$, co powoduje znaczne uproszczenie wielu związków. Dlatego też w dalszej części pracy, po wyprowadzeniu wzoru na siły krytyczne w układzie (l', α) , przyjmiemy powyższe równości do wyprowadzenia równań konturów całkowitej niejednoznaczności.

Wskutek uwzględnienia trzech form utraty stateczności w różnych zakresach, poszukiwany kształt konturu oporowego nie będzie opisany jedną krzywą, lecz odcinkami krzywych wyznaczonych dla poszczególnych form utraty stateczności w odpowiednich zakresach. Dlatego też w kolejnych rozdziałach zostaną wyznaczone równania konturu w układzie (l, φ) dla pierwszej, drugiej i trzeciej formy utraty stateczności z osobna, następnie zostaną one odpowiednio zestawione w interesujący nas kształt. Dla wygody zapisu siły ściskające i naprężenia ściskające, a także wywołane przez nie odkształcenia — będą w pracy zdefiniowane dodatnio.

2. WYZNACZENIE KONTURU CAŁKOWITEJ NIEJEDNOZNACZNOŚCI PRZY OGRANICZENIU PIERWSZĄ FORMĄ UTRATY STATECZNOŚCI W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

Rozważany układ w stanie przed utratą stateczności przedstawiony jest na rys. 1. Przerwaną linią zaznaczono układ nieodkształcony. Materiał prętów charakteryzuje się modułem Younga E , granicą sprężystości σ_s i granicą plastyczności przy ściskaniu σ_0 . Ze względu na symetrię siły w prętach mają postać

$$(2.1) \quad N = \frac{P}{2 \cos \alpha}.$$

W przedziale naprężeń $\sigma \leq \sigma_s$, tzn. dla prętów o smukłości $\lambda \geq \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_s}}$, wzór na siłę krytyczną podał Euler:

$$N_k = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l'^2}.$$

Ograniczając się do takich kształtów przekroju, dla których $J_{min}=cF^n$, gdzie $n=1, 2, 3$, a c jest stałą oraz dopuszczając maksymalną siłę osiową w prętach $N=N_k/j$, gdzie j jest pewnym współczynnikiem bezpieczeństwa, uzyskuje się wzór na siłę P w postaci

$$(2.2) \quad P = \frac{2\pi^2 EcF^n \cos \alpha}{jl'^2}.$$

Objętość układu $V=2Fl$. Ponieważ objętość każdej kratownicy opartej na poszukiwanym konturze musi być stała, niezależna od α , więc przyjęto $V=V_0$ i po obliczeniu $F=V_0/2l$ i podstawieniu do (2.2) otrzymano równanie poszukiwanego konturu w układzie biegunowym (l, φ) :

$$\cos \varphi = \frac{2^{n-1} Pj}{\pi^2 cEV_0^n} l^{n+2},$$

gdzie przyjęto $l'=l$ i $\alpha=\varphi$ zgodnie z założeniami poczynionymi w rozdziale 1.

W szczególności dla pręta o przekroju kołowym $c=1/4\pi$, $n=2$ równanie konturu ma postać

$$(2.3) \quad \cos \varphi = \frac{8Pj}{\pi^2 E V_0^2} l^4.$$

Problem wyboczenia w przedziale plastycznym $\sigma_s \leq \sigma < \sigma_0$ rozwiążemy zakładając, że zachowanie się materiału prętów opisane jest w tym zakresie hipotezą Johnsa-Ostenfelda. Opierając się na tej hipotezie i przyjmując, że parabola $(J-0)$ $\sigma=\sigma(\lambda)$ ma z hiperbolą Eulera punkt wspólny o współrzędnych (λ_{gr}, σ_s) , otrzymuje się

$$N_k = \sigma_0 F - \frac{\sigma_s (\sigma_0 - \sigma_s) F^2}{\pi^2 EJ_{min}} l^2$$

lub po wykorzystaniu (2.1) i przyjęciu $N=N_k/j$

$$(2.4) \quad P = \frac{2 \cos \alpha}{j} \left[\sigma_0 F - \frac{\sigma_s (\sigma_0 - \sigma_s) F^2}{\pi^2 EJ_{min}^2} l^2 \right].$$

Ograniczając się podobnie jak poprzednio do przekrojów, dla których $J_{min}=cF^n$ oraz podstawiając do wzoru (2.4) $F=V_0/2l$, otrzymujemy w układzie biegunowym (l, φ) równanie konturu podstawy odpowiadające wyboczeniu w zakresie plastycznym

$$\cos \varphi = \frac{l}{A - Bl^{n+1}},$$

gdzie

$$A = \frac{\sigma_0 V_0}{Pj}, \quad B = \frac{2^{n-1} \sigma_s (\sigma_0 - \sigma_s)}{\pi^2 cPj EV_0^{n-2}}.$$

W szczególności dla przekroju kołowego

$$(2.5) \quad \cos \varphi = \frac{l}{A - Bl^3},$$

przy czym

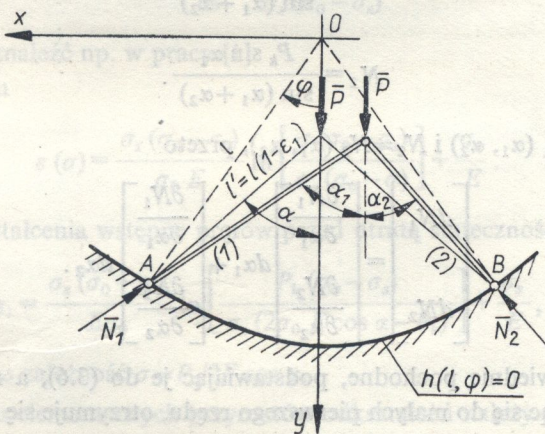
$$A = \frac{\sigma_0 V_0}{Pj}, \quad B = \frac{8\sigma_s(\sigma_0 - \sigma_s)}{\pi E Pj}.$$

3. WYZNACZENIE KONTURU CAŁKOWITEJ NIEJEDNOZNACZNOŚCI, PRZY UWZGLĘDNIENIU DRUGIEJ FORMY UTRATY STATECZNOŚCI W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

Drugą formę utraty stateczności układu, związaną z nieskończenie małym przemieszczeniem poziomym punktu przyłożenia siły obrazuje rys. 2. Cienką linią zaznaczono stan układu przed utratą stateczności. Równanie $h(l, \varphi) = 0$ jest poszukiwanym równaniem konturu. Objętość układu podobnie jak poprzednio wynosi V_0 . Długości prętów po utracie stateczności wynoszą

$$(3.1) \quad \begin{aligned} l_1 &= l(1 - \varepsilon_1 - d\varepsilon_1), \\ l_2 &= l(1 - \varepsilon_1 - d\varepsilon_2), \end{aligned}$$

gdzie l jest długością pręta nieodkształconego, ε_1 to odkształcenie wstępne prętów kratownicy przed utratą stateczności, $d\varepsilon_1$ i $d\varepsilon_2$ — elementarne przyrosty odkształceń spowodowane przejściem układu do sąsiedniego położenia równowagi.



Rys. 2

Na ruch punktu O nałożone są następujące ograniczenia:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} l_1 \cos \alpha_1 &= l_2 \cos \alpha_2, \\ l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 &= 2l' \sin \alpha. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że

$$\alpha_1 = \alpha + d\alpha_1,$$

$$\alpha_2 = \alpha + d\alpha_2,$$

podstawiając (3.1) do (3.2) oraz pomijając małe wyższego rzędu, otrzymano

$$(3.3) \quad \begin{aligned} (1 - \varepsilon_1) \sin \alpha (d\alpha_1 - d\alpha_2) + \cos \alpha (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) &= 0, \\ (1 - \varepsilon_1) \cos \alpha (d\alpha_1 + d\alpha_2) - \sin \alpha (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2) &= 0. \end{aligned}$$

Układ równań (3.3) pozwoli na wyznaczenie siły krytycznej dla tej formy utraty stateczności w obu zakresach sprężystym i plastycznym.

Dla przypadku $\sigma \leq \sigma_s$

$$\varepsilon_1 = \frac{P_k}{2EF \cos \alpha},$$

a elementarne przyrosty odkształceń określone są wzorem (3.4).

$$(3.4) \quad \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \frac{d\sigma_1}{E} = \frac{dN_1}{EF}, \\ d\varepsilon_2 &= \frac{d\sigma_2}{E} = \frac{dN_2}{EF}. \end{aligned}$$

Siły w prętach N_1 i N_2 wyznaczone z warunków równowagi mają postać

$$(3.5) \quad \begin{aligned} N_1 &= \frac{P_k \sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}, \\ N_2 &= \frac{P_k \sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}. \end{aligned}$$

Ponieważ $N_1 = N_1(\alpha_1, \alpha_2)$ i $N_2 = N_2(\alpha_1, \alpha_2)$, przeto

$$(3.6) \quad \begin{bmatrix} dN_1 \\ dN_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_1} \end{bmatrix} d\alpha_1 + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} \end{bmatrix} d\alpha_2.$$

Obliczając odpowiednie pochodne, podstawiając je do (3.6), a następnie (3.6) do (3.4) i ograniczając się do małych pierwszego rzędu, otrzymuje się następujące wzory na elementarne przyrosty odkształceń:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \frac{P_k \sin \alpha}{EF \sin^2 2\alpha} (d\alpha_2 - \cos 2\alpha d\alpha_1), \\ d\varepsilon_2 &= \frac{P_k \sin \alpha}{EF \sin^2 2\alpha} (d\alpha_1 - \cos 2\alpha d\alpha_2). \end{aligned}$$

Po podstawieniu (3.7) do (3.3) otrzymujemy jednorodny układ równań na $d\alpha_1$ i $d\alpha_2$:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} (2EF \sin^2 \alpha \cos \alpha - P_k) (d\alpha_1 - d\alpha_2) &= 0, \\ (2EF \cos^3 \alpha - P_k) (d\alpha_1 + d\alpha_2) &= 0. \end{aligned}$$

Przyjmując $d\alpha_1 = -d\alpha_2$ otrzymujemy wzór na siłę krytyczną dla drugiej formy utraty stateczności:

$$P_k = 2EF \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

lub przyjmując współczynnik bezpieczeństwa $j = P_k/P$

$$P = \frac{2EF}{j} \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

Z kolei można już, podobnie jak w rozdziale poprzednim, znaleźć równanie konturu podstawy w układzie biegunowym (l, φ) :

$$(3.9) \quad l = \frac{EV_0}{Pj} \sin^2 \varphi \cos \varphi.$$

Podany wyżej sposób postępowania wykorzystamy teraz do wyznaczenia wzorów na siłę krytyczną dla tej samej formy utraty stateczności, lecz w zakresie plastycznym.

Jak już wspomniano w rozdziale poprzednim, materiał prętów w tym zakresie podlega prawu Johnsona-Ostenfelda, które przytoczymy bez wyprowadzenia.

Moduł styczny

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E\sigma(\sigma_0 - \sigma)}{\sigma_s(\sigma_0 - \sigma_s)}.$$

Wzór ten można znaleźć np. w pracy [1].

Po scałkowaniu

$$(3.10) \quad \varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma_s(\sigma_0 - \sigma_s)}{\sigma_0 E} \ln \left[\frac{\sigma(\sigma_0 - \sigma_s)}{\sigma_s(\sigma_0 - \sigma)} \right] + \frac{\sigma_s}{E}.$$

Wobec tego odkształcenia wstępne prętów przed utratą stateczności

$$(3.11) \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_s(\sigma_0 - \sigma_s)}{E\sigma_0} \ln \left[\frac{P_k(\sigma_0 - \sigma_s)}{\sigma_s(2\sigma_0 F \cos \alpha - P_k)} \right] + \frac{\sigma_s}{E},$$

gdzie wykorzystano zależność $\sigma = P_k/2F \cos \alpha$.

Przy obliczaniu elementarnych przyrostów odkształceń należy wziąć pod uwagę, że ta forma utraty stateczności powoduje dociążenie jednego z prętów, a odciążenie drugiego. Zakładając, że w pręcie 1 zachodzi proces bierny, a w pręcie 2 proces czynny, otrzymujemy, wykorzystując pierwszy ze związków (3.7),

$$(3.12) \quad d\varepsilon_1 = d\varepsilon_1^s = \frac{P_k \sin \alpha}{EF \sin^2 2\alpha} (d\alpha_2 - \cos 2\alpha d\alpha_1).$$

Odształcenie $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_2^p$ obliczymy podobnie jak dla zakresu sprężystego, podstawiając na miejsce modułu Younga E moduł styczny E_t :

$$d\varepsilon_2^p = \frac{d\sigma_2}{E_t} = \frac{\sigma_s(\sigma_0 - \sigma_s)}{E} \frac{d\sigma_2}{\sigma_2(\sigma_0 - \sigma_2)}$$

lub $d\varepsilon_2^p = DF dN_2/N_2 (\sigma_0 F - N_2)$, gdzie oznaczono $D = \sigma_s (\sigma_0 - \sigma_s)/E$ oraz uwzględniono, że $\sigma_2 = N_2/F$.

Po obliczeniu dN_2 można w końcu napisać

$$(3.13) \quad d\varepsilon_2 = d\varepsilon_2^p = DF \frac{d\alpha_1 - \cos 2\alpha d\alpha_2}{\sigma_0 F \sin 2\alpha - P_k \sin \alpha}$$

Po podstawieniu prawych stron wzorów (3.11), (3.12), (3.13) do (3.3) otrzymujemy jednorodny układ równań na $d\alpha_1$ i $d\alpha_2$:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} q_{11} d\alpha_1 + q_{12} d\alpha_2 &= 0, \\ q_{21} d\alpha_1 + q_{22} d\alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} q_{11} &= (1 - \varepsilon_1) \cos \alpha - \frac{P_k^2 \cos 2\alpha - 2P_k \sigma_0 F \cos 2\alpha \cos \alpha + 4DEF^2 \cos^2 \alpha}{4EF \cos^2 \alpha (2\sigma_0 F \cos \alpha - P_k)}, \\ q_{12} &= (1 - \varepsilon_1) \cos \alpha + \frac{P_k^2 - 2P_k \sigma_0 F \cos \alpha + 4DEF^2 \cos 2\alpha \cos^2 \alpha}{4EF \cos^2 \alpha (2\sigma_0 F \cos \alpha - P_k)}, \\ q_{21} &= -(1 - \varepsilon_1) \cos \alpha - \frac{P_k^2 \cos 2\alpha - 2P_k \sigma_0 F \cos 2\alpha \cos \alpha - 4DEF^2 \cos^2 \alpha}{4EF \sin^2 \alpha (2\sigma_0 F \cos \alpha - P_k)}, \\ q_{22} &= (1 - \varepsilon_1) \cos \alpha + \frac{P_k^2 - 2P_k \sigma_0 F \cos \alpha - 4DEF^2 \cos 2\alpha \cos^2 \alpha}{4EF \sin^2 \alpha (2\sigma_0 F \cos \alpha - P_k)}, \end{aligned}$$

a ε_1 wyraża się wzorem (3.11).

Warunek zerowania się wyznacznika głównego układu (3.14) pozwala wyznaczyć wzór na siłę P_k w postaci uwikłanej:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} &EF(1 - \varepsilon_1)^2 \sin^2 2\alpha \cos \alpha (2\sigma_0 F \cos \alpha - P_k) + \\ &+ (1 - \varepsilon_1) (1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) (P_k^2 - 2P_k \sigma_0 F \cos \alpha - 4DEF^2 \cos^2 \alpha) + \\ &+ P_k DF \sin^2 2\alpha \cos \alpha = 0, \end{aligned}$$

gdzie ε_1 wyraża się wzorem (3.11).

Równanie konturu podstawy, dla której V nie zależy od φ , wyznaczamy podobnie jak w przypadkach poprzednich wprowadzając do (3.15) wielkość $F = V/2l$ oraz współczynnik bezpieczeństwa j . Po przekształceniach otrzymujemy równanie krzywej w układzie biegunowym (l, φ):

$$(3.16) \quad \begin{aligned} &EV_0 (1 - \varepsilon_1)^2 \sin^2 2\varphi \cos \varphi (\sigma_0 V_0 \cos \varphi - Pjl) + \\ &+ 2(1 - \varepsilon_1) (1 - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) (P^2 j^2 l^2 - Pj\sigma_0 V_0 l \cos \varphi - DEV_0^2 \cos^2 \varphi) + \\ &+ Pj DV_0 l \sin^2 2\varphi \cos \varphi = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon_1 = \frac{D}{\sigma_0} \ln \left[\frac{Pj(\sigma_0 - \sigma_s) l}{(\sigma_0 V_0 \cos \varphi - Pjl)} \right] + \frac{\sigma_s}{E}.$$

4. WYZNACZENIE KONTURU CAŁKOWITEJ NIEJEDNOZNACZNOŚCI PRZY UWZGLĘDNIENIU TRZECIEJ FORMY UTRATY STATECZNOŚCI W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

W przypadku $\sigma \leq \sigma_s$ siłę krytyczną dla tej formy utraty stateczności wyznaczyć można z układu (3.8), przyjmując $d\alpha_1 = d\alpha_2$. Otrzymuje się

$$P_k = 2EF \cos^3 \alpha.$$

Odpowiednie równanie konturu całkowitej niejednoznaczności w układzie (l, φ) ma postać

$$(4.1) \quad l = \frac{EV_0}{P_j} \cos^3 \alpha.$$

Dla $\sigma > \sigma_s$ wzór na siłę krytyczną wyznaczmy podobnie jak w rozdziale poprzednim, uwzględniając jednak, że oba pręty są dociążane:

$$(4.2) \quad d\varepsilon_2 = d\varepsilon_2^p = DF \frac{d\alpha_1 - \cos 2\alpha d\alpha_1}{\sigma_0 F \sin 2\alpha - P \sin \alpha},$$

$$d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2^p = DF \frac{d\alpha_2 - \cos 2\alpha d\alpha_2}{\sigma_0 F \sin 2\alpha - P \sin \alpha}.$$

Podstawiając (4.2) do (3.3) otrzymujemy układ równań

$$(d\alpha_1 + d\alpha_2) \left[(1 - \varepsilon_1) \cos \alpha - \frac{2DF \sin^2 \alpha}{2\sigma_0 F \cos \alpha - P} \right] = 0,$$

$$(d\alpha_1 - d\alpha_2) \left[(1 - \varepsilon_1) \sin \alpha - \frac{2DF \cos^3 \alpha}{\sigma_0 F \sin 2\alpha - P \sin \alpha} \right] = 0,$$

gdzie ε_1 wyraża się wzorem (3.11)

Przyjmując $d\alpha_1 = d\alpha_2$ otrzymujemy wzór na siłę krytyczną P_k :

$$\left[1 - \frac{\sigma_s}{E} - \frac{D}{\sigma_0} \ln \frac{P_k (\sigma_0 - \sigma_s)}{\sigma_s (2\sigma_0 F \cos \alpha - P_k)} \right] (2\sigma_0 F \cos \alpha - P_k) \cos \alpha - 2DF \sin^2 \alpha = 0.$$

Odpowiednie równanie konturu całkowitej niejednoznaczności w układzie współrzędnych (l, φ) ma postać

$$(4.3) \quad \left\{ 1 - \frac{\sigma_s}{E} - \frac{D}{\sigma_0} \ln \left[\frac{(\sigma_0 - \sigma_s) P_j l}{\sigma_s (\sigma_0 V_0 \cos \varphi - P_j l)} \right] \right\} (\sigma_0 V_0 \cos \varphi - P_j l) \cos \varphi - DV_0 \sin^2 \varphi = 0.$$

5. OKREŚLENIE PEŁNEGO KSZTAŁTU KONTURU PODSTAWY DLA WSZYSTKICH FORM UTRATY STATECZNOŚCI W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

Wyznaczenie pełnego kształtu podstawy wymaga odpowiedniego zestawienia otrzymanych dla każdego przypadku z osobna konturów. Przyjmiemy przy tym, że pręty kratownicy mają przekrój kołowy. Dla lepszej ilustracji na rysunku wyrazimy

równania (2.3), (2.5), (3.9), (3.16), (4.1) i (4.3) we współrzędnych bezwymiarowych (ρ, φ) , gdzie $\rho = l \sqrt[4]{\frac{8Pj}{\pi E V_0^2}}$; ponadto wprowadzimy następujące współczynniki bezwymiarowe:

$$\xi = \frac{\sigma_s}{E}, \quad \kappa = \frac{\sigma_s}{\sigma_0}, \quad \gamma = \sqrt[4]{\frac{8E^3 V_0^2}{\pi P^3 j^3}}.$$

Po uwzględnieniu powyższych oznaczeń otrzymuje się następujące równania konturów:

1) wyboczenie w zakresie sprężystym

$$(5.1) \quad \rho^4 = \cos \varphi,$$

2) wyboczenie w zakresie plastycznym

$$(5.2) \quad \cos \varphi = \frac{\kappa \rho}{\xi \gamma [1 - (1 - \kappa) \xi \gamma \rho^3]};$$

3) stateczność pozioma w zakresie sprężystym

$$(5.3) \quad \rho = \gamma \sin^2 \varphi \cos \varphi;$$

4) stateczność pozioma w zakresie plastycznym

$$(5.4) \quad \begin{aligned} & \gamma \sin^2 2\varphi \cos \varphi (1 - \varepsilon_1)^2 (\xi \gamma \cos \varphi - \kappa \rho) + \\ & + 2(1 - \varepsilon_1)(1 - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) [\rho^2 \kappa - \rho \xi \gamma \cos \varphi - \xi^2 \gamma^2 (1 - \kappa) \cos^2 \varphi] + \\ & + \xi^2 \gamma (1 - \kappa) \rho \sin^2 2\varphi \cos \varphi = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon_1 = \xi \left\{ (1 - \kappa) \ln \left[\frac{(1 - \kappa) \rho}{(\xi \gamma \cos \varphi - \kappa \rho)} \right] + 1 \right\};$$

5) przeskok w zakresie sprężystym

$$(5.5) \quad \rho = \gamma \cos^3 \varphi;$$

6) przeskok w zakresie plastycznym

$$(5.6) \quad \begin{aligned} & \left\{ 1 - \xi - \xi (1 - \kappa) \ln \left[\frac{(1 - \kappa) \rho}{(\xi \gamma \cos \varphi - \kappa \rho)} \right] \right\} (\xi \gamma \cos \varphi - \kappa \rho) \cos \varphi - \\ & - (1 - \kappa) \xi^2 \gamma \sin^2 \varphi = 0. \end{aligned}$$

Prawidłowe zestawienie powyższych krzywych w poszukiwaniu kontur podstawy jest możliwe na podstawie analizy naprężeń w prętach kratownicy. Przeanalizujemy, jak będą zmieniać się te naprężenia jako funkcje kąta φ , gdy kratownica będzie oparta na poszczególnych konturach oporowych

$$\sigma = \frac{N_k}{F} = \frac{Pj l}{V_0 \cos \varphi}$$

lub we współrzędnych bezwymiarowych

$$(5.7) \quad \sigma = \frac{E}{\gamma} \frac{\rho}{\cos \varphi}.$$

Podstawiając do (5.7) odpowiednie równanie konturu, otrzymujemy co następuje:

1) dla wyboczenia w zakresie sprężystym

$$\sigma = \frac{E}{\gamma} (\cos \varphi)^{-3};$$

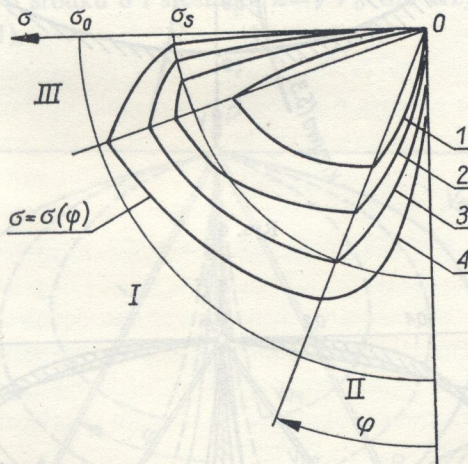
2) dla stateczności poziomej w zakresie sprężystym

$$\sigma = E \sin^2 \varphi;$$

3) dla przeskoaku w zakresie sprężystym

$$\sigma = E \cos^2 \varphi.$$

W przypadku pierwszym i drugim naprężenia σ wzrastają ze wzrostem φ , natomiast w trzecim σ maleje ze wzrostem φ .

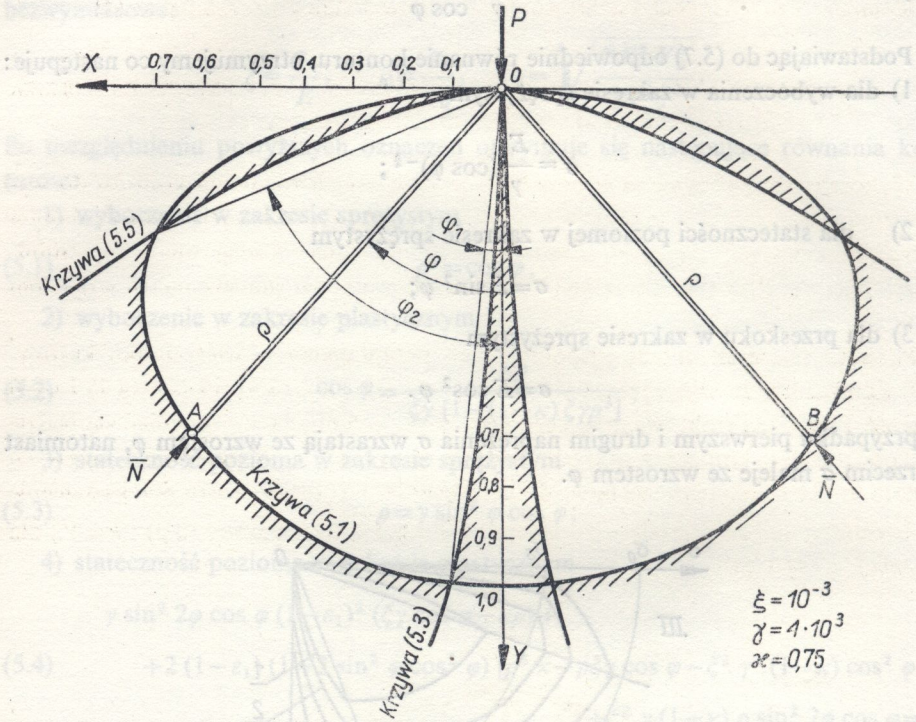


Rys. 3

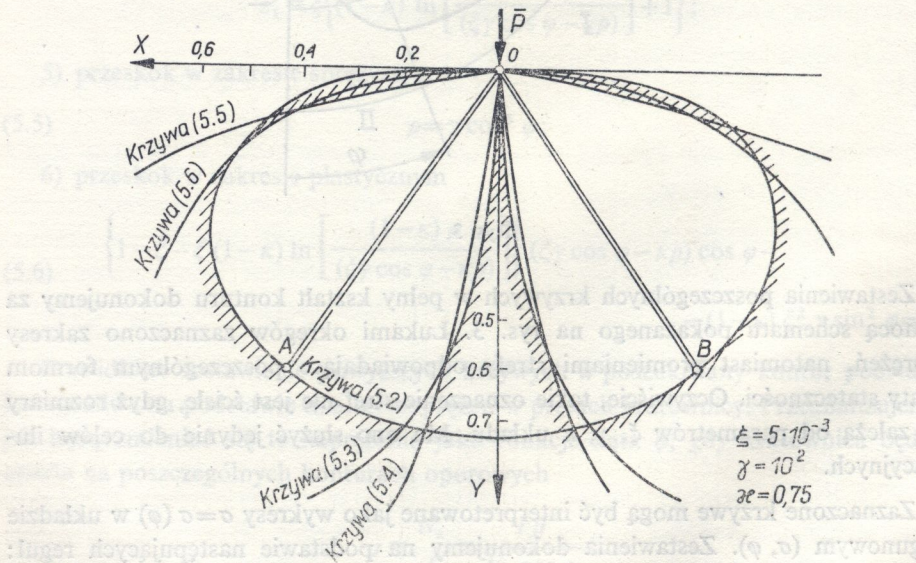
Zestawienia poszczególnych krzywych w pełny kształt konturu dokonujemy za pomocą schematu pokazanego na rys. 3. Łukami okręgów zaznaczono zakresy naprężeń, natomiast promieniami strefy odpowiadające poszczególnym formom utraty stateczności. Oczywiście, takie oznaczenie stref nie jest ścisłe, gdyż rozmiary ich zależą od parametrów ξ , γ , κ układu. Ma ono służyć jedynie do celów ilustracyjnych.

Zaznaczone krzywe mogą być interpretowane jako wykresy $\sigma = \sigma(\varphi)$ w układzie biegunowym (σ, φ) . Zestawienia dokonujemy na podstawie następujących reguł: kontur całkowitej niejednoznaczności składa się z krzywych wyznaczonych dla

zakresów, przez które przechodzi kolejno krzywa $\sigma = \sigma(\varphi)$, gdy φ wzrasta od 0 do $\pi/2$. Jak widać mogą zachodzić ogólnie cztery przypadki.



Rys. 4



Rys. 5

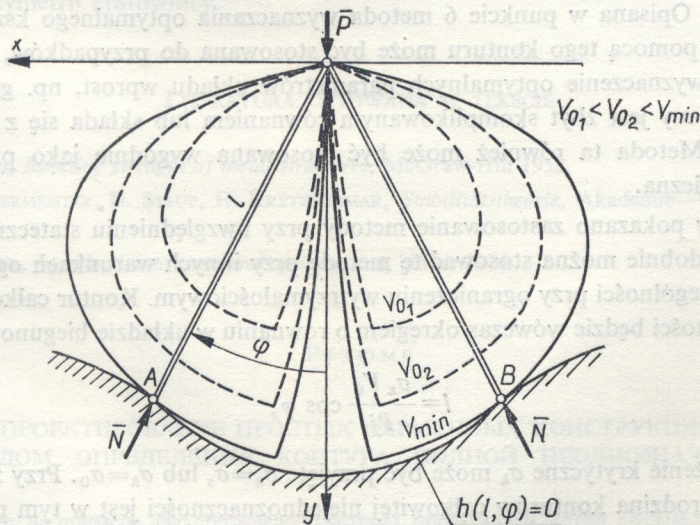
Na rys. 4 przedstawiono kształt konturu odpowiadający przypadkowi (1). Dla $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ kontur podstawy będzie wyznaczony przez krzywą (5.3), dla $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ przez krzywą (5.1), a dla $\varphi_2 \leq \varphi \leq \pi/2$ przez krzywą (5.5).

Rysunek 5 przedstawia kształt konturu odpowiadający przypadkowi (4).

6. METODA WYZNACZANIA OPTIMALNYCH PARAMETRÓW KRATOWNICY ZA POMOCĄ KONTURU CAŁKOWITEJ NIEJEDNOZNACZNOŚCI

Wykorzystamy otrzymane w poprzednich rozdziałach równania konturu do wyznaczenia parametrów l , φ kratownicy, tak aby przy danym obciążeniu P , danym równaniu podstawy $h(l, \varphi) = 0$ oraz ograniczeniu statecznością, miała ona minimalną objętość. Przy tym aktualne jest w dalszym ciągu założenie symetrii względem osi y .

Ponadto początek układu współrzędnych przyjmujemy w wierzchołku kratownicy. Zauważmy, że występującą we wzorach (2.3), (2.5), (3.9), (3.16), (4.1) i (4.3) objętość V_0 można traktować jak parametr. Wraz ze zmianą V_0 zmieniać się będzie wielkość i kształt konturów przedstawionych na rys. 4 i 5. W przypadku krzywych (2.3), (3.9) i (4.1) zmiany te są łatwe do uchwycenia. Jest to po prostu przekształcenie przez jednokładność o środku 0 i stosunku $k = \sqrt{V_0}$ dla krzywej (2.3) i $k = V_0$ dla krzywych (3.9) i (4.1).



Rys. 6

Dla krzywych z zakresu plastycznego opisanych równaniami (2.5), (3.16) i (4.3) zmiana V_0 powoduje zmiany ich charakteru. Jeżeli będziemy zmieniać V_0 tak, aby doprowadzić do styczności wewnętrznej konturu całkowitej niejednoznaczności i danego zarysu podstawy, to wartość V_0 odpowiadająca pojawieniu się pierwszych

punktów styczności konturów (ze względu na symetrię będą co najmniej dwa) będzie minimalną objętością, jaką może posiadać kratownica przy nałożonych ograniczeniach. Punkty styczności wyznaczają miejsca zamocowania prętów optymalnej kratownicy, a tym samym jej parametry l i φ . Na rys. 6 przerywaną linią zaznaczono kolejne etapy zmiany konturu całkowitej niejednoznaczności ze wzrostem V_0 . Dla uproszczenia założono, że materiał prętów jest idealnie sprężysty $\sigma_s \rightarrow \infty$, tzn. kontur całkowitej niejednoznaczności będzie składał się z krzywych (2.3), (3.9) i (4.1). Może zdarzyć się tak przy szczególnie dobranym kształcie podstawy, że jednocześnie wystąpi kilka par punktów styczności. Oznacza to istnienie więcej niż jednego rozwiązania optymalnego.

7. WNIOSKI KOŃCOWE

Każda kratownica oparta na wyznaczonym konturze całkowitej niejednoznaczności ma stałą objętość i jest zabezpieczona przed utratą stateczności założonym współczynnikiem bezpieczeństwa j . Z rys. 4 i 5 widoczne jest, że dla smukłych kratownic o małym kącie φ decydująca o wytrzymałości konstrukcji jest stateczność pozioma, natomiast dla większych decydująca staje się utrata stateczności związana z wyboczeniem poszczególnych prętów.

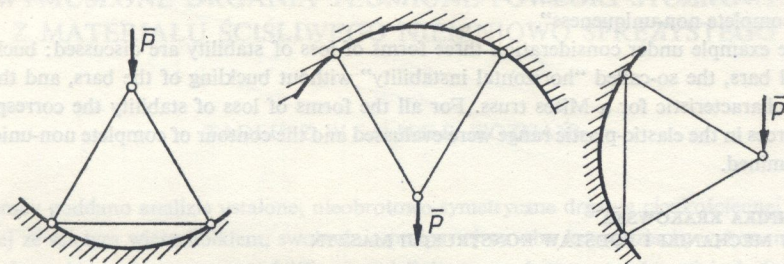
Przedstawione w pracy zagadnienie wyznaczenia konturu całkowitej niejednoznaczności oprócz aspektów czysto teoretycznych ma również pewne znaczenie praktyczne. Opisana w punkcie 6 metoda wyznaczania optymalnego kształtu kratownicy za pomocą tego konturu może być stosowana do przypadków, gdy trudne byłoby wyznaczenie optymalnych parametrów układu wprost, np. gdy kontur podstawy dany jest zbyt skomplikowanym równaniem lub składa się z odcinków krzywych. Metoda ta również może być stosowana wygodnie jako przybliżona metoda graficzna.

W pracy pokazano zastosowanie metody przy uwzględnieniu stateczności konstrukcji. Podobnie można stosować tę metodę przy innych warunkach ograniczających, w szczególności przy ograniczeniu wytrzymałościowym. Kontur całkowitej niejednoznaczności będzie wówczas okręgiem o równaniu w układzie biegunowym (l, φ)

$$l = \frac{\sigma_k V_0}{Pj} \cos \varphi,$$

gdzie naprężenie krytyczne σ_k może być przyjęte $\sigma_k = \sigma_s$ lub $\sigma_k = \sigma_0$. Przy zmieniającym się V_0 rodzina konturów całkowitej niejednoznaczności jest w tym przypadku rodziną okręgów stycznych wewnątrznie w punkcie przyłożenia siły P . Jeżeli równocześnie uwzględnimy utratę stateczności i ograniczenie wytrzymałościowe, to kontur całkowitej niejednoznaczności należy zestawić z krzywych odpowiadających poszczególnym formom utraty stateczności i okręgu, który odpowiada ograniczeniu wytrzymałościowemu. W tym celu można również wykorzystać schemat pokazany na rys. 3. Przyjmując bowiem $\sigma_k = \sigma_s$ powodujemy, że okrąg oddzielający na rys. 3 strefę sprężystą od plastycznej obrazuje jednocześnie zależność $\sigma = \sigma(\varphi)$ dla wytrzy-

małościowego warunku ograniczającego. Łatwo już teraz zauważyć, że np. dla przypadku (1) istotna będzie jedynie utrata stateczności. W pozostałych przypadkach okrąg $\sigma(\varphi) = \sigma_s$ przecina krzywe $\sigma = \sigma(\varphi)$ odpowiadające poszczególnym formom utraty stateczności. Warunek wytrzymałościowy należy więc w tych przypadkach uwzględnić.



Rys. 7

Przedstawiona w pracy metoda optymalnego kształtowania daje się łatwo uogólnić na inne przypadki (rys. 7) prostych kratownic w różny sposób podpartych i obciążonych. Pewne dodatkowe możliwości wprowadziłyby również odrzucenie warunku symetrii kratownicy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. F. BLEICH, *Buckling strength of metal structures*, McGraw-Hill 1952.
2. G. BURGERMEISTER, H. STEUP, H. KRETZSCHMAR, *Stabilitätstheorie*, Akademie-Verlag, Berlin 1963.
3. W. PRAGER, *Introduction to structural optimization*, Udine 1974.

Резюме

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРОСТЫХ ФЕРМЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНТУРА ПОЛНОЙ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ

В работе, на примере двухстержневой системы, представлен метод оптимального проектирования простых ферменных конструкций минимального объема при условиях устойчивости. Метод оптимизации основан на свойствах так называемых „контуров полной неоднозначности“.

Рассматриваются три формы потери устойчивости: выпучивание, так называемая „горизонтальная неустойчивость“ и потеря устойчивости в виде перескоков, характеристических для фермы Мизеса. Для всех форм потери устойчивости определяются критические силы в упруго-пластической области и соответствующие им контуры полной неоднозначности.

SUMMARY

OPTIMAL DESIGN OF SIMPLE TRUSSES BY DETERMINATION OF THE CONTOUR OF COMPLETE NON-UNIQUENESS

The paper gives a method of optimal design of simple trusses under stability constraints; a two-bar truss is discussed as an example. The method is based on determination of the so-called "contours of complete non-uniqueness".

In the example under consideration three forms of loss of stability are discussed: buckling of individual bars, the so-called "horizontal instability" without buckling of the bars, and the snap-through characteristic for a Mises truss. For all the forms of loss of stability the corresponding critical forces in the elastic-plastic range were evaluated and the contour of complete non-uniqueness was determined.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 kwietnia 1979 r.