

PARAMETRYCZNE DRGANIA PRZEKŁADNI Z UWZGLĘDNIENIEM ZDERZEŃ MIĘDZYZĘBNYCH

RYSZARD GRYBOŚ (GLIWICE)

Błędy zarysu zębów i podziałki powodują, iż wejściu każdej pary zębów w przypór towarzyszy uderzenie. Praca zawiera analizę dynamiczną przekładni zębatej, czołowej z uwzględnieniem zderzeń, które traktuje się jako procesy chwilowe. Ich intensywność charakteryzuje współczynnik restytucji. W takim ujęciu chwilowe zmiany prędkości kątowej kół, spowodowane zderzeniami, oblicza się za pomocą zasady zmienności krętu.

Wyprowadzono warunek spokojnej pracy przekładni (tzn. bez przerywania styku zębów) oraz zbadano wpływ współczynnika restytucji na obszary niespokojnej pracy przekładni. Wielkość tych obszarów zależy silnie od ogólnej podatności sprężystej przekładni.

1. WSTĘP

Liczne prace dotyczące dynamiki przekładni zębatych, jakie ukazały się w ostatnich latach, świadczą o niesłabnącym zainteresowaniu badaczy tym zagadnieniem. Chodzi tu zasadniczo o dwie sprawy: obliczenie tzw. nadwyżki dynamicznej obciążenia zębów oraz wyznaczanie przedziałów obrotów, w których przekładnia pracuje spokojnie, bowiem wspomniana nadwyżka osiąga znikomo małe wartości. Rozwiązania tych zagadnień poszukuje się na drodze teoretycznej [1, 2, 4, 8 i 10–17] lub eksperymentalnej [3, 5, 6 i 9], chociaż w fazie projektowania pomocne są oczywiście tylko wyniki badań analitycznych.

Jeśli chodzi o nadwyżkę dynamiczną, to początkowo przyczyn jej powstawania dopatrywano się wyłącznie w zmiennej sztywności zążeń. Ten efekt jest źródłem wzbudzenia drgań parametrycznych i nie może być pomijany w dynamicznej analizie przekładni (o ile stopień pokrycia jest mniejszy od 2).

Ale istnieje jeszcze drugie, wewnętrzne źródło wzbudzenia drgań przekładni, o którym wiadomo od dawna, ale które nie było dotychczas analizowane w sposób zadowalający. Chodzi o zderzenia zębów w chwili wchodzenia w przypór.

W modelu przekładni nieodkształcalnej i o idealnym zarysie zębów efekt zderzeń międzyzębnych nie występuje. Jednak odkształcalność sprężysta wszystkich elementów przekładni rzeczywistej, w szczególności zębów i wałków, a także błędy zarysu zębów i podziałki powodują, że w przekładni takiej wzbudzeniu każdej pary zębów towarzyszy mniej lub bardziej intensywne uderzenie. W tych warunkach pracy przekładni towarzyszy zwykle wysoki poziom szumów i następuje przedwczesne zużycie powierzchni roboczej zębów. W przypadku słabego obciążenia przekładni możliwe są również zderzenia niepracującymi powierzchniami zębów (tzw. zderzenia wtórne).

W większości prac na temat dynamiki przekładni zębatych efekt ten jest pomijany prawdopodobnie dlatego, że przy niefortunnym ujęciu analitycznym procesu zderzenia równoczesne uwzględnienie obu źródeł wzbudzenia drgań jest matematycznie nader kłopotliwe. Dlatego niektórzy badacze (np. [17]) zakładają po prostu, że błędy podziałki i profilu są źródłem wymuszenia kinematycznego o charakterze harmonicznym i częstości równej częstości zazębienia. Oczywiście przy takim uproszczeniu ginie specyfika drgań układu wibrouderzeniowego, jakim jest przekładnia obciążona błędami zazębienia.

Najwięcej uwagi dyskutowanemu zagadnieniu poświęcił B. M. ABRAMOV [1 i 2], który obliczył prędkość zderzenia zębów dla danej odchyłki podziałki i przy znanych parametrach geometrycznych zębów. Jednak badając drgania przekładni autor ten przyjmował nierealne warunki początkowe, mianowicie że drgania wzbudzone poprzednim uderzeniem zostają całkowicie wygaszone przed następnym zderzeniem zębów ([2], s. 18). Poza tym przyjęty tam podział procesu zderzenia na trzy fazy znacznie komplikuje postać rozwiązania.

W pracy [1] ABRAMOV zakładał, iż zderzenia międzyzębne powodują nagły skok prędkości $\Delta\dot{x}$ względnego odkształcenia zębów, przy czym $\Delta\dot{x} = a + bx + c\dot{x}^-$, gdzie \dot{x}^- jest prędkością zderzenia. Jednak pochodzenie tego wzoru, ani też znaczenie stałych a , b , c nie zostało we wspomnianej pracy wyjaśnione.

W jednej z nowszych prac R. C. AZAR i F. R. E. CROSSLEY [4] badali dynamikę przekładni zębatej przyjmując model dyskretny, czteromasowy. Ten dość ogólny model mechanizmu wibrouderzeniowego uwzględnia możliwość przerywania styku zębów i ewentualne zderzenia wtórne. Siłę stykową uzależnia się od lokalnego odkształcenia zębów x i prędkości \dot{x} za pomocą empirycznej formuły nieliniowej $P = [c\dot{x} + k(t)]x^n$, w której c i n są stałymi empirycznymi ($1 \leq n \leq 1,5$), $k(t)$ zaś jest okresowo zmienną sztywnością skrętną przekładni. Rozwiązanie tak skomplikowanego modelu matematycznego możliwe jest tylko przy pomocy komputera. Przykład podany w omawianej pracy wykazuje dość dobrą zgodność teorii z wynikami pomiarów; te ostatnie dotyczyły amplitudy drgań skrętnych wału.

W pracy niniejszej zderzenia będziemy traktować jako proces chwilowy w sensie klasycznej teorii uderzenia (Newtona). Wpływ zaś wszystkich czynników decydujących o intensywności zderzeń ujmujemy za pomocą współczynnika restytucji. W takim ujęciu skok prędkości kątowej kół, spowodowany nieprawidłowym wżębieniem, można obliczyć z równań zasady zmienności krętu. Analiza dynamiczna pozwala wyznaczyć zakresy obrotów przekładni, w których mimo zderzeń nie następują przerwy kontaktu zębów. Jest to zasadniczym celem niniejszej pracy.

Obliczenia dotyczą w zasadzie przekładni jednostopniowej o zębach prostych. Uogólnienie na przekładnię wielostopniową o zębach skośnych spowoduje jedynie wzrost ilości równań różniczkowych ruchu i pewne zmiany wartości niektórych parametrów (por. np. [17]).

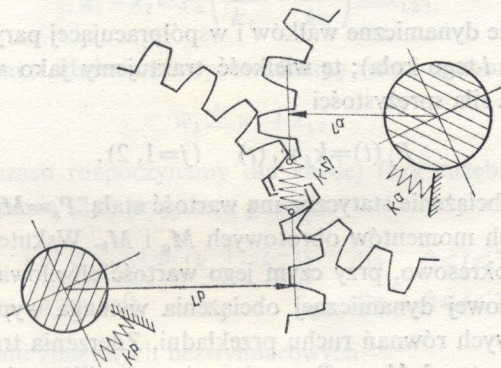
Oprócz wymienionych przyjęto jeszcze inne założenia upraszczające: 1) koła i wały wykonane są z materiału Hooke'a, a więc pomija się tłumienie drgań; 2) pominięto również podatność giętną wałów i podatność łożysk; 3) wpływ mas przyłączonych do przekładni (np. silnika i maszyny roboczej) na częstość drgań własnych

układu uwzględnia się w sposób przybliżony, zaproponowany w pracy [7]; 4) sztywność układu zmienia się skokowo w chwili wżębiania i wyżębiania kolejnej pary zębów.

Dodajmy jeszcze, że efektywne rozwiązanie zagadnienia tytułowego możliwe jest tylko dla dyskretnego modelu przekładni, w którym jednak uwzględniona musi być co najmniej podatność giętna zębów i skrętna wałów.

2. RÓŻNICZKOWE RÓWNANIA RUCHU

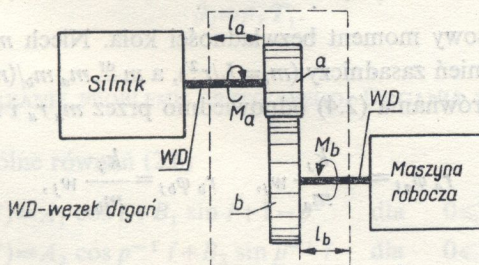
Weźmy pod uwagę dyskretny model przekładni posiadający jeden stopień swobody, który jest uwarunkowany podatnością giętną zębów i skrętną wałków. W modelu tym sztywne tarcze z podatnymi na zginanie zębami osadzone są na odkształcalnych (skrętnie) wałkach o sztywnościach k_a i k_b (rys. 1).



Rys. 1

Koło czynne **a** (atakujące), oddziałuje na koło **b** (bierne) przez sprężynę liniową, imitującą podatność giętną zazębiania. Jej sztywność zmienia się, według założenia, skokowo od wartości k_{z1} dla $0 \leq t \leq T_1$ do wartości k_{z2} dla $T_1 \leq t \leq T_1 + T_2$, gdzie

$$T_1 = (2 - \varepsilon) T, \quad T_2 = (\varepsilon - 1) T$$



Rys. 2

jest okresem pojedynczego i podwójnego zazębienia odpowiednio (liczba przyporu — $\varepsilon \in (1; 2]$), okres zazębienia — $T=2\pi/\omega_i z_i$; ω_i , z_i oznacza nominalną prędkość kątową oraz liczbę zębów i -tego koła, $i=a$ lub b). Sztywność $k_a=GJ_a/l_a r_a^2$ (J_a oznacza biegunowy moment bezwładności przekroju wałka a) dotyczy odcinka l_a wału między kołem a i przekrojem węzłowym; podobnie ma się rzecz w przypadku sztywności k_b (rys. 2). Ponieważ mamy tu szeregowe połączenie elementów sprężystych, przeto sztywność zastępczą k_j sprężyny w j -tej fazie zazębienia określa wzór

$$(2.1) \quad \frac{1}{k_j} = \frac{1}{k_{zj}} + \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_b} \quad (j=1, 2).$$

Z powodu podatności zębów i wałków, koła wykonują drgania obrotowe⁽¹⁾. Niech kąt $\varphi_{ij}(t)$ określa chwilowe położenie i -tego koła w j -tej fazie zazębienia. Różnica

$$(2.2) \quad r_a \varphi_{aj}(t) - r_b \varphi_{bj}(t) \stackrel{\text{df}}{=} w_j(t) \quad (j=1, 2)$$

określa odkształcenie dynamiczne wałków i współpracującej pary zębów (r_i oznacza promień zasadniczy i -tego koła); tę wielkość traktujemy jako współrzędną uogólnioną. Odpowiednia siła sprężystości

$$(2.3) \quad P_j(t) = k_j w_j(t) \quad (j=1, 2).$$

Zakładamy, że obciążenie statyczne ma wartość stałą, $P_s = M_a/r_a = M_b/r_b$ wynikającą z przenoszonych momentów obrotowych M_a i M_b . Wskutek drgań obciążenie zębów zmienia się okresowo, przy czym jego wartość chwilowa wynosi $P_s - P_j(t)$.

Obliczenie składowej dynamicznej obciążenia wymaga wyprowadzenia i scałkowania różniczkowych równań ruchu przekładni. Zderzenia traktujemy jako procesy chwilowe (długość $\tau \rightarrow 0$), trzeba więc określić ruch między kolejnymi zderzeniami, które następują w chwilach $t = t_n + nT$ ($n=1, 2, 3, \dots$). Wówczas to prędkość kątowa kół zmienia się skokowo przy prawie niezmiennych ich położeniach.

Na koło **a** działa moment obrotowy $[P_s - P_j(t)] r_a$, na koło **b** moment — $[P_s - P_j(t)] r_b$. Momenty sił statycznych równoważą się z momentami sił sprężystości przy odkształceniu statycznym λ_s . Mamy przeto następujące równanie ruchu i -tego koła w j -tej fazie zazębienia

$$(2.4) \quad I_i \ddot{\varphi}_{ij} = \mp k_j w_j r_i \quad (- \text{dla } i=a, + \text{dla } i=b),$$

gdzie I_i oznacza masowy moment bezwładności koła. Niech m_i będzie masą koła zredukowaną na promień zasadniczy ($m_i = I_i/r_i^2$), a $m \stackrel{\text{df}}{=} m_a m_b / (m_a + m_b)$ — masą zastępczą kół. Dzielnik równania (2.4) odpowiednio przez $m_a r_a$ i $m_b r_b$ otrzymamy

$$r_a \ddot{\varphi}_{aj} = - \frac{k_j}{m_a} w_j, \quad r_b \ddot{\varphi}_{bj} = \frac{k_j}{m_b} w_j,$$

⁽¹⁾ Oprócz tego występują drgania związane z podatnością giętą wałków, jednak nie bierzemy ich tu pod uwagę.

a po odjęciu stronami z uwzględnieniem (2.2)

$$(2.5) \quad \ddot{w}_j + p_j^2 w_j = 0 \quad (j=1, 2),$$

gdzie

$$p_j^2 \stackrel{\text{def}}{=} k_j/m.$$

Zmienna sztywność w obu fazach zażębenia sprawia, iż odkształcenia statyczne są wtedy różne:

$$\text{w fazie pierwszej} \quad \lambda_s = P_s/k_1 \equiv \lambda_1,$$

$$\text{w fazie drugiej} \quad \lambda_s = P_s/k_2 \equiv \lambda_2.$$

Odształcenia dynamiczne $w_1(t)$, $w_2(t)$ są więc mierzone względem różnych punktów odniesienia, oddalonych wzajemnie o

$$\lambda_1 - \lambda_2 = P_s \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{12}.$$

Aby ujednoczyć punkt odniesienia wprowadzamy nową zmienną

$$\bar{w}_1 \stackrel{\text{def}}{=} w_1 + \lambda_{12}.$$

Ponadto rachubę czasu rozpoczynamy dla każdej fazy zażębenia oddzielnie. Po tych zmianach równania (2.5) przyjmują postać

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}}_1 + p_1^2 \bar{w}_1 &= p_1^2 P_s (k_1^{-1} - k_2^{-1}) & \text{dla} & \quad 0 \leq t \leq T_1, \\ \ddot{w}_2 + p_2^2 w_2 &= 0 & \text{dla} & \quad 0 \leq t \leq T_2 \end{aligned}$$

lub po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych

$$\bar{t} \stackrel{\text{def}}{=} p_1 t, \quad q_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_j}{\lambda_1}, \quad p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$$

i zachowaniu kropek na oznaczenie różniczkowania względem \bar{t}

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 &= 1 - p^2 & \text{dla} & \quad 0 \leq \bar{t} \leq \vartheta_1, \\ \ddot{q}_2 + p^{-2} q_2 &= 0 & \text{dla} & \quad 0 \leq \bar{t} \leq p\vartheta_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\vartheta_j = p_j T_j.$$

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU BRZEGOWEGO. DRGANIA STACJONARNE

Rozwiązanie ogólne równań (2.6)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} q_1(\bar{t}) &= A_1 \cos \bar{t} + B_1 \sin \bar{t} + 1 - p^2 & \text{dla} & \quad 0 \leq \bar{t} \leq \vartheta_1, \\ q_2(\bar{t}) &= A_2 \cos p^{-1} \bar{t} + B_2 \sin p^{-1} \bar{t} & \text{dla} & \quad 0 \leq \bar{t} \leq p\vartheta_2 \end{aligned}$$

zawiera cztery stałe A_1, \dots, B_2 , które wyznaczymy z warunków brzegowych.

Na granicy pierwszej i drugiej fazy, czyli w momencie wżębiania, przemieszczenia muszą spełniać warunek ciągłości

$$(3.2) \quad q_1(\vartheta_1) = q_2(0).$$

Natomiast prędkości \dot{q}_j , wskutek zderzenia, są w tym punkcie nieciągłe:

$$(3.3) \quad \dot{q}_1(\vartheta_1) + \Delta\dot{q} = \dot{q}_2(0 + \bar{\tau}),$$

gdzie $\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_{II} \ll p\vartheta_2$. Wżębianie przebiega łagodnie, ale przemieszczenia i prędkości po upływie okresu $T = T_1 + T_2$ na ogół nie są sobie równe lecz zmieniają się w pewnym stosunku σ , to znaczy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} q_2(\vartheta_2) &= \sigma q_1(0), \\ \dot{q}_2(\vartheta_2) &= \sigma \dot{q}_1(0). \end{aligned}$$

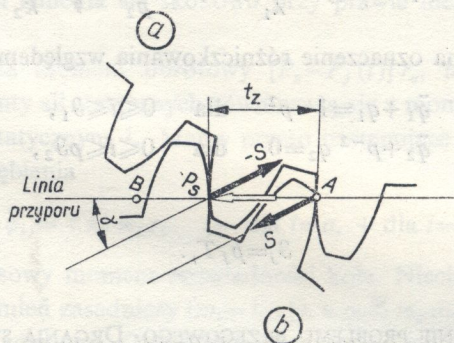
Jeżeli $|\sigma| > 1$, drgania mają tendencję wzrostu, natomiast dla $|\sigma| < 1$ drgania są gasnące. Przypadek $|\sigma| = 1$ odpowiada drganiom ustalonym.

Obliczymy teraz uderzeniowy skok prędkości odkształcenia $\Delta\dot{w}$ lub jego bezwymiarowy odpowiednik $\Delta\dot{q} = \Delta\dot{w}/p_1 \lambda_1$. Przyjmując newtonowski model zderzenia wyprowadzimy odpowiedni wzór z zasady zmienności krętu dla sił chwilowych. W procesie zderzenia niesprężystego (współczynnik restytucji $R < 1$) wyodrębniamy dwie fazy, których impulsy S_I, S_{II} spełniają relację $S_{II} \stackrel{\text{def}}{=} RS_I$. W chwili środkowej zderzenia ($t = \tau_1$ lub $T_1 + \tau_1$) występuje maksimum siły chwilowej $\tilde{P}(t)$, a prędkość odkształcenia maleje do zera:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(T_1 + \tau_1) &= r_a \dot{\phi}_{a1}(T_1 + \tau_1) - r_b \dot{\phi}_{b1}(T_1 + \tau_1) = 0, \\ \dot{w}_2(0 + \tau_1) &= r_a \dot{\phi}_{a2}(0 + \tau_1) - r_b \dot{\phi}_{b2}(0 + \tau_1) = 0. \end{aligned}$$

Oczywiście obydwa koła mają w tej chwili nominalne prędkości kątowe, czyli

$$\begin{aligned} \text{dla koła atakującego} \quad \dot{\phi}_{a1}(T_1 + \tau_1) &= \dot{\phi}_{a2}(0 + \tau_1) = \omega_a; \\ \text{dla koła biernego} \quad \dot{\phi}_{b1}(T_1 + \tau_1) &= \dot{\phi}_{b2}(0 + \tau_1) = \omega_b. \end{aligned}$$



Rys. 3

Przypuśćmy, że wskutek błędów zarysu następuje krawędziowe uderzenie zęba atakującego w ząb koła biernego. Przy takim uderzeniu wżębianie odbywa się poza teoretyczną linią przyporu, a wektor siły $\tilde{P}(t)$ lub jej impuls $S = \int_0^{\tau} \tilde{P}(t) dt$ nie leży

na tej linii, lecz jest odchylony od niej o pewien kąt γ (rys. 3). Siła $\vec{P}(t)$ powoduje chwilowe obciążenie pary zębów wchodzącej w przypór i takie samo odciążenie sąsiedniej pary, która jest już w przyporze. Impulsy sił chwilowych tworzą więc parę o momencie $St_z \sin \gamma$ (t_z oznacza podziałkę zasadniczą), która powoduje zmianę krętu każdego koła. Zgodnie ze wspomnianą zasadą, zastosowaną do obydwu kół i obydwu faz zderzenia oddzielnie, piszemy

$$(3.5) \quad \begin{aligned} S_I t_z \sin \gamma &= I_a [\dot{\phi}_{a1}(T_1) - \omega_a] = I_b [\omega_b - \dot{\phi}_{b1}(T_1)], \\ S_{II} t_z \sin \gamma &= I_a [\omega_a - \dot{\phi}_{a2}(0+\tau)] = I_b [\dot{\phi}_{b2}(0+\tau) - \omega_b]. \end{aligned}$$

Stąd możemy obliczyć impuls zderzenia $S = S_I + S_{II} = (1+R) S_I$, a przede wszystkim przyrosty prędkości kątowych:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{a2}(0+\tau) - \dot{\phi}_{a1}(T_1) &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta \dot{\phi}_a, \\ \dot{\phi}_{b2}(0+\tau) - \dot{\phi}_{b1}(T_1) &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta \dot{\phi}_b, \end{aligned}$$

które występują w poszukiwanej zmianie prędkości odkształcenia zębów,

$$(3.6) \quad \Delta \dot{w} = r_a \Delta \dot{\phi}_a - r_b \Delta \dot{\phi}_b.$$

Przekształcając stosownie równania (3.5) otrzymamy

$$\begin{aligned} St_z \sin \gamma &= -I_a \Delta \dot{\phi}_a = I_b \Delta \dot{\phi}_b, \\ \Delta \dot{\phi}_a &= (1+R) [\omega_a - \dot{\phi}_{a1}(T_1)], \\ \Delta \dot{\phi}_b &= (1+R) [\omega_b - \dot{\phi}_{b1}(T_1)], \end{aligned}$$

co podstawione do wzoru (3.6) z uwzględnieniem, że $r_a \omega_a - r_b \omega_b = 0$, daje

$$\Delta \dot{w} = -(1+R) [r_a \dot{\phi}_{a1}(T_1) - r_b \dot{\phi}_{b1}(T_1)] = -(1+R) \dot{w}_1(T_1)$$

i w końcu

$$(3.7) \quad \Delta \dot{q} = -(1+R) \dot{q}_1(\vartheta_1).$$

Tak więc warunek brzegowy (3.3) przyjmuje postać

$$\dot{q}_2(0+\tau) = -R \dot{q}_1(\vartheta_1).$$

Przechodzimy do obliczenia amplitud drgań ustalonych. W tym przypadku $|\sigma| = 1$ i podstawienie wzorów (3.1) do warunków brzegowych daje następujący układ równań dla niewiadomych A_1, \dots, B_2 :

$$\begin{aligned} A_1 \cos \vartheta_1 + B_1 \sin \vartheta_1 + 1 - p^2 &= A_2, \\ Rp(A_1 \sin \vartheta_1 - B_1 \cos \vartheta_1) &= B_2, \\ A_2 \cos \vartheta_2 + B_2 \sin \vartheta_2 &= A_1 + 1 - p^2, \\ -A_2 \sin \vartheta_2 + B_2 \cos \vartheta_2 &= pB_1. \end{aligned}$$

O ile wyznacznik główny

$$(3.8) \quad \Delta \equiv -p(1-R)(1 - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2) - (1 - Rp^2) \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2$$

nie równa się zero, układ ma rozwiązanie

$$\begin{aligned} A_1 &= a\Delta^{-1}, & B_1 &= b\Delta^{-1}, \\ A_2 &= (a \cos \vartheta_1 + b \sin \vartheta_1) \Delta^{-1} + 1 - p^2, \\ B_2 &= (a \sin \vartheta_1 - b \cos \vartheta_1) R p \Delta^{-1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a &= (1-p^2) [p(1-\cos \vartheta_2)(1-R \cos \vartheta_1) + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2], \\ b &= (1-p^2) [-R p(1-\cos \vartheta_2) \sin \vartheta_1 + (1-\cos \vartheta_1) \sin \vartheta_2]. \end{aligned}$$

Odrębnego rozpatrzenia wymaga przypadek $\Delta=0$ dla dowolnego σ . Wtedy

$$(3.9) \quad \sigma^2 - 2B\sigma - R = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} 2B &= (1-R) \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - (p^{-1} - R p) \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 = \\ &= \frac{1}{2} [1 + p^{-1} - R(1+p)] \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{1}{2} [p^{-1} - 1 + R(1-p)] \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2). \end{aligned}$$

Oczywiście teraz stałe $A_1, \dots, B_2 \rightarrow \infty$, skąd jednak nie można jeszcze wnioskować o niestacności drgań. Efekt ten jest raczej wynikiem niedoskonałości modelu matematycznego, a nie przejawem dynamicznych cech układu. Niestacne drgania przekładni występują dopiero w tych przedziałach argumentów ϑ_1, ϑ_2 (a więc obrotów przekładni), dla których współczynnik $|\sigma| > 1$.

Równanie (3.8) ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$\sigma_{\pm} = B \pm \sqrt{B^2 + R},$$

przy czym warunek stateczności $|\sigma| \leq 1$ jest spełniony, gdy $|2B| \leq (1-R)$, to znaczy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} &|[1 + p^{-1} - R(1+p)] \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \\ &\quad - [p^{-1} - 1 + R(1-p)] \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)| \leq 2(1-R). \end{aligned}$$

Nierówność przeciwna (tzn. $|\dots| > 2(1-R)$) wyznacza obszary drgań, w których występuje rezonans parametryczny.

5. TRAJektorie FAZOWE

Analizowany ruch drgający przekładni ze zderzeniami ma ciekawą interpretację na płaszczyźnie fazowej. Wprowadzimy do rozważań bezwymiarowe amplitudy drgań Q_j oraz kąty fazowe ψ_j :

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{A_j^2 + B_j^2}, \quad \psi_j \stackrel{\text{def}}{=} \arctg(A_j/B_j), \quad j=1, 2.$$

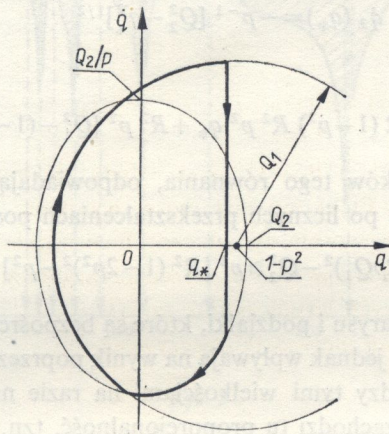
Dzięki temu funkcje (3.1) oraz ich pochodne przyjmą postać

$$\begin{aligned} q_1(\bar{t}) &= Q_1 \sin(\bar{t} + \psi_1) + 1 - p^2, \\ \dot{q}_1(\bar{t}) &= Q_1 \cos(\bar{t} + \psi_1), \\ q_2(\bar{t}) &= Q_2 \sin(p^{-1} \bar{t} + \psi_2), \\ \dot{q}_2(\bar{t}) &= p^{-1} Q_2 \cos(p^{-1} \bar{t} + \psi_2). \end{aligned}$$

Są to parametryczne równania trajektorii fazowych. Po eliminacji parametru t otrzymamy

$$(5.1) \quad (q_1 - 1 + p^2)^2 + \dot{q}_1^2 = Q_1^2, \quad q_2^2 + (p\dot{q}_2)^2 = Q_2^2.$$

Jak z tego wynika trajektoria fazowa podczas pojedynczego zazębienia jest odcinkiem okręgu o promieniu Q_1 i środka w punkcie $(1-p^2, 0)$, podczas zazębienia podwójnego zaś jest to odcinek elipsy centralnej o półosiach: małej Q_2 i dużej $p^{-1}Q_2$ ($p < 1$). Skok prędkości spowodowany zderzeniem przy nieprawidłowym wzbębieniu, reprezentowany jest przez odcinek pionowy, po którym punkt fazowy przeskakuje z okręgu na elipsę (rys. 4). Długość tego odcinka określona jest formułą (3.7), a odcięta q_* jego punktów wyznacza odkształcenie zębów w chwili uderzenia.



Rys. 4

6. WARUNEK SPOKOJNEJ PRACY PRZEKŁADNI

Uwzględnianie zderzeń międzyzębnych powoduje, iż spełnienie warunku stateczności drgań parametrycznych $|\sigma| \leq 1$ nie oznacza jeszcze spokojnej pracy przekładni. Przy dostatecznie dużych wartościach współczynnika restytucji, poza obszarami rezonansowymi mogą bowiem jeszcze wystąpić obszary drgań, przy których następuje przerwanie styku zębów na odcinku przyporu i powtórne zderzenia.

Wyprowadzimy z kolei warunek, jaki muszą spełniać parametry przekładni oraz jej obroty na to, aby mimo wzbudzenia drgań parametrycznych z uderzeniami (przy wzbębieniu) nie następowało przerwanie styku zębów na odcinku przyporu.

Sytuacja taka zaistnieje, gdy obliczeniowa wartość siły międzyzębnej $[P_s - P_j(t)] \geq 0$, tzn. składowa dynamiczna tej siły nie przekroczy obciążenia statycznego: $k_j |w_j(t)| \leq P_s$ lub $k_j |q_j(t)| \leq k_1$. Są to zasadniczo dwa warunki: $|q_1(t)| \leq 1$, $|q_2(t)| \leq p^2$, ale ponieważ $p < 1$, więc drugi warunek jest silniejszy. Uwzględniając jeszcze, że $\max q = q_*$, otrzymamy

$$(6.1) \quad q_* \leq p^2.$$

Aby obliczyć q_* korzystamy z równania

$$\Delta \dot{q} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{q}_1(q_*) - \dot{q}_2(q_*) = (1+R) \dot{q}_1(q_*)$$

lub

$$(6.2) \quad -\dot{q}_2(q_*) = R \dot{q}_1(q_*),$$

wynikającego wprost z „portretu” fazowego na rys. 4. Teraz wystarczy z równań (5.1) wyznaczyć funkcje $\dot{q}_1(q_1)$, $\dot{q}_2(q_2)$, obliczyć ich wartości w punkcie $q_1 = q_2 = q_*$ i podstawić do (6.2), aby otrzymać równanie (kwadratowe) dla niewiadomej q_* . W ten sposób otrzymujemy kolejno

$$\dot{q}_1(q_*) = [Q_1^2 - (q_* - 1 + p^2)^2]^{1/2},$$

$$\dot{q}_2(q_*) = -p^{-1} [Q_2^2 - q_*^2]^{1/2}$$

oraz

$$(1 - R^2 p^2) q_*^2 + 2(1 - p^2) R^2 p^2 q_* + R^2 p^2 [Q_1^2 - (1 - p^2)^2] - Q_2^2 = 0.$$

Jeden spośród pierwiastków tego równania, odpowiadający warunkom zadania, podstawiony w (6.1) daje po licznych przekształceniach poszukiwany warunek

$$(6.3) \quad (RpQ_1)^2 - Q_2^2 \geq p^2 [R^2(1 - 2p^2)^2 - p^2].$$

Zauważmy, że błędy zarysu i podziałki, które są bezpośrednią przyczyną zderzeń, nie występują *explicite*, jednak wpływają na wynik poprzez współczynnik restytucji R . Na temat relacji między tymi wielkościami na razie nie ma żadnych danych, należy jednak sądzić, iż zachodzi tu proporcjonalność, tzn. im większe błędy ząbienia, tym bardziej sprężyste są zderzenia, tym większa wartość R . Amplitudy Q_1 i Q_2 zależą pośrednio od częstości ząbienia, zatem warunek (6.3) uzależnia parametry przekładni od jej prędkości kątowej.

7. PRZYKŁAD SZCZEGÓLOWY I WNIOSKI OGÓLNE

Weźmy pod uwagę przekładnię zębatą o następujących parametrach: $\varepsilon = 1,5$; $z_a = 30$; $p_1 = \sqrt{k_1/m} = 1375 \text{ s}^{-1}$, $k_a/k_{z1} = 0,2$; $k_a/k_{z2} = 0,1$; $k_a/k_b = 2$.

Uwzględniając wzór (2.1) obliczamy

$$p = \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{1/2} = \left(\frac{\frac{k_a}{k_{z2}} + \frac{k_a}{k_b} + 1}{\frac{k_a}{k_{z1}} + \frac{k_a}{k_b} + 1} \right)^{1/2} = \left(\frac{0,1 + 2 + 1}{0,2 + 2 + 1} \right)^{1/2} = 0,98425.$$

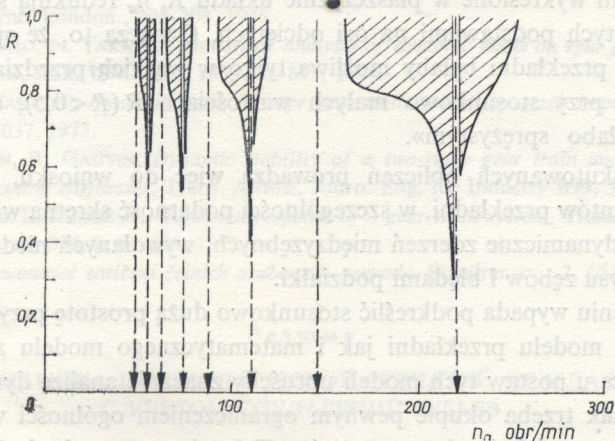
Związek między obrotami n_a koła **a** i zmienną $\vartheta_1 = p_1 T_1$ ma postać

$$n_a = \frac{60(2 - \varepsilon)p_1}{z_a \vartheta_1} = \frac{1375}{\vartheta_1} \left[\frac{\text{obr}}{\text{min}} \right].$$

Ponadto

$$\vartheta_2 = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_2}{T_1} \vartheta_1 = \frac{1}{p} \frac{\varepsilon - 1}{2 - \varepsilon} \vartheta_1 = 1,016 \vartheta_1.$$

W celu zbadania wpływu, jaki współczynnik restytucji wywiera na charakter pracy przekładni, korzystamy z warunku (6.3). Wyniki (uzyskane przy pomocy komputera) przedstawiamy w płaszczyźnie współrzędnych R , n_a (rys. 5). Obszary zakreskowane ukośnie są miejscem geometrycznym punktów, dla których wspomniany warunek nie jest spełniony, tzn. następuje przerwanie styku zębów.



Rys. 5

Charakterystyczne są tu dwa zjawiska: 1) gwałtowny wzrost szerokości tych obszarów dla $R \in [0,75; 0,85]$; 2) «rozszczepienie» każdego obszaru na dwa podobszary oddzielone wąską «szczeliną» pionową o stałej szerokości.

Obszary rezonansowe (w których nie jest spełniony warunek (3.10)) są bardzo wąskie i prawie niezależne od wartości R . Dlatego na rys. 5 obrazują je cienkie linie pionowe (przerywane). Jest rzeczą interesującą, że żadna z nich nie przebiega przez obszar zakreskowany, a co druga usytuowana jest dokładnie we wspomnianych wyżej «szczelinach». Oznacza to, że podczas drgań rezonansowych, mimo znacznego wzrostu amplitudy, nie dochodzi do przerywania styku zębów, drgania (obrotowe) bowiem obydwu kół zachodzą w zgodnej fazie.

Ponieważ w bezpośrednim sąsiedztwie obrotów rezonansowych rozciągają się obszary zakreskowane (oczywiście dla dostatecznie dużego R), więc np. dla $R > 0,85$ w całym przedziale obrotów od 160 do 250 min^{-1} praca przekładni będzie miała niespokojny charakter.

Trzeba w tym miejscu podkreślić, że punktom na granicy obszarów odpowiadają takie stany dynamiczne przekładni, przy których następuje tylko okresowe, całkowite odciążenie zębów, jednak bez przerywania wzajemnego kontaktu. Zderzenia wtórne mogą więc wystąpić dopiero dla wartości (R, n_a) , które odpowiadają punktom leżącym w głębi obszarów zakreskowanych.

Inne badania teoretyczne dynamiki przekładni z uwzględnieniem zderzeń, prowadzone pod kątem wpływu podatności sprężystej na obszary niespokojnej pracy, wskazują na ogromną rolę, jaką w tym względzie odgrywa parametr $p \stackrel{\text{def}}{=} p_1/p_2$. W przykładzie, którego dotyczy rys. 5, uwzględniono podatność skrętną wałków na równi z podatnością giętną zębów, wskutek czego wspomniany parametr miał wartość nieznacznie mniejszą od 1. Oznacza to, że stopień modulacji sztywności układu jest bardzo mały. Gdyby jednak zaniedbać podatność wałków, to wówczas $p = \sqrt{k_{z1}/k_{z2}}$, a ponieważ sztywność zazębienia podwójnego jest prawie dwukrotnie większa niż pojedynczego, więc $p \cong 0,707$. W tym przypadku obszary spokojnej pracy przekładni wykreślone w płaszczyźnie układu R, n_a redukują się do wąskich «klinów», opartych podstawami na osi odciętych. Oznacza to, że spokojna praca tak «sztywnej» przekładni byłaby możliwa tylko w wąskich przedziałach obrotów i to wyłącznie przy stosunkowo małych wartościach R ($R < 0,5$), co odpowiada zderzeniom «słabo sprężystym».

Wyniki dyskutowanych obliczeń prowadzą więc do wniosku, że podatność sprężysta elementów przekładni, w szczególności podatność skrętna wałków, łagodzi ujemne skutki dynamiczne zderzeń międzyzębnych, wywołanych niedokładnościami wykonania zarysu zębów i błędami podziałki.

W zakończeniu wypada podkreślić stosunkowo dużą prostotę przyjętych modeli, tzn. fizycznego modelu przekładni jak i matematycznego modelu zderzeń. Założenia, które leżą u podstaw tych modeli uprościły znacznie analizę dynamiczną problemu, co jednak trzeba okupić pewnym ograniczeniem ogólności wniosków, jak i trudnością oceny niektórych parametrów. Tak więc pozostał niezbadany wpływ tłumienia oraz drgań giętnych wałków na obszary spokojnej pracy przekładni, nie ujawniono też powiązań współczynnika restytucji z mierzalnymi parametrami przekładni.

Zagadnienia te wymagają dalszych badań teoretycznych i eksperymentalnych, tym niemniej wskazana tu droga postępowania wydaje się być efektywna i, co najważniejsze, zgodna ze współczesnym stanem rozwoju dynamiki układów wibrouderzeniowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Б. М. Абрамов, *Исследование колебаний зубчатых колес, вызываемых соударением зубьев*, Изв. АН ССР ОТН, Мех. и машинострой., 2, 102-109, 1960.
2. Б. М. Абрамов, *Колебания прямозубых зубчатых колес*, Изд. Харк. Унив., 176, 1968.
3. R. S. AZAR, T. R. E. CROSSLEY, *An experimental investigation of impact phenomenon in spur gear systems*, World Congr. Theory Mach. a. Mech. Uniw. Newcastle upon Tyne, 1, 157-161, 1975.
4. R. S. AZAR, F. R. E. CROSLEY, *Digital simulation of impact phenomenon in spur gear systems*, Trans, ASME, J. Eng. for Industry B99, 3, 792-798, 1977.
5. Р. Ю. Банцевичус, В. Л. Рагульскене, *Виброударные явления в малозагруженных передачах*, Вибротехника, 2, 157-162, 1967.
6. А. И. Беляев, В. Ш. Джамалов, *Исследования виброударных колебаний в жесткой и упругой тяговых передачах тепловозов*, Тр. Москов. ин-та инж. ж.-д. трансп. 128-137, 1971.

7. R. GRYBÓŚ, *Drgania parametryczne jednostopniowej przekładni zębatej*, Rozpr. Inż., **20**, 1, 3-17, 1972.
8. M. HORTEL, *Über nichtlineare parametrische Probleme in einer Klasse von Getriebesystemen mit kinematischen Bindungen*, Abh. Akad. Wiss. DDR, **5**, 485-494, 1977.
9. J. KAZUNORI, H. FUJIO, *Dynamic behavior of heavy loaded spur gears*, Trans. ASME, J. Eng. for Industry **B96**, 373-381, 1974.
10. S. MAHALINGAM, R. E. D. BISHOP, *Dynamic loading of gear teeth*, Journ. Sound and. Vibr. **36**, 2, 179-189, 1974.
11. H. RETTIG, *Innere dynamische Zusatzkräfte bei Zahnradgetrieben*. Antriebstechnik **16**, 11, 655-658, 661-663, 612, 1977.
12. A. SEIREG, S. C. SHAH, K. KHAZEKHAH, *Dynamic stresses in gear teeth under conditions of sustained oscillations through the backlash*, World Congr. Theory Mach. a. Mech., Univ. Newcastle upon Tyne, London., 205-208, 1975.
13. T. TOBE, K. SATO, N. TAKATSU, *Statistical analysis of dynamic loads on spur gear teeth. Effect of shaft stiffness*, Bull. ISME, **19**, 133, 803-813, 1976.
14. T. TOBE, N. TAKATSU, *Dynamic loads on spur gear teeth caused by teeth impact*, Bull. ISME, **16**, 96, 1031-1037, 1973.
15. G. V. TORDION, R. GAUVIN, *Dynamic stability of a two-stage gear train under the influence of variable meshing stiffnesses*, Trans. ASME, Journ. Eng. for Industry **B99**, 3, 785-791, 1977.
16. S. M. WANG, J. E. MORSE Jr., *Torsional response of a gear train system*, Trans. ASME, Journ. Eng. for Industry, **B94**, 2, 91-101, 1972.
17. V. ZEMAN, *Dynamické zatižení čelních ozubených převodu*, Strojirenstvi, **2**, 65-73, 1971.

Резюме

ДИНАМИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ
С УЧЕТОМ СОУДАРЕНИЙ ЗУБЬЕВ

Погрешности профиля зубьев и шага вызывают соударения каждой пары при входе в зацепление. Статья содержит динамический анализ зубчатой, цилиндрической передачи с учетом соударений, которые рассматривают как мгновенные процессы. Их интенсивность характеризуется с помощью коэффициента восстановления. При таком подходе мгновенные скачки угловой скорости колес, вызываемые соударениями, определяются с помощью принципа момента количества движения. Выведено условие тихой работы передачи (т. е. без размыкания профилей зубьев) и изучено влияние коэффициента восстановления на области беспокойного режима работы. Величина этих областей сильно зависит от общей упругой податливости передачи.

SUMMARY

PARAMETRIC VIBRATIONS OF GEAR TRANSMISSIONS, TEETH COLLISIONS BEING
TAKEN INTO ACCOUNT

Teeth profile and pitch errors lead to the phenomenon of impact accompanying the process of entering of each pair of teeth into contact. The paper contains the analysis of dynamics of toothed gears, the inter-teeth collisions being treated as instantaneous processes. Their intensity is characterized by the restitution coefficients. Following this approach the instantaneous angular velocity changes of the gears caused by the collisions are calculated by means of the angular momentum principle. The condition of smooth running of the gear (continuous contact of the teeth) is derived, and the effect of the restitution coefficient on the rough running regions is investigated. Size of the regions depends on the general elastic characteristics of the gear.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
INSTYTUT MASZYN I URZĄDZEŃ ENERGETYCZNYCH, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 kwietnia 1979 r.