

JERZY ZAWADZKI

CISNIENIE ZREDUKOWANE  
JAKO JEDEN Z PARAMETRÓW WYŁĘŻENIA  
(PRZYROST WŁAŚCIWEJ ENERGII SWOBODNEJ JAKO MIARA WYŁĘŻENIA)

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
LXXIII

## SPIS TREŚCI

	Str.
<b>1. Wstęp</b>	359
<b>2. Uwagi dotyczące opisu stanu naprężenia i odkształcenia</b>	360
2.1. Wielkości charakteryzujące stan naprężenia i odkształcenia	360
2.2. Naprężenia oktaedryczne	362
2.3. Prawo odkształcenia ciał liniowo sprężystych	362
2.4. Właściwa energia potencjalna sił sprężystości $\Delta$	363
<b>3. Analiza wstępna równania stanu ciała stałego</b>	364
3.1. Wiriał Clausiusa	364
3.2. Średni potencjał układu	365
3.3. Drgania atomów. Energia drgań $E_h$	366
3.4. Równania stanu ciała stałego	369
<b>4. Stan elasto-plastyczny i stan kruchy materiału</b>	369
<b>5. Hipoteza autora</b>	371
<b>6. Rozwinięcie hipotezy autora</b>	377
6.1. Alternatywa pierwsza	377
6.2. Alternatywa druga	382
<b>7. Ogólna analiza zmienności współczynnika granicznej pojemności energetycznej jako funkcji podstawowych parametrów stanu</b>	388

## 1. Wstęp

Praca niniejsza ma na celu podanie stosowalnej hipotezy wyteżenia, opierającej się na podstawowych założeniach i prawach teorii ciała stałego.

W praktyce konstrukcyjnej spotykamy się na ogół ze złożonym stanem naprężenia i odkształcenia, najprostszą zaś do wykonania próbą wytrzymałości (wraz z pomiarem naprężeń dopuszczalnych) jest próba prostego rozciągania. Jest zatem rzeczą celową określenie kryteriów porównawczych dowolnego złożonego stanu naprężenia i odkształcenia ze stanem prostego rozciągania o naprężeniu zastępczym, nie większym od naprężenia dopuszczalnego ([5], [16], [17], [22], [23], [28], [33], [44]).

O celowości i potrzebie prowadzenia pracy naukowo-badawczej w dziedzinie wyteżenia świadczy kilkuwiekowy dorobek na tym polu wielkiej liczby pracowników nauki. Nauka polska ma poważne wyniki w tej dziedzinie. Prace M. T. H u b e r a oraz osiągnięcia jego uczniów stanowią cenny wkład naszych pracowników nauki do ogólnego dorobku w zakresie wyteżenia ([3], [5], [17], [18], [22], [23], [34], [45], [46], [69], [74]).

W ostatnich dwu dziesiątkach lat zaznaczył się duży postęp w pracach fizyków-teoretyków ciała stałego, w szczególności rozwinęła się fizyka metali, której zagadnienia nie mogą być obce również dla inżyniera interesującego się zagadnieniami naukowymi. Wymienimy tu choćby tylko prace Seitza, Borna, Smekala, Taylora, Hume-Rothery'ego, Frenkla, Joffego i innych ([3], [7], [16], [29], [30], [38], [51], [52], [53], [54], [60], [61]).

Równocześnie powstawały nowe hipotezy wyteżeniowe, opracowane np. przez Dawidienkova-Fridmana, Użika, Schnätdta, Pełczyńskiego, Bodaszewskiego i innych ([3], [16], [21], [25], [34], [42], [43], [46]).

Zanim przejdziemy do przedstawienia podstawowych tez hipotezy i jej szczegółowego zreferowania, omówimy najpierw pewne ogólne zagadnienia teoretyczne, z których skorzystamy przy formułowaniu hipotezy. Ograniczamy się przy tym do przypomnienia ogólnych wiadomości i zestawienia wzorów w celu ustalenia terminologii i oznaczeń związanych z hipotezą wyteżenia.

W zależności od metod i dróg użytych do opracowania rozróżniamy hipotezy: (1) naprężeniowe, (2) odkształceniowe i (3) energetyczne (do nich zaliczamy też hipotezy molekularne oparte zasadniczo na rozważaniach energetycznych).

Przegląd historyczny hipotez podaje Burzyński w pracy [17].

Hipoteza przedstawiona w niniejszej pracy, oparta na podstawowych założeniach i prawach teorii ciała stałego, należy do grupy hipotez energetycznych. Ograniczamy się przy tym do ciał polikrystalicznych, krystalizujących w układzie regularnym, podlegających prawu Hooke'a. Hipoteza może być jednak stosowana również dla układów płasko- i przestrzenno-centrycznych. Może mieć zastosowanie do wielu materiałów technicznych.

Dzięki swej szczególnej postaci energetycznej hipoteza może być rozszerzona przez uwzględnienie innych związków teorii sprężystości oraz drogą analizy równań teorii ciała stałego dla różnych modeli ciał rzeczywistych z uwzględnieniem ponadto zmian entropii, czyli ogólnie mówiąc zmian energii swobodnej układu przy obciążeniu go siłami. W szczególności metoda może znaleźć zastosowanie dla tworzyw sztucznych (polimerów), dla których uwzględnienie zmian entropii przy obciążeniu jest szczególnie konieczne.

## 2. Uwagi dotyczące opisu stanu naprężenia i odkształcenia

**2.1. Wielkości charakteryzujące stan naprężenia i odkształcenia.** Stan naprężenia lub odkształcenia wewnątrz ciała w każdym jego punkcie wyznaczony jest jednoznacznie przez sześć składowych (przy założeniu spełnienia aksjomatu Boltzmanna w stanie równowagi wewnętrznej  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  itd.), które w układzie prostokątnym współrzędnych  $0, x, y, z$  (rys. 1) oznaczamy odpowiednio symbolami  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  oraz  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ . Wygodnie jest przy tym posłużyć się pojęciem tensora, ([73], [75], [76], [77]). Stan naprężenia określa jednoznacznie tensor

$$(2.1) \quad T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Podobnie stan odkształcenia określa jednoznacznie tensor odkształcenia

$$(2.2) \quad T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że tensor odkształcenia można rozłożyć w następujący sposób:

$$(2.3) \quad T_\varepsilon = T_\varepsilon^0 + D_\varepsilon,$$

gdzie

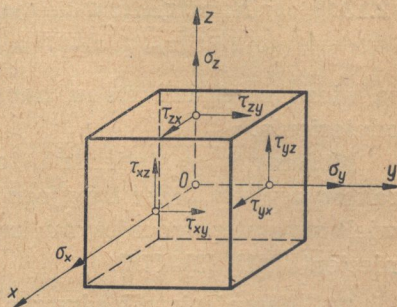
$$(2.4) \quad T_\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{sr} \end{bmatrix}$$

jest tensorem odkształcenia czysto objętościowego,

$$(2.5) \quad \varepsilon_{sr} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$$

średnim wydłużeniem właściwym, zaś

$$(2.6) \quad D_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{sr} \end{bmatrix}$$



Rys. 1

tensorem odkształcenia czysto postaciowego (dewiatorem odkształcenia).

Podobnie tensor naprężenia można rozłożyć na składniki:

$$(2.7) \quad T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma.$$

Występujące w tym wzorze symbole oznaczają odpowiednio

$$(2.8) \quad T_\sigma^0 = \begin{bmatrix} \sigma_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{sr} \end{bmatrix},$$

$$(2.9) \quad \sigma_{sr} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3},$$

$$(2.10) \quad D_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{sr} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{sr} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{sr} \end{bmatrix}.$$

Jak wiemy, wartości główne naprężeń  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  możemy wyznaczyć z tzw. równania wiekowego stanu naprężenia

$$(2.11) \quad \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie to po rozwiązaniu przyjmuje postać

$$(2.12) \quad \sigma^3 - N_1 \sigma^2 + N_2 \sigma - N_3 = 0,$$

gdzie

$$(2.13.1) \quad N_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$(2.13.2) \quad N_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix},$$

$$(2.13.3) \quad N_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

są niezmiennikami stanu naprężenia niezależnie od przyjętego układu odniesienia.

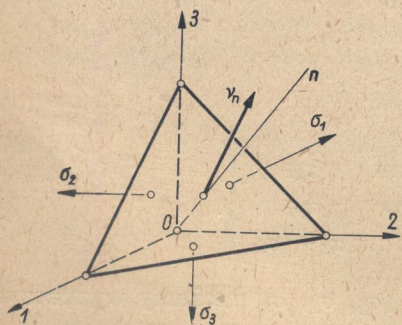
Możemy więc stwierdzić, że stan naprężenia jest jednoznacznie scharakteryzowany przez trzy jego niezmienniki, naprężenia zaś są zasadniczo wielkościami pomocniczymi, związanymi z przyjętymi osiami układu odniesienia, [1], [3], [76].

**2.2. Naprężenia oktaedryczne.** Naprężenia  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  wyznaczone na ściankach oktaedru (rys. 2), zbudowanego na osiach głównych naprężeń  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , nazywamy naprężeniami oktaedrycznymi. Mamy przy tym

$$(2.14) \quad \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{N_1^\sigma}{3},$$

$$(2.15) \quad \tau_n = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \frac{2}{3} N_2^{D\sigma},$$

gdzie  $N_2^{D\sigma}$  jest drugim niezmiennikiem dewiatora stanu naprężenia.



Rys. 2

Iljuszin, [7], wykazał, że

$$(2.16) \quad 0,941 > \frac{\tau_n}{\tau_{max}} > 0,816.$$

We wzorze tym  $\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_{max} - \sigma_{min})$  jest maksymalnym naprężeniem stycznym danego stanu naprężenia.

**2.3. Prawo odkształcenia ciał liniowo sprężystych.** Przypisując ciału rzeczywistemu cechy układu Clapeyrona otrzymamy związek między składowymi stanu odkształcenia i naprężenia w najogólniejszej postaci, zwanej uogólnionym prawem Hooke'a:

$$(2.17) \quad \varepsilon_i = \sum_{k=1}^{k=6} \alpha_{ik} \sigma_k;$$

$\varepsilon_i$  jest składową stanu odkształcenia, a  $\sigma_k$  składową stanu naprężenia.

W związku z istnieniem potencjału sił sprężystości wyprowadzamy związek między modułami sprężystości, zwany zasadą **M a x w e l l a**:

$$(2.18) \quad \alpha_{ik} = \alpha_{ki}.$$

W miarę wzrostu symetrii układu krystalicznego ilość modułów  $\alpha_{ik}$  redukuje się i wynosi dla układu regularnego trzy niezależne moduły. Ograniczając się do materiałów technicznie ważnych, charakteryzujących się izotropią makroskopową, dochodzimy w praktyce do dwu niezależnych modułów: (1) modułu sprężystości podłużnej **Y o u n g a**,  $E$  kG/mm<sup>2</sup>, i (2) stałej **P o i s s o n a**,  $\nu$ .

Odpowiednie przekształcenie prawa **H o o k e**'a przy takich założeniach daje wzór na prawo odkształcenia czysto objętościowego

$$(2.19) \quad T_\sigma^0 = 3 K T_\varepsilon^0$$

oraz wzór na prawo odkształcenia czysto postaciowego

$$(2.20) \quad D_\sigma = 2 G D_\varepsilon,$$

gdzie

$$(2.21) \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

jest modułem sprężystości objętościowej, a

$$(2.22) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

modułem sprężystości poprzecznej **K i r c h h o f f a**.

**2.4. Właściwa energia potencjalna sił sprężystości  $\Lambda$ .** Nie trudno stwierdzić na podstawie uwag podanych poprzednio, że właściwą energię potencjalną sił sprężystości określa wzór

$$(2.23) \quad 2 \Lambda = T_\sigma T_\varepsilon.$$

Stosując prawa algebry tensorów piszemy

$$(2.24) \quad 2 \Lambda = (T_\sigma^0 + D_\sigma)(T_\varepsilon^0 + D_\varepsilon) = T_\sigma^0 T_\varepsilon^0 + D_\sigma D_\varepsilon.$$

Uwzględniając prawa odkształcenia (2.19) i (2.20) otrzymujemy wzór na energię właściwą odkształcenia czysto objętościowego

$$(2.25) \quad \Lambda_\sigma = \frac{1}{2} T_\sigma^0 T_\varepsilon^0 = \frac{1}{6K} (T_\sigma^0)^2$$

oraz wzór na energię właściwą odkształcenia czysto postaciowego

$$(2.26) \quad A_p = \frac{1}{2} D_\sigma D_\epsilon = \frac{1}{4G} (D_\sigma)^2.$$

Możliwość takiego rozkładu energii  $A$  na  $A_\sigma$  i  $A_p$  wykazał Stokes, a nieco później Helmholtz.

Funkcja  $A$ , czyli energia potencjalna wewnętrznych sił sprężystości, spełnia podobną rolę jak w teorii pola potencjalnego funkcja sił różniąc się od potencjału jedynie znakiem. Często więc zamiast mówić o energii potencjalnej wewnętrznych sił sprężystości pamiętając o zasadniczej różnicy mówimy krótko o potencjale sprężystym ([1], [2], [3], [5]).

Należy ponadto wyodrębnić potencjał adiabatyczny lub izotermiczny, różniące się w praktyce bardzo nieznacznie wartościami stałych sprężystości (np.  $E_a > E_i$ ).

### 3. Analiza wstępna równania stanu ciała stałego

**3.1. Wiriał Clausiusa.** Wychodząc z dynamicznych równań ruchu atomu, określając średnią wartość w przedziale czasu  $\tau$  wielkości mechanicznych, występujących w tych równaniach, oraz przeprowadzając sumowanie dla całego układu otrzymujemy znany wzór Clausiusa, [60],

$$(3.1) \quad \sum \overline{\frac{1}{2} \mu c^2} = -\frac{1}{2} \sum \overline{(xX + yY + zZ)},$$

gdzie  $\mu$  jest masą atomu,  $x, y, z$  współrzędnymi masy atomu,  $X, Y, Z$  współrzędnymi sił działających na atomy i  $c$  prędkością atomu.

Lewa strona równania przedstawia średnią energię kinetyczną układu, prawa zaś tzw. średni wiriał sił działających, zależny od sił działających i położenia atomów.

Przyjmijmy (co jest szczególnie ważne dla niniejszej pracy), że siły pochodzą od wzajemnego oddziaływania atomów oraz od równomiernie rozłożonego ciśnienia zewnętrznego.

**3.1.1.** Załóżmy zgodnie z modelem Borna (rys. 3), że siły wzajemnego oddziaływania atomów są zależne od odległości tych atomów i działają wzdłuż linii łączących atomy. Obliczając wiriał sił między dwoma atomami (por. rys. 4) otrzymujemy

$$(3.2) \quad -\frac{1}{2} \frac{F(r)}{r} \left[ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right] = -\frac{1}{2} F(r)r.$$

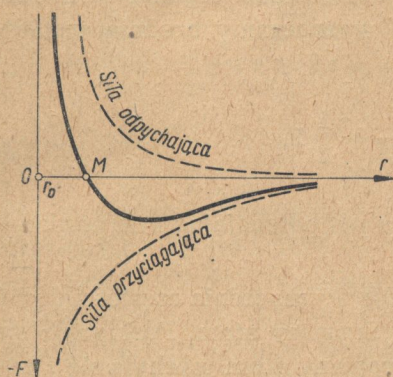
Dla całego układu średnia wartość wiriału sił wynosi

$$(3.3) \quad W_a = -\frac{1}{2} \sum \overline{r F(r)}.$$

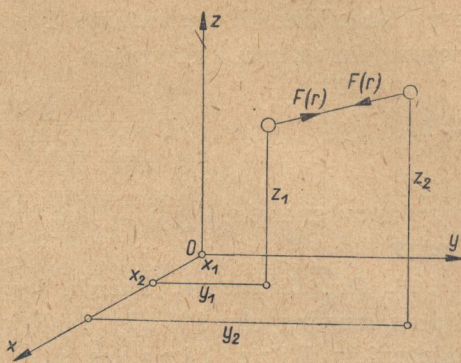


3.1.2. Określając przez  $l$ ,  $m$  i  $n$  dostawy kierunkowe elementu powierzchni  $dA$  otrzymamy odpowiednie współrzędne elementarnej siły powierzchniowej

$$(3.4) \quad \bar{X} = -l p dA, \quad \bar{Y} = -m p dA, \quad \bar{Z} = -n p dA.$$



Rys. 3



Rys. 4

Wiriał tych sił wynosi dla całej powierzchni

$$(3.5) \quad W_0 = \frac{3}{2} p V,$$

gdzie  $V$  jest objętością.

Uwzględniając równocześnie przypadki 3.1.1 i 3.1.2 i podstawiając odpowiednie wyrażenia do równania Clausiusa otrzymamy

$$(3.6) \quad \overline{\sum \mu c^2} = \overline{\sum r F(r)} + 3 p V.$$

3.2. Średni potencjał układu. Dla przyjętego modelu (por. p. 1) potencjał układu dwu atomów (bez uwzględnienia drgań atomów około średnich położen) przedstawia równanie ([6], [51]-[55], [57]-[60], [67])

$$(3.7) \quad U(r) = -\frac{a}{r^m} + \frac{b}{r^n},$$

gdzie  $a$  i  $b$  są współczynnikami,  $m$  i  $n$  odpowiednimi wykładnikami potęgowymi związanymi nierównością  $n > m$ , ponieważ zgodnie z modelem Born'a siły odpychania wzrastają szybciej niż siły przyciągania, co przedstawia wzór

$$(3.8) \quad F(r) = -\frac{dU}{dr} = -\frac{ma}{r^{m+1}} + \frac{nb}{r^{n+1}}.$$

Potencjał jednego gram-atomu przedstawimy więc równaniem

$$(3.9) \quad U_0(V_0) = -\frac{A}{\sqrt[3]{V_0^m}} + \frac{B}{\sqrt[3]{V_0^n}},$$

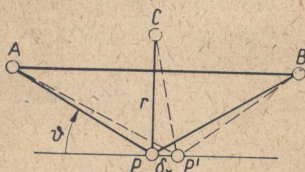
gdzie  $A$  i  $B$  są współczynnikami charakteryzującymi cechy układu,  $V_0 = N_0 r_0^3$  objętością gram-atому,  $N_0$  liczbą atomów w  $V_0$  i  $r_0$  odległością dwu atomów w położeniu równowagi.

Uwzględniając ponadto drgania atomów około ich średnich położeń  $r_0$  i zakładając, że są to nie zanikające harmoniczne drgania termiczne przy określonej temperaturze  $T = \text{const}$ , wyznaczamy średnią wartość potencjału układu z równania

$$(3.10) \quad \bar{U} = -\frac{A}{\sqrt[3]{V^m}} + \frac{B}{\sqrt[3]{V^n}} + \frac{1}{2} E_h,$$

przy czym energia drgań  $E_h$  jest średnio na pół potencjalna i na pół kinetyczna.

**3.3. Drgania atomów. Energia drgań  $E_h$ .** Dla wyznaczenia częstości drgań atomu musimy określić siły działające na drgający atom. Posługując się założeniem Einsteina, że tylko obserwowany atom wychyla się z położenia równowagi (por. rys. 5), otrzymamy po przeprowadzeniu odpowiednich rozważań i przekształceń wzór na siłę  $D \delta x$  działającą na atom w kierunku  $\delta x$ :



Rys. 5

$$(3.11) \quad D \delta x = 2 \delta x \left[ \frac{a \varphi(m)}{\bar{r}^{m+2}} + \frac{b \varphi(n)}{\bar{r}^{n+2}} \right],$$

przy czym  $a$  i  $b$  są współczynnikami (por. 3.8),  $m$  i  $n$  wykładnikami,  $\bar{r}$  odległością między średnimi położeniami dwu sąsiednich atomów siatki,  $\varphi(m)$  i  $\varphi(n)$  charakterystycznymi funkcjami położenia atomów siatki.

Ostatecznie otrzymujemy

$$(3.12) \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\mu}}.$$

Oznaczmy

$$(3.13) \quad D = D_n - D_m,$$

gdzie  $D_n$  jest siłą odpychania, a  $D_m$  siłą przyciągania przy drganiu.

Dla wyznaczenia zmian częstości w zależności od objętości określimy

$$(3.14) \quad \gamma = -\frac{d \ln \nu}{d \ln V}.$$

Wykorzystując wzory (3.11) i (3.13) otrzymamy po przekształceniach

$$(3.14.1) \quad \gamma = -\frac{d \ln \nu}{d \ln V} = \frac{1}{6} \left[ \frac{(n+2) D_n - (m+2) D_m}{D} \right].$$

Zauważmy, że przy małych zmianach objętości  $V$  wielkość  $\gamma$  zmienia się znikomo mało, a ponadto przy  $n > m$  i przeważającym wpływie sił odpychania możemy napisać według Grüneisena

$$(3.14.2) \quad \gamma \approx \frac{n+2}{6}.$$

Współczynnik  $\gamma$  możemy wyznaczyć doświadczalnie, posługując się tzw. prawem Grüneisena

$$(3.15) \quad \gamma = \frac{1}{C_v} \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{k},$$

wypływającym z równania stanu ciała stałego (3.24) przy odpowiednich założeniach.  $C_v$  jest ciepłem właściwym atomowym,  $k$  współczynnikiem ściśliwości,  $(\partial V/\partial T)_p$  współczynnikiem rozszerzalności cieplnej.

Zakładając, że drgania atomów są to nie zanikające harmoniczne drgania termiczne przy określonej temperaturze, wyznaczmy energię drgań ze wzoru

$$(3.16) \quad E_h = \int_0^T C_v dT.$$

Opierając się na teorii kwantów możemy napisać za Einsteinem wzór na energię drgań atomów w gram-atomie ([60], [80])

$$(3.17) \quad E_h = 3RT \frac{x}{e^x - 1},$$

gdzie  $x$  równa się  $h\nu_{max}/\kappa T$ ,  $R$  występuje jako stała gazowa i równa się  $8,314 \cdot 10^7$  [erg/°C],  $h$  jest stałą Plancka równą  $6,55 \cdot 10^{-27}$  [erg·sek],  $\kappa$  zaś stałą Boltzmana i równą  $1,347 \cdot 10^{-16}$  [erg/°C]. Stąd, ponieważ  $dE_h = C_v dT$ ,

$$(3.18) \quad C_v = \frac{dE_h}{dT} = 3R \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$$

lub oznaczając

$$\Theta = \frac{h\nu_{max}}{\kappa}$$

napiszemy tzw. formułę Einsteina dla ciepła właściwego

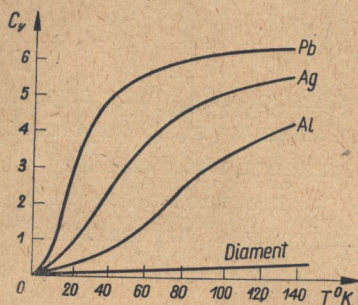
$$(3.19) \quad C_v = 3R \frac{\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 e^{\Theta/T}}{(e^{\Theta/T} - 1)^2}.$$

Różni się ona od prostszego w formie, lecz mniej dokładnego prawa Dulonga-Petite'a, które stwierdza, że ciepło właściwe atomowe jest jednakowe dla wszystkich ciał i wynosi 5,96 cal/°C:

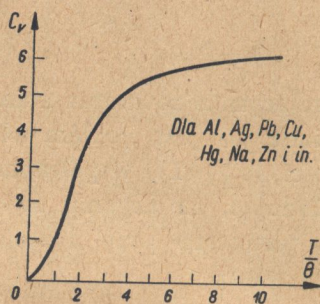
$$(3.20) \quad C_v = 3R = 5,96 \text{ cal/°C}.$$

Zauważmy jednak, że

- (1) przy normalnych i wysokich temperaturach  $C_v$  zbliża się do wartości  $3R$ ,
- (2) przy niskich temperaturach  $C_v < 3R$  i przy  $T \rightarrow 0$ ,  $C_v \rightarrow 0$ ,
- (3) w zakresie temperatur bliskich bezwzględne zera jest  $C_v \approx T^3$  (prawo Debye) i wreszcie
- (4) krzywe  $C_v$  są podobnego kształtu i mogą być sprowadzone do jednej przez odpowiednią zmianę skali temperatur.



Rys. 6



Rys. 4

Rysunek 7 oraz tablice 1 i 2 podane przez Schrödingera dla materiałów krystalizujących w układzie regularnym przedstawiają odpowiednie wartości  $C_v$  i  $\theta$  dla różnych temperatur, [60].

Tablica 1

Materiał	$\theta^\circ K$	
	Według danych $C_v$	Według danych stałych sprężystości
Pb	88	75
Ag	215	220
Cu	315	341
Al	398	413
Fe	453	484

Tablica 2

Materiał	Układ krystaliczny	Zakres temperatur $^\circ K$	$\theta^\circ K$
Pb	regularny	14-573	88
Hg	regularny	31-232	96
Ag	regularny	35-873	215
Fe	regularny	32- 95	453
Cu	regularny	14-773	315
Al	regularny	19-773	398

**3.4. Równanie stanu ciała stałego.** Przekształćmy teraz odpowiednio równanie (3.6). Wyrażenie  $\Sigma \mu c^2$  przedstawia podwójną energię kinetyczną układu, czyli równa się energii drgań atomów (na pół potencjalnej i kinetycznej).

Wykorzystując równania (3.8), (3.10) i (3.13) wyznaczamy wartość średnią wiriału sił międzyatomowych

$$(3.21) \quad \Sigma r \overline{F(r)} = -m \frac{A}{\sqrt[3]{V^m}} + n \frac{B}{\sqrt[3]{V^n}} + \frac{n D_n - m D_m}{2D} E_h.$$

Wstawiając to wyrażenie do równania Clausiusa otrzymamy

$$(3.22) \quad pV + \frac{m}{3} \frac{A}{\sqrt[3]{V^m}} - \frac{n}{3} \frac{B}{\sqrt[3]{V^n}} = \gamma E_h.$$

Wyrażenie  $G(V)$  określamy jako

$$(3.23) \quad G(V) = V \frac{d}{dV} U_0(V) = \frac{1}{3} \left( m \frac{A}{\sqrt[3]{V^m}} - n \frac{B}{\sqrt[3]{V^n}} \right).$$

Ostatecznie więc otrzymujemy równanie stanu ciała stałego

$$(3.24) \quad pV + G(V) = \gamma E_h.$$

#### 4. Stan elasto-plastyczny i stan kruchy materiału<sup>1</sup>

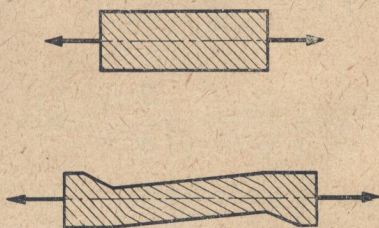
Ogólny przegląd prac teoretycznych i doświadczalnych doprowadza do wniosku, iż stosowany dawniej przez wielu autorów podział materiałów na tzw. elasto-plastyczne i kruche nie jest słuszny w swej istocie ([3], [7], [12], [15]-[17], [19]-[22], [25]-[31], [34]-[47], [51]-[54], [62], [66], [71], [72]) możemy bowiem mówić o stanie elasto-plastycznym lub elasto-kruchym tego samego materiału.

Występowanie tych stanów jest zależne nie tylko od budowy i własności fizykalnych materiału, ale też od stanu naprężenia, ciśnienia i temperatury początkowej, szybkości odkształcania się, koncentracji naprężeń itp.

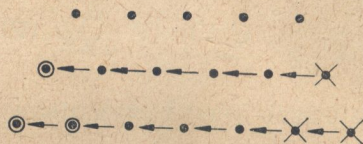
Stan plastyczny jest zawsze poprzedzony odkształceniem sprężystym, choćby w bardzo wąskim zakresie obciążeń. Stan plastyczny charakteryzuje wzrost odkształceń przy nie rosnącym obciążeniu. Wzrost odkształceń plastycznych ograniczony jest zjawiskiem wzmocnienia, konsolidacji. Odkształcenie plastyczne składa się z przesunięć (w określonych płaszczyznach krystalicznych i kierunkach), obrotów pakietów (części) siatki krystalicznej oraz odkształceń ich postaci (rys. 8 i 9).

<sup>1</sup> Por. np. [3], [7], [12].

Istnieje wiele teorii popartych w mniejszym lub większym stopniu doświadczeniami o istocie i mechanizmie odkształceń plastycznych. Ograniczymy się tu do ogólnego stwierdzenia możliwości wystąpienia w określonych sprzyjających warunkach odkształceń plastycznych. Zauważmy prócz tego, że atom przeskakując przy odkształceniach plastycznych w nowe położenie równowagi chwilowej w siatce krystalicznej musi przekroczyć określoną barierę energetyczną (rys. 9). To nowe położenie może być położeniem równowagi chwiejnej (odkształcenie plastyczne trwa) lub stałej (konsolidacja), zaś przekroczenie bariery energetycznej jest tym łatwiejsze, im jest ona niższa oraz im większą energię drgań posiada atom czy też cząsteczka. Jest to zupełnie zrozumiałe na podstawie znanych kryteriów równowagi *Mindinga-Dirichleta*.



Rys. 8



Rys. 9

Zauważmy, że plastycznie odkształcony materiał krystaliczny zmienia wiele swych cech, jak np. wzrasta w nim odporność na odkształcenie (konsolidacja), zmienia się opór elektryczny, własności magnetyczne, rośnie skłonność do korozji itp. Materiał jest termodynamicznie metastabilny i dla przejścia w stan równowagi stałej należy mu udzielić pewnej dawki tzw. «energii aktywacji» drogą np. wstrząsów lub «odpuszczania» (podgrzania), co sprzyja m. in. zmniejszeniu tzw. naprężeń drugiego i trzeciego rodzaju (jak je określa *Dawidienko*, [21], [62]), wynikłych ze sprężystych odkształceń kryształów ciała polikrystalicznego oraz z defektów siatki krystalicznej.

Zdarza się jednak, iż brak jest warunków sprzyjających odkształceniom plastycznym po pewnym określonym zakresie odkształceń sprężystych. Dalszy wzrost obciążenia musi wówczas spowodować nagły (bez widocznych na ogół odkształceń trwałych) złom rozdzielnicy, mianowicie tzw. złom kruchy. To zjawisko różni się od zerwania spowodowanego przekroczeniem sił spójności i poprzedzonego odkształceniami plastycznymi konsolidacją oraz zjawiskiem wyraźnych zmian postaci przed chwilą złomu (zjawiskiem «szyjki»).

Stwierdzamy więc, że w zależności od materiału, stanu naprężenia i jego parametrów (ciśnienia i temperatury początkowej, szybkości odkształcania się itp.) może wystąpić albo

(1) stan odkształcenia plastycznego po przekroczeniu określonego zakresu odkształceń sprężystych albo

(2) złom kruchy bez widocznych odkształceń trwałych.

Oba zjawiska są oczywiście niebezpieczne dla elementu konstrukcyjnego. Należy więc przyjąć, że obciążenia wywołujące te zjawiska są ostateczną granicą obciążenia (przy zastosowaniu odpowiedniego współczynnika bezpieczeństwa).

### 5. Hipoteza autora

W punkcie 2 stwierdziliśmy, że właściwa energia wewnętrzna sił sprężystości, mierzona od tzw. stanu początkowego (nieodkształconego) przy określonych początkowych parametrach stanu  $T_0$  i  $p_0$  jest dla ciał liniowo sprężystych kwadratową jednorodną funkcją składowych stanu naprężenia (bez uwzględnienia przyrostu energii wewnętrznej, spowodowanego doprowadzeniem lub odprowadzeniem ciepła, czyli przy założeniu procesu adiabatycznego  $\delta Q = 0$ ) i wyraża się wzorem

$$(5.1) \quad \Lambda = \frac{1}{6K} (T_\sigma^0)^2 + \frac{1}{4G} (D_\sigma)^2$$

lub

$$(5.2) \quad \Lambda = A \tau_n^2 + B \sigma_n^2,$$

gdzie  $B = 1/2K$  oraz  $A = 3/4G$ .

Zgodnie z równaniem stanu ciała stałego (3.24) zauważymy, że przy wzroście ciśnienia  $p$ , czyli, innymi słowy, naprężenia średniego (lub też naprężenia oktaedrycznego normalnego),  $\sigma_n = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ , występuje nie tylko zmiana objętości (tj. zmiana odległości pomiędzy średnimi położeniami cząsteczek lub atomów w węzłach siatki krystalicznej, określająca zmianę energii potencjalnej położenia cząsteczek), ale też zmiana energii drgań atomów oraz współczynnika  $\gamma$ . Skłonność materiału do zmian objętości określa współczynnik ścisłości  $k$ , lub moduł sprężystości objętościowej  $K = E/3(1 - 2\nu)$ .

Dalej omówimy tę sprawę dokładniej, na razie ograniczymy się do ogólnych wniosków, na których opiera się nowa hipoteza wyteżenia.

Zmiana energii drgań atomów, dokładniej jej wzrost (zatem w szczególności wzrost amplitudy drgań) sprzyja przekroczeniu przez atom lub cząsteczkę bariery energetycznej (por. p. 4), a więc odkształceniom plastycznym ([52], [53], [60], [62]).

Uwagi ogólne, podane wyżej, prowadzą do wniosku, że przy ustaleniu hipotezy przyjmującej za miarę wyteżenia materiału graniczną wartość pojemności energetycznej należy uwzględnić fakt, iż pewna część energii wewnętrznej sił sprężystości magazynowana wewnątrz ciała wskutek działania sił zewnętrznych, mianowicie przyrostu energii drgań atomów,

nie będąc bezpośrednio miarą wyżezenia materiału sprzyja przekroczeniu granicznej pojemności energetycznej przez wystąpienie odkształceń plastycznych.

Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki

$$(5.3) \quad \delta A_w = \delta L + \delta Q,$$

gdzie  $\delta L$  oznacza pracę sił zewnętrznych, a  $\delta Q$  ilość doprowadzonego ciepła (przy czym według założenia  $\delta Q = 0$ ).

Wprowadzając pojęcie tzw. energii swobodnej otrzymujemy

$$(5.4) \quad A = A_w - TS$$

lub

$$(5.5) \quad \delta A = \delta A_w - T\delta S - S\delta T.$$

Zakładając przemianę izentropową zgodnie z założeniami przedstawionymi w p. 1 w odniesieniu do przyjętego modelu (ciała polikrystalicznego, krystalizującego w układzie regularnym itd.) otrzymujemy

$$(5.6) \quad \delta A = \delta A_w - S\delta T.$$

Energia wewnętrzna  $\delta A_w$  jak już wspomnieliśmy, składa się z dwu części:

$$(5.7) \quad \delta A_w = \delta A + \delta A_d,$$

gdzie  $\delta A$  oznacza energię potencjalną (energię położenia atomów), a  $\delta A_d$  energię kinetyczną atomów, przedstawiającą oczywiście część kinetyczną energii drgań atomów

$$(5.8) \quad \delta A_d = S\delta T.$$

Zauważmy, że we wspomnianym drugim etapie przedstawienia hipotezy równanie (5.5) będzie uwzględniane w swej pełnej postaci, ponieważ założenia tego etapu pracy wymagają uwzględnienia zmian entropii układu.

Określmy przyrost energii drgań  $A_d$  wzorem

$$(5.9) \quad A_d = C\sigma_d^2,$$

gdzie  $\sigma_d$  oznacza «ciśnienie zredukowane».

Otrzymamy wówczas najogólniejszy wzór dla naszej hipotezy

$$(5.10) \quad A\tau_n^2 + B\sigma_n^2 - C\sigma_d^2 = K_e^2,$$

gdzie  $K_e^2$  jest wartością graniczną przyrostu energii swobodnej dla jednego z podstawowych stanów, np. dla prostego rozciągania.

Ze względu na to, iż wartość przyrostu energii  $A_d$  jest zależna od ciśnienia  $p = -\sigma_n$ , słuszną rzeczą wydaje się określenie jej wzorem ogólnej postaci

$$(5.11) \quad A_d = C\sigma_d^2 = \pi_g f(\sigma_n).$$



Dla wyznaczenia funkcyjnej zależności  $\Delta_d$  od  $\sigma_n$  przeprowadźmy dyskusję równania stanu ciała stałego (3.24). Przy obliczaniu energii potencjalnej sił sprężystości posługujemy się wielkościami odniesionymi do jednostki objętości, tzw. energią właściwą. Załóżmy, iż przy ciśnieniu  $p$  występuje zmiana objętości  $V_1 = V$  na  $V_2 = V + d(\Delta V)$ , gdzie  $\Delta V$  jest końcową zmianą objętości ciała przy zmianie ciśnienia od  $p_0$  do  $p$ . Mamy

$$(5.12) \quad \begin{cases} pV_1 + G(V_1) = \gamma_1 E_{h_1}, \\ pV_2 + G(V_2) = \gamma_2 E_{h_2}, \end{cases}$$

a stąd

$$(5.13) \quad pd(\Delta V) + [G(V_2) - G(V_1)] = \gamma_2 E_{h_2} - \gamma_1 E_{h_1}.$$

Przyjmując z praktycznie wystarczającą dokładnością  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  oraz  $G(V_2) - G(V_1) = dG(V)$  i dzieląc obie strony powyższego równania przez  $V_0$  napiszemy

$$(5.14) \quad p \frac{d(\Delta V)}{V_0} + \frac{dG(V)}{V_0} = \frac{\gamma(E_{h_2} - E_{h_1})}{V_0}.$$

Wyrażenie  $E_{h_2} - E_{h_1}/V_0$  przedstawia oczywiście przyrost energii drgań atomów na jednostkę objętości; stąd

$$(5.15) \quad d\Delta_d = \frac{E_{h_2} - E_{h_1}}{V_0}$$

lub

$$(5.15.1) \quad d\Delta_d = \frac{1}{\gamma} p \frac{d(\Delta V)}{V_0} + \frac{1}{\gamma} \frac{dG(V)}{V_0}.$$

Całkowity przyrost  $\Delta_d$  przy zmianie ciśnienia od  $p_0$  do  $p$  przedstawi równanie

$$(5.16) \quad \Delta_d = \int_{p_0}^p \frac{p}{\gamma} \frac{d(\Delta V)}{V_0} + \int_{p_0}^p \frac{1}{\gamma} \frac{dG(V)}{V_0}.$$

Analizując równanie (5.16) zauważymy po pierwsze, że

$$(5.17) \quad \frac{\Delta V}{V_0} = \Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = N_1^e$$

przedstawia właściwą zmianę objętości ciała. Przy założeniu liniowej sprężystości napiszemy zgodnie z prawem Hooke'a

$$(5.18) \quad \frac{\Delta V}{V_0} = -C_0 p,$$

czyli

$$(5.18.1) \quad \frac{d(\Delta V)}{V_0} = -C_0 dp.$$

Po drugie, zgodnie z równaniami (3.9) i (3.23):

$$(5.19) \quad \frac{dG(V)}{V_0} = \frac{1}{V_0} d \left[ V \frac{dU_0(V)}{dV} \right]$$

lub

$$(5.19.1) \quad \int \frac{dG(V)}{\gamma V_0} = \frac{G(V) - G(V_0)}{\gamma V_0}.$$

Równanie (5.16) przybierze teraz postać

$$(5.20) \quad \Delta_d = -C_1 p^2 + C_2 + \frac{G(V) - G(V_0)}{\gamma V_0},$$

gdzie

$$(5.21) \quad C_1 = \frac{C_0}{2\gamma}, \quad C_2 = C_1 p_0^2,$$

zaś

$$(5.21.1) \quad \frac{G(V) - G(V_0)}{\gamma V_0}$$

przedstawia, jak łatwo się domyślić, przyrost energii potencjalnej właściwej sił sprężystości przy określonej zmianie objętości  $\Delta V$  i jest, jak wiemy z liniowej teorii sprężystości, kwadratową jednorodną funkcją naprężeń lub odkształceń, w szczególności ciśnienia  $p$ . Wyrażenie  $C_1 p^2$  przedstawia oczywiście pracę właściwą odkształcenia objętościowego. Możemy więc napisać ostatecznie najogólniej, że

$$(5.22) \quad \Delta_d = C'_1 p^2 + C'_2,$$

gdzie  $C'_2 = C'_1 p_0^2$ .

Oczywiście

$$(5.23) \quad C_1 = C'_1 + C''_1,$$

przy czym  $C''_1$  jest to współczynnik określający część pracy sił zewnętrznych, wydaną na przyrost potencjału wewnętrznych sił sprężystości.

Uwzględniając przypadki  $dp > 0$  lub  $dp < 0$  oraz zakładając praktycznie  $C'_1 p^2 \gg C'_1 p_0^2$  napiszemy

$$(5.24) \quad \Delta_d = \pm C'_1 p^2.$$

Znak minus odpowiada rozciąganiu ( $p < 0$ ), plus ścisnaniu ( $p > 0$ ).

Współczynnik  $C_0$  równania (5.18) jest proporcjonalny do współczynnika ściśliwości  $k$ , mianowicie

$$(5.25) \quad C_0 = \frac{1 - 2\nu}{E} = \frac{k}{3}.$$

Mamy więc również

$$(5.26) \quad C'_0 = C_3 k$$

oraz

$$(5.27) \quad C_i = \frac{C'_0}{2\gamma} = \frac{C_3 k}{2\gamma}.$$

Zgodnie jednak z prawem Grüneisena dla metali izotropowych przy dowolnych temperaturach stosunek współczynnika rozszerzalności  $(\partial V/\partial T)_p$  do ciepła właściwego  $c_p$  przy stałym ciśnieniu jest wielkością stałą. Z wystarczającą dokładnością możemy założyć, że  $c_p/c_v \approx 1$  (por. tablica 3),

Tablica 3

$\frac{c_p}{c_v}$	Al	Cu	Ag	Pb	Pt	NaCl	KCl
Według wzorów termodynamiki	1,042	1,025	1,047	1,055	1,019	1,051	1,038
Według przybliżonego wzoru	1,040	1,027	1,032	1,068	1,019	1,036	1,039

gdź według przybliżonej formuły Nernsta

$$(5.28) \quad c_p - c_v = \alpha T^{3/2}.$$

Wartości stałej Grüneisena podane są dla różnych metali w różnych temperaturach w tablicy 4. Napiszemy wówczas równanie (3.15) w postaci

$$(5.29) \quad \gamma = C_G \frac{1}{k}.$$

Tablica 4

$T[^\circ\text{C}]$	$\alpha_t 10^6 1/1^\circ\text{C}$	$C_G \varrho 10^6 \frac{\text{g}}{\text{kal}}$	$T[^\circ\text{C}]$	$\alpha_t 10^6 1/1^\circ\text{C}$	$C_G \varrho 10^6 \frac{\text{g}}{\text{kal}}$
Aluminium			Miedź		
— 173	13,6	321	— 87	14,1	522
— 100	18,2	327	0	16,1	531
0	23,0	330	100	16,9	540
100	24,9	336	400	19,3	537
300	29,0	357	600	20,9	546
438	29,8	336			—
Srebro			Platyna		
— 167	15,0	957	— 150	7,4	807
— 87	17,1	987	— 100	7,9	804
0	18,3	981	0	8,9	840
100	19,2	993	100	9,2	831
500	23,1	1050	875	11,2	801
800	26,0	1026			

Współczynnik ścisłości  $k$  materiału określa wzór

$$(5.30) \quad k = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{K} = \frac{3(1-2\nu)}{E}$$

Doświadczalne wartości współczynników  $k$  (w temperaturze 20°C) dla kilku materiałów podane są w tablicy 5.

Tablica 5

(a) Al	$1,36 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$
Fe	$0,62 \cdot 10^{-6}$
Cu	$0,80 \cdot 10^{-6}$
(b) Kwarc	$2,70 \cdot 10^{-4}$
Gips	$2,50 \cdot 10^{-4}$
NaCl	$4,14 \cdot 10^{-4}$

Materiały zwane w normalnych warunkach «kruchymi» (grupa b) wykazują większą podatność do zmian objętości niż «elasto-plastyczne» (grupa a). Stwierdzenie tego faktu wykorzystamy przy ogólnej analizie wartości współczynnika granicznej pojemności energetycznej.

Równanie (5.27) przedstawimy teraz w postaci

$$(5.29.1) \quad C'_1 = \frac{C_3 k}{2C_G \frac{1}{k}} = C_4 k^2$$

Przyrost energii drgań atomów określi więc wzór

$$(5.31) \quad \Delta_d = \pm C_4 k^2 p^2$$

Dla bardzo małych współczynników  $k$  i dla bardzo małych zmian objętości ( $V \approx \text{const}$ ) możemy z wystarczającą dokładnością przyjąć

$$(5.32) \quad \Delta_d = C_5 p + C'_2$$

lub (przy założeniu  $C'_2 \approx 0$ )

$$(5.32.1) \quad \Delta_d = C_5 p,$$

co również łatwo można wywnioskować z równania stanu bezpośrednio przy założeniu  $V \approx \text{const}$ :

$$(5.33) \quad \frac{1}{V_0} (pV - p_0 V_0) = \gamma \Delta_d$$

Przyjmujemy więc dwie alternatywy:

$$(5.34) \quad \Delta_d = C \sigma_d^2 = -\pi_1 \sigma_n,$$

$$(5.35) \quad \Delta_d = C \sigma_d^2 = \pm \pi_2 \sigma_n^2$$

Współczynnik  $\pi$  [por. (5.11)] nazwiemy współczynnikiem granicznej pojemności energetycznej i określimy go wzorem ogólnym

$$(5.36) \quad \pi = \pi_n \alpha \beta \gamma \varepsilon,$$

gdzie symbole występujące po prawej stronie oznaczają następujące współczynniki granicznej pojemności energetycznej:  $\alpha$  temperaturowy,  $\beta$  ciśnienia,  $\gamma$  szybkości odkształcania się,  $\varepsilon$  natężenia pola naprężeń oraz  $\pi_n$  współczynnik stanu granicznej pojemności energetycznej w warunkach przyjętych za normalne ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ).

Podstawienie za wyrażenie  $\pi f(\sigma_n)$  odpowiedniego wyrażenia na podstawie alternatywy (5.34) lub (5.35) jest, zgodnie z przeprowadzoną dyskusją równania stanu, w dużej mierze zależne od podatności materiału na zmiany objętości, czyli od wartości współczynnika ściśliwości  $k$ . Użycie pierwszej, drugiej czy też jeszcze innej funkcji  $\pi f(\sigma_n)$  zależy od postaci równania stanu ciała stałego, wyprowadzonego przy pewnych założeniach oraz od wyjściowych własności materiału. Założenia przyjęte w pierwszej części niniejszej pracy przedstawiono w p. 1.

## 6. Rozwinięcie hipotezy autora

6.1. Alternatywa pierwsza (5.34). Podstawowe równanie wynikające z hipotezy ma następującą postać:

$$(6.1) \quad A \tau_n^2 + B \sigma_n^2 + \pi_1 \sigma_n = K_e^2$$

lub w składowych stanu naprężenia

$$(6.2) \quad \frac{1}{12G} \{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2]\} + \frac{1}{18K} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \pi_1 \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = K_e^2.$$

Z porównania równań dla podstawowych stanów prostego rozciągania i ściskania otrzymamy wzór na współczynnik  $\pi_1$  granicznej pojemności energetycznej dla danych doświadczalnych  $k_r$  i  $k_c$  (próby teoretycznego wyznaczania współczynnika omówimy później)

$$(6.3) \quad \pi_1 = \frac{3}{2} \frac{k_c - k_r}{E}$$

lub

$$(6.3.1) \quad \pi_1 = \frac{k_c - k_r}{2(1 - 2\nu)} k,$$

gdzie  $k$  oznacza współczynnik ściśliwości (5.30).

Wówczas hipoteza przyjmuje postać

$$(6.4) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) + 3(k_c - k_r)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = k_c k_r.$$

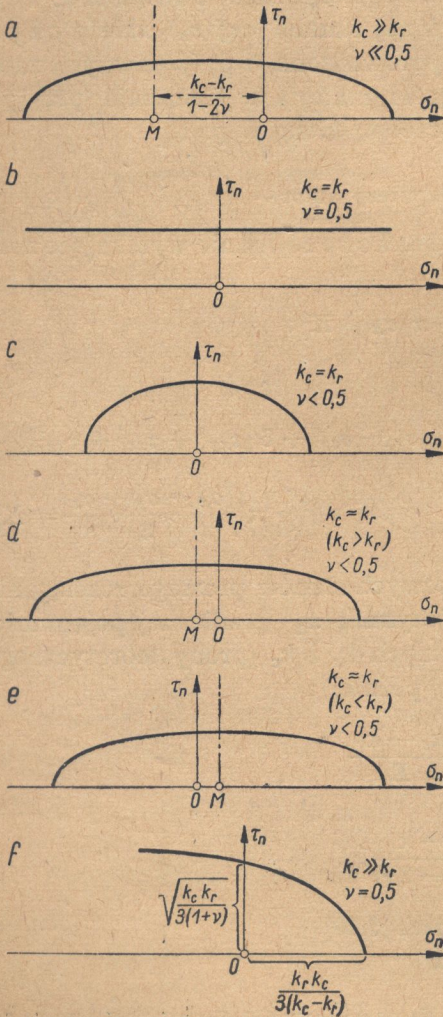
W układzie  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  otrzymamy

$$(6.5) \quad (1 + \nu) \tau_n^2 + (1 - 2\nu) \sigma_n^2 + (k_c - k_r) \sigma_n = \frac{k_r k_c}{3}.$$

Równanie (6.5) przedstawia w ogólnym przypadku elipsę przesuniętą wzdłuż osi  $\sigma_n$  względem środka układu  $O$ . Przesunięcie to wynosi

$$(6.6) \quad x_0 = -\frac{\pi_1}{k}$$

i jest wprost proporcjonalne do ilorazu  $\pi_1/k$ , który według prawa Grüneisena (5.29) oraz (7.15) jest wielkością stałą charakterystyczną dla materiału.



Rys. 10

Charakterystyczne przypadki dla różnych wartości ułamka  $\nu$  oraz  $k_c:k_r = \kappa$  przedstawiają wykresy krzywych granicznej pojemności energetycznej na rys. 10.

W szczególności przypadek przedstawiony na rys. 10b sprowadza się do hipotezy H u b e r a dla tzw. materiałów «elasto-plastycznych», zaś przypadek na rys. 10c do hipotezy H u b e r a - B e l t r a m i e g o. Przypadek 10a charakteryzuje ciało «szczególnie kruche» w warunkach normalnych, zaś przypadek 10f odpowiada w hipotezie B u r z y ń s k i e g o krzywej dla materiałów «plastycznych i twardych».

W przypadkach 10d i 10e przyjęto  $k_r \approx k_c$  tj.  $k_c > k_r$  lub  $k_c < k_r$ , gdyż nie ma w zasadzie podstaw ograniczających stosunek  $\kappa$  jedynie do przedziału  $\kappa \geq 1$ . Słuszniejsze wydaje się przyjęte założenie  $k_r \approx k_c$  ( $k_r \geq k_c$ ).

Zwracamy uwagę na następujący szczegół. Przedstawione na rysunku 10 elipsy są w rzeczywistości bardzo płaskie, gdyż przyjęta alternatywa nadaje się dla ciał charakteryzujących się małym  $k$

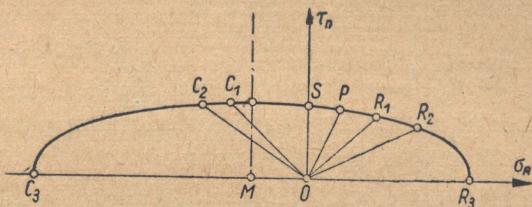
oraz małymi zmianami objętości (przypadek 10a odnosi się raczej do alternatywy drugiej i nie ma tu zastosowania).

Uwaga ta wyjaśnia stosunek pierwszej hipotezy (w zakresie jej stosowania dla określonej grupy materiałów) do badań Bridgmana, [47].

Kreśląc dla dowolnego stanu naprężenia prostą (rys. 11)

$$(6.7) \quad \tau_n = C \sigma_n,$$

gdzie  $C = \operatorname{tg} \alpha = \tau_n / \sigma_n$ , nazwiemy ją prostą stanu. Przecina ona krzywą granicznej pojemności energetycznej w punkcie o współrzędnych równych granicznym wartościom  $\sigma_{ngr}$  i  $\tau_{ngr}$ . Interesującą rzeczą byłoby pytanie, czy przekroczeniu granicy sprężystości towarzyszy pojawienie się odkształceń trwałych (plastycznych), czy też wystąpi «złom kruchy». Zagadnienie to omówimy szerzej przy drugiej alternatywie hipotezy, tu ograniczymy się do stwierdzenia



Rys. 11

faktu, że na krzywej granicznej wystąpi punkt  $P$ , dzielący ją na gałęzie odpowiadające złomowi kruchemu lub pojawieniu się umownej granicy plastyczności po przekroczeniu zakresu odkształceń sprężystych. W otoczeniu punktu  $P$  może wystąpić złom kruchy lub odkształcenie plastyczne, co zależy od dodatkowych warunków sprzyjających jednemu lub drugiemu rodzajowi odkształcenia (np. defektów siatki krystalicznej, zanieczyszczeń, mikrokarbów itp.).

W szczególności zainteresuje stosunek granicznych wartości  $k_s$  i  $k_r$  jako funkcji  $\kappa$  oraz  $\nu$ , który wyznaczymy z równania (6.5) dla przypadku prostego ścinania

$$(6.8) \quad 2(1 + \nu) k_s^2 = k_r k_c$$

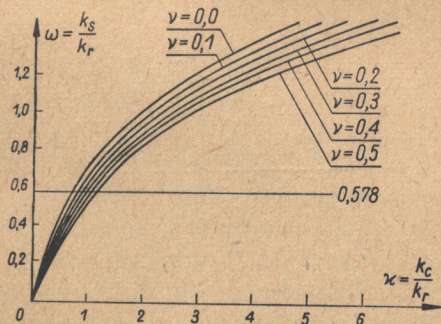
lub

$$(6.9) \quad \omega = \frac{k_s}{k_r} = \sqrt{\frac{\kappa}{2(1 + \nu)}}$$

(por. wykres na rys. 12).

Równanie (6.8) po przekształceniu przybiera postać

$$(6.9.1) \quad \nu = \frac{k_r k_c}{2 k_s^2} - 1,$$



Rys. 12

co przedstawia ułamek  $\nu$  jako funkcję trzech zmiennych niezależnych  $k_r$ ,  $k_c$  i  $k_s$  charakterystycznych dla materiału. Szerzej omówimy to zagadnienie przy drugiej alternatywie hipotezy.

Zauważmy podobieństwo równania (6.4) do równań opartych na hipotezie Schleichera - Misesa, [17], lub na hipotezie niezmienników Burzyńskiego, [17]. Hipoteza zmiennej krańcowej energii odkształcenia przyjmuje, że naprężenie porównawcze

$$(6.10) \quad \sigma_{vf} = \sqrt{2 E \Lambda}$$

w stanie granicznym jest wielkością zmienną zależną od stanu naprężenia (od ciśnienia  $p$ ), czyli że

$$(6.11) \quad \sigma_{vf} = f(p).$$

Kształtu tej funkcji szuka Schleicher z danych doświadczalnych, aproksymując krzywą doświadczalną parabolą lub prostą. Przy aproksymacji prostą (rys. 13) mamy

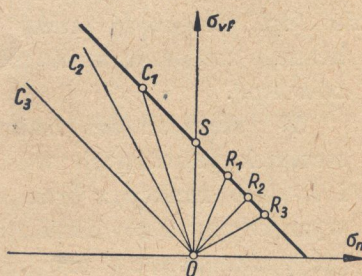
$$(6.12) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu'(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) + (k_c - k_r)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = k_c k_r,$$

gdzie

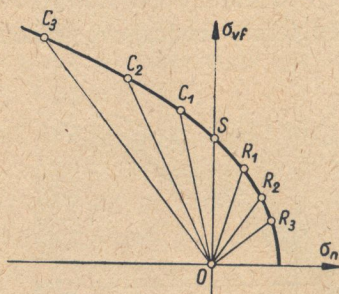
$$\mu' = \frac{\nu + n^2}{1 - n^2}, \quad n = \frac{k_c - k_r}{k_c + k_r}.$$

Przy aproksymacji parabolą (rys. 14) mamy

$$(6.13) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) + (k_c - k_r)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = k_c k_r.$$



Rys. 13



Rys. 14

Hipoteza zmiennej krańcowej energii odkształcenia objętościowo-potłocowego, hipoteza niezmienników Burzyńskiego, jest hipotezą energetyczną typu

$$(6.14) \quad A_p + \eta A_v = K^2,$$

gdzie  $\eta = \eta(p)$  jest funkcją stanu naprężenia, przyjętą przez Burzyńskiego w postaci

$$(6.15) \quad \eta = \omega + \frac{\delta}{3p}.$$



Przyjmując ponadto związki

$$(6.16) \quad \frac{1-2\nu}{1+\nu} \omega = \frac{1-2\mu}{1+\mu}, \quad \frac{1-2\nu}{1+\nu} \delta = \frac{3(k_c - k_r)}{1+\mu}, \quad 12 GK^2 = \frac{3k_r k_c}{1+\mu}$$

otrzymuje Burzyński równanie

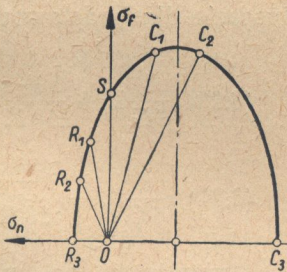
$$(6.17) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) + (k_c - k_r)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = k_r k_c.$$

W równaniu tym

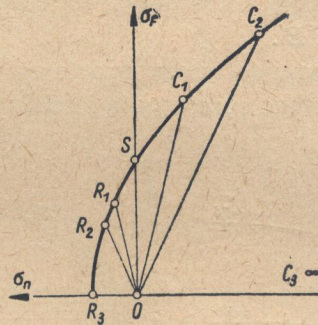
$$(6.18) \quad \mu = \frac{k_c k_r}{2k_s^2} - 1$$

jest tzw. współczynnikiem plastyczności (Burzyński), będącym funkcją niezależnych danych doświadczalnych  $k_r$ ,  $k_c$  i  $k_s$  [por. (6.9.1)], przyjmującym dla materiałów «twardych» i «kruchych» wartości  $\mu < 1/2$ , dla «twardych» i «plastycznych»  $\mu = 1/2$ , zaś dla ciał «miękkich» i «plastycznych»  $\mu > 1/2$ .

Na rys. 15 i 16 przedstawiono wykresnie krzywe według hipotezy Burzyńskiego dla materiału «twardego» i «kruchego» (por. rys. 10a) i «twardego» i «plastycznego» (por. rys. 10f).



Rys. 15



Rys. 16

Hipoteza nasza (6.4) opierając się na naukowej teorii ciała stałego potwierdza więc hipotezy Schleichera i Burzyńskiego, oparte na analizie danych doświadczalnych, przy czym zamiast współczynników  $\mu'$  (Schleicher) lub  $\mu$  (Burzyński) występuje ułamek  $\nu$ , a wynikiłą stąd różnicę reguluje, jak się zdaje, w przyjętej przez autora pierwszej alternatywie hipotezy inny współczynnik przy iloczynie,  $(k_c - k_r) N_1^a$ .

Z drugiej strony obfity materiał doświadczalny, potwierdzający przybliżoną zgodność hipotezy Schleichera i Burzyńskiego z praktyką dla określonej grupy materiałów, wydaje się być wystarczającym dowodem słuszności ogólnych naszych założeń dla grupy materiałów o własnościach przedstawionych poprzednio, a charakteryzujących

się bardzo małymi zmianami objętości przy stosunkowo dużym obciążeniu granicznym.

Bardziej szczegółową i dokładniejszą formą ogólną hipotezy wydaje się alternatywa druga (której szczególny przypadek przy odpowiednich założeniach stanowi alternatywa pierwsza).

6.2. Alternatywa druga (5.35). Podstawowe równanie oparte na hipotezie jest następujące:

$$(6.19) \quad A \tau_n^2 + B(1 \pm \delta) \sigma_n^2 = K_c^2,$$

gdzie

$$(6.20) \quad \delta = \frac{\pi_2}{B}.$$

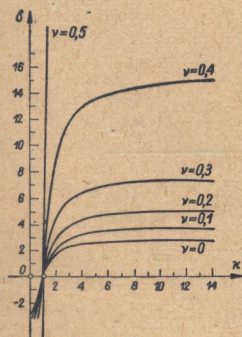
Współczynnik

$$(6.21) \quad B' = B(1 \pm \delta)$$

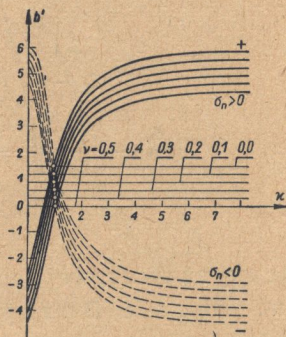
może przybierać wartości mniejsze, równe oraz większe od zera w zależności od stanu naprężenia oraz wyjściowych własności materiału.

Równanie (6.19) w układzie współrzędnych  $\sigma_n, \tau_n$  przedstawia elipsę, hiperbolę, dwie proste równoległe itp. w zależności od wartości współczynnika  $B'$ .

Porównując wzory oparte na naszej hipotezie dla podstawowych stanów prostego rozciągania i ściskania



Rys. 17



Rys. 18

$$(6.22) \quad \frac{1}{6G} k_r^2 + \frac{1+\delta}{18K} k_r^2 = K_e^2,$$

$$(6.23) \quad \frac{1}{6G} k_c^2 + \frac{1-\delta}{18K} k_c^2 = K_e^2$$

otrzymamy po przekształceniach

$$(6.24) \quad \delta = \frac{3(\kappa^2 - 1)}{(1 - 2\nu)(\kappa^2 + 1)},$$

przy czym  $\kappa = k_c/k_r$  (por. rys. 17).

W składowych głównych stanu naprężenia równania te przedstawiają się w postaci

$$(6.25) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \pm \frac{\delta}{3}(1 - 2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = 2K_e^2 E = \frac{2}{3} k_r^2 \left[ 1 + \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} (1 + \delta) \right].$$

Na podstawie hipotezy (6.19) otrzymamy po odpowiednich przekształceniach

$$(6.26) \quad \tau_n = C \sigma_n = \pm \sigma_n \sqrt{\frac{1}{a} \left( \frac{K_c^2 E}{\sigma_n^2} - b' \right)},$$

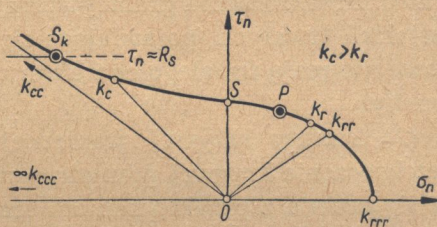
gdzie (rys. 18)

$$(6.27) \quad a = \frac{3}{2} (1 + \nu),$$

$$(6.28) \quad b = B' E.$$

Równanie (6.26) przedstawia oczywiście (podobnie jak w pierwszej alternatywie) równanie «prostej stanu» (przy czym  $c = f(\sigma_n)$ ). Prosta ta przecina krzywą granicznej pojemności energetycznej w punkcie o współrzędnych  $\sigma_{ngr}$ ,  $\tau_{ngr}$  (por. rys. 19).

Rysunek 19 przedstawia jeden ze szczególnych przypadków krzywej granicznej pojemności energetycznej według drugiej alternatywy naszej hipotezy i na nim oprzemy analizę możliwości wystąpienia dla określonego stanu naprężenia (reprezentowanego przez odpowiednią prostą stanu) złomu kruchego lub odkształceń trwałych (plastycznych) po przekroczeniu zakresu odkształceń sprężystych.



Rys. 19

Zauważmy przede wszystkim dwa charakterystyczne punkty wykresu  $P$  oraz  $S_k$ . Punkt  $P$  odpowiada stanowi, przy którym dla określonego

$\sigma_n$  po raz pierwszy złom kruchy ustąpi miejsca uprzednim odkształceniom plastycznym (trwałym), czyli pojawi się umowna granica plastyczności. Punkt ten o rzędnej  $\tau_{npl}$  oscyluje na ogół dla różnych materiałów przy normalnych parametrach  $T_0$ ,  $p_0$  i  $\nu_{odksz}$  pomiędzy punktami przecięcia się krzywej granicznej pojemności energetycznej z prostymi stanu  $k_r$  i  $k_c$  lub powyżej  $k_c$  dla materiałów o wyjściowych własnościach stanu kruchości lub poniżej  $k_r$  dla materiałów o wyjściowych własnościach stanu elasto-plastycznego.

Ponadto stwierdziliśmy, że styczne naprężenie oktaedryczne jest miarą podatności na odkształcenia plastyczne, przy czym

$$(2.16) \quad 0,941 > \frac{\tau_n}{\tau_{max}} > 0,816.$$

Odcinki prostych  $Ok_{rrr}, \dots, Ok_{rr}, \dots, Ok_s, \dots, Ok_{ccc}$  przedstawiają oczywiście graniczne wartości naprężeń oktaedrycznych

$$(6.29) \quad \nu_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2).$$

Naprężenie  $\nu_n$  jest niezmiennikiem danego stanu, a odcinki prostych są proporcjonalne do wartości granicznych  $k_{rrr}, \dots, k_r, k_s, \dots, k_{ccc}$ .

I tak np. dla prostego rozciągania

$$(6.30) \quad \nu_{nr} = \frac{k_r}{\sqrt{3}}$$

lub dla prostego ścinania

$$(6.31) \quad \nu_{ns} = \sqrt{\frac{2}{3}} k_s.$$

Punkt  $S_k$  odpowiada punktowi przecięcia się krzywej granicznej z prostą równoległą do osi  $\sigma_n$  w odległości  $\tau_n = \tau_{max_s} = R_s$ .

Zauważymy więc trzy zasadnicze strefy graniczne.

(1) Punkty krzywej granicznej są silnie oddalone od punktu  $P$  na prawo. Przekroczenie granicy sprężystości występuje bez widocznych odkształceń trwałych (pojawiające się przy obciążeniu odkształcenia postaciowe nie mają trwałego charakteru), w wyniku czego wystąpi tzw. «złom kruchy».

(2) Punkty krzywej granicznej są w bliskim otoczeniu punktu  $P$ . Przekroczenie krzywej granicznej pojemności energetycznej na ogół zbiega się prawie z przekroczeniem umownej granicy plastyczności oraz pojawieniem się trwałych odkształceń postaciowych, odkształceń plastycznych. Jest to jednak zasadniczo zakres przejściowy i po przekroczeniu krzywej granicznej pojemności energetycznej może wystąpić

(a) złom kruchy przy sprzyjającej budowie materiału, jak np. wystąpienie mikrokarbów (np. prążków grafitu w żeliwie itp.), defekty siatki krystalicznej, zanieczyszczenia, wtrącenia itp. (por. prace S me k a l a, G r i f i t h a, T a y l o r a i innych, [21], [51], [52], [53], [58]).

Może również wystąpić

(b) odkształcenie plastyczne (trwałe), a następnie konsolidacja.

(3) Prosta stanu przecina się z krzywą granicznej pojemności energetycznej powyżej punktu  $P$ . Rozróżniamy tu dwa szczególne przypadki. W pierwszym (a) prosta stanu przecina się z krzywą granicznej pojemności energetycznej poniżej punktu  $S_k$ . Występuje wtedy odkształcenie plastyczne a następnie konsolidacja. W drugim przypadku (b) prosta stanu nie przecina krzywej granicznej pojemności energetycznej, przecina się natomiast z prostą  $\tau_n = \tau_{max} = R_s$ . Przy przekroczeniu pewnej krytycznej wartości naprężenia stycznego występuje «ścięcie» bez poprzed-

nich widocznych odkształceń trwałych, [16]. Zauważmy, że dla przypadku tzw. tłoczenia wypływowego przy założeniu nieodkształcalności ścian tłoka mamy

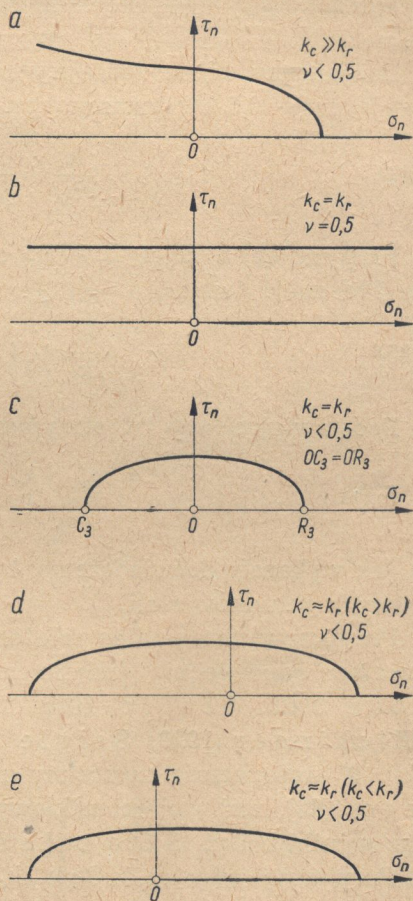
$$(6.32) \quad \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : \frac{\nu}{1-\nu} : \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Prosta stanu waha się po obu stronach prostej stanu  $k_{cc}$  w zależności od wartości ułamka  $\nu$ . Wynika stąd, iż przy odpowiednim stanie naprężenia oraz wartości  $R_s$  może wystąpić nawet dla takich materiałów jak marmur czy szare żeliwo odkształcenie plastyczne, tj. przekroczenie krzywej granicznej poniżej punktu  $S_k$ . Uwzględnienie wyników badań Bridgmana, [47], oraz uwag Burzyńskiego, [17], odnośnie pewnych zmian ułamka  $\nu$  w zależności nie tylko od ciśnienia, ale też od składowych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  potwierdza wnioski wpływające z analizy drugiej alternatywy naszej hipotezy.

Na rysunku 20 przedstawiono poszczególne charakterystyczne przypadki krzywych granicznych według alternatywy drugiej naszej hipotezy. I tak np. rys. 20b odpowiada hipotezie Hubera, zaś na rys. 20c hipotezie Hubera-Beltramięgo. Wykres 20a ma zastosowanie dla tzw. «ciał kruchych» w warunkach normalnych. Wykresy na rys. 20c i 20d są oczywiście w rzeczywistości bardzo spłaszczone, dążąc przy  $\nu \rightarrow 0,5$  oraz  $k_r \rightarrow k_c$  do prostej równoległej do osi  $\sigma_n$  (rys. 20b).

Uważamy, że związanie niezależnych od siebie danych doświadczalnych  $k_r$  i  $k_c$  zasadniczym warunkiem, jaki powinny według założeń spełniać «materiały elasto-plastyczne», mianowicie  $k_r = k_c$ , nie jest zupełnie uzasadnione a raczej przypadkowe.

Możemy natomiast stwierdzić, że dla metali, charakteryzujących się przy obciążeniu w warunkach normalnych stanem elasto-plastycznym, mamy



Rys. 20

$k_r \approx k_c$ , tzn. może być  $k_r \geq k_c$ , przy czym różnice między  $k_r$  i  $k_c$  wahają się na ogół w granicach kilku procent.

Założenie takie wydaje się zupełnie uzasadnione, a daje ciekawe wyniki teoretyczne według przedstawionej hipotezy, wyjaśniające, jak się zdaje, pewne dane doświadczalne, będące tematem wieloletnich sporów między teoretykami i eksperymentatorami

Omówmy np. stosunek  $k_s/k_r$  będący tematem tyłu rozpraw naukowych i eksperymentów (przypadek czystego ścinania).

Według drugiej alternatywy naszej hipotezy

$$(6.33) \quad \left(\frac{k_s}{k_r}\right)^2 = \omega^2 = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{1-2\nu}{2+2\nu} (1+\delta) \right].$$

Rozpatrzmy różne rodzaje stali. Przyjmując np. według Hubera  $k_r = k_c$  i  $\nu = 0,5$  otrzymamy (rys. 20b)

$$(6.34) \quad \frac{k_s}{k_r} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,578.$$

Przyjmując z kolei  $k_r = k_c$  oraz  $\nu < 0,5$  (Huber-Beltrami, rys. 20c) znajdziemy

$$(6.35) \quad \frac{k_s}{k_r} = \sqrt{\frac{1}{2(1+\nu)}}.$$

Podstawiając  $\nu = 1/3$  otrzymamy

$$(6.35.1) \quad \frac{k_s}{k_r} = 0,61,$$

co, jak wykazały doświadczenia, było zgodne z eksperymentami tylko dla pewnych gatunków stali.

Przyjmując teraz nasze założenie  $k_r \approx k_c$  otrzymamy ciekawe wyniki rzucające odpowiednie światło na dotychczasowe dane doświadczalne (Lode 1928, Scoble 1906, Ludwik 1909, Scheu 1925, Roß i Eichinger 1929, Seigle 1925, Sato i Mititosi 1940 i in., [22]). W szczególności zwrócimy uwagę na bardzo staranne badania Lodego, [22], nad stalami niklowymi, niklem i miedzią ( $\omega = 0,51 - 0,57$ ) oraz wyniki badań Sato nad stalami ( $\omega = 0,538 - 0,662$ ).

Przyjmując więc np.  $k_c > k_r$ ,  $k_c = 1,1k_r$  oraz  $\nu = 1/3$  otrzymamy z wykresu na rys. 17  $\delta \approx 0,7$ , czyli

$$(6.36) \quad \frac{k_s}{k_r} = 0,63 > 0,578$$

(por. rys. 20d).

Przy założeniu  $k_c < k_r$ ,  $k_c \approx 0,9k_r$  oraz  $\nu = 1/3$  odczytamy z wykresu  $\delta \approx -0,95$ , a stąd (por. rys. 20e)

$$(6.37) \quad \frac{k_s}{k_r} = 0,579 \approx 0,578.$$

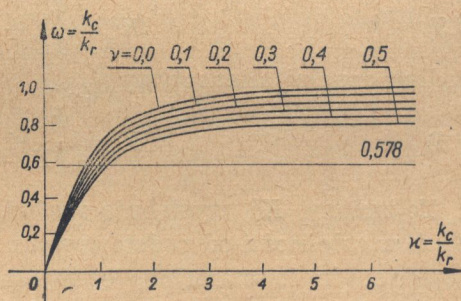
Podamy jeszcze dla przykładu, że dla  $k_c \approx 0,8k_r$  oraz  $\nu = 1/3$  otrzymalibyśmy

$$(6.38) \quad \frac{k_s}{k_r} = 0,542 < 0,578.$$

Stosunek  $\omega = k_s/k_r$ , który uważa się słusznie za jedną z wielkości charakterystycznych materiału, przedstawiono wykreślnie jako funkcję innej wielkości charakterystycznej  $\kappa = k_c/k_r$  dla różnych wartości ułamka  $\nu$  według drugiej alternatywy naszej hipotezy na rys. 21. Tę zależność funkcyjną określa równanie

$$(6.39) \quad \omega^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{1-2\nu}{1+\nu} + \frac{3}{2} \frac{\kappa^2 - 1}{(1+\nu)(\kappa^2 + 1)} \right].$$

Niezależność danych doświadczalnych  $k_r$  i  $k_c$  potwierdza model B o r n a, a ponadto mimo stosowania przy ściskaniu specjalnych próbek i metod współczynnik doświadczalny  $k_c$  ma raczej charakter technologiczno-porównawczy i, mimo uwzględnienia zasady S a i n t - V e n a n t a, nie może być traktowany jak liczba dokładna, choćby tego rzędu dokładności jak współczynnik  $k_r$ . Stosowanie zależności  $k_r = k_c$  dla materiałów podatnych do przechodzenia w stan elasto-plastyczny w warunkach normalnych przy obciążeniu ma charakter umowny ze względu na trudności występujące przy próbie ściskania.



Rys. 21

Wydaje się więc, że za podstawowe próby należałoby uważać:

(1) próbę prostego rozciągania, nie pozbawioną oczywiście trudności pomiarowych ze względu choćby na niedokładność pomiaru naprężenia w szczególności przy podatności materiału do dużych przewężeń ( $\nu$ ) już w zakresie sprężystym;

(2) próbę prostego ścinania, przeprowadzoną na rurach cienkościennych, nie pozbawioną również trudności technicznych (uchwyt próbki itp.) i pomiarowych, uwzględnienie jednak zasady S a i n t - V e n a n t a za-

pewnia praktycznie wystarczającą dokładność pomiarów, jak się wydaje, rzędu wyższego niż przy próbie ściskania;

(3) próbę ściskania: potraktujemy ją jako trzecią z kolei pod względem dokładności, choć nie mniej ważną i podstawową od poprzednich.

Dla zwięzłości pomijamy tu analizę wykresów dla hipotezy w układzie współrzędnych  $\sigma_1, \sigma_2$  lub  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  dokonaną przez nas w obszerniejszym opracowaniu tego zagadnienia.

## 7. Ogólna analiza zmienności współczynnika granicznej pojemności energetycznej jako funkcji podstawowych parametrów stanu <sup>2</sup>

Graniczna pojemność energetyczna jest funkcją stanu naprężenia, temperatury i ciśnienia początkowego, szybkości odkształcania się oraz «lokalnej niejednorodności» stanu naprężenia. Współczynnik  $K_e^2$  występujący po prawej stronie równania ogólnego hipotezy jest funkcją tych wielkości:

$$(7.1) \quad K_{e1}^2(T_{01}, p_{01}, v_{01}, \varrho_{\sigma 1}) \neq K_{e2}^2(T_{02}, p_{02}, v_{02}, \varrho_{\sigma 2}),$$

$$(7.2) \quad \Delta K_e^2 = K_{e1}^2 - K_{e2}^2.$$

Dla podstawowego stanu prostego rozciągania mamy według pierwszej alternatywy

$$(7.3) \quad K_e^2 = \frac{k_r^2}{2E} + \frac{\pi_1}{3} k_r,$$

według drugiej alternatywy

$$(7.4) \quad K_e^2 = \frac{k_r^2}{2E} \left( 1 + \frac{1-2\nu}{3} \delta \right).$$

Te zmiany  $K_e^2$  występują oczywiście w wyniku zmian  $k_r, E, \nu$  oraz  $\pi_1$  lub  $\delta$  w zależności od podstawowych parametrów  $T_0, p_0, v_{odksz}$  i lokalnej niejednorodności stanu naprężenia (natężenia pola naprężeń  $\varrho_{\sigma}$ ).

Zauważmy, że gdybyśmy potrafili wyznaczyć jednoznacznie  $E, \nu$  i  $\pi_1$  lub  $\delta$  oraz zmianę  $\Delta K_e^2$  granicznej pojemności energetycznej jako funkcję tych parametrów, moglibyśmy wówczas przewidzieć i wyznaczyć  $k_r$  dla dowolnych wartości tych parametrów, znając ponadto  $k_{r0}$  dla pewnych określonych warunków początkowych. Parametry  $v_{odksz}$  oraz  $\varrho_{\sigma}$  wchodzi już raczej w zakres zagadnień technologiczno-zmęczeniowych (np. zagadnienie Le Chateliera, schemat Joffego itp.) i nie mają tak decydującego wpływu na  $E$  i  $\nu$  jak parametry  $T_0$  oraz  $p_0$ .

Omówmy więc kolejno w skrócie zmienność  $\nu, E$  oraz  $\pi_1$  lub  $\delta$  jako funkcję parametrów  $T_0, p_0, v_{odksz}$  oraz  $\varrho_{\sigma}$ .

<sup>2</sup> Por. [8], [30], [31], [38], [49], [50], [52], [53], [56], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [66], [67], [68], [79].



Według równania (5.30) mamy

$$k = \frac{3(1-2\nu)}{E} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T.$$

Zgodnie z doświadczeniami stwierdzamy, że współczynnik ścisłości  $k$  wzrasta ze wzrostem temperatury i nieznacznie maleje ze wzrostem ciśnienia. Ze wzoru (5.30) wynika

$$(7.5) \quad \nu = 0,5 - \frac{Ek}{6}.$$

Moduł Younga  $E$  wyznaczamy z wykresu  $\sigma$ ,  $\epsilon$  lub za pomocą wyznaczenia pulsacji drgań swobodnych wzdłużnych pręta

$$(7.6) \quad \omega = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

stąd

$$(7.7) \quad E \approx \frac{1}{10n^2} \rho_0 l^2 \omega^2,$$

gdzie  $l$  oznacza długość pręta,  $\rho_0$  gęstość w stanie nieodkształconym,  $\omega$  pulsację drgań swobodnych ( $n$ -harmoniczna),  $n$  liczbę porządkową harmoniczej. Stwierdzamy więc zmienność  $E$  proporcjonalnie do  $\rho_0$  jako funkcję temperatury i ciśnienia (zakładając proces adiabatyczny przy drganiu).

Wstawienie  $E$  i  $k$  dla odpowiednich parametrów  $T_0$  i  $p_0$  do wzoru (7.5) da wartość ułamka  $\nu$ . Należy zwrócić uwagę na konieczność wprowadzenia pewnej poprawki dla  $\nu$  przy stanach naprężenia charakteryzujących się wysokimi ciśnieniami (co potwierdzają wspomniane przy końcu p. 6 badania Bridgmana, [47]).

W ogólnym przypadku współczynniki sprężystości wyznaczamy z równania

$$(7.8) \quad a_{ik} = \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k} = \frac{\partial^2 A_w}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k} - T \frac{\partial^2 S}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k}$$

[por. (5.6)];  $\sigma_i$  i  $\sigma_k$  oznaczają odpowiednie składowe stanu naprężenia.

Swobodną energię układu (np. kryształu) możemy rozdzielić na dwie części, [58], [67],

$$(7.9) \quad A(T) = A_0 + A_\nu(T),$$

gdzie  $A_0$  oznacza swobodną energię przy  $0^\circ$  Kelvina oraz  $A_\nu(T)$  swobodną energię jako funkcję drgań cieplnych.

Okazuje się, że w zasadzie  $A_0$  ma decydujący wpływ na wartość współczynników  $a_{ik}$ . Teoretyczną zależność współczynników sprężystości  $a_{ik}$  jako funkcji temperatury dla wielu materiałów opracował Born w termodynamicznej teorii sprężystości kryształów, [67].

Przystąpmy do ogólnej analizy zmienności współczynnika granicznej pojemności energetycznej  $\pi_1$  lub  $\delta$  jako funkcji podstawowych parametrów stanu początkowego. Według wzoru (5.36) mamy  $\pi = \pi_n a \beta \gamma \varepsilon$ , gdzie  $\pi_n$  oznacza współczynnik stanu granicznej pojemności energetycznej w warunkach normalnych (które określono w sposób następujący:  $T_{0n} = 20^\circ\text{C}$ ,  $p_{0n} = 1 \text{ kG/cm}^2$ ),  $v_{0n}$  przeciętną szybkość próby prostego rozciągania,  $\rho_{\sigma_n}$  gęstość linii pola naprężeń nominalnych. Ponadto następujące symbole oznaczają współczynniki stanu granicznej pojemności energetycznej:  $\alpha = \alpha(T_0/T_{0n})$  temperaturowy,  $\beta = \beta(p_0/p_{0n})$  ciśnieniowy,  $\gamma = \gamma(v_0/v_{0n})$  szybkości odkształcania się,  $\varepsilon = \varepsilon(\rho_\sigma/\rho_{\sigma_n})$  natężenia pola naprężeń.

Określając  $\rho_{\sigma_n}$  jako średnie natężenie nominalne pola naprężeń, zaś  $\rho_{\sigma_k}$  jako rzeczywiste natężenie pola naprężeń napiszemy

$$(7.10) \quad \varepsilon = \varepsilon\left(\frac{\rho_{\sigma_k}}{\rho_{\sigma_n}}\right) = \varepsilon\left(\frac{|\sigma_{red}|_k}{|\sigma_{red}|_n}\right),$$

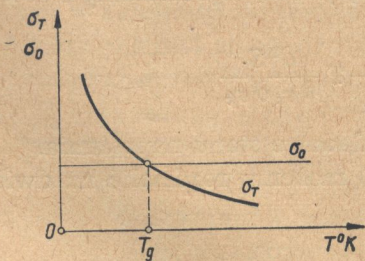
przy czym w szczególności dla korbów zewnętrznych (konstrukcyjnych) mamy

$$(7.11) \quad \varepsilon = \varepsilon(\alpha_k, \eta_k),$$

gdzie  $\alpha_k$  oznacza współczynnik teoretyczny koncentracji naprężeń,  $\eta_k$  współczynnik «czułości» karbu.

Zauważmy, że dla parametrów stanu początkowego (nominalnego) w warunkach normalnych  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  oraz  $\varepsilon = 1$ .

Współczynniki  $\gamma$  i  $\varepsilon$  określają np. zjawiska opisane w tzw. schemacie Joffego (rys. 22) oraz wyjaśniają jego doświadczenia. Otrzymanie poniżej temperatury  $T_g$  odkształceń plastycznych przez «zabliźnienie» mikrokarbów (kapiel wodna kryształów soli) reguluje współczynnik  $\varepsilon$  i podobnie osiągnięcie złomu kruchego powyżej  $T_g$  przez stosowanie dużych szybkości odkształcania określa współczynnik  $\gamma$ . Nie zamierzamy tu opracować metod wyznaczania teoretycznego lub teoretyczno-empirycznego współczynników funkcyjnych  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  oraz  $\varepsilon$ , gdyż wymagałoby to oddzielnej i bardzo ob-



Rys. 22

szerzej pracy, dla której niezbędny byłby bogaty materiał teoretyczny, a także może przede wszystkim doświadczalny. Ograniczymy się tu jedynie do zwrócenia uwagi na możliwość wyznaczenia teoretycznie lub doświadczalnie współczynnika stanu granicznej pojemności ener-

getycznej dla dowolnych parametrów stanu początkowego, o ile dany jest współczynnik  $\pi_n$  w warunkach normalnych ( $T_{0n}$ ,  $p_{0n}$ ,  $v_{0n}$  oraz  $\rho_{\sigma n}$ ) lub opracowania nomogramów dla ich wyznaczenia i praktycznego wykorzystania. Wartości np. współczynnika  $\pi_2 = B\delta$  możemy odczytać dla warunków normalnych z wykresu na rys. 17 jako funkcji  $\nu$  oraz  $\kappa$ , przy czym zarówno  $\nu$  jak i  $\kappa$  określone muszą być w warunkach normalnych.

Zauważmy, iż z porównania wzorów (5.31) oraz (5.35) wynika, że

$$(7.12) \quad \pi_2 = C_4 k^2 \left[ \frac{\text{cm}^2}{\text{kG}} \right],$$

przy czym na podstawie wzorów (5.29.1), (5.26) i (5.18) mamy

$$C_4 = \frac{C_3}{2C_G}, \quad C'_0 = C_3 k, \quad C_0 = C'_0 + C''_0 = \frac{k}{3}, \quad \frac{d(\Delta V)}{V_0} = -C_0 dp,$$

a symbol  $C_G$  oznacza stałą Grüneisena, (5.29).

W szczególności w zastosowaniu do bardzo małych zmian objętości i bardzo małych współczynników ściśliwości  $k$ , stosując pierwszą alternatywę otrzymamy z porównania wzorów (5.32.1) oraz (5.34)

$$(7.13) \quad \pi_1 = C_5,$$

gdzie współczynnik  $\pi_1$  jest bezwymiarowy.

Przyjmując w przybliżeniu, iż  $\pi_1$  i  $\pi_2$  są co do modułów równe (przy założeniach alternatywy pierwszej jako szczególnego przypadku alternatywy drugiej) otrzymamy

$$(7.14) \quad \pi_1 \approx \pi_2 = C_4 k^2,$$

przy założeniu oczywiście  $C'_0 \approx C_0 = k/3$ , zaś  $C''_0 \approx 0$ , gdyż występują jedynie bardzo małe zmiany objętości, wzrasta natomiast energia drgań  $C'_0$  [por. (5.23)].

Uwzględniając przedstawione wzory oraz przyjmując według prawa Grüneisena (5.29)

$$(7.15) \quad C_G = \gamma k \approx \frac{1}{\rho} 3 \left( \frac{\alpha_t}{c_v} \right) \left[ \frac{\text{cm}^3}{\text{kal}} \right]$$

otrzymamy

$$(7.16) \quad \pi_1 \approx \pi_2 = \frac{k}{6\gamma}.$$

We wzorze (7.15) przyjęte zostały następujące oznaczenia:  $\rho$  [g/cm<sup>3</sup>] jest gęstością,  $\alpha_t$  [1/1° C] współczynnikiem liniowej rozszerzalności termicznej,  $c_v$  [kal/g 1° C] ciepłem właściwym (przy stałej objętości).

Przy przeważającym wpływie sił odpychania ( $n > m$ ) możemy napisać według Grüneisena (3.14.2)

$$\gamma \approx \frac{n+2}{6}.$$

Wzór (7.14) daje możliwość teoretycznego wyznaczenia współczynnika  $\pi_1$  (według pierwszej alternatywy). I tak np. dla aluminium w warunkach normalnych mamy

$$(7.17) \quad \pi_1 \approx \pi_2 \approx \frac{(1,36 \cdot 10^{-6})^2 [\text{cm}^2/\text{kG}]^2}{330 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} [\text{cm}^3/\text{kal}]} 42,7 [\text{kG cm}/\text{kal}].$$

Po przeliczeniu

$$(7.18) \quad \pi_1 \approx \pi_2 \approx 0,652 \cdot 10^{-6}.$$

Z porównania ze wzorem (6.3) pierwszej alternatywy wynika

$$(7.19) \quad \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{k_c - k_r}{E} = 0,652 \cdot 10^{-6}, \\ k_c - k_r = 0,652 \cdot 10^{-6} \frac{2}{3} 0,7 \cdot 10^6 = 0,305 \approx 0, \end{cases}$$

co potwierdza założenie przyjmowane dla aluminium w normalnych (nominalnych) warunkach  $k_c \approx k_r$ .

Stosując drugą alternatywę w pełnym zakresie musimy już uwzględnić, iż  $C_0'' \neq 0$  czyli  $C_3 \neq 1/3$ , co pomijaliśmy poprzednio.

Wykorzystując wzory (5.20), (5.21) i inne możemy określić za pomocą wzoru

$$(7.20) \quad C_3 = \frac{1}{3} \left( 1 - \left| \frac{2 \Delta G_1}{C_0 p^2} \right| \right),$$

gdzie

$$\Delta G_1 = \frac{G(V) - G(V_0)}{V_0}, \quad C_0 = \frac{1 - 2\nu}{E}$$

[por. (5.19.1)].

Zagadnienie powyższe wymagałoby oddzielnie obszerniejszych rozważań na gruncie termodynamiki, fizyki i chemii, dlatego też tu ograniczymy się jedynie do określenia wytycznych teoretycznego wyznaczania wartości współczynnika stanu granicznej pojemności energetycznej, co przedstawiono poprzednio, przyjmując na razie za podstawę jego wyznaczania drogę empiryczną według danych doświadczalnych  $k_r$ ,  $k_c$  i  $k_s$  [por. (6.3) i (6.24)] oraz odpowiednie wykresy i uwagi na ten temat w tekście pracy.

Należałoby jeszcze wspomnieć o tym, iż współczynnik rozszerzalności liniowej  $\alpha_t$  dla niektórych stopów żelaza i niklu jest mniejszy od zera lub w przybliżeniu równy zeru (jak np. dla inwaru, [60], [62]). Skrót liniowych wymiarów niektórych kryształów w określonych kierunkach przy podgrzewaniu może dać sumaryczny efekt ujemny (w szczególności przy

sprzyjającej budowie anizotropowej, która wystąpiła np. na skutek walcowania):

$$(7.21) \quad \beta = \alpha_{t_1} + \alpha_{t_2} + \alpha_{t_3},$$

gdzie  $\alpha_{t_1}$ ,  $\alpha_{t_2}$  i  $\alpha_{t_3}$  oznaczają główne współczynniki rozszerzalności kryształu.

Fakt ten, jak łatwo wywnioskować, potwierdza możliwość przyjmowania przez współczynniki  $\pi$  lub  $\delta$  wartości ujemnych, co odpowiada ( $k_r > k_c$ )  $k_r \approx k_c$ , a co zdaje się potwierdza, jak wnioskujemy, wspomniane już badania Lodego nad stałą, niklem, miedzią i ich stopami.

Na zakończenie zauważmy, iż zakładając drgania atomów jako niezależne harmoniczne drgania cieplne możemy napisać opierając się na wzorze (3.16) i prawie Dulonga-Petite'a (3.20)

$$(7.22) \quad E_n = 6T \frac{\text{kal}}{1^\circ \text{ gramoatom}}.$$

Przyjmując np. dla żelaza (stali niskowęglistej) przyrost energii drgań na  $1^\circ$  w  $1 \text{ cm}^3$ , napiszemy

$$(7.23) \quad \Delta E_h = \frac{c_{wt}}{c_{at}} 6 \Delta T,$$

gdzie masa atomowa

$$c_{at} = 55,85 \text{ g/g. atom},$$

masa właściwa

$$c_{wt} = 7,9 \text{ g/cm}^3.$$

Po przeliczeniu otrzymamy

$$(7.24) \quad \Delta_d = \Delta E_h = \frac{7,9}{55,85} 6 \cdot 1 \left[ \frac{\text{kal}}{\text{cm}^3} \right] \approx 36,7 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Przy zmianie temperatury np. o  $0,01^\circ$  znajdziemy

$$(7.25) \quad \Delta E_h \approx 0,367 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2},$$

gdy np. dla  $p = 1000 \text{ kG/cm}^2$  oraz  $\nu = 0,3$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$  energia właściwa odkształcenia czysto objętościowego

$$(7.26) \quad \Delta_v = \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{E} p^2 = 0,3 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Wielkości określone równaniami (7.25) oraz (7.26) są mniej więcej jednego rzędu, co potwierdza początkowe założenie hipotezy o konieczności uwzględnienia zarówno przyrostu  $\Delta_v$  jak i  $\Delta_d$  przy obciążeniu układu. Na ogół ich wzajemny stosunek określa podatność układu do wejścia w stan «elasto-plastyczny» lub «elasto-kruchy».

## Literatura cytowana w tekście

### 1. Teoria sprężystości i plastyczności

- [1] N. Biezuchow, *Teorja uprugosti i plasticznosti*, Moskwa 1952.
- [2] K. B. Biezieno i R. Grammel, *Tiechniczeskaja dinamika*, t. 1 i 2, Leningrad 1950, tłum. z niem.
- [3] S. Bodaszewski, *O niesymetrycznym stanie napięcia i o jego zastosowaniach w mechanice ośrodków ciągłych*, Arch. Mech. Stos. 3 (1953).
- [4] M. M. Fiłonienko-Borodicz, *Teorja uprugosti*, Moskwa 1947.
- [5] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 1, Kraków 1948.
- [6] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oksford 1950.
- [7] A. Iljuszin, *Plasticznost'*, Moskwa 1948.
- [8] S. Lechnicki, *Teorja uprugosti anizotropnowo tiela*, Moskwa 1950.
- [9] L. Lejbienzon, *Kurs teorji uprugosti*, Moskwa 1947.
- [10] G. Love, *Lehrbuch der Elastizität*, Lipsk-Berlin 1907, tłum. z ang.
- [11] B. Nowożiłow, *Osnowy nieliniejnoji teorji uprugosti*, Leningrad 1948.
- [12] W. W. Sokołowski, *Teorja plasticznosti*, Moskwa 1950.
- [13] G. Southwell, *Wwiedienje w teorju uprugosti*, Moskwa 1948, tłum. z ang.
- [14] T. Wyss, *Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern*, Lipsk 1926.

### 2. Zagadnienia wyężenia oraz złomu plastycznego albo kruchego

- [15] B. Awdiejew, *Tiechnika opriedielenja miechaniczeskich swojstw mietalłow*, Moskwa 1952.
- [16] N. Bielajew, *Soprotiwlenje matieriałow*, Moskwa 1953.
- [17] W. Burzyński, *Studium nad hipotezami wyężenia*, Lwów 1928.
- [18] W. Burzyński, *O rozwinięciu potencjału sprężystego i zastosowaniach*, Warszawa 1932.
- [19] L. Baes, *Diskussion über die Plastizität*, Schlussbericht III Kongress I. V. Brückenbau u. Hochbau, Berlin 1939.
- [20] Bach-Baumann, *Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmaterialien*, Berlin 1921.
- [21] J. Fridman, *Miechaniczeskije swojstwa mietalłow*, Moskwa 1946.
- [22] M. T. Huber, *Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej*, Warszawa 1948.
- [23] M. T. Huber, *Stereomechanika techniczna*, Warszawa 1951.
- [24] H. Helmholtz, *Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen*, Lipsk 1902.
- [25] I. Kudriawcew, *Wnutriennyje napriazhenja kak riezierwa procznosti w maszynostrojenji*, Moskwa 1951.
- [26] W. Kuntze, *Kohäsionsfestigkeit*, Berlin 1932.
- [27] W. Kuntze, *Zur Frage der Festigkeit bei räumlichen Spannungszuständen*, Stahlbau 10 (1937).
- [28] W. Moszyński, *Stan napięcia, a wyężenie materiału*, Przegł. Mech. 7/8 (1952).
- [29] O. Mohr, *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, Berlin 1906.
- [30] A. Nádai, *Der bildsame Zustand der Werkstoffe*, Berlin 1927.
- [31] A. Nádai, *Plasticznost' i razruszenje twiordych tiel*, Moskwa 1954, tłum. z ang.

[32] J. Nowiński, S. Turski, *Studium nad stanami naprężenia w ciałach sprężystych niejednorodnych*, Arch. Mech. Stos. 3 (1953).

[33] S. Ponomariew, *Osnowy sowriemionnych problemow rasczota na procznost' w maszynostrojenji*, Moskwa 1952.

[34] T. Pełczyński, *Wpływ stanu napięcia na odkształcenia plastyczne materiału*, referat na konf. SIMP, 1951.

[35] A. Rżanicyn, *Rasczot sooruzenij z ucztom plasticznych swojstwu ma-tieriałow*, Moskwa 1949.

[36] M. Roš, Eichinger, *Versuche zur Klarung der Frage der Bruchgefahr*, III Metalle MPA, Zurych 1929.

[37] M. Roš, *Die Ermüdung der Metalle*, ZAMM 4/5 (1952).

[38] N. Szaposznikow, *Miechaniczeskije ispytanja mietallow*, Moskwa 1951.

[39] A. Thum, K. Federn, *Spannungs- und Bruchzustand und Bruchausbildung*, Berlin 1939.

[40] A. Thum, *Gewaltbruch, Zeitbruch und Dauerbruch*, Forsch. Wes. 9 (1938).

[41] A. Tomlenon, *Tieorja plasticzeskich dieformacji mietallow*, Moskwa 1951.

[42] G. Użik, *Ob osnovach tieorji procznosti i plasticznosti*, Izw. AN ZSRR 10 (1949).

[43] G. Użik, *O chrupkom razruszenji mietallow*, Izw. AN ZSRR 9 (1951).

[44] *Zagadnienia wytrzymałości materiałów*, referaty na konf. SIMP 1951, Klębowski, Pełczyński.

[45] Z. Klębowski, *Warunek wytrzymałości na tle hipotez wyteżenia*, Kraków 1946.

[46] Z. Klębowski, *Wyteżeniowa koncepcja T. Pełczyńskiego* (rękopis), 1954.

[47] P. Bridgman, *The Compressibility of Thirty Metals*, Proc. Amer. Acad., 1923.

### 3. Fizyka ciała stałego

[48] O. Anszeles, *Naczala kristalografii*, Leningrad 1952.

[49] K. Biełow, *Uprugije, tiepowyje i elektriczeskije jawlenja w ferromagnitnych mietallach*, Moskwa 1951.

[50] E. Branderberger, *Angewandte Kristallstrukturlehre*, Berlin 1938.

[51] J. Frienkiel, *Wwiedienje w tieorju mietallow*, Moskwa 1950.

[52] F. Halla, *Kristallchemie und Kristallphysik metallischer Werkstoffe*, Lipsk 1951.

[53] W. Hume-Rothery, *Elektrony i mietali*, Moskwa 1950, tłum. z ang.

[54] W. Hume-Rothery, *The Structure of Metals and Alloys*, Londyn 1938.

[55] A. Joffe, *Podstawowe pojęcia fizyki współczesnej*, Warszawa 1953, tłum.

z ros.

[56] B. Kudriawcew, *Primienienje ultraakusticzeskich mietodow w prakti-kie fiziko-chemiczeskich issledowanij*, Moskwa 1952.

[57] L. Landau, E. Liwszic, *Statisticzeskaja fizika*, Moskwa 1951.

[58] P. Laurent, J. Valeur, S. Bogroff, *Les bases de la résistance mé-chanique des métaux et alliages*, Paryż 1947.

[59] Leigh-Page, *Introduction to Theoretical Physics*, New York 1948.

[60] G. Roberts, *Tieplota i tiermodinamika*, Moskwa 1950, tłum. z ang.

[61] F. Seitz, *The Modern Theory of Solids*, New York 1940.

[62] E. Strauf, *Molekularnaja fizika*, Moskwa 1949.

- [63] W. Späth, *Physik der mechanischen Werkstoffprüfung*, Berlin 1938.  
 [64] L. Treloar, *Fizika uprugosti kaučuzka*, Moskwa 1953, tłum. z ang.  
 [65] W. Trzebiatowski, *Struktura metali*, Warszawa 1953.  
 [66] C. Zener, *Uprugost' i nieuprugost' mietalłow*, Moskwa 1954, tłum. z ang.

#### 4. Różne

- [67] T. Alfrey, *Miechaniczeskije swojstwa wysokopolimierow*, Moskwa 1952, tłum. z ang.  
 [68] J. Czochralski, *Moderne Metallkunde in Theorie und Praxis*, Berlin 1924.  
 [69] S. Drobot, *Dzielo naukowe M. T. Hubera*, Zast. Matem. 1 (1953).  
 [70] R. Houwink, *Elastomery i plastomery*, Warszawa 1953, tłum. z ang.  
 [71] O. Graf, *Handbuch der Werkstoffprüfung*, Berlin 1941.  
 [72] M. Kornfeld, *Uprugost' i procznost' židkostiej*, Moskwa 1951.  
 [73] N. Koczin, *Wiektornoje isczislenie i naczala tiensornowo isczislenja*, Moskwa 1951.  
 [74] *Księga jubileuszowa ku czci M. T. Hubera*, praca zbiorowa, Gdańsk 1950.  
 [75] Krutkow, *Tiensor funkcij napriazhenij i obszczeje rieszenje w statikie teiorji uprugosti*, Moskwa 1949.  
 [76] B. Nowożiłow, *O fiziczskom smysle invariantow napriazhenij*, Pr. Mat. Miech. 5 (1952).  
 [77] W. Rubinowicz, *Wektory i tensory*, Warszawa 1950.  
 [78] A. Tichonow, A. Samarski, *Urawnienja matematycznej fiziki*, Moskwa 1951.  
 [79] G. Tammann, *Lehrbuch der Metallkunde*, Lipsk 1922.  
 [80] W. Żukowski, *Tiechniczeskaja tiermodinamika*, Moskwa 1950.

#### Резюме

### РЕДУЦИРОВАННОЕ ДАВЛЕНИЕ КАК ОДИН ИЗ ПАРАМЕТРОВ ПРОЧНОСТИ (ПРИРАЩЕНИЕ УДЕЛЬНОЙ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ КАК МЕРА ПРОЧНОСТИ)

Цель работы — поставить энергетическую гипотезу прочности, которую можно использовать на практике, опирающуюся на основных положениях и законах теории твердого тела. Гипотеза в приведенной форме находит непосредственное практическое применение для многих технических металлов и других материалов, а после соответствующего пополнения, т.е. после учета изменений энтропии, может быть применена, между прочим, и к пластмассам.

При нагрузке тела выступает не только приращение потенциальной энергии сил упругости, благодаря изменению расстояний между атомами или частицами в узлах кристаллической решетки, т.е. изменение энергии искаженных форм и изменения объема тела, но также и приращение энергии колебания атомов вокруг средних положений. Приращение энергии колебаний содействует появлению остаточных



деформаций, т.е. превышению атомом энергетического барьера и занятию нового положения временного, устойчивого или неустойчивого, равновесия, в зависимости от поведения дальнейших пластических деформаций.

Анализируя уравнение теории твердого тела для принятой модели, принимали, что приращение энергии колебаний можно представить как функцию давления, иначе говоря, среднего напряжения, в виде

$$\Delta_d = \pi f(\sigma_n),$$

где  $\pi$  — коэффициент предельной энергетической емкости, зависящий от свойств материала при различных параметрах состояния:  $T_0$  (первоначальная температура),  $p_0$  (первоначальное давление),  $v$  (скорость деформации) и местной неоднородности напряженного состояния;  $f(\sigma_n)$  — определенная функция, принятая для данной модели тела.

Подробный анализ вопроса привел к разработке для принятой модели двух альтернатив функции  $f(\sigma_n)$ , когда (1) энергия колебаний является линейной функцией напряжения  $\sigma_n$ , и когда (2) энергия колебаний является квадратной функцией напряжения  $\sigma_n$ .

Первый случай касается тел, характеризующихся, даже при относительно больших нагрузках, небольшими изменениями объема и малыми коэффициентами сжимаемости; второй случай касается тел квази-изотропных, кристаллизирующих в регулярной системе (а также плоско- и пространственно-центрированных) и подчиняющихся закону Гук а.

Итак, основная формула гипотезы имеет следующий вид:

$$A \tau_n^2 + B \sigma_n^2 - \pi f(\sigma_n) = K_e^2,$$

где  $A = 3G/4$  и  $B = 1/2K$  коэффициенты материала,  $\pi$  — коэффициент предельной энергетической емкости,  $f(\sigma_n)$  — определенная функция нормального октаэдрического напряжения, и  $K_e^2$  — предельное значение энергетической емкости одного из основных состояний (напр., одноосного растяжения).

#### Summary

#### REDUCED PRESSURE AS A STRENGTH PARAMETER (THE INCREASE OF UNIT FREE ENERGY AS A MEASURE OF EFFECTIVE STRESS)

This strength theory belongs to the group of energy theories. The object of this paper is to establish a strength theory which can be applied in practice and which is based on the fundamental assumptions and laws of the theory of solid bodies. The theory proposed here can be applied

directly in connection with many materials, including a number of technically important metals. After some improvements, taking entropy changes into consideration, it can also be used for plastics.

If a body is loaded, the elastic strain energy increases in consequence of the change of the distances between the atoms or molecules in the nodes of the crystal net. In other words, the distortion energy and the volume energy change. This is not the only change, however, since the energy of atom vibration about the neutral position also increases. The increase of vibration energy favours the appearance of permanent set, in other words, the phenomenon of crossing an energy barrier and taking another position of transient equilibrium, stable or unstable, depending on the process of further plastic deformation.

Analysing the equations of the theory of a solid body for the model assumed, we take it that the increase in the vibration energy can be represented as a function of pressure or, in other words, as a function of the mean normal stress, in the form

$$\Delta_d = \pi f(\sigma_n).$$

Here  $\pi$  is the coefficient of limit energy capacity depending on the properties of the material for various state parameters:  $T_0$  (initial temperature),  $p_0$  (initial pressure),  $v$  (strain rate) and the local non-homogeneity of the state of stress;  $f(\sigma_n)$  is a function assumed for the model under consideration.

A detailed analysis of the problem led to the establishment of the following alternative forms of the function  $f(\sigma_n)$ : (1) the vibration energy is a linear function of the stress  $\sigma_n$ ; (2) the vibration energy is a quadratic function of the stress  $\sigma_n$ .

The first alternative concerns bodies characterized by small volume changes and small compressibility coefficients even for considerable loads, the second can be applied to quasi-isotropic bodies crystallizing in regular systems (and also in face and space-centred systems) and subjected to Hooke's law.

Thus, the final form of the basic equation of the theory is

$$A \tau_n^2 + B \sigma_n^2 - \pi f(\sigma_n) = K_e^2,$$

where  $A = 3G/4$  and  $B = 1/2K$  are material constants,  $\pi$  is the coefficient of limit energy capacity,  $f(\sigma_n)$  a function of normal octahedral stress and  $K_e^2$  limit energy capacity for one of the fundamental states (simple tension, for instance).

*Praca została złożona w Redakcji w listopadzie 1954 r.*