

821
ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
P O L S K I E J A K A D E M I I N A U K

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

VII

A. LISOWSKI

Płyty na sprężystym podłożu

W A R S Z A W A

1 9 5 4

WYDZIAŁ INŻYNIERSKI W POZNANIU
KATEDRA PRZEPADYKACJI
I BUDOWY SIŁCZONYCH
Poznań, ul. Szarlocka 13

ZAKŁAD BADAWCZY BUDOWNICTWA
SZKOŁY INŻYNIERSKIEJ W POZNANIU

Nr inwent. 821

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (VII)

Copyright 1953 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

All rights reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from the publishers.

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

Nakład 1000+150 egz. Papier druk. sat. 70x100 16, 70 g. Arkuszy wydawniczych 1,25. Arkuszy drukarskich 1 1/2.
Oddano do składania dn. 3.IX.53 r. Druk. ukończono dn. 30.XII.53 r. Zam. 182 a. 4-B-55502. Cena zł 5,--

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa, Śniadeckich 8

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

A. LISOWSKI

PŁYTY NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

VII

WARSZAWA 1953

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Rozpatrzmy równanie różniczkowe odkształconej powierzchni płyty w prostokątnym układzie osi x, y, z :

$$(1) \quad \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q,$$

gdzie E jest współczynnikiem sprężystości podłużnej, h grubością płyty, w ugięciem płyty w kierunku osi z , ν współczynnikiem Poissona oraz q obciążeniem przypadającym na jednostkę powierzchni płyty.

W przypadku oparcia płyty na sprężystym podłożu uwzględnić musimy ponadto sprężysty odpór gruntu p . W pracy niniejszej opierać się będziemy na tzw. założeniach Winklera. Według tych założeń:

(1) osiadanie każdego punktu podłoża jest proporcjonalne do nacisku przenieszonego przez podłoże; oznaczając wielkość siły powodującej jednostkowe osiadanie podłoża przez k (jest to tzw. współczynnik sprężystości podłoża) otrzymamy wielkość ugięcia y ze wzoru

$$(2) \quad y = \frac{p}{k};$$

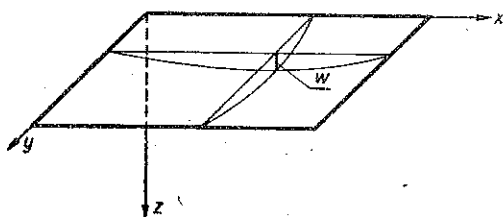
(2) osiadanie danego punktu nie jest zależne od osiadania innych punktów podłoża;

(3) belka lub płyta nie może oddzielić się od podłoża, tzn. podłoże może przenosić siły zarówno ściskające, jak i rozciągające.

Uwzględniając odpór sprężysty gruntu otrzymamy na podstawie równania (1)

$$(3) \quad \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q - kw,$$

gdzie k jest jednostkowym odporem gruntu przy założeniu odporu skierowanego przeciwnie niż oś z .



Rys. 1

Jeżeli zastąpić różniczki różnicami i wprowadzić oznaczenie

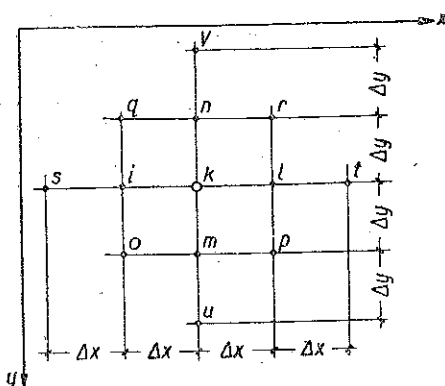
$$(4) \quad \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = D,$$

to otrzymamy

$$(5) \quad D \left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w}{\Delta y^4} \right) + k w = q.$$

Jest to równanie powierzchni odkształconej płyty spoczywającej na podłożu sprężystym. W pracy niniejszej zastosowano metodę różnic skończonych do obliczania płyt kwadratowych opartych na sprężystym podłożu ¹⁾.

Wyrażmy kolejno różnice wchodzące do wzoru (5) przez ugięcia, przyjmując podział płyty na jednakowe pola o długości Δx w kierunku osi x oraz Δy w kierunku osi y .



Rys. 2

Zgodnie z oznaczeniami podanymi na rys. 2 dla punktu k otrzymamy

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta_x^4 w_k = w_s - 4 w_i + \\ \quad \quad \quad + 6 w_k - 4 w_l + w_t, \\ \Delta_y^4 w_k = w_o - 4 w_n + \\ \quad \quad \quad + 6 w_k - 4 w_m + w_u, \\ \Delta_{xy}^4 w_k = 4 w_k - 2(w_i + \\ \quad \quad \quad + w_l + w_n + w_m) + w_g + \\ \quad \quad \quad + w_r + w_o + w_p. \end{cases}$$

W przypadku podziału płyty na pola kwadratowe jest

$$\Delta x = \Delta y.$$

Wstawiając wyrażenia na różnice (6) do równania (5) otrzymamy po uporządkowaniu

$$(7) \quad 20 w_k - 8(w_i + w_l + w_n + w_m) + 2(w_g + w_r + w_o + w_p) + \\ + w_s + w_t + w_v + w_u = \frac{\Delta x^4}{D} (q_k - k_k w_k),$$

gdzie q_k jest jednostkowym obciążeniem zewnętrznym, przypadającym na pole podziału płyty w punkcie k , a k_k jednostkowym odporem sprężystym gruntu, przypadającym również na pole podziału płyty w punkcie k .

¹⁾ [1] i [2]

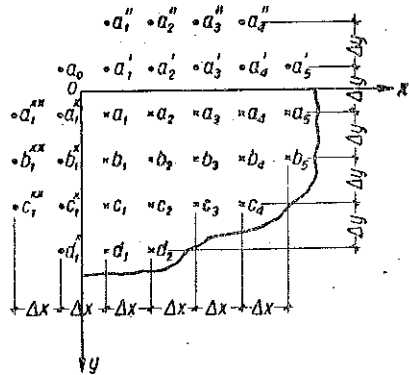
W przypadku działania sił skupionych należy obliczyć zastępcze obciążenie jednostkowe przypadające na dane pole

$$(8) \quad q_k = \frac{R_k}{\Delta x \Delta y},$$

gdzie R_k jest wypadkową obciążenia przypadającą na pole k .

Rozpatrzmy płytę podaną w rzucie na rys. 3. Przy zastosowanym podziale na odcinki Δx i Δy otrzymamy n nieznaną ugięć płyty. Będą to ugięcia a_1, a_2, a_3, \dots w rzędzie pierwszym oraz b_1, b_2, b_3, \dots w rzędzie drugim itd.²⁾

Układamy tyle równań (7), ile jest nieznaną ugięć płyty. Jednak do równań ułożonych dla skrajnych punktów płyty (np. dla rzędu punktów a_1, a_2, a_3, \dots wzdłuż osi x oraz dla szeregu punktów a_1, b_1, c_1, \dots wzdłuż osi y) oprócz ugięć punktów «rzeczywistych» wchodzi jeszcze «teoretyczne» ugięcia punktów poza płytą w odległości Δx i $2\Delta x$ od skrajnych punktów. Odpowiednie punkty w odległości Δy powyżej osi x , oznaczono jedną kreską, a w odległości $2\Delta y$ dwoma kreskami. Odpowiednie punkty z lewej strony osi y oznaczono jednym lub dwoma krzyżykami.



Rys. 3

Ażeby ułożona liczba równań wystarczała do rozwiązania układu, należy teoretyczne ugięcia poza płytą wyrazić za pomocą rzeczywistych ugięć.

Nieznane ugięcia teoretycznych punktów w odległości Δx lub Δy obliczymy z warunku, że na brzegu płyty naprężenia muszą być równe zeru³⁾. Oznacza to, że na krawędzi $x = 0$ jest

$$(9.1) \quad \sigma_x = 0$$

oraz na krawędzi $y = 0$ jest

$$(9.2) \quad \sigma_y = 0.$$

Z równania (9.1), np. dla punktu a_4 , znajdujemy zależność

$$(10.1) \quad b_4 - 2a_4 + a_4' + \nu(a_3 - 2a_4 + a_5) = 0.$$

²⁾ Bez obawy dwuznaczności punkty i ich ugięcia oznaczamy tymi samymi symbolami.

³⁾ [3].

Stąd obliczymy ugięcie teoretycznego punktu płyty a_4'

$$a_4' = -\nu a_3 + a_4(2 + 2\nu) - \nu a_5 - b_4.$$

Odpowiednio obliczymy wielkość ugięcia punktu b_1^{\times} z równania (9.2)

$$(10.2) \quad b_1^{\times} - 2b_1 + b_2 + \nu(c_1 - 2b_1 + a_1) = 0.$$

Ugięcie teoretycznych punktów w odległości $2\Delta x$ lub $2\Delta y$ obliczono zakładając, że przekrój płyty prostopadły do krawędzi przedstawia linię prostą. Tak np. ugięcie punktu a_4'' wyniesie

$$(11.1) \quad a_4'' - 2a_4' + a_4 = 0.$$

Wstawiając wartość ugięcia punktu a_4' ze wzoru (10.1) wyrazimy ugięcie punktu a_4'' przez ugięcia punktów rzeczywistych płyty.

Analogicznie ugięcie punktu $b_1^{\times\times}$ obliczymy z zależności

$$(11.2) \quad b_1^{\times\times} - 2b_1^{\times} + b_1 = 0.$$

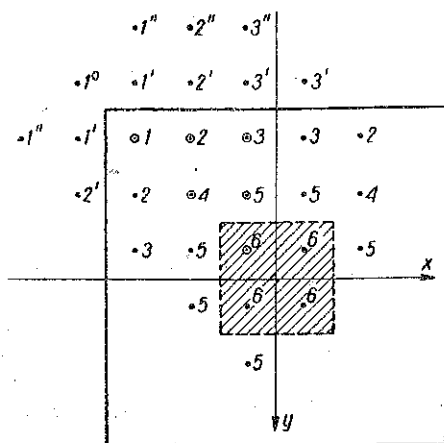
Pozostaje jeszcze do omówienia teoretyczny punkt narożny a_0 . W tym celu przyjęto, że wartość naprężenia zginającego wzdłuż przekątnej między osiami x i y w punkcie a_1 jest równa zeru. Stąd otrzymuje się zależność

$$(12) \quad a_0 - 2a_1 + b_2 + \nu(b_1^{\times} - 2a_1 + b_2) = 0.$$

Założenia ostatnie odbiegają niewątpliwie od stosunków faktycznych przy rozwiązaniu ścisłym; wobec tego jednak, że ugięcia punktów położonych w odległości $2\Delta x$ lub $2\Delta y$ poza płytą wchodzi tylko do równań ułożonych dla punktów skrajnych, i to z najmniejszym współczynnikiem [por. równanie (7)], więc nieścisłość ta wpłynąć może tylko niewiele na uzyskany wynik.

Obliczenie ugięć płyty za pomocą równań (7) zostało przedstawione dla przypadku płyty kwadratowej obciążonej symetrycznie.

Przykład 1. Obliczyć ugięcia płyty kwadratowej, podanej na rys. 4, opartej na sprężystym podłożu i obciążonej symetrycznie w polach środkowych.



Rys. 4

Wobec symetrii płyty i obciążenia wystarcza rozpatrzyć ćwiartkę płyty.

Do obliczeń przyjęto: $l = a = b = 500$ cm, $D = 19\,230\,000$ kG/cm, $k = 1$ kG/cm³, $q_6 = q$, $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0$.

Zastosowano następujący podział płyty:

$$\Delta x = \Delta y = \frac{l}{6} = \frac{500}{6} = 83,333 \text{ cm.}$$

Przy zastosowanym podziale i uwzględnieniu symetrii odkształcenia pozostaje do wyznaczenia sześć ugięć punktów płyty oznaczonych kolejno 1, 2, 3, 4, 5 i 6 (por. rys. 4).

Wyznaczenie ugięć punktów teoretycznych przeprowadza się z następujących równań:

$$w'_1 - 2w_1 + w_2 + \nu(w'_1 - 2w_1 + w_2) = 0,$$

$$w'_2 - 2w_2 + w_4 + \nu(w_1 - 2w_2 + w_3) = 0,$$

$$w'_3 - 2w_3 + w_5 + \nu(w_2 - 2w_3 + w_3) = 0,$$

$$w_0 - 2w_1 + w_4 + \nu(w'_2 - 2w_1 + w'_2) = 0,$$

$$w''_1 - 2w'_1 + w_1 = 0,$$

$$w''_2 - 2w'_2 + w_2 = 0,$$

$$w''_3 - 2w'_3 + w_3 = 0.$$

Stąd otrzymujemy:

$$w'_1 = 2w_1 - w_2,$$

$$w'_2 = -\nu w_1 + 2w_2(1 + \nu) - \nu w_3 - w_4,$$

$$w'_3 = -\nu w_2 + w_3(2 + \nu) - w_5,$$

$$w_0 = 2w_1(1 + \nu + \nu^2) - 4w_2(\nu + \nu^2) + 2\nu^2 w_3 - w_4(1 - 2\nu),$$

$$w''_1 = 3w_1 - 2w_2,$$

$$w''_2 = -2\nu w_1 + w_2(3 + 4\nu) - 2\nu w_3 - 2w_4,$$

$$w''_3 = -2\nu w_2 + w_3(3 + 2\nu) - 2w_5.$$

Dalsze obliczenie przeprowadzamy przyjmując $\nu = 0,2$. Otrzymamy wówczas:

$$w_0 = 2,48w_1 - 0,96w_2 + 0,08w_3 - 0,60w_4,$$

$$w'_1 = 2w_1 - w_2,$$

$$w'_2 = -0,20w_1 + 2,40w_2 - 0,20w_3 - w_4,$$

$$w_3' = -0,20 w_2 + 2,20 w_3 - w_5,$$

$$w_1'' = 3 w_1 - 2 w_2,$$

$$w_2'' = -0,40 w_1 + 3,80 w_2 - 0,40 w_3 - 2 w_4,$$

$$w_3'' = -0,40 w_2 + 3,40 w_3 - 2 w_5.$$

Równanie (7) piszemy w postaci

$$(7.1) \quad \left(20 + \frac{k_k \Delta x^4}{D}\right) w_k - 8(w_i + w_l + w_n + w_m) + 2(w_g + w_r + w_o + w_p) + \\ + w_s + w_t + w_v + w_u = \frac{q_k \Delta x^4}{D},$$

$$\frac{\Delta x^4}{D} = \frac{83,333^4}{19\,230\,000} = 2,507698.$$

Równanie (7.1) wypisujemy kolejno dla punktów 1, 2, 3, 4, 5 i 6 przyjmując stały odpór gruntu pod całą płytką, $k = 1 \text{ kg/cm}^2$ (bardzo słaby grunt).

Otrzymujemy kolejno:

dla punktu 6

$$(20 + 2,507698) w_6 - 8(2 w_5 + 2 w_6) + 2(w_4 - 2 w_5 + w_6) + \\ + 2 w_3 + 2 w_5 = 2,507698 q_6$$

lub po uproszczeniu

$$8,507698 w_6 - 10 w_5 + 2 w_4 + 2 w_3 = 2,507698 q_6;$$

dla punktu 5

$$(20 + 2,507698) w_5 - 8(w_3 + w_4 + w_5 + w_6) + 2(w_2 + w_3 + w_5 + w_6) + \\ + w_2 + w_3' + w_4 + w_6 = 0, \\ - 5 w_6 + 15,507698 w_5 - 7 w_4 - 3,80 w_3 + 2,80 w_2 = 0;$$

dla punktu 4

$$(20 + 2,507698) w_4 - 8(2 w_2 + 2 w_3) + 2(w_1 + 2 w_3 + w_6) + 2 w_2' + 2 w_5 = 0, \\ 2 w_6 - 14 w_5 + 20,507698 w_4 + 3,60 w_3 - 11,20 w_2 + 1,60 w_1 = 0;$$

dla punktu 3

$$(20 + 2,507698) w_3 - 8(w_2 + w_3' + w_3 + w_5) + 2(w_2' + w_3' + w_4 + w_5) + \\ + w_1 + w_3'' + w_2 + w_6 = 0, \\ w_6 - 2 w_5 + 4,307698 w_3 - 1,40 w_2 + 0,60 w_1 = 0;$$

dla punktu 2

$$(20 + 2,507696) w_2 - 8(w_1 + w_2' + w_3 + w_4) + 2(w_1' + w_3' + w_2 + w_5) + \\ + w_1 + w_2'' + w_3 + w_5 = 0, \\ w_5 - 2w_4 - 1,40w_3 + 5,707698w_2 - 0,80w_1 = 0;$$

dla punktu 1

$$(20 + 2,507696) w_1 - 8(2w_1' + 2w_2) + 2(w_1'' + 2w_2' + w_4) + 2w_1' + 2w_3 = 0, \\ -3,20w_4 + 1,36w_3 + 3,68w_2 + 0,667698w_1 = 0.$$

Rozwiązując układ sześciu równań obliczamy wielkość ugięć (przyjmując $q = 1 \text{ kG/cm}^2$):

$$w_1 = 0,34072 \quad \text{cm} \quad w_4 = 0,062858 \quad \text{cm} \\ w_2 = 0,021876 \quad \text{,,} \quad w_5 = 0,163361 \quad \text{,,} \\ w_3 = -0,078252 \quad \text{,,} \quad w_6 = 0,483153 \quad \text{,,}$$

Powierzchnię odkształcenia płyty podaje w rzucie aksonometrycznym rys. 5.

Zastosowanie różnic skończonych do równania (3) pozwala na obliczenie odkształceń płyty, która tylko częścią swej powierzchni opiera się na sprężystym podłożu W i n k l e r a. Wystarcza w tym celu dla odpowiednich punktów przyjąć wartość odporu gruntu równą zeru. Dla naszego przypadku równanie (7.1) przybierze postać

$$(7.2) \quad 20w_h - 8(w_l + w_t + w_n + w_m) + 2(w_q + w_r + w_o + w_p) + \\ + w_s + w_t + w_v + w_u = \frac{q_h \Delta x^4}{D}.$$

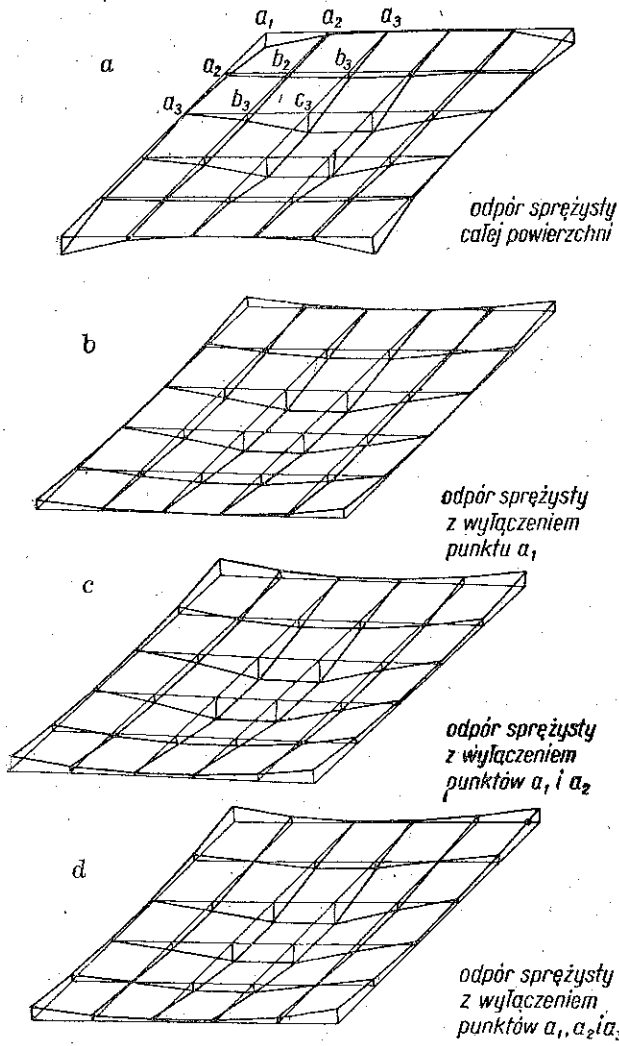
Przykład 1. 1. Obliczyć odkształcenia płyty według przykładu 1 w założeniu, że pole odpowiadające punktowi 1 nie jest oparte na sprężystym podłożu.

Równania ułożone dla punktów 1-5 pozostają bez zmian, należy uwzględnić tylko w równaniu dla punktu 1 różnicę pomiędzy wzorami (7.2) i (7.1):

Otrzymamy następujący układ równań:

$$8,507698w_6 - 10w_5 + 2w_4 + 2w_3 = 2,507698q, \\ -5w_6 + 15,507698w_5 - 7w_4 - 3,80w_3 + 2,80w_2 = 0, \\ 2w_6 - 14w_5 + 20,507698w_4 + 3,60w_3 - 11,20w_2 + 1,60w_1 = 0, \\ w_6 - 2w_5 + 4,307698w_3 - 1,40w_2 + 0,60w_1 = 0, \\ w_5 - 2w_4 - 1,40w_3 + 5,707698w_2 - 0,80w_1 = 0, \\ -3,20w_4 + 1,36w_3 + 3,68w_2 - 1,84w_1 = 0.$$

Układ tych równań daje następujące rozwiązanie:



$$\begin{aligned}
 w_1 &= -0,248753 \text{ cm} \\
 w_2 &= -0,039052 \text{ ,,} \\
 w_3 &= 0,002085 \text{ ,,} \\
 w_4 &= 0,099009 \text{ ,,} \\
 w_5 &= 0,224832 \text{ ,,} \\
 w_6 &= 0,535260 \text{ ,,}
 \end{aligned}$$

Rzeczą celową będzie podkreślić w tym miejscu, że podany sposób obliczenia może być zastosowany również do obliczenia ugięć płyt opartych na sprężystym podłożu o zmiennym współczynniku oporu sprężystego gruntu oraz dla płyt opartych tylko (dowolną) częścią swej powierzchni na podłożu.

W dalszym ciągu rozpatrzmy przypadek ważny ze względów praktycznych, a dotychczas nie rozwiązany w literaturze dostępnej autorowi, mianowicie przypadek odkształcenia się płyty opartej na sprężystym podłożu, gdy podłoże to jest zdolne przenieść tylko naprężenia ściskające, a pozwala na swobodne

oderwanie się płyty pod wpływem naprężeń rozciągających.

Analizując wyniki przykładów 1 i 1.1 widzimy, że część podłoża, mianowicie punkt 2, pracuje na rozciąganie. Zwalniając od pracy podłoże w punkcie 2 obliczymy nową powierzchnię odkształconą płyty. Analiza wyników wskazuje następnie, czy należy ponadto zwolnić dalsze punkty, aby otrzymać ostateczną powierzchnię wgłębiania się płyty w podłoże.

Przypadek rozważany tutaj może znaleźć zastosowanie w praktyce przy płytach lub ławach fundamentowych pod słupami, masztami, kominami itp.

Przykład 1.2. Obliczyć odkształcenia płyty według przykładu 1 w założeniu, że pola 1 i 2 nie są oparte na sprężystym podłożu.

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} 8,507698 w_6 - 10 w_5 + 2 w_4 + 2 w_3 &= 2,507698 q, \\ -5 w_6 + 15,507698 w_5 - 7 w_4 - 3,80 w_3 + 2,80 w_2 &= 0, \\ 2 w_6 - 14 w_5 + 20,507698 w_4 + 3,60 w_3 - 11,20 w_2 + 1,60 w_1 &= 0, \\ w_6 - 2 w_5 + 4,307698 w_3 - 1,40 w_2 + 0,60 w_1 &= 0, \\ w_5 - 2 w_4 - 1,40 w_3 + 3,20 w_2 - 0,80 w_1 &= 0, \\ -3,20 w_4 + 1,36 w_3 + 3,68 w_2 - 1,84 w_1 &= 0, \end{aligned}$$

którego rozwiązaniem jest

$$\begin{aligned} w_1 &= -0,381161 \text{ cm} & w_4 &= 0,057256 \text{ cm} \\ w_2 &= -0,135503 \text{ ,,} & w_5 &= 0,223153 \text{ ,,} \\ w_3 &= -0,014314 \text{ ,,} & w_6 &= 0,546957 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Przykład 1.3. Obliczyć odkształcenia płyty według przykładu 1 w założeniu, że pola 1, 2 i 3 nie są oparte na sprężystym podłożu.

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} 8,507698 w_6 - 10 w_5 + 2 w_4 + 2 w_3 &= 2,507698 q, \\ -5 w_6 + 15,507698 w_5 - 7 w_4 - 3,80 w_3 + 2,80 w_2 &= 0, \\ 2 w_6 - 14 w_5 + 20,507698 w_4 + 3,60 w_3 - 11,20 w_2 + 1,60 w_1 &= 0, \\ w_6 - 2 w_5 + 1,80 w_3 - 1,40 w_2 + 0,60 w_1 &= 0, \\ w_5 - 2 w_4 - 1,40 w_3 + 3,20 w_2 - 0,80 w_1 &= 0, \\ -3,20 w_4 + 1,36 w_3 + 3,68 w_2 - 1,84 w_1 &= 0, \end{aligned}$$

którego rozwiązaniem jest

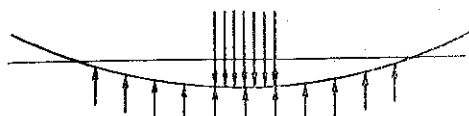
$$\begin{aligned} w_1 &= -0,354200 \text{ cm} & w_4 &= 0,070672 \text{ cm} \\ w_2 &= -0,107630 \text{ ,,} & w_5 &= 0,221153 \text{ ,,} \\ w_3 &= -0,021692 \text{ ,,} & w_6 &= 0,543187 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Kolejne powierzchnie odkształceń płyty wykreślone zostały na podstawie wyników przykładów 1, 1.1, 1.2 i 1.3 na rys. 5a, 5b, 5c i 5d i to przy

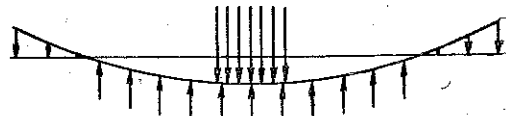
odporze sprężystym na całej powierzchni na rys. 5a, przy zwolnieniu odporu sprężystego odpowiednio w jednym, dwóch i trzech punktach na rys. 5b, 5c i 5d.

Najbardziej zastanawiający jest fakt wgłębiania się rogów płyty przedstawiony na rys. 5a.

Wynik obliczeń można wytłumaczyć w sposób następujący. Pod wpływem obciążenia części środkowej płyta wgłębia się w podłoże w sposób podany na rys. 6. Równania (7.1) zostały ułożone zgodnie z założeniami W i n k l e r a, że podłoże pracuje zarówno na naprężenia ściskające, jak i na naprężenia rozciągające. Wytwarza się zatem sytuacja podana na rys. 7.

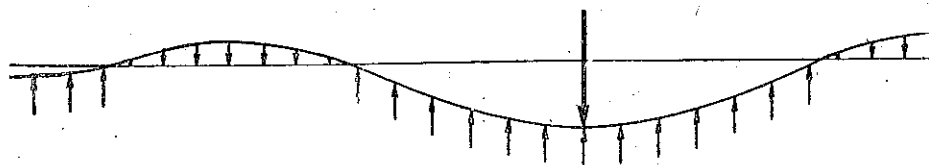


Rys. 6



Rys. 7

Siły ciągnące w częściach płyty odkształconej powyżej poziomu podłoża starają się wgłębić część środkową płyty oraz wygiąć rogi ku dołowi (to samo zjawisko ma miejsce w belce na sprężystym podłożu, por. rys. 8).



Rys. 8

Ponieważ dodatkowe zagłębienie części środkowej płyty napotyka na trudności (duża powierzchnia dotyku), reszta sił rozciągających wpływa na silne wygięcie rogów ku dołowi, co uwidacznia rys. 5a.

Zwalniając kolejno punkty podłoża poddane naprężeniom rozciągającym dochodzimy po szeregu przybliżeń do ostatecznej postaci płyty odkształconej, zgodnie z założeniem, że podłoże zdolne jest tylko do przejęcia naprężeń ściskających, a pozwala na swobodne oderwanie się płyty.

Na podstawie wykresów ugięć można dojść do powierzchni wgłębiania się płyty w podłoże i wykreślić odpowiednie warstwicę.

Następne obliczenie odkształceń płyty przeprowadzimy zwiększając dziesięciokrotnie współczynnik podłoża bez zmiany innych warunków.

Przykład 2. Obliczyć odkształcenia płyty jak w przykładzie 1 przy zastosowaniu innego współczynnika sprężystości podłoża $k = 10 \text{ kG/cm}^2$ (dla silnych gruntów).

Mamy teraz

$$\frac{\Delta x^4}{D} = 2,507698, \quad \frac{k \Delta x^4}{D} = 25,076980.$$

Dla punktów 6, 5, 4, 3, 2 i 1 płyty otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} 31,076980 w_6 - 10 w_5 + 2 w_4 + 2 w_3 &= 2,507698 q, \\ -5 w_6 + 38,076980 w_5 - 7 w_4 - 3,80 w_3 + 2,80 w_2 &= 0, \\ 2 w_6 - 14 w_5 + 43,076980 w_4 + 3,60 w_3 - 11,20 w_2 + 1,60 w_1 &= 0, \\ w_6 - 2 w_5 + 26,876980 w_3 - 1,40 w_2 + 0,60 w_1 &= 0, \\ w_5 - 2 w_4 - 1,40 w_3 + 28,276980 w_2 - 0,80 w_1 &= 0, \\ -3,20 w_4 + 1,36 w_3 + 3,68 w_2 + 23,236980 w_1 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy następujące wielkości ugięć dla $q = 1 \text{ kG/cm}^2$:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,0001731 \text{ cm}, & w_4 &= -0,0003451 \text{ cm}, \\ w_2 &= -0,0005190 \text{ ,,}, & w_5 &= 0,0108147 \text{ ,,}, \\ w_3 &= -0,0023644 \text{ ,,}, & w_6 &= 0,0843475 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Nie ma potrzeby podawania kolejnych powierzchni odkształconych otrzymanych przy stopniowym zwalnianiu punktów 1, 2, 3, ... aż do ostatecznego ustalenia płyty. Sposób obliczenia jest tutaj bowiem identyczny jak w przykładzie 1. Podajemy natomiast ostateczną powierzchnię zagłębienia się płyty w sprężyste podłoże w założeniu, że podłoże przejmuje tylko naprężenia ściskające.

Przykład 2.1. Obliczyć odkształcenia płyty według przykładu 2 w założeniu, że pola 1, 2, 3 i 4 nie są oparte na sprężystym podłożu.

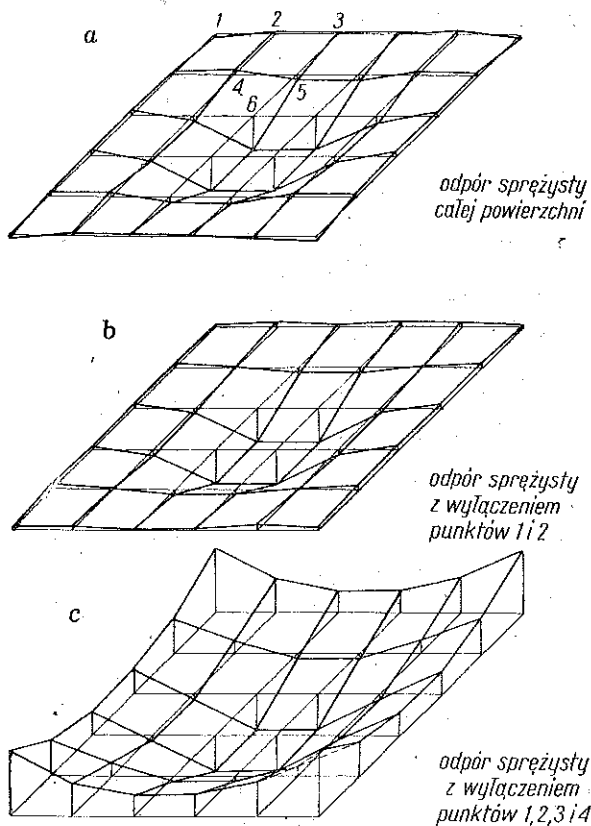
Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} 31,076980 w_6 - 10 w_5 + 2 w_4 + 2 w_3 &= 2,507698 q, \\ -5 w_6 + 38,076980 w_5 - 7 w_4 - 3,80 w_3 + 2,80 w_2 &= 0, \\ 2 w_6 - 14 w_5 + 18 w_4 + 3,60 w_3 - 11,20 w_2 + 1,60 w_1 &= 0, \\ w_6 - 2 w_5 + 1,80 w_3 - 1,40 w_2 + 0,60 w_1 &= 0, \\ w_5 - 2 w_4 - 1,40 w_3 + 3,20 w_2 - 0,80 w_1 &= 0, \\ -3,20 w_4 + 1,36 w_3 + 3,68 w_2 - 1,84 w_1 &= 0, \end{aligned}$$

którego rozwiązaniem jest

$$\begin{aligned}w_1 &= -0,161955 \text{ cm}, & w_4 &= -0,0349868 \text{ cm}, \\w_2 &= -0,0897977 \text{ „}, & w_5 &= 0,0059757 \text{ „}, \\w_3 &= -0,0584565 \text{ „}, & w_6 &= 0,0886298 \text{ „},\end{aligned}$$

Odpowiednie powierzchnie ugięcia płyty przedstawione zostały na rys. 9a, 9b i 9c w założeniu odporu sprężystego na całej powierzchni płyty,



Rys. 9

a następnie przy usuwaniu kolejno odporu w punktach 1 i 2 oraz 1, 2, 3 i 4. Otrzymana w ten sposób ostateczna powierzchnia odkształcona płyty odpowiada założeniu, że podłoże sprężyste może przejąć tylko naprężenia ściskające.

Porównując wykresy powierzchni odkształconych z przykładów 1 i 2 widzimy, że powierzchnia wgłębiana się płyty w sztywniejsze podłożę znacznie zmalała, co odpowiada, oczywiście, doświadczeniu.

Warto podkreślić, że odpór całkowity obliczony na podstawie ugięć płyty równoważy dość dokładnie obciążenie zewnętrzne (z błędem 1%), co potwierdza ścisłość otrzymanych wyników.

Literatura cytowana w tekście

- [1] *Woprosy stroitelnoj miechaniki*, pod redakcją J. W. Urbana, Moskwa 1951.
- [2] K. Beyer, *Die Statik im Eisenbetonbau*, cz. I i II, Berlin 1933-1934.
- [3] W. Wierzbicki, *Obliczenie płyty wspornikowej za pomocą równań różnicowych*, Warszawa 1934.

Резюме

ПЛАСТИНКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В предлагаемой работе применен метод конечных разностей для вычисления деформации пластинок на упругом основании. Формула (5) является разностным уравнением пластинки согласно фиг. 1. Здесь w есть прогиб пластинки, D жёсткость пластинки на изгиб, k единичная реакция основания при предположении реакции направленной противоположно к оси z , q нагрузка на единицу поверхности пластинки.

Выразив разности прогибами отдельных точек, согласно обозначениям приведенным на фиг. 2, и разделив пластинку на квадратные участки $\Delta x = \Delta y$, получаем уравнение (7), где q_k есть удельная внешняя нагрузка участка в точке k а k_k удельная реакция на участок в точке k .

Составляем столько уравнений (7), сколько неизвестных прогибов пластинки. Чтобы число неизвестных было равно количеству линейных уравнений, выражаем теоретические прогибы вне пластинки прогибами действительных точек. Способ составления таких зависимостей дан формулами (9.1)-(12).

Уравнения (7) основаны на предположениях Винклера, т. е. (1) не учитывают непрерывности вещества основания, (2) полагают, что оседание каждой точки является пропорциональным к переносимому давлению в данном месте и (3), что основание может переносить не только сжимающие, но и растягивающие напряжения. Эти предположки, особенно по отношению к грунтам, значительно расходятся с работой действительного основания.

Далее вычислены деформации квадратной пластинки, нагруженной в своей центральной части, при допущении, что основание может

переносить только сжимающие напряжения и позволяет пластинке свободно отделяться от основания.

Применен способ последовательного освобождения от работы точек основания, подвергнутых растягивающим напряжениям. После нескольких приближений можно получить действительную поверхность деформированной пластинки, вдавливаемой в упругое основание.

Соответствующие графики для $k = 1$ кг/см² приведены на фиг. 5а, 5б, 5с и 5д. Вычисление проведено вторично увеличивая в 10 раз значение упругой реакции основания (для $k = 10$ кг/см²). Фигуры 9а, 9б и 9с приводят соответствующие графики.

Примененный метод расчета дает возможность рассматривать разные типы пластинок опёртых каким либо образом на упругом основании (например при переменном коэффициенте упругой реакции основания). В особенности делает возможным расчёт деформаций пластинки опёртой на упругом основании, которое переносит только сжимающие напряжения.

Предлагаемый способ может применяться на практике, например при расчёте фундаментных балок и пластинок.

Summary

PLATES ON ELASTIC FOUNDATIONS

In this paper finite differences are used to determine deformations of plates on elastic foundations. The difference equation of a plate presented in Fig. 1 is given by Eq. (5), where w denotes the deflection of the plate, D its flexural rigidity, k unit reaction of the foundation (the reaction being supposed to be in the sense opposite to that of the z -axis), q unit load of the plate. Expressing the differences by the deflections of individual points according to the designations in Fig. 2 (the plate being divided in elementary squares $\Delta x = \Delta y$) Eq. (7) is obtained, where q_u is the unit external load of the elementary area corresponding to the point k , and k_u the unit reaction of the foundation for the elementary area corresponding to the point k .

A number of equations (7) are established, equal to that of unknown deflections of the plate. To have the number of unknown quantities equal to that of equations (which are linear), theoretical points of deflection outside the plate are expressed by the deflections of real points. The manner in which these relations are found is given by Eqs. (9.1)-(12).

Thus we obtain finally a system of linear equations, the number of unknown deflections being equal to that of the established equations.

Eqs. (7) are based on W i n k l e r's assumptions, which means that the continuity of the foundation is not taken into account and the deflection of the foundation is assumed to be proportional to the load. Further it is assumed that the foundation can be subjected to compressive and tensile stresses as well. These assumptions differ considerably from the conditions of really existing foundations, especially when applied to the ground.

Furthermore the author has calculated the deformation of a rectangular plate loaded in the central part, assuming that the foundation can be subjected to compressive stresses only, and permitting free separation of the plate from the foundation. The method used consists in successive suppressing the tensile stresses at points where they exist. After several approximations we can obtain the real surface of deflection of a plate pressed against an elastic foundation.

The corresponding graphs for discussed plate, for $k = 1 \text{ kG/cm}^2$, are shown in Figs 5a, 5b, 5c and 5d. The calculation has been repeated for the modulus ten times greater ($k = 10 \text{ kG/cm}^2$). The corresponding graphs are shown in Figs 9a, 9b and 9c.

The method presented permits to investigate different kinds of plates on elastic foundations of any kind (e. g. characterized by a variable modulus of elasticity). In particular it permits to calculate the deflection of a plate on an elastic foundation which can be subjected to compressive stresses only.

The method can be used, for instance, to calculate foundation beams and plates.

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 kwietnia 1953 r.