

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
P O L S K I E J A K A D E M I I N A U K

---

# ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

VI

WACŁAW OLSZAK

Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych  
w ortotropowych ustrojach płytowych  
(Plastyczne wyczerpanie nośności)

---

W A R S Z A W A

1 9 5 4

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

---

WACŁAW OLSZAK

Z ZAGADNIENŃ PODSTAWOWYCH TEORII STANÓW GRANICZNYCH  
W ORTOTROPOWYCH USTROJACH PŁYTOWYCH  
(PLASTYCZNE WYCZERPANIE NOŚNOŚCI)

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE

VI

WARSZAWA 1954

---

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

1. Przed przystąpieniem do omówienia właściwego zagadnienia podamy kilka uwag ogólnych na temat stopniowego rozwoju teorii konstrukcji inżynierskich, przy czym weźmiemy głównie pod uwagę jej ewolucję poprzez teorię sprężystości do teorii plastyczności i teorii ich nośności granicznej.

Rzut oka wstecz na rozwój historyczny nauk inżynierskich poucza, że szereg podstawowych dyscyplin w tej dziedzinie przebiegał kolejno przez trzy stadia, zanim osiągnął taki stan, który umożliwia wyrobienie sobie pewnego, choćby w przybliżeniu zamkniętego obrazu interesujących nas zjawisk.

Te trzy stadia można by określić kolejno jako: (1) stadium empiryczne, (2) stadium teoretyczne i (3) stadium dojrzałe, [34].

W stadium (1), *empiryzmu*, postępuje się zazwyczaj krok za krokiem, zbierając obserwacje, notując sukcesy i rejestrując popełnione błędy.

Stadium (2), stojące pod znakiem rozwoju *teorii*, nacechowane jest z reguły tendencją zbudowania koncepcji matematycznej, która — oparta o niewielką liczbę podstawowych założeń — pozwalać ma na możliwe syntetyczne ujęcie interesujących nas zjawisk.

W stadium (3) teoretycy pouczeni już zostali przez niepowodzenia zbudowanych przez siebie koncepcji, że każda teoria wymaga stałej kontroli i weryfikacji przez doświadczenie, gdyż zasięg każdej z nich jest z konieczności ograniczony. Stadium to charakteryzuje metoda, która z jednej strony posługuje się teorią, z drugiej natomiast korzysta stale z eksperymentalnej kontroli i wynikających stąd rektyfikacji; stadium to można by nazwać *dojrzałym*.

Nie inaczej jest z *teorią płyt*. Ze stanu empiryzmu problem ten przeszedł w stadium teoretyczne, opanowane głównie przez *metody matematycznej teorii sprężystości*. Dziś teorię tę uznajemy w zasadzie za słuszną, zakreślamy jej jednak pewne granice, wiemy bowiem, że ujmuje ona tylko pewną ściśle ograniczoną fazę, z reguły związaną ze stanami, które można by — w przybliżeniu — nazwać użytkowymi.

Wszystko, co następuje dalej, posłuszne już jest innym prawom. Tu interweniuje najpierw *nieliniowa teoria sprężystości*, następnie *teoria plastyczności*, zamknięta w swym stadium końcowym — *stanem granicznym*, związanym z pojęciem «*granicznej nośności*».

Znajomość tych dalszych stadiów, zwłaszcza zaś zjawisk i zależności zachodzących na *granicy nośności*, ma podstawowe znaczenie dla realistycznej oceny zachowywania się ustrojów nośnych, a zatem również płyt, co z kolei stanowi należyłą podstawę do racjonalnego ich projektowania.

Nie znaczy to bynajmniej, by teoria sprężystości, w szczególności ta, którą ująć można nazwą «klasycznej», miała być niepotrzebna. Wprost przeciwnie: naukowo poprawne podejście wymaga znajomości wszystkich — o ile możliwości — stadiów, te bowiem dopiero w całości dają pełny obraz badanych zjawisk. Zobaczmy zresztą jeszcze później, że wyniki uzyskane w oparciu o założenia, które wprowadza do rozważań teoria sprężystości, będą potrzebne przy poszukiwaniu niektórych rozwiązań związanych ze stanami granicznymi, jeśli chcemy, by rozwiązania te były poprawne z punktu widzenia ich zastosowań w praktyce projektawczej.

Toteż spór zwolenników teorii sprężystości ze zwolennikami teorii plastyczności o wyższość tej lub tamtej koncepcji jest, jak uważam, zbędny i polega na nieporozumieniu. O czym innym mówi jedna teoria, a o czym innym druga; ważne zaś są i jedna, i druga.

Będziemy mieli okazję, mimo iż zająć się chcemy zagadnieniami nośności granicznej płyt ortotropowych, ostatnim zatem stadium przed wyczerpaniem ich technicznej użyteczności, wskazać na konieczność znajomości rozwiązań opartych o metody teorii sprężystości (por. p. 12).

2. Jedna z zasadniczych różnic między stanem sprężystym a stanem plastycznym polega na tym, że w stanie sprężystym zmiana naprężeń pociąga za sobą niemal natychmiast zmianę odkształceń, podczas gdy odkształcenie plastyczne wytwarza się powoli, tak że prędkość odkształcenia plastycznego jest w ogóle mała w porównaniu z prędkością odkształcenia sprężystego.

W związku z tym podstawowe równania mechaniki *ośrodków plastycznych* różnią się zasadniczo od podstawowych równań *ośrodków sprężystych* przede wszystkim tym, że z naprężeniami są związane nie tylko *same odkształcenia*, lecz zarazem *i szybkości odkształceń*.

Nadto istnieje jeszcze i ta różnica, że w stanie sprężystym stan odkształcenia wyznacza *jednoznacznie* związany z nim stan naprężenia; w przypadku stanów plastycznych związek ten jest luźniejszy, bowiem stan naprężenia uzupełnić zawsze można dodatkowo *tensorem kulistym*, a zatem takim, który określa ciśnienie hydrostatyczne<sup>1)</sup>. Warto też nadmienić, że *współczynnik proporcjonalności*, występujący w zależnościach

<sup>1)</sup> Pochodzi to stąd, że, jak wykazały doświadczenia, gęstość materiału w miarę wzrostu odkształceń plastycznych podlega jedynie zmianom bardzo małym (rzędu  $\frac{1}{2}\%$ ; por. [33]). Stąd przyjmować się zwykło, że materiał w stanie plastycznym uważać można za nieściśliwy.

między szybkościami odkształceń a naprężeniami, pozostaje nieoznaczony<sup>2)</sup> 3).

3. Ujmując sprawę całkiem ogólnie, powiedziec można, że w fazie odkształceń plastycznych wchodzi w grę nowa zmienna, mianowicie czas  $t$ .

Całokształtem problemów, które na tym tle powstają, zajmuje się młoda dyscyplina naukowa, którą nazwano «reologia»<sup>4)</sup>.

Teoria plastyczności eliminuje na ogół parametr  $t$ . W zagadnieniach teorii konstrukcji inżynierskich wychodzi się często z tego rodzaju założeń.

Również w podejściu obecnym pominiemy wpływ czasu; można by zatem — zgodnie z jedną z wysuniętych niedawno propozycji — powiedzieć, że zagadnienia rozpatrywać będziemy nie jako *reoplastyczne*, lecz jako *statoplastyczne*.

Ograniczenia nasze pójdą jednak jeszcze nieco dalej. W ogóle bowiem zagadnienie teorii plastyczności studiować można (między innymi) na dwa sposoby:

(a) schemat *szttywno-plastyczny* zaniedbuje wszystkie odkształcenia sprężyste;

(b) schemat *sprężysto-plastyczny* poszukuje rozwiązań dla zagadnień, w których uwzględnia się zarówno odkształcenia sprężyste, jak i plastyczne.

Schemat (a) jest prostszy, znajduje przy tym jednak w wielu przypadkach swe uzasadnienie w realnych warunkach fizykalnych badanych zjawisk. Będzie o tym mowa jeszcze później. Toteż dla obecnych rozważań zatrzymamy się przy jego założeniach.

O ile chodzi o zagadnienie *nośności granicznej płyt*, to założenie powyższe pozwala na znaczne uproszczenie toku rozważań.

Gdy będzie mowa o płytach ortotropowych, będziemy mieli na myśli przede wszystkim płyty żelbetowe, które w zastosowaniach technicznych są ich najbardziej charakterystycznym reprezentantem.

---

<sup>2)</sup> Por. np. R. Mises, [17], lub W. W. Sokółowski, [33].

<sup>3)</sup> Jest to równoznaczne ze stwierdzeniem, że proporcjonalna zmiana wszystkich prędkości nie ma wpływu na stan naprężenia. Okoliczność ta, oznaczająca w zasadzie, że tarcie wewnętrzne jest niezależne od szybkości, odróżnia zasadniczo (wyidealizowane) stałe ciało plastyczne od (wyidealizowanej) cieczy lepkiej, w której między naprężeniem a szybkością zachodzi zależność bezpośredniej proporcjonalności. Por. [17].

<sup>4)</sup> Nazwa pochodzi ze źródłosłowu greckiego « $\rho\epsilon\iota\nu$ », co oznacza «płynąć»; naukę samą nazwać byśmy mogli nauką o odkształceniu i płynięciu materii. Na marginesie warto przypomnieć, że filozofia H e r a k l i t a opierała się, jako na jednym ze swych filarów; na założeniu « $\pi\acute{\alpha}\nu\tau\alpha \rho\epsilon\iota$ » («wszystko płynie»).

Samą metodę, którą posługuje się teoria nośności granicznej płyt, uważać nam wolno za znaną<sup>5)</sup>. Przypomnimy jedynie pokrótce założenia wyjściowe, z których teoria ta korzysta.

4. Założenia te streścić można w postaci następującej:

(1) Odształcenia sprężyste, w szczególności zakrzywienia płyty w tych jej częściach, w których naprężenia nie osiągnęły jeszcze granicy plastyczności, możemy w pierwszym przybliżeniu pominąć w porównaniu z odształceniami plastycznymi, występującymi w przekrojach, w których nastąpiło złamanie<sup>6)</sup>. Poszczególne płyty płyty, oddzielone od siebie liniami załomów, uważać zatem możemy za płaskie; wynika stąd, że linie załomów, w których stykają się poszczególne płyty, są liniami prostymi.

Badania doświadczalne potwierdzają ten wniosek<sup>7)</sup>.

(2) Pomijamy utwardzenie (wzmocnienie) stali występujące po przekroczeniu granicy plastyczności; stwarzamy tym sposobem pewną dodatkową rezerwę na korzyść bezpieczeństwa ustroju.

(3) Przy stałej grubości płyty i uzbrojeniu rozłożonym równomiernie moment graniczny «jednostkowy» (tzn. przypadający na jednostkę długości) albo też «właściwy» uważać możemy za niezmienny.

Przy takich założeniach teoria sama kształtuje się w sposób prosty. Zaznaczają się przy tym dwie możliwości:

(a) albo ustalić można warunki równowagi dla każdego z płatów, na które rozpada się płyta; jest to droga, która prowadzi do celu w sposób niezawodny, wymaga jednak rachunków dość żmudnych i kłopotliwych<sup>8)</sup>; albo też

(b) posłużyć się można zasadą prac przygotowanych (wirtualnych); na tej drodze rozwiązanie uzyskać można w sposób na ogół szybki i prosty.

Samą zasadą prac wirtualnych jest słuszna — jak wiadomo — ogólnie, bez względu na to, z jakiego materiału zbudowane jest rozpatrywane ciało; możemy się nią zatem posłużyć przy dowolnych zależnościach stanu odształcenia od stanu naprężenia, a więc równie dobrze dla materiałów sprężystych, jak i elasto-plastycznych (będących w równowadze).

Odpowiednie sformułowanie tej zasady w stosunku do interesującego nas zagadnienia pozwoli na wyeliminowanie z rachunku wpływu sił po-

<sup>5)</sup> Por. prace [2], [4], [11], [12], [19], [20], [21], [23], [29], [31].

<sup>6)</sup> Odnajdujemy w tym założeniu cechy właściwe dla uproszczonego schematu sztywno-plastycznego (w odróżnieniu od ogólniejszego schematu sprężysto-plastycznego).

<sup>7)</sup> Przypadki, w których występują siły skupione albo obciążenia o intensywnych lokalnych zagęszczeniach zbliżone w działaniu swym do sił skupionych, wymagają odmiennego podejścia, które jednak uważać można za przypadek szczególny powyższego założenia (1). Por. np. prace autora [21] i [23].

<sup>8)</sup> Por. np. K. W. J o h a n s e n, [11].

przeczynnych (występujących np. w punktach «węzłowych», tzn. w punktach zbiegu większej liczby linii załomu). Sformułowanie to operować będzie w zasadzie obrotami poszczególnych płatów płyty<sup>9)</sup>.

W takich okolicznościach, gdy nadto odkształceń sprężystych wolno nie brać pod uwagę, pracę wewnętrzną wykonywać będą jedynie momenty łamiące; ewentualne siły poprzeczne (np. węzłowe) nie wnoszą do niej niczego, skoro dwa przylegające do siebie płyty nie doznają wzajemnych przemieszczeń pionowych. Praca momentów będzie proporcjonalna do wzajemnych obrotów w liniach załomu.

5. W pracy obecnej spróbujemy sformułować kilka zasadniczych myśli, na których opiera się teoria stanów granicznych ustrojów nośnych, w szczególności płyt.

Zagadnieniami nośności granicznej zajmowało się kilku badaczy. Wnieśli oni do tego zagadnienia istotne dla jego postępu myśli i podali w oparciu o nie interesujące rozwiązania konkretnych przypadków. Do nich należą: A. Ingerslev, [10], K. W. Johansen z podstawowymi w tej dziedzinie pracami, [11], [12], A. A. Gwozdiew, [4], A. R. Rżanicyń, [31], H. Crämer, [2], F. Menyhárd, [16], W. Prager [29], autor, [19], [20], [21], [23], [24], [25].

Rozwiązania podane przez tych autorów dotyczą (uproszczonego) podejścia opartego na objaśnionym powyżej schemacie sztywno-plastycznym.

Podstawy (ściślejszej) teorii płyt w reżimie sprężysto-plastycznym podali A. A. Iljuszyn, [9], oraz W. W. Sokołowski, [33].

Przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień technicznych schemat pierwszy (sztywno-plastyczny) znajduje częste zastosowanie, w realnych bowiem warunkach fizykalnych założenia, na których się opiera, znajdują, jak już o tym była mowa, należyte swe uzasadnienie.

Mimo iż problemom związanym z takim podejściem poświęcono już wiele uwagi, wydaje się, że nie została jednak dotychczas jasno ujęta myśl zasadnicza, która stanowi podstawę rozważań większości autorów. Podejmiemy próbę sformułowania tego punktu wyjściowego, przy czym okaże się, że jest on słuszny nie tylko dla problemu nośności granicznej płyt, lecz dla szerszej klasy problemów teorii ustrojów nośnych.

Graniczny stan równowagi, który nas interesuje, związany być musi z *najmniejszą* wartością obciążenia, prowadzącego do plastycznego wyczerpania nośności układu.

Należy nadmienić, że rozwiązanie uzyskane na tej drodze jest identyczne z rozwiązaniem, które znajdziemy, gdy rozpatrywane zagadnienie zanalizujemy w oparciu o poszukiwanie *największej* wartości momentu

<sup>9)</sup> Zagadnienie to zostało szczegółowo omówione w pracy autora [20].

łamiącego  $M$ , która jest zgodna z warunkami stanu równowagi granicznego.

Gdy przez  $x_k$  oznaczymy parametry charakteryzujące siatkę zniszczenia, moment graniczny otrzymamy w postaci funkcji  $M = F(x_k, Q)$ ; z postulatu, o którym była mowa, wynika warunek, w myśl którego linie załomów płyty są tymi liniami, wzdłuż których moment zginający osiąga swą maksymalną wartość,  $\partial M / \partial x_k = 0$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )<sup>10)</sup><sup>11)</sup>.

W związku z powyższym odpowiedni tok myśli wychodzi z założenia, że dla każdego *dowolnie* obranego mechanizmu zniszczenia przynależne obliczeniowo obciążenie łamiące będzie większe albo co najmniej tak duże, jak łamiące obciążenie rzeczywiste. Łatwo to zweryfikować, gdy się zważy, że różnica między rzeczywistą a odmienną od niej siatką załomów danej płyty polega na tym, iż dla siatki niepoprawnej momenty zginające przekraczałyby wartość granicznego momentu uplastycznienia; podczas gdy w przypadku siatki poprawnej wartość ta, rzecz jasna, nigdzie nie może być przekroczona.

Przeciwstawienie sobie jednego i drugiego sposobu rozumowania (warunek na maksimum i warunek na minimum) wykazuje, że — ogólnie biorąc — w przypadku pierwszym poszukuje się przy *zadanych obciążeniach* tego mechanizmu zniszczenia, który związany jest z ekstremalną (największą) wartością momentu łamiącego; w przypadku natomiast drugim poszukuje się takiego mechanizmu zniszczenia, który — przy *zadanej wartości momentu łamiącego* — prowadzi do możliwie najmniejszego obciążenia.

Można bez trudu stwierdzić równoznaczność obydwu podanych powyżej rozumowań i opartych o nie wyników.

W przypadku poszukiwania rozwiązań konkretnych można zatem wyjść z jednego lub z drugiego punktu wyjściowego. Jeśli decydujemy się na powiązanie naszych rozumowań z pojęciem największego momentu, to ma to swe uzasadnienie w fakcie, że oparty na powyższym pojęciu tok

<sup>10)</sup> O związku warunku tego z ekstremalnymi zasadami dotyczącymi pracy plastycznej będzie mowa na innym miejscu, [24]; tam też rozpatrzone jest krytycznie twierdzenie o «maksymalnym oporze plastycznym»<sup>14)</sup> (przy zwróceniu uwagi na konieczność należytej definicji pojęcia «opór»). Por. też «zasadę kinematyczną» o plastycznym mechanizmie zniszczenia, [4], [9], [18].

<sup>11)</sup> M. A. Sadowsky, [32], a za nim W. Prager, [27], i G. H. Handelman, [5], posłużyli się z powodzeniem zasadą największego plastycznego oporu w przypadku ciał idealnie plastycznych do rozwiązania względnie do weryfikacji znanych już rozwiązań zagadnień elastoplastycznych (jak np. skręcania z rozciąganiem itd.); zasadę tę uważać można za przypadek szczególny zasady największej pracy plastycznej. Na temat jej zasięgu i ograniczeń por. R. Hill, [6], oraz autora, [24]. Dla uniknięcia nieporozumień zwrócić należy szczególną uwagę na konieczność poprawnej i odpowiadającej istotnej ich treści interpretacji każdego ze wspomnianych twierdzeń.



myśli, przy zachowaniu ścisłości<sup>12)</sup>, odznacza się równocześnie wielką nacznością jego sensu fizykalnego, co zarówno z uwagi na rozbudowę teorii, jak i jej praktyczne zastosowania uważać należy za szczególnie korzystne.

6. Drugim podstawowym zagadnieniem, które ma doniosłe znaczenie tak dla rozbudowy teorii, jak i dla jej praktycznych zastosowań, jest zagadnienie *anizotropii struktury płyt*.

Dla praktyki projektodawczej szczególne znaczenie ma przypadek anizotropii ortogonalnej («ortotropii»), która w przypadku przestrzennym znamieną jest tym, że ciało w każdym swym punkcie posiada trzy płaszczyzny symetrii strukturalnej. Własności te spowodowane być mogą albo budową wewnętrzną materiału, albo też obranymi dyspozycjami konstrukcyjnymi.

Udowodnić można, że w teorii nośności granicznej każdy przypadek ortotropii, bez względu na zachodzące warunki, tzn. przy dowolnym ukształtowaniu płyty, przy dowolnym jej obciążeniu i przy dowolnych warunkach brzegowych, sprowadzić można do zagadnienia płyty izotropowej i to przez zastosowanie prostej transformacji liniowej.

Transformację tę rozszerzyć można również na płyty «podwójnie ortotropowe». Zagadnienia powyższe omawia szczegółowo oddzielna praca autora, [23].

Podobnie ma się zresztą sprawa z ortotropowymi cienkościennymi powłokami cylindrycznymi, tak że i w takim przypadku zagadnienie ortotropii sprowadzić można do zagadnienia izotropii, [24].

Nadmienić jeszcze warto, że również przypadki anizotropii «ukośnej» sprowadzić można do zagadnienia struktury izotropowej, przy czym zachodzi pewna analogia między problemem skręcania sprężystych prętów anizotropowych a problemem nośności granicznej płyty o strukturze anizotropowej. I tak jak w problemie pierwszym pręt «ukośnie» anizotropowy można było odwzorować na układ izotropowy<sup>13)</sup>, tak samo stadium graniczne płyty «ukośnie anizotropowej» sprowadzić można do analogicznego stadium płyty izotropowej. Równania transformacyjne mają przy tym formę podobną jak równania (2.2) i (2.3) podane w pracy autora, [22], dla pręta skręcanego.

7. Ważnym zagadnieniem jest problem *plyt ciągłych*. Teoria nośności granicznej również i to zagadnienie pozwala rozwiązać w sposób prosty.

Jeśli także w tym przypadku wyjdziemy z założenia schematu sztywno-plastycznego, jak o tym mówiliśmy uprzednio, to otrzymamy i w takim układzie siatkę zniszczenia w postaci linii prostych. Ścisłe biorąc trzeba by uwzględnić jeszcze szczególne zachowanie się płyt w naro-

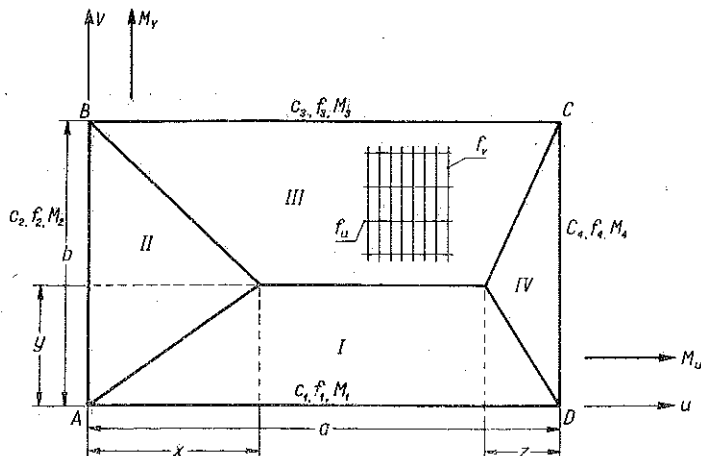
<sup>12)</sup> Por. treść odsyłacza <sup>11)</sup>.

<sup>13)</sup> Por. pracę autora [22].

zach, gdzie linie załomów wykazywać mogą rozwidlenia. Przy płytach ciągłych zjawisko to nie ma znaczenia.

Rozpatrzmy płytę ciągłą «dwuwymiarowo», tzn. w kierunkach  $u$  oraz  $v$ .

Założmy, żeby od razu nawiązać do potrzeb praktycznych i ortotropię określić za pomocą parametrów o ściśle określonym sensie fizycznym, że chodzi znów o krzyżowo zbrojoną płytę żelbetową (por. rys. 1), dla której charakterystyczne przeszłowe momenty graniczne, liczone na jednostkę szerokości, oznaczymy przez  $M_u$  oraz  $M_v$  (dodatnie), zaś momenty graniczne nadpodporowe, również wzięte na jednostkę szerokości, przez  $M_1, M_2, M_3$  oraz  $M_4$  (ujemne).



Rys. 1

Wartości tych momentów mają być związane ze sobą przez relacje<sup>14)</sup>

$$(7.1) \quad \begin{cases} M_v = \kappa M_u, \\ M_i = \kappa_i M_u. \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Jeśli sformułujemy z kolei równanie pracy wirtualnej, to przybierze ono postać

<sup>14)</sup> Powyższe wartości momentów łamiących związane są z przynależnym do nich odpowiednio zbrojeniem, ułożonym w dwóch wzajemnie prostokątnych kierunkach; zbrojenie to, liczone na jednostkę szerokości, oznaczamy przez  $f_u$  oraz  $f_v$  (dołem) i przez  $f_1, f_2, f_3$  oraz  $f_4$  (góra, nad podporami). Zbrojenie sięga w badane pole z pól sąsiednich.

$$(7.2) \quad \sum_{i=1}^4 Q_i \delta w_i = (M_u + M_1) c_1 \delta \varphi_1 + (M_v + M_2) c_2 \delta \varphi_2 + \\ + (M_u + M_3) c_3 \delta \varphi_3 + (M_v + M_4) c_4 \delta \varphi_4 = M_u \sum_{i=1}^4 \left[ \alpha \frac{1 - (-1)^{i+1}}{2} + \alpha_i \right] c_i \delta \varphi_i,$$

skąd

$$(7.3) \quad M_u = \frac{\sum_{i=1}^4 Q_i \delta w_i}{\sum_{i=1}^4 \left[ \alpha \frac{1 - (-1)^{i+1}}{2} + \alpha_i \right] c_i \delta \varphi_i}.$$

W wyrażeniach powyższych przez  $Q_i$  oznaczyliśmy obciążenia zewnętrzne przypadające na poszczególne płyty płyty  $i$ , przez  $\delta w_i$  natomiast przemieszczenia wirtualne związane z ich wypadkowymi. Reszta oznaczeń uwidoczniła jest na rys. 1.

W wyrażeniach występują nieznanne na razie jeszcze parametry  $x_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ), które obliczamy z równań

$$(7.4) \quad \frac{\partial M_u}{\partial x_1} = \frac{\partial M_u}{\partial x_2} = \frac{\partial M_u}{\partial x_3} = 0.$$

Na rysunku 1 parametry te oznaczono dla uproszczenia przez  $x, y, z$ . Równań takich uzyskujemy tyle, ile istnieje poszukiwanych parametrów. Zadanie zatem uważać można w zasadzie za rozwiązane.

Co przy tym jednak podkreślić należy jako rzecz charakterystyczną, to okoliczność, że w przedstawionych powyżej zależnościach występują zawsze pewne *sumy momentów*, i to sumy złożone każdorazowo z momentu przęsłowego  $M_u$  powiększonego o moment podporowy  $M_1$  lub  $M_3$  względnie, zupełnie podobnie, z momentu przęsłowego  $M_v$  powiększonego o moment podporowy  $M_2$  lub  $M_4$ .

Również uzyskane rozwiązania informować będą zawsze tylko o wartości sum

$$(7.5) \quad \begin{cases} (M_u + M_1) = F_1(x_k, q), \\ (M_v + M_2) = F_2(x_k, q), \\ (M_u + M_3) = F_3(x_k, q), \\ (M_v + M_4) = F_4(x_k, q). \end{cases}$$

Wynika stąd, że jest rzeczą obojętną, jak w ramach tych sum kształtować się będzie wzajemny stosunek  $M_u : M_1$  względnie  $M_u : M_3$ , albo  $M_v : M_2$  względnie  $M_v : M_1$ .

To znów ze swej strony wiąże się ściśle z dyspozycją zbrojenia. Będzie zatem z punktu widzenia nośności granicznej ustroju rzeczą obojętną, czy np. zbrojenie dolne wzmocnimy, a górne równocześnie odpowiednio osłabimy, czy też — na odwrót — przerzucimy zbrojenie na górę, a osłabimy równocześnie odpowiednio dół. Nie zmieni to nośności granicznej ustroju, konstruktorowi umożliwi natomiast dużą swobodę wyboru.

Dla belki ciągłej («jednowymiarowej») okoliczność powyższa jest już znana. Jest rzeczą ciekawą, że dla płyt ciągłych «dwuwymiarowo» fakt ten — w ogólniejszym ujęciu — potwierdza się w podobnej formie.

Jeśli zatem z góry założymy wartości dla  $M_u$ ,  $M_v$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ , możemy z czterech równań (7.5) obliczyć obciążenie  $q$  i 3 parametry, a zatem siatkę załomów. Na odwrót, wychodząc z obciążenia  $q$  i z pewnej siatki załomów, można z tych równań wyznaczyć cztery sumy ( $M_u + M_1$ ), ...

Dorzucić warto, że dowód powyższy poprowadzić można jeszcze nieco ogólniej, mianowicie dla płyt o dowolnym kształcie (przy dowolnych równocześnie warunkach podparcia). Sens jego jest w istocie podobny, ujęcie analityczne tylko nieco bardziej złożone, operować bowiem trzeba nie bezpośrednio momentami łamiącymi  $M_1$  ... itd. na krawędziach, lecz ich składowymi  $M_{1u}$ ,  $M_{1v}$ , ... itd.

W p. 11 podanych jest dla objaśnienia toku postępowania kilka charakterystycznych z szeregu rozwiązanych konkretnie zadań, które wybrane zostały w oparciu o najczęściej w praktyce spotykane przypadki obciążeń, jak np. obciążenie trapezowe, obciążenie równomiernie rozłożone itd.

Otwartym pozostałoby jeszcze pytanie, jak daleko górna armatura  $f_1$ , ... sięgać musi w badane pole, by w istocie doszła do skutku siatka zniszczenia z rys. 1.

Na pytanie to odpowiedź jest nietrudna; ponieważ chodzi jednak przy tym o zagadnienie niedużego szczegółu, wydaje się, że możemy je obecnie, kiedy zajmujemy się zagadnieniami o charakterze podstawowym, pominąć; omówienie jego nastąpi oddzielnie.

Wyniki podobne jak dla («dwuwymiarowo») ciągłych płyt uzyskuje się dla *zbiorników prostokątnych*, które, w rzeczy samej, złożone są z tego rodzaju płyt ciągłych. Nieco bardziej złożone zagadnienie spotykamy w analizie *stropów grzybkowych*, kiedy linie załomów nie muszą w ogólnym przypadku pokrywać się z liniami łączącymi główce słupów.

8. Krótką tylko wzmiankę poświęcimy w tym miejscu prostej analogii mechanicznej, która umożliwia rozwiązywanie złożonych zagadnień z dziedziny teorii nośności granicznej płyt. Mamy na myśli *analogię*

«wzgórza piaskowego», która — jak wykazano to na innym miejscu<sup>15)</sup> — ma pełne zastosowanie zarówno w zagadnieniu płyt izotropowych; jak i ortotropowych.

Metoda ta pozwala unaocznic zawiłe nawet przypadki o trudnych warunkach brzegowych i prowadzi do rozwiązań na drodze podobnej, jaka znana jest z zagadnienia analogii membranowej L. Prandla dla prętów skręcanych sprężysto oraz analogii A. Nádai'a dla prętów skręcanych w reżimie plastycznym.

9. Oddzielna wzmianka należy się możliwości traktowania zagadnień innych — poza płytami — typów konstrukcji powierzchniowych z punktu widzenia ich nośności granicznej, przy czym założenia podstawowe pozostają w gruncie rzeczy podobne do tych, jakie czyniliśmy dotychczas. Dotyczy to przede wszystkim *powłok cylindrycznych*.

Wedle pierwszych uzyskanych dla tego zagadnienia wyników rozróżnić przy tym należy *dwa* charakterystyczne typy ustrojów: powłoki długie i powłoki krótkie.

*Powłoki długie* (a zatem powłoki, których długość znacznie przekracza szerokość) zachowują się w stanie granicznym podobnie jak belki o odpowiednim przekroju. Przypadki takie można zatem sprowadzić do przypadku nośności granicznej odpowiednio wyprofilowanej belki.

W istocie swej odmienne od nich są *powłoki krótkie* (a zatem powłoki, których długość i szerokość są tego samego rzędu wielkości). Tutaj dochodzi już w pełni do głosu ich «powierzchniowy» sposób działania, co znajduje również swój wyraz w siatce zniszczenia.

Wstępne w tej dziedzinie badania teoretyczne wymagają jeszcze doświadczalnej weryfikacji; mowa będzie o nich oddzielnie.

10. Jedna jeszcze okoliczność zasługuje na zwrócenie na nią uwagi.

Przy rozpatrywaniu poruszonych zagadnień mogliśmy stwierdzić, że w gruncie rzeczy chodzi o znalezienie odpowiedzi na *dwa* zasadnicze pytania; dotyczą one sposobu, w jaki płyta wyczerpuje swą nośność (mechanizm plastycznego załamania), oraz wartości związanego z nim momentu granicznego (łamiącego).

Łatwo przy tym stwierdzić, że w zagadnieniach tych nie obowiązuje już *zasada superpozycji*. Dorzucenie do rozpatrywanego schematu nowej siły albo też skasowanie części sił działających na ustrój prowadzi w zasadzie do zmiany zarówno siatki zniszczenia, jak i do zmiany związanej z nią wartości momentu łamiącego. Powodem tego jest nieliniowy charakter podstawowych zależności charakteryzujących stany na granicy nośności rozpatrywanych ustrojów.

<sup>15)</sup> Zagadnienie to, na którego charakter zwrócił autorowi uwagę prof. W. Nowacki, omówiono w pracy [21], w której podano możliwość stosowania tej analogii przede wszystkim w przypadkach obciążenia równomiernego.

Okoliczność powyższa różni się zasadniczo od zależności znanych potocznie z «klasycznych» metod analizy statycznej, które opierają się na (liniowo-) sprężystych własnościach rozpatrywanych układów. Tam zasada superpozycji jest, jak wiadomo, w ogóle słuszna: Oznacza to zatem np., że pewne skutki (np. stany odkształcenia lub naprężenia) spowodowane przez pewne przyczyny (np. obciążenia), rozpatrywać można niezależnie od skutków pochodzących od innych przyczyn.

W zastosowaniach praktycznych zasada superpozycji pozwala na uproszczoną analizę interesujących nas zjawisk. Korzysta się z niej zazwyczaj w ten sposób, że, rozpatrzywszy niezależnie od siebie skutki spowodowane poszczególnymi przyczynami, sumuje się je następnie, poszukując np. najniekorzystniejszej ich kombinacji (w przekrojach «krytycznych»).

W teorii nośności granicznej każdą kombinację przyczyn trzeba w zasadzie badać oddzielnie. Jest to rzeczą zrozumiałą, gdy się zważy, że rozpatrywane związki zatraciły już charakter liniowy.

Okoliczność ta stanowi niewątpliwie pewne utrudnienie; można jednak wykazać, że w konkretnych przypadkach daje się w sposób stosunkowo prosty ująć poprawnie najniekorzystniejszą kombinację obciążeń.

11. Rozważania przedstawione w p. 7 objaśnimy w oparciu o konkretny przykład, dotyczący ustroju płytowego ciągłego «dwuwymiarowo» o dowolnej ilości pól. Bierzemy pod uwagę jedno z pól prostokątnych,  $a \times b$ , przymując, że zbrojenie «dołem» wynosi w dwóch kierunkach głównych  $f_u$  oraz  $f_v$ ; zakładamy, że odpowiednie zbrojenie «górami», zgodnie zresztą z danymi z p. 7, wynosi przy odpowiednich bokach prostokąta  $f_1, f_2, f_3$  i  $f_4$ . Momenty dodatnie oznaczamy przez  $M_u$  oraz  $M_v = \kappa M_u$ , ujemne natomiast przez  $M_i = \kappa_i M_u$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Rozpatrujemy obciążenie płyty «płaskie», tzn. zmienne według równania

$$(11.1) \quad q(u, v) = Au + Bv + C.$$

Ustawiając równanie wynikające z zastosowania zasady prac wirtualnych

$$(11.2) \quad \delta L = \delta V$$

oraz wprowadzając oznaczenia

$$(11.3) \quad \begin{cases} 1 + \kappa_1 = a_1 (\kappa + \kappa_4), \\ \kappa + \kappa_2 = a_2 (\kappa + \kappa_4), \\ 1 + \kappa_3 = a_3 (\kappa + \kappa_4), \end{cases}$$

otrzymamy

$$(11.4) \quad M_u(x + \kappa_4) \left( a_1 \frac{a}{y} + a_2 \frac{b}{x} + a_3 \frac{a}{b-y} + \frac{b}{z} \right) = \\ = \frac{b}{24} [A z^3 - A x^3 - 2 B x y - 2 B y z - (B b + 4 C) x + 4 B a y - \\ - (4 A a + B b + 4 C) z + 6 A a^2 + 4 B a b + 12 C a].$$

Dla znalezienia  $\max M_u$  i siatki zniszczenia odpowiadającej wartościom  $a_1, a_2, a_3$  korzystamy kolejno z warunków

$$(11.5) \quad \frac{\partial M_u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M_u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial M_u}{\partial z} = 0.$$

Otrzymujemy w ten sposób układ równań

$$(11.6) \quad \begin{cases} M_u(x + \kappa_4) a_2 \frac{b}{x^2} = \frac{b}{24} (2 A x + 2 B y + B b + 4 C), \\ M_u(x + \kappa_4) \left[ a_1 \frac{a}{y^2} - a_3 \frac{a}{(b-y)^2} \right] = \frac{b}{24} (2 B x + 2 B z - 4 B a), \\ M_u(x + \kappa_4) \frac{b}{z^2} = \frac{b}{24} (2 B y - 2 A z + 4 A a + B b + 4 C). \end{cases}$$

Równania (11.6) łącznie z równaniem (11.4) stanowią układ równań, z którego znaleźć można  $\max M_u$  wraz z nieznanymi dotychczas parametrami  $x, y, z$ .

Układ powyższy jest dość zawiły i jego rozwiązanie, nawet przybliżone, nastęrczałoby pewne praktyczne trudności. Wobec tego zakładamy dowolne wartości parametrów  $x, y, z$  i znajdujemy odpowiadające im wielkości

$$(11.7) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{y^2}{K a z^2} [3 A z^2 - 3 A x^2 - 6 B x y - 6 B z y - 8 C x + \\ + 8 B a y - 8 (A a + C) z + 6 A a^2 + 12 C a], \\ a_2 = \frac{x^2}{K z^2} (2 A x + 2 B y + B b + 4 C), \\ a_3 = \frac{(b-y)^2}{K a z^2} [3 A z^2 - 3 A x^2 - 6 B x y - 6 B z y - 2(B b + 4 C) x + \\ + 8 B a y - 2(A a + B b + 4 C) z + 6 A a^2 + 4 B a b + 12 C a], \end{cases}$$

w których  $K = 2 B y - 2 A z + 4 A a + B b + 4 C$ .

Po wprowadzeniu w układ ten wartości  $x, y, z$ , związanych z obroną siatką zniszczenia, i po wyliczeniu stosunków mocy zbrojenia z równań (11.7), znajdujemy przynależną wartość  $\max M_u$  z dowolnego równania

układu (11.6) lub (11.4). Korzystając np. z trzeciego z równań układu (11.6) dochodzimy do wyniku

$$(11.8) \quad M_u = \frac{z^2(2By - 2Az + 4Aa + Bb + 4C)}{24(x + x_1)}$$

*Przypadki szczególne*

(1) Zakładamy, że płaszczyzna obciążenia jest równoległa do dłuższego boku prostokąta ( $a$ ), co jest równoznaczne z przyjęciem  $A = 0$ .

W takich warunkach najkorzystniej przyjąć  $x = z$ . Wartości  $a_i$  wyrażą się wzorami

$$(11.9) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{y^2 - 12Bxy - 16Cx + 8Bay + 12Ca}{ax^2(2By + Bb + 4C)}, \\ a_2 = 1, \\ a_3 = \frac{(b-y)^2 - 12Bxy - 4(Bb + 4C)x + 8Bay + 4Bab + 12Ca}{ax^2(2By + Bb + 4C)}. \end{cases}$$

Moment graniczny wynosi

$$(11.10) \quad M_u = \frac{x^2(2By + Bb + 4C)}{24(x + x_1)}$$

(2) Gdy założymy, że obciążenie jest równomierne, tzn.  $A = B = 0$ , zależności pomiędzy parametrami  $x, y, z$ , stosunkami mocy zbrojenia  $a_i$  i momentem łamiącym  $M_u$  otrzymamy w postaci

$$(11.11) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{y^2}{az^2} [3a - 2(x + z)], \\ a_2 = \frac{x^2}{z^2}, \\ a_3 = \frac{(b-y)^2}{az^2} [3a - 2(x + z)]; \end{cases}$$

$$(11.12) \quad M_u = \frac{qz^2}{24(x + x_u)}$$

Gdy przyjmiemy  $x = z$  oraz  $y = b/2$ , będzie

$$(11.13) \quad \begin{cases} a_1 = a_3 = \frac{b^2}{4az^2} (3a - 4z), \\ a_2 = 1; \end{cases}$$



$$(11.14) \quad M_u = \frac{q z^2}{24(\kappa + \kappa_4)}$$

(3) Przy obciążeniu płyty, charakteryzującym się równaniem

$$(11.15) \quad q(u, v) = Au + C,$$

a zatem ograniczonym płaszczyzną równoległą do krótszego boku prostokąta (b), odpowiednie charakterystyczne funkcje otrzymamy w postaci

$$(11.16) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{y^2 3Az^2 - 3Ax^2 - 8Cx - 8(Aa + C)z + 6Az^2 + 12Ca}{a z^2 - 2Az + 4Aa + 4C}, \\ a_2 = \frac{x^2}{z^2 - Az + 2Aa + 2C} Ax + 2C, \\ a_3 = \frac{(b-y)^2 3Az^2 - 3Ax^2 - 8Cx - 8(Aa + C)z + 6Aa^2 + 12Ca}{a z^2 - 2Az + 4Aa + 4C}, \end{cases}$$

$$(11.17) \quad M_u = \frac{z^2}{12(\kappa + \kappa_4)} (2Aa - Az + 2C).$$

12. Na zakończenie odpowiedzieć się godzi na jedno jeszcze pytanie.

Wdzieliśmy uprzednio w p. 7, że np. przy płycie ciągłej «dwuwymiarowo» konstruktor ma daleko idącą swobodę w sposobie jej zaprojektowania, w szczególności w decyzji dotyczącej wykonania zbrojenia. W ramach sum  $(M_u + M_1)$ ,  $(M_v + M_2)$ , ... można bowiem poszczególne ich składniki dowolnie zmieniać; nośność ustroju przez to nie ulegnie zmianie.

Zmienia się jednak, i to bardzo wyraźnie, obraz zniszczenia, a więc to, co nazwaliśmy siatką załomów.

Powstaje zatem pytanie, czy jest istotnie rzeczą obojętną, jak konstruktor rozwiąże ten problem; czy zatem np. przerzuci całe zbrojenie tylko na górę albo tylko na dół, albo też czy rozparceluje je w pewnym stosunku na górę i na dół.

Dla nośności granicznej, przynajmniej formalnie rzecz biorąc, jest to sprawą obojętną. W rzeczywistości jednak całkiem obojętne to nie jest. Istnieje po temu ważny powód.

W rzeczywistości możemy siatkę załomów, w zależności od wyboru wartości  $M_u$ ,  $M_v$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ , kształtować dowolnie. Ale najlepsze z tych (nieskończenie) wielu rozwiązań będzie to, poprzez które dojdziemy do takiej siatki zniszczenia, która dostosowuje się do rozkładu naprężeń w płycie, jaki panował w niej krótko uprzednio w aktualnym podówczas jeszcze stanie sprężystym.

Dlaczego rozwiązanie takie będzie właśnie rozwiązaniem najlepszym? Na to istnieje proste uzasadnienie. Przy przejściu od stanu sprężystego do stanu granicznego przegrupowanie sił wewnętrznych (a zatem momentów zginających, momentów skręcających i sił poprzecznych) oraz połączone z tym przegrupowanie naprężeń powinno się dokonywać w sposób najmniej brutalny.

Należy zatem dbać o to, by przejście to miało charakter możliwie ciągły, tak by stan końcowy wynikał z poprzedzającego go stanu sprężystego możliwie łagodnie i — o ile wolno użyć tego wyrażenia — bezboleśnie. Uniknie się w ten sposób pojawienia się dodatkowych zaburzeń strukturalnych, np. w postaci rys.

To jednak stanowi jeden powód więcej do uprzedniego naszego stwierdzenia, że znajomość samej tylko teorii nośności granicznej nie wystarczy, by zagadnienie opanować w całej jego rozciągłości.

Istnieje nadto jednak dalszy jeszcze powód, który sprawia, że rozwiązanie w obszarze sprężystym ma duże znaczenie. Okazuje się bowiem, że przy obciążeniach *zmiennych* poszukiwanie rozwiązania dla plastycznego wyczerpania nośności w istocie swej wychodzić musi ze znajomości ścisłej albo co najmniej przybliżonej analizy działania ustroju w jego stanie sprężystym.

Okoliczność ta stanowi wyraźną («dwuwymiarową») analogię do zjawisk zachodzących w przypadku («jednowymiarowych») elasto-plastycznych ustrojów prętowych.

Rozwiązanie naukowo poprawne uwzględniać musi zatem zarówno stan pierwszy, to znaczy sprężysty, jak też pozwolić na możliwie korzystne kształtowanie następującego po nim w dalszej ewolucji stanu granicznego.

Oznacza to, że nie wolno pominąć stadium wyjściowego, określonego przez podstawowe równanie różniczkowe teorii płyt sprężystych, które — jak wiadomo — brzmi

$$(12.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q(u, v)}{N}$$

dla przypadku struktury izotropowej, względnie

$$(12.2) \quad B \frac{\partial^4 w}{\partial u^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial u^2 \partial v^2} + C \frac{\partial^4 w}{\partial v^4} = q(u, v)$$

dla przypadku struktury ortogonalnie anizotropowej — ani też zaniedbać znajomości, jeśli to tylko będzie możliwe, jego rozwiązania dla rozpatrywanych warunków brzegowych i warunków obciążenia, aby tym sposo-

bem móc pokierować przejściem do stanu granicznego, który ujęliśmy uprzednio równaniami typu (11.2), w sposób możliwie bezzaburzeniowy<sup>16)</sup>.

Wydaje się, że na tej drodze znaleźliśmy należyty kontakt zagadnienia w nowym ujęciu z zagadnieniem w jego ujęciu klasycznym.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] N. I. B i e z u c h o w, *Teorja uprugosti i plasticznosti*, Moskwa 1953.
- [2] H. C r ä m e r, *Österr. Bauzeitschr.* 5 (1950); *Proc. S. Civ. Eng.* 2 (1952).
- [3] L. S. G i l m a n, *Inst. Bud. Przem. Leninigrad* 3 (1938).
- [4] A. A. G w o z d i e w, *Rasczet niesuszczej sposobnosti konstrukcji po metodu priedielnowo rawnowiesja*, Moskwa 1950.
- [5] G. H. H a n d e l m a n, *Quart. Appl. Math.* 1944, str. 351.
- [6] R. H i l l, *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* 1948, str. 18.
- [7] ——— *The Mathematical Theory of Plasticity*, 1950.
- [8] M. T. H u b e r, *VI Zj. Nauk PZITB, Gdańsk* 1949.
- [9] A. A. I l j u s z i n, *Plasticznost'* Moskwa-Leningrad 1948.
- [10] A. I n g e r s l e v, *Ingeniören* 1921, str. 507.
- [11] K. W. J o h a n s e n, *Mém. MSMKI* 1936.
- [12] ——— *Brudlinieteorier*, 1943.
- [13] ——— *III Kongr. MSMKI, Sprawozd. Końc.* 1948.
- [14] ——— *Pladeformler*, wyd. II, 1949.
- [15] S. G. L e c h n i c k i, *Teorja uprugosti anizotropnowo tiela*, Moskwa-Leningrad 1950.
- [16] I. M e n y h á r d, *Sprawozd. Węg. Akad. Nauk.* 1952.
- [17] R. M i s e s, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, *Zeitsch. angew. Math. Mech.* 3 (1928).
- [18] B. G. N e a l i P. S. S y m o n d s, *The Calculation of Plastic Collapse Loads*, *IV Kongr. MSMKI*, 1952.
- [19] W. O l s z a k, *Plastostatyka ustrojów nośnych*, *Inż. i Bud.* 7 (1953).
- [20] ——— *Teoria nośności granicznej płyt ortotropowych*, *Bud. Przem.* 7-8 (1953).
- [21] ——— *Probleme der Grenzlast-Theorie der orthotropen Platten*, (w druku).
- [22] ——— *Uogólnienie analogii membranowej do zagadnień układów anizotropowych*, *Arch. Mech. Stos.* 1 (1953).
- [23] ——— *Zagadnienie ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, *Arch. Mech. Stos.* 3 (1953).
- [24] ——— *Twierdzenie o największym oporze plastycznym i jego zastosowania* (w przygotowaniu).

<sup>16)</sup> Równania, podane tutaj ogólnie w postaci (11.2), zapisane są szczegółowo w pracach autora [20] i [23] dla płyt o strukturze izotropowej oraz ortotropowej.

- [25] ——— *Théorie de la charge limite des plaques orthotropes*, Biul. PAN 3 (1953).
- [26] ——— *Skrećanie prętów anizotropowych w świetle teorii odkształceń nieliniowych*, Arch. Mech. Stos. 3/4 (1951).
- [27] M. P r a g e r, Journ. Appl. Mech. A-238 (1943).
- [28] ——— Appl. Mech. Rev. 11 (1953).
- [29] W. P r a g e r i P. G. H o d g e, *Theory of perfectly plastic solids*, 1951.
- [30] A. R e u s s, *Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie*, Zeitschr. angew. Math. Mech. 3 (1930).
- [31] A. R. R ż a n i c y n, *Rasczet sooruzenij s uczetom plasticzeskich swojstw materialow*, Strojwojenmorizdat, Moskwa 1949.
- [32] A. M. S a d o w s k y, Journ. Appl. Mech. 1944.
- [33] W. W. S o k o ł o w s k i, *Teorja plasticznosti*, wyd. II, Moskwa-Leningrad 1950.
- [34] K. T e r z a g h i, Build. Res. Congr., Londyn 1951.

### Резюме

#### К ОСНОВНЫМ ВОПРОСАМ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ В ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНЧАТЫХ СИСТЕМАХ (Пластическое исчерпание несущей способности)

После вступительных замечаний относящихся к истории развития теории пластинок, в котором отмечено три последовательных стадии (эмпирическую, теоретическую и зрелую), работа характеризует положение по отношению друг к другу теории упругости (линейной и нелинейной), теории пластичности и теории несущей способности в пределах анализа пластинчатых систем. Затем работа приводит определение жёстко-пластического и упруго-пластического элементов и вкратце обсуждает исходные положения, которыми пользуется теория несущей способности рассматриваемых систем.

Работа рассматривает вопрос анизотропии структуры пластинок и показывает, что с помощью простой линейной трансформации эту проблему можно привести к задаче о изотропных пластинках.

В дальнейшем рассматривается важная проблема «двумерно» непрерывных пластинок, которую при помощи теории несущей способности можно решить простым образом. Это касается тоже прямоугольных резервуаров и безбалочных («грибовидных») перекрытий.

Работа кратко коснулась вопросов: аналогии «песчаного холма», обширно рассмотренной в работе автора, [24], и анизотропных цилиндрических оболочек.

Важным обстоятельством является факт, что в рассматриваемой теории не обязывает принцип суперпозиции. Это обусловлено нелинейным характером основных зависимостей, определяющих состояние предельной несущей способности обсуждаемых систем.

Для объяснения образа действия, работа приводит характерные примеры, избранные на основании встречающихся технических применениях случаи нагрузки.

В заключение доказана необходимость знания состояний предыдущих предельной стадии, в особенности упругого состояния.

#### R é s u m é

### SUR LES PROBLÈMES DE BASE DE LA THÉORIE DES ÉTATS LIMITES DES PLAQUES ORTHOTROPES

(L'épuisement plastique de la capacité portante)

Comme introduction, le travail donne quelques remarques sur les trois étapes (à savoir empirique, théorique et mûre) de l'évolution de la théorie des plaques et une étude comparative des théories de l'élasticité (linéaire et non-linéaire), de la plasticité et de la charge limite dans l'analyse théorique des plaques; ensuite on trouve la définition des schémas: «rigide-plastique» et «élastique-plastique» et un aperçu des hypothèses de la théorie de la charge limite des plaques orthotropes.

Le travail analyse le problème de l'anisotropie de la structure des plaques et démontre qu'en s'appuyant sur une transformation linéaire appropriée, ce problème peut être réduit à celui des plaques isotropes.

Ceci est suivi par une discussion du problème des plaques à continuité «bidimensionnelle» qui, basé sur la théorie de la charge limite, permet une simple solution. Ceci s'applique également aux réservoirs rectangulaires et aux dalles à champignons.

Quelques remarques succinctes sont consacrées à l'analogie mécanique de la «colline de sable», traitée en détail par l'auteur dans son mémoire [24], ainsi qu'au problème des voiles minces cylindriques anisotropes.

Dans la théorie en question le principe de superposition n'est plus valable. Ce fait important est une conséquence du type non-linéaire des relations de base, caractérisant l'état limite de la résistance à la rupture des constructions considérées.

Pour illustrer la méthode, le travail présente quelques exemples concrets, se rapportant aux cas pratiques.

En conclusion on démontre la nécessité de la connaissance des états qui précèdent l'état limite, en particulier de l'état élastique.