

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

---

# ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

III

ZENOBIUSZ KLĘBOWSKI

Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych  
w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu  
wewnętrznego ciśnienia

---

W A R S Z A W A

1 9 5 4

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
P O L S K I E J   A K A D E M I I   N A U K

---

ZENOBIUSZ KLĘBOWSKI

PODSTAWY UWZGLĘDNIANIA WZMOCNIEŃ OBWODOWYCH  
W WYTRZYMAŁOŚCIOWYM OBLICZANIU RURY PODDANEJ  
DZIAŁANIU WEWNĘTRZNEGO CIŚNIENIA

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE

III

W A R S Z A W A 1 9 5 4

---

P A Ń S T W O W E   W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E

Nr. inw. 963

WYDZIAŁ BUDOWNICTWA  
SZKOŁY INŻYNIERSKIEJ W POZNANIU

WYDZIAŁ BUDOWNICTWA  
KATEDRA MECHANIKI  
I BUDOWNICTWA

**ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (III)**  
Copyright 1954 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe  
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

All rights reserved

No part of this book may be translated or reproduced  
in any form, by mimeograph or any other means,  
without permission in writing from the publishers.

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

---

Nakład 1420+160 egz. Papier druk. sat. 70×100/16, 70 g. Arkuszy wydawniczych 4,0. Arkuszy  
drukarskich 2,75. Oddano do składania dn. 25. IX. 1953 r. Druk. ukończono w marcu 1954 r.  
Zam. 679/53 -- F-4-34847 -- Cena zł 10.--

---

Wrocławska Drukarnia Naukowa, Wrocław, K. Świerczewskiego 19

Dość trudny do uchwycenia wpływ wzmocnień obwodowych rury na jej wytrzymałość nie jest na ogół należycie uwzględniany przez konstruktorów. Studium niniejsze ma na celu podanie sposobu uwzględniania wpływu tych wzmocnień. Sposób ten oparty jest na podstawach teoretycznie słusznych oraz na pewnych założeniach upraszczających.

### 1. Wiadomości wstępne

W technice mają głównie zastosowanie dwa rodzaje obwodowych wzmocnień ściany rury poddanej działaniu ciśnienia od jej wnętrza. Jeden z nich polega na wzmocnieniu rury szeregiem pierścieni założonych na nią z wciskiem (zazwyczaj na gorąco). Drugi polega na zastosowaniu pierścieni połączonych z rurą bez wstępnego wcisku. Ten rodzaj wzmocnienia rury można otrzymać przez odlanie rury wraz z pierścieniami wzmacniającymi lub też przez nałożenie pierścieni na rurę bez luzu i wcisku, co praktycznie osiąga się przez przypojenie lub przylutowanie do ściany rury dosyć luźnych pierścieni.

Przy pierwszym rodzaju wzmocnienia ściana rury podlega ścisłaniu obwodowemu jeszcze przed poddaniem jej działaniu ciśnienia wewnętrznego. Odpowiednie ścisłające napięcie obwodowe posiada największą wartość w przekrojach poprzecznych rury, połowiących wymiar szerokości pierścienia (jeżeli posiada on płaszczyznę symetrii).

Wcisk, pole przekroju wieńca pierścieni oraz ich wzajemna odległość powinny być tak dobrane, aby, zanim zaczną działać ciśnienie wewnętrzne, ścisłające naprężenie obwodowe w rurze nie przekraczało dopuszczalnego naprężenia na ścisłanie, przy próbie wodnej naprężenia od zginania na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni ściany rury nie przekraczały dopuszczalnego naprężenia na zginanie, a naprężenie obwodowe na wewnętrznej powierzchni pierścienia — naprężenia dopuszczalnego na rozciąganie.

Przy drugim rodzaju wzmocnienia nacisk pierścienia na rurę oraz wywołane przez ten pierścień ścisłające naprężenia obwodowe powstają i rozwijają się wraz z ciśnieniem wewnętrznym. Pole przekroju pierścieni oraz ich wzajemna odległość powinny być tak dobrane, aby podczas pró-

by wodnej wzdłużne naprężenia gnące na powierzchniach ściany rury w przekrojach sąsiadujących z pierścieniami nie przekraczały dopuszczalnego naprężenia na zginanie przy zapewnieniu należytej wytrzymałości elementów wzmacniających.

Rozpatrywać będziemy tutaj głównie drugi rodzaj wzmocnienia, przy którym naprężenia w ścianie rury powstają dopiero pod wpływem działania ciśnienia wewnętrznego. Sposób ten ma najszersze zastosowanie techniczne i tę przewagę, iż bierzemy w obliczeniach pod uwagę układy o określonych danych wyjściowych, czego nie można powiedzieć o pierwszym sposobie wzmocnienia, przy zastosowaniu którego zamierzony weisk wstępny jest praktycznie trudny do zrealizowania.

Do drugiego rodzaju wzmocnienia rury będziemy zaliczali również wzmocnienie uzyskane przez śrubowe owinięcie rury drutem o odpowiednio dobranym polu przekroju i skoku linii owinięcia, przy czym drut łączy się ze ścianą rury przypojeniem lub przyłutowaniem.

## 2. Dotychczasowe wyniki prac badawczych

W pracach wydanych poprzednio, [1] i [2], dotyczących rury cienkościennej, obciążonej w przekroju poprzecznym siłami równomiernie rozłożonymi, wykazałem, że występujące wielkości: ugięcie tworzącej  $w$  i jej kąt obrotu  $\varphi$ , które charakteryzują stan odkształcenia ściany rury, oraz moment gnący  $M$  i siła tnąca  $T$ , które charakteryzują stan napięcia jej materiału, zmieniają się wzdłuż tworzącej — w funkcji odległości  $x$  od przekroju obciążonego — według krzywych w postaci fal o zanikającej amplitudzie przy nieziennej ich długości, stałej dla wszystkich czterech wymienionych wielkości.

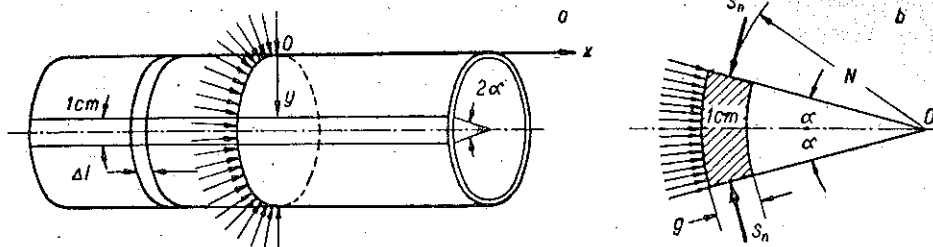
Ogólne wyrażenia odpowiednich funkcji podane są w zestawieniu wzorów 1<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> W. Moszyński przeprowadził studium z pokrewnej dziedziny, [3], nad obliczaniem wytrzymałościowym rurowych połączeń kołnierzowych. Pracę na podobny temat wykonał również R. V. Baud, [4].

Rozważania we wszystkich czterech wymienionych pracach nad zjawiskami, zachodzącymi w rurze obciążonej równomiernie na obwodzie, opierają się na teorii belki połączonej ze sprężystym podłożem, teorii, której początek dał W. Winkler, [5], a udoskonalili ją niezależnie od niego w tym samym czasie K. Wieghardt i T. E. Proktor. Była ona rozwijana przez wielu autorów, między innymi przez A. A. Umanskiego, B. I. Rudniewa, T. N. Szlechtera, M. I. Gorbunowa-Posadowa, A. N. Kryłowa, N. P. Puzyrowskiego, N. M. Giersiewanowa B. N. Żemoczki i G. D. Dutowa.

Należy tu również wymienić studium M. T. Hubera nad odkształceniami rur w zastosowaniu do luf działowych, [6], aczkolwiek dotyczy ono rur nie cienkościennych, lecz grubościennych.

Zestawienie wzorów 1. Ogólne wyrażenia wielkości występujących w związku z obciążeniem rury cienkościennej siłami promieniowymi równomiernie rozłożonymi w jednym przekroju poprzecznym



Rys. I

Zakłada się, że szerokość (równa 1 cm) wydzielonej myślowo beleczki jest mała wobec promienia  $N$ .

Przyjęto wartość współczynnika Poissona  $\nu = 0,3$ .

Oznaczenia

$w = +y$  Ugięcie tworzącej (cm) dodatnie do wewnątrz rury.

$\varphi = + \frac{dy}{dx}$  Kąt obrotu tworzącej (liczba oderwana).

$M_1 = -B \frac{d^2y}{dx^2}$  Moment gnący w przekroju osiowym (kGem/cm).

$M_2 = \nu M_1$  Moment gnący w przekroju poprzecznym (kGem/cm).

$T = -B \frac{d^3y}{dx^3}$  Siła (wewnętrzna) poprzeczna (kG/cm).

$B = \frac{EJ}{1-\nu^2} = \frac{Eg^3}{12(1-\nu^2)} \approx 0,09158 Eg^3$  Sztywność płytowa zginania (kGem<sup>2</sup>/cm).

$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{N^2g^2}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{Ng}}$  Współczynnik zanikania amplitudy fali (cm<sup>-1</sup>).

Funkcje  $w$ ,  $\varphi$ ,  $M$  i  $T$  wyrażają się ogólnymi wzorami

- (1)  $w = e^{\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x)$ ,
- (2)  $\varphi = \beta \{ e^{\beta x} [C_1 (\sin \beta x + \cos \beta x) - C_2 (\sin \beta x - \cos \beta x)] - e^{-\beta x} [C_3 (\sin \beta x - \cos \beta x) + C_4 (\sin \beta x + \cos \beta x)] \}$ ,
- (3)  $M_1 = -2B\beta^2 [e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x - C_2 \sin \beta x) - e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x - C_4 \sin \beta x)]$ ,
- (4)  $T = -2B\beta^3 \{ e^{\beta x} [C_1 (\cos \beta x - \sin \beta x) - C_2 (\sin \beta x + \cos \beta x)] + e^{-\beta x} [C_3 (\sin \beta x + \cos \beta x) - C_4 (\sin \beta x - \cos \beta x)] \}$ .

Wielkości  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$  są stałymi całkowania.

W zestawieniu wzorów 2 przytoczono wyrażenia stałych całkowania, występujących w ogólnych funkcjach  $w$ ,  $\varphi$ ,  $M$  i  $T$ , podanych w zestawieniu 1 dla dwóch przypadków obciążenia rury, mianowicie:

(1) obciążenia jednego końca dowolnie długiej rury dodatnimi parami sił o natężeniu momentów  $M_0$  kGem/cm i

(2) obciążenia jednego końca dowolnie długiej rury dodatnimi siłami promieniowymi o natężeniu  $P_0$  kG/cm.

W tablicach 1 i 2 przytoczono dane pomocnicze do obliczenia wartości funkcji  $a_1, \dots, a_4$  oraz funkcji  $b_1, \dots, b_4$  (określonych w zestawieniu 2) przy różnych wartościach  $n = \beta l$ , tj. iloczynu współczynnika zanikania amplitudy fali  $\beta$  przez długość rury  $l$ , a w tablicy 3 — wartości funkcji  $a_1, \dots, a_4$  oraz funkcji  $b_1, \dots, b_4$  przy różnych wartościach wielkości  $n^2$ .

### 3. Ogólne kołowo symetryczne obciążenie jednego z końcowych przekrojów rury

Dla rozważań nad zagadnieniem wpływu wzmocnień obwodowych na wytrzymałość rury poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego ważny jest sposób obciążenia rury, wynikający z superpozycji obydwu przypadków obciążenia (1) i (2) przedstawionego na rys. 1.

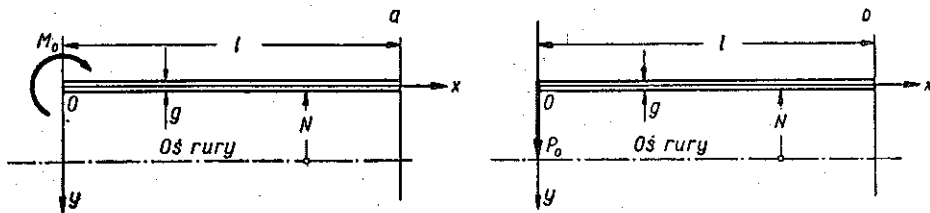
Wyrażenia poszczególnych wielkości  $w$ ,  $\varphi$ ,  $M$  i  $T$  występujących przy tym sposobie obciążenia rury (rys. 1) są podane w zestawieniu wzorów 3,

przy czym wzory (1)-(4) dotyczą ogólnych wyrażeń tych wielkości jako funkcji odległości  $x$  od przekroju obciążonego, a wzory (5) dotyczą wyrażeń  $w$  i  $\varphi$  w przekroju obciążonym. W zestawieniu tym podano ponadto wyrażenia (6) i (7), do których sprowadzają się wyrażenia (1)-(4) i (5) dla przypadku bardzo długiej rury ( $l \rightarrow \infty$ ).

W tablicy 4 podano wartości  $m$ ,  $n$ ,  $p$  i  $r$  ze wzorów (5) zestawienia 3 ułatwiające obliczenie wielkości  $[w]_{x=0}$  i  $[\varphi]_{x=0}$  w przypadku dowolnej długości rury, a w tablicy 5 — wartości funkcji  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  dla różnych wartości  $n = \beta l$ , w przypadku bardzo długiej rury ( $l \rightarrow \infty$ ), według grupy wzorów (6) zestawienia 3.

2) Zestawienia wzorów 1 i 2 podano na podstawie pracy autora [1], a tablice 1, 2 i 3 zapożyczono z tej pracy bez zmian w celu zgrupowania całego materiału niezbędnego do rozwiązywania omawianych zagadnień.

Zestawienie wzorów 2. Wyrażenia stałych całkowania w dwóch ważnych przypadkach kołowo symetrycznego obciążenia rury skończonej długości



Rys. II

Przypadek 1

Przypadek 2

Warunki graniczne

dla  $x=0$  jest  $M=M_0$  i  $T=0$ ,

dla  $x=0$  jest  $M=0$  i  $T=-P_0$ ,

dla  $x=l$  jest  $M=0$  i  $T=0$ ,

dla  $x=l$  jest  $M=0$  i  $T=0$ .

Przypadek 1. Obciążenie jednego końca rury dodatnimi parami sił o natężeniu momentów  $M_0$  kGem/cm (rys. IIa):

$$C_1 = \frac{M_0}{4\beta^2 B} \frac{\sin 2\beta l - \cos 2\beta l + 2 - e^{-2\beta l}}{\cosh 2\beta l + \cos 2\beta l - 2} = \frac{M_0}{4\beta^2 B} a_1 \quad (\text{gd}y \ l \rightarrow \infty, \text{ to } a_1 \rightarrow 0),$$

$$C_2 = \frac{M_0}{4\beta^2 B} \frac{\sin 2\beta l + \cos 2\beta l - e^{-2\beta l}}{\cosh 2\beta l + \cos 2\beta l - 2} = \frac{M_0}{4\beta^2 B} a_2 \quad (\text{gd}y \ l \rightarrow \infty, \text{ to } a_2 \rightarrow 0),$$

$$C_3 = \frac{M_0}{4\beta^2 B} \frac{\sin 2\beta l + \cos 2\beta l - 2 + e^{+2\beta l}}{\cosh 2\beta l + \cos 2\beta l - 2} = \frac{M_0}{4\beta^2 B} a_3 \quad (\text{gd}y \ l \rightarrow \infty, \text{ to } a_3 \rightarrow +2),$$

$$C_4 = \frac{M_0}{4\beta^2 B} \frac{\cos 2\beta l - \sin 2\beta l - e^{+2\beta l}}{\cosh 2\beta l + \cos 2\beta l - 2} = \frac{M_0}{4\beta^2 B} a_4 \quad (\text{gd}y \ l \rightarrow \infty, \text{ to } a_4 \rightarrow -2).$$

Przypadek 2. Obciążenie jednego końca rury dodatnimi siłami promieniowymi o natężeniu  $P_0$  kG/cm (rys. IIb):

$$C_{\text{I}} = \frac{-P_0}{4\beta^2 B} \frac{1 - \cos 2\beta l}{\cosh 2\beta l + \cos 2\beta l - 2} = \frac{-P_0}{4\beta^2 B} b_1 \quad (\text{gd}y \ l \rightarrow \infty, \text{ to } b_1 \rightarrow 0),$$

$$C_{\text{II}} = \frac{-P_0}{4\beta^2 B} \frac{\sin 2\beta l - 1 + e^{-2\beta l}}{\cosh 2\beta l + \cos 2\beta l - 2} = \frac{-P_0}{4\beta^2 B} b_2 \quad (\text{gd}y \ l \rightarrow \infty, \text{ to } b_2 \rightarrow 0),$$

$$C_{\text{III}} = C_1, \quad b_3 = b_1,$$

$$C_{\text{IV}} = \frac{-P_0}{4\beta^2 B} \frac{\sin 2\beta l + 1 - e^{+2\beta l}}{\cosh 2\beta l + \cos 2\beta l - 2} = \frac{-P_0}{4\beta^2 B} b_4 \quad (\text{gd}y \ l \rightarrow \infty, \text{ to } b_4 \rightarrow -2).$$

Przy  $\nu = 0,3$  jest

$$B = \frac{EJ}{1-\nu^2} = \frac{Eg^3}{12(1-\nu^2)} \approx 0,09158 Eg^3 = \text{sztywność płytowa zginania (kGem}^2/\text{cm)},$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{N^2 g^3}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{Ng}} = \text{współczynnik zanikania amplitudy fali (cm}^{-1}\text{)}.$$



Tablica 1. Wartości funkcji  $e^n$ ,  $e^{-n}$ ,  $\sin n$  i  $\cos n$  przy różnych wartościach  $n$ .

$n$	$e^n$	$e^{-n}$	$\sin n$	$\cos n$	$n$	$e^n$	$e^{-n}$	$\sin n$	$\cos n$
0,0	1,00000	1,00000	0,00000	+1,00000	3,6	36,59823	0,02732	-0,44252	-0,89676
0,1	1,10517	0,90484	+0,09983	0,99500	3,7	40,44730	0,02472	-0,52984	-0,84810
0,2	1,22140	0,81873	0,19867	0,98007	3,8	44,70118	0,02237	-0,61186	-0,79097
0,3	1,34986	0,74082	0,29552	0,95534	3,9	49,40245	0,02024	-0,68777	-0,72593
0,4	1,49182	0,67032	0,38942	0,92106	$\frac{5}{4}\pi$	50,75402	0,01970	-0,70711	-0,70711
0,5	1,64872	0,60653	0,47943	0,87758	4,0	54,59815	0,01832	-0,75680	-0,65364
0,6	1,82212	0,54881	0,56464	0,82534	4,1	60,34029	0,01657	-0,81828	-0,57482
0,7	2,01375	0,49659	0,64422	0,76484	4,2	66,68633	0,01500	-0,87158	-0,49026
$\frac{1}{4}\pi$	2,19328	0,45594	0,70711	0,70711	4,3	73,69979	0,01357	-0,91617	-0,40080
0,8	2,22554	0,44933	0,71736	0,69671	4,4	81,45087	0,01228	-0,95160	-0,30733
0,9	2,45960	0,40657	0,78333	0,62161	4,5	90,01713	0,01111	-0,97753	-0,21080
1,0	2,71828	0,36788	0,84147	0,54030	4,6	99,48432	0,01005	-0,99369	-0,11215
1,1	3,00417	0,33287	0,89121	0,45360	4,7	109,9472	0,00910	-0,99992	-0,01239
1,2	3,32012	0,30119	0,93204	0,36236	$\frac{5}{4}\pi$	111,3178	0,00898	-1,00000	0,00000
1,3	3,66930	0,27253	0,96556	0,26750	4,8	121,5104	0,00823	-0,99616	+0,08750
1,4	4,05520	0,24660	0,98545	0,16997	4,9	134,2898	0,00745	-0,98245	0,18651
1,5	4,48169	0,22313	0,99749	+0,07074	5,0	148,4132	0,00674	-0,95892	0,28366
$\frac{2}{4}\pi$	4,81048	0,20788	1,00000	0,00000	5,1	164,0219	0,00610	-0,92581	0,37798
1,6	4,95303	0,20190	0,99957	-0,02920	5,2	181,2722	0,00552	-0,88345	0,46852
1,7	5,47395	0,18268	0,99166	-0,12884	5,3	200,3368	0,00499	-0,83227	0,55437
1,8	6,04965	0,16530	0,97385	-0,22720	5,4	221,4064	0,00452	-0,77276	0,63469
1,9	6,68589	0,14957	0,94630	-0,32329	$\frac{7}{4}\pi$	244,1511	0,00410	-0,70711	0,70711
2,0	7,38906	0,13534	0,90930	-0,41615	5,5	244,6919	0,00409	-0,70554	0,70867
2,1	8,16617	0,12246	0,86321	-0,50485	5,6	270,4264	0,00370	-0,63127	0,77557
2,2	9,02501	0,11080	0,80850	-0,58850	5,7	298,8674	0,00335	-0,55069	0,83471
2,3	9,97418	0,10026	0,74571	-0,66628	5,8	330,2996	0,00303	-0,46460	0,88552
$\frac{3}{4}\pi$	10,55072	0,09478	0,70711	-0,70711	5,9	365,0375	0,00274	-0,37388	0,92748
2,4	11,02318	0,09072	0,67546	-0,73739	6,0	403,4288	0,00248	-0,27942	0,96017
2,5	12,18249	0,08208	0,59847	-0,80114	6,1	445,8578	0,00224	-0,18216	0,98327
2,6	13,46374	0,07427	0,51550	-0,85689	6,2	492,7490	0,00203	-0,08509	0,99654
2,7	14,87973	0,06721	0,42738	-0,90407	$\frac{3}{4}\pi$	535,4917	0,00187	0,00000	1,00000
2,8	16,44465	0,06081	0,33499	-0,94222	6,3	544,5719	0,00184	+0,01681	0,99986
2,9	18,17415	0,05502	0,23925	-0,97096	6,4	601,8450	0,00166	0,11655	0,99318
3,0	20,08554	0,04979	0,14112	-0,98999	6,5	665,1416	0,00150	0,21512	0,97659
3,1	22,19795	0,04505	+0,04158	-0,99914	6,6	735,0952	0,00136	0,31154	0,95023
$\frac{4}{4}\pi$	23,14069	0,04321	0,00000	-1,00000	6,7	812,4058	0,00123	0,40485	0,91438
3,2	24,53253	0,04076	-0,05837	-0,99829	6,8	897,8473	0,00111	0,49411	0,86940
3,3	27,11264	0,03688	-0,15775	-0,98748	6,9	992,2747	0,00101	0,57844	0,81573
3,4	29,96410	0,03337	-0,25554	-0,96680	7,0	1096,633	0,000912	0,65699	0,75390
3,5	33,11545	0,03020	-0,35078	-0,93646	$\frac{9}{4}\pi$	1174,483	0,000853	0,70711	0,70711

$\frac{1}{4}\pi = 0,7854$ ,       $\frac{1}{2}\pi = 1,5708$ ,       $\frac{3}{4}\pi = 2,3562$ ,       $\pi = 3,1416$ ,  
 $1\frac{1}{4}\pi = 3,9270$ ,       $1\frac{1}{2}\pi = 4,7124$ ,       $1\frac{3}{4}\pi = 5,4978$ ,       $2\pi = 6,2832$ ,  
 $2\frac{1}{4}\pi = 7,0686$ ,       $e = 2,718282$ ,       $2\pi rd = 360^\circ$        $1rd = 360^\circ : 2\pi =$   
 $= 57^\circ 17' 45'' = 57,3^\circ$

Tablica 2. Wartości funkcji  $e^{2n}$ ,  $e^{-2n}$ ,  $\sin 2n$ ,  $\cos 2n$ ,  $\sinh 2n$ ,  $\cosh 2n$  przy różnych wartościach  $n$

$n$	$2n$	$e^{2n}$	$e^{-2n}$	$\sin 2n$	$\cos 2n$	$\sinh 2n$	$\cosh 2n$
0,00	0,0	1,00000	1,00000	0,00000	+1,00000	0,00000	1,00000
0,05	0,1	1,10517	0,90484	+0,09983	0,99500	0,10017	1,00500
0,10	0,2	1,22140	0,81873	0,19867	0,98007	0,20134	1,02007
0,15	0,3	1,34986	0,74082	0,29552	0,95534	0,30452	1,04534
0,20	0,4	1,49182	0,67032	0,38942	0,92106	0,41075	1,08107
0,25	0,5	1,64872	0,60653	0,47943	0,87758	0,52110	1,12763
0,30	0,6	1,82212	0,54881	0,56464	0,82534	0,63665	1,18547
0,4	0,8	2,22554	0,44933	0,71736	0,69671	0,88811	1,33743
0,5	1,0	1,71828	0,36788	0,84147	0,54030	1,17520	1,54308
0,6	1,2	3,32012	0,30119	0,93204	0,36236	1,50946	1,81066
0,7	1,4	4,05520	0,24660	0,98545	+0,16997	1,90430	2,15090
0,8	1,6	4,95303	0,20190	0,99957	-0,02920	2,37557	2,57746
0,9	1,8	6,04965	0,16530	0,97385	-0,22720	2,94217	3,10747
1,0	2,0	7,38906	0,13534	0,90930	-0,41615	3,62686	3,76220
1,1	2,2	9,02501	0,11080	0,80850	-0,58850	4,45711	4,56791
1,2	2,4	11,02318	0,09072	0,67546	-0,73739	5,46623	5,55695
1,3	2,6	13,46374	0,07427	0,51550	-0,85689	6,69473	6,76901
1,4	2,8	16,44465	0,06081	0,33499	-0,94222	8,19192	8,25273
1,5	3,0	20,08554	0,04979	+0,14112	-0,98999	10,01787	10,06766
1,6	3,2	24,53253	0,04076	-0,05837	-0,99829	12,24588	12,28665
1,7	3,4	29,96410	0,03337	-0,25554	-0,96680	14,96536	14,99874
1,8	3,6	36,59823	0,02732	-0,44252	-0,89676	18,28546	18,31278
1,9	3,8	44,70118	0,02237	-0,61186	-0,79097	22,33941	22,36178
2,0	4,0	54,59815	0,01832	-0,75680	-0,65364	27,28992	27,30823
2,1	4,2	66,68633	0,01500	-0,87158	-0,49026	33,33567	33,35066
2,2	4,4	81,45087	0,01228	-0,95160	-0,30733	40,71930	40,73157
2,3	4,6	99,48432	0,01005	-0,99369	-0,11215	49,73713	49,74718
2,4	4,8	121,5104	0,00823	-0,99616	+0,08750	60,75109	60,75932
2,5	5,0	148,4132	0,00674	-0,95892	0,28366	74,20321	74,20995
2,6	5,2	181,2722	0,00552	-0,88345	0,46852	90,63336	90,63888
2,7	5,4	221,4064	0,00452	-0,77276	0,63469	110,7009	110,7055
2,8	5,6	270,4264	0,00370	-0,63127	0,77557	135,2114	135,2151
2,9	5,8	330,2996	0,00303	-0,46460	0,88552	165,1483	165,1513
3,0	6,0	403,4288	0,00248	-0,27942	0,96017	201,7132	201,7156
3,1	6,2	492,7490	0,00203	-0,08309	0,99654	246,3735	246,3755
3,2	6,4	601,8450	0,00166	+0,11655	0,99318	300,9217	300,9233
3,3	6,6	735,0952	0,00136	0,31154	0,95023	367,5469	367,5483
3,4	6,8	897,8473	0,00111	0,49411	0,86940	448,9231	448,9242
3,5	7,0	1096,633	0,000912	+0,65699	+0,75390	548,3161	548,3170
$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	+1 $\leftrightarrow$ -1	-1 $\leftrightarrow$ +1	$\infty$	$\infty$

Tablica 3. Wartości funkcji  $a_i$  oraz  $b_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) do określenia stałych całkowania przy różnych wartościach  $\beta l$  w przypadku obciążenia końca rury siłami promieniowymi i momentami

$\beta l$	Wartości funkcji						
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b_1=b_3$	$b_2$	$b_4$
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
0,10	2856,2142	2571,50	2858,14	-3142,86	142,35714	124,286	-162,357
0,15	881,41176	750,059	883,412	-1014,77	65,67647	53,4412	-79,9118
0,20	374,66666	300,544	376,667	-450,789	37,06103	28,0470	-48,0751
0,25	191,04030	144,046	193,038	-240,033	23,49712	16,4990	-32,4933
0,3	110,12858	77,8140	112,128	-144,442	16,15726	10,4949	-23,8187
0,4	46,02574	28,2583	48,0261	-65,7935	8,88371	4,88254	-14,8852
0,5	23,18648	12,1598	25,1865	-36,2131	5,51331	2,51079	-10,5158
0,6	13,11114	5,74043	15,1111	-22,4818	3,68535	1,34799	-8,02266
0,7	8,00598	2,83236	10,0060	-15,1796	2,58681	0,72319	-6,45043
0,8	5,15607	1,40165	7,15609	-10,9105	1,87721	0,36747	-5,38697
0,9	3,44855	0,66042	5,44867	-8,23691	1,39412	0,15808	-4,63017
1,0	2,36997	0,26581	4,36998	-6,47414	1,05208	+0,03316	-4,07099
1,1	1,66019	+0,05516	3,66019	-5,26521	0,80251	-0,04077	-3,64579
1,2	1,17824	-0,05413	3,17824	-4,41063	0,61619	-0,08293	-3,31531
1,3	0,84304	-0,10625	2,84301	-3,79230	0,47464	-0,10486	-3,05412
1,4	0,60566	-0,12579	2,60567	-3,33713	0,36573	-0,11377	-2,84524
1,5	0,43536	-0,12697	2,43538	-2,99769	0,28116	-0,11432	-2,67665
1,6	0,31212	-0,11815	2,31213	-2,74241	0,21514	-0,10956	-2,53983
1,7	0,22256	-0,10436	2,22256	-2,54949	0,16346	-0,10158	-2,42851
1,8	0,15742	-0,88865	2,15743	-2,40350	0,12304	-0,09180	-2,33788
1,9	0,11020	-0,07282	2,11020	-2,29323	0,09151	-0,08122	-2,26424
2,0	0,07619	-0,05795	2,07620	-2,21034	0,06707	-0,07051	-2,20466
2,1	0,05196	-0,04461	2,05197	-2,14855	0,04829	-0,06016	-2,15674
2,2	0,03470	-0,03308	2,03496	-2,10301	0,03402	-0,05047	-2,11852
2,3	0,02326	-0,02343	2,02327	-2,06996	0,02335	-0,04164	-2,08834
2,4	0,01543	-0,01558	2,01543	-2,04644	0,01551	-0,03378	-2,06479
2,5	0,01035	-0,00941	2,01036	-2,03011	0,00988	-0,02693	-2,04669
2,6	0,00721	-0,00472	2,00721	-2,01913	0,00596	-0,02108	-2,03300
2,7	0,00537	-0,00130	2,00538	-2,01205	0,00334	-0,01617	-2,02285
2,8	0,00439	+0,00105	2,00439	-2,00774	0,00167	-0,01215	-2,01549
2,9	0,00394	0,00254	2,00394	-2,00533	0,00069	-0,00891	-2,01030
3,0	0,00377	0,00338	2,00377	-2,00417	0,00020	-0,00636	-2,00676
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$\infty$	0	0	+2	-2	0	0	-2

**Zestawienie wzorów 3. Wyrażenia wielkości występujących przy obciążeniu kołowo symetrycznym jednego końca cienkościennej rury dowolnej długości dodatnim obciążeniem: momentami o natężeniu  $M_0$  kGcm/cm i siłami promieniowymi o natężeniu  $P_0$  kG/cm**

$$(1) \quad w = \frac{1}{4\beta^3 B} \left\{ e^{\beta x} [(\beta M_0 a_1 - P_0 b_1) \sin \beta x + (\beta M_0 a_2 - P_0 b_2) \cos \beta x] + e^{-\beta x} [(\beta M_0 a_3 - P_0 b_3) \sin \beta x + (\beta M_0 a_4 - P_0 b_4) \cos \beta x] \right\},$$

$$(2) \quad \varphi = \frac{1}{4\beta^2 B} \left\{ e^{\beta x} [(\beta M_0 a_1 - P_0 b_1) (\sin \beta x + \cos \beta x) - (\beta M_0 a_2 - P_0 b_2) (\sin \beta x - \cos \beta x)] - e^{-\beta x} [(\beta M_0 a_3 - P_0 b_3) (\sin \beta x - \cos \beta x) + (\beta M_0 a_4 - P_0 b_4) (\sin \beta x + \cos \beta x)] \right\},$$

$$(3) \quad M_1 = -\frac{1}{2\beta} \left\{ e^{\beta x} [(\beta M_0 a_1 - P_0 b_1) \cos \beta x - (\beta M_0 a_2 - P_0 b_2) \sin \beta x] - e^{-\beta x} [(\beta M_0 a_3 - P_0 b_3) \cos \beta x - (\beta M_0 a_4 - P_0 b_4) \sin \beta x] \right\},$$

$$(4) \quad T = -\frac{1}{2} \left\{ e^{\beta x} [(\beta M_0 a_1 - P_0 b_1) (\cos \beta x - \sin \beta x) - (\beta M_0 a_2 - P_0 b_2) (\sin \beta x + \cos \beta x)] + e^{-\beta x} [(\beta M_0 a_3 - P_0 b_3) (\sin \beta x + \cos \beta x) - (\beta M_0 a_4 - P_0 b_4) (\sin \beta x - \cos \beta x)] \right\},$$

$$(5) \quad \begin{cases} [w]_{x=0} = \frac{1}{4\beta^3 B} [M_0 \beta (a_2 + a_4) - P_0 (b_2 + b_4)] = \frac{1}{4\beta^3 B} (M_0 \beta m - P_0 p), \\ [\varphi]_{x=0} = \frac{1}{4\beta^2 B} [M_0 \beta (a_1 + a_2 + a_3 - a_4) - P_0 (b_1 + b_2 + b_3 - b_4)] = \frac{1}{4\beta^2 B} (M_0 \beta n - P_0 r). \end{cases}$$

Dla bardzo długiej rury ( $l \rightarrow \infty$ ) wzory (1)-(5) przyjmują postać

$$(6) \quad \begin{cases} w = + \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 B} [P_0 \cos \beta x + \beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x)], \\ \varphi = - \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 B} [P_0 (\sin \beta x + \cos \beta x) - 2\beta M_0 \cos \beta x], \\ M_1 = - \frac{e^{-\beta x}}{\beta} [P_0 \sin \beta x - \beta M_0 (\sin \beta x + \cos \beta x)], \\ T = + e^{-\beta x} [P_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - 2\beta M_0 \sin \beta x]. \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} [w]_{x=0} = + \frac{1}{2\beta^3 B} (P_0 - \beta M_0), \\ [\varphi]_{x=0} = - \frac{1}{2\beta^2 B} (P_0 - 2\beta M_0), \\ [M_1]_{x=0} = + M_0, \\ [T]_{x=0} = -P_0. \end{cases}$$

Tablica 4. Wartości funkcji  $m, n, \dots, u$  i  $v$  przy różnych wartościach  $\beta l$  do określenia wielkości występujących w zagadnieniu rury dowolnej długości obciążonej na jednym końcu siłami promieniowymi i momentami

$\beta l$	Wartości funkcji							
	$m$	$n$	$p$	$r$	$s$	$t$	$u$	$v$
	$a_2 + a_4$	$a_1 + a_2 + a_3 - a_4$	$b_2 + b_4$	$b_1 + b_2 + b_3 - b_4$	$\frac{4p}{pn - rm}$	$\frac{4m}{pn - rm}$	$\frac{m}{p}$	$\frac{pn - rm}{4p}$
0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	0	$+\infty$	$+\infty$
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
0,1	-571,357	11428,7	-38,0714	571,357	0,00140	0,02103	15,0075	713,515
0,15	-264,706	3529,65	-26,4706	264,706	0,00453	0,04532	10,0000	220,646
0,2	-150,245	1502,67	-21,9061	150,244	0,00847	0,05810	6,85858	118,051
0,25	-95,9866	768,157	-15,9942	95,9866	0,02082	0,12496	5,00132	48,0277
0,3	-66,6282	444,512	-13,3238	66,6281	0,03593	0,17968	6,00070	27,8312
0,4	-37,5352	188,104	-10,0026	37,5351	0,08465	0,31766	3,75253	11,8129
0,5	-24,0533	96,7459	-8,00504	24,0532	0,16345	0,49115	3,00477	6,11786
0,6	-16,7414	56,4444	-6,67466	16,7414	0,27674	0,69413	2,50820	3,81346
0,7	-12,3473	36,0239	-5,72724	12,3472	0,42797	0,92265	2,15588	2,33663
0,8	-9,50887	24,6243	-5,01950	9,50886	0,59291	1,12321	1,89439	1,68658
0,9	-7,57649	17,7945	-4,47209	7,57649	0,80667	1,36662	1,69417	1,23965
1,0	-6,20833	13,4799	-4,03783	6,20832	1,01668	1,56319	1,53754	0,98359
1,1	-5,21005	10,6407	-3,68656	5,21004	1,22040	1,72473	1,41326	0,81941
1,2	-4,46476	8,71298	-3,39824	4,46476	1,40500	1,84595	1,31384	0,71174
1,3	-3,89855	7,37210	-3,15898	3,89854	1,56198	1,92767	1,23412	0,64021
1,4	-3,46292	6,42267	-2,95901	3,46292	1,68715	1,97446	1,17030	0,59272
1,5	-3,12466	5,74144	-2,79096	3,12465	1,78317	1,99638	1,11956	0,56080
1,6	-2,86056	5,24850	-2,64939	2,86056	1,85189	1,99950	1,07970	0,53999
1,7	-2,65385	4,89026	-2,53008	2,65385	1,89881	1,99170	1,04892	0,52664
1,8	-2,49215	4,62970	-2,42968	2,49216	1,92914	1,97875	1,02571	0,51837
1,9	-2,36605	4,44081	-2,34546	2,36604	1,94742	1,96451	1,00878	0,51350
2,0	-2,26829	4,30478	-2,27517	2,26829	1,95757	1,95165	0,99698	0,51084
2,1	-2,19316	4,20786	-2,21690	2,19316	1,96252	1,94150	0,98929	0,50955
2,2	-2,13609	4,13959	-2,16899	2,13609	1,96473	1,93493	0,98483	0,50898
2,3	-2,09339	4,09306	-2,12998	2,09339	1,96500	1,93125	0,98282	0,50891
2,4	-2,06202	4,06172	-2,09857	2,06203	1,96501	1,93078	0,98258	0,50890
2,5	-2,03952	4,04140	-2,07362	2,03952	1,96520	1,93288	0,98356	0,50885
2,6	-2,02385	4,02883	-2,05408	2,02385	1,96583	1,93690	0,98529	0,50869
2,7	-2,01335	4,02149	-2,03902	2,01336	1,96707	1,94230	0,98741	0,50837
2,8	-2,00669	4,01757	-2,02764	2,00668	1,96887	1,94853	0,98967	0,50790
2,9	-2,00279	4,01575	-2,01921	2,00277	1,97116	1,95513	0,99187	0,50732
3,0	-2,00079	4,01509	-2,01312	2,00079	1,97379	1,96170	0,99388	0,50664
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$\infty$	-2	+4	-2	+2	-2	+2	+1	+0,5

Tablica 5. Wartości funkcji  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  przy różnych wartościach  $n = \beta x$  w przypadku rury bardzo długiej obciążonej na jednym końcu siłami promieniowymi i momentami

$$a = e^{-n} \sin n, \quad c = e^{-n} (\sin n + \cos n),$$

$$b = e^{-n} \cos n, \quad d = e^{-n} (\sin n - \cos n).$$

$n$	$a$	$b$	$c$	$d$	$n$	$a$	$b$	$c$	$d$
0,0	0,00000	1,00000	1,00000	-1,00000	3,6	-0,01209	-0,02450	-0,03659	0,01241
0,1	0,09033	0,90032	0,99065	-0,89999	3,7	-0,01310	-0,02097	-0,03406	0,00787
0,2	0,16266	0,80241	0,96507	-0,639,6	3,8	-0,01369	-0,01769	-0,03138	0,00401
0,3	0,21893	0,70773	0,92666	-0,48881	3,9	-0,01392	-0,01469	-0,02861	+0,00077
0,4	0,26104	0,61740	0,87844	-0,35637	$\frac{3}{4}\pi$	-0,01393	-0,01393	-0,02786	0,00000
0,5	0,29079	0,53228	0,82507	-0,24149	4,0	-0,01387	-0,01198	-0,02584	-0,00189
0,6	0,30988	0,45295	0,76283	-0,14307	4,1	-0,01356	-0,00952	-0,02308	-0,00403
0,7	0,31991	0,37981	0,69973	-0,05990	4,2	-0,01307	-0,00735	-0,02043	-0,00572
$\frac{1}{4}\pi$	0,32240	0,32240	0,64480	0,00090	4,3	-0,01243	-0,00544	-0,01787	-0,00699
0,8	0,32233	0,31305	0,63538	+0,00928	4,4	-0,01169	-0,00377	-0,01546	-0,00791
0,9	0,31848	0,25273	0,57121	0,06575	4,5	-0,01086	-0,00234	-0,01320	-0,00852
1,0	0,30956	0,19877	0,50833	0,11079	4,6	-0,00999	-0,00113	-0,01111	-0,00886
1,1	0,29666	0,15099	0,44765	0,14567	4,7	-0,00910	-0,00011	-0,00921	-0,00899
1,2	0,28072	0,10914	0,38986	0,17158	$\frac{1}{4}\pi$	-0,00898	0,00000	-0,00898	-0,00898
1,3	0,26260	0,07290	0,33550	0,18970	4,8	-0,00820	+0,00072	-0,00748	-0,00892
1,4	0,24301	0,04191	0,28493	0,20110	4,9	-0,00732	0,00139	-0,00593	-0,00871
1,5	0,22257	+0,01578	0,23835	0,20679	5,0	-0,00646	0,00191	-0,00455	-0,00837
$\frac{3}{4}\pi$	0,20788	0,00000	0,20788	0,20788	5,1	-0,00565	0,00231	-0,00334	-0,00795
1,6	0,20181	-0,00589	0,19592	0,20771	5,2	-0,00488	0,00259	-0,00229	-0,00746
1,7	0,18116	-0,02354	0,15762	0,20469	5,3	-0,00415	0,00277	-0,00139	-0,00692
1,8	0,16098	-0,03756	0,12342	0,19853	5,4	-0,00349	0,00287	-0,00062	-0,00636
1,9	0,14154	-0,04835	0,09318	0,18989	$\frac{3}{4}\pi$	-0,00290	0,00290	0,00000	-0,00580
2,0	0,12306	-0,05632	0,06674	0,17939	5,5	-0,00289	0,00290	+0,00001	-0,00578
2,1	0,10571	-0,06182	0,04388	0,16753	5,6	-0,00234	0,00287	0,00055	-0,00521
2,2	0,08958	-0,06521	0,02438	0,15479	5,7	-0,00185	0,00280	0,00095	-0,00464
2,3	0,07476	-0,06680	+0,00796	0,14157	5,8	-0,00141	0,00268	0,00128	-0,00409
$\frac{1}{4}\pi$	0,06702	-0,06702	0,00000	0,13404	5,9	-0,00102	0,00254	0,00152	-0,00357
2,4	0,06128	-0,06690	-0,00562	0,12817	6,0	-0,00069	0,00238	0,00169	-0,00307
2,5	0,04912	-0,06576	-0,01664	0,11488	6,1	-0,00041	0,00220	0,00179	-0,00261
2,6	0,03829	-0,06364	-0,02536	0,10193	6,2	-0,00017	0,00202	0,00185	-0,00219
2,7	0,02872	-0,06076	-0,03204	0,08949	$\frac{3}{4}\pi$	0,00000	0,00187	0,00187	-0,00187
2,8	0,02037	-0,05730	-0,03693	0,07767	6,3	+0,00003	0,00184	0,00187	-0,00181
2,9	0,01316	-0,05342	-0,04026	0,06659	6,4	0,00019	0,00165	0,00184	-0,00146
3,0	0,00703	-0,04929	-0,04226	0,05632	6,5	0,00032	0,00147	0,00179	-0,00114
3,1	+0,00187	-0,04501	-0,04314	0,04688	6,6	0,00042	0,00129	0,00172	-0,00087
$\frac{1}{4}\pi$	0,00000	-0,04321	-0,04321	0,04321	6,7	0,00050	0,00113	0,00162	-0,00063
3,2	-0,00238	-0,04069	-0,04307	0,03831	6,8	0,00055	0,00097	0,00151	-0,00042
3,3	-0,00582	-0,03642	-0,04224	0,03060	6,9	0,00058	0,00082	0,00141	-0,00024
3,4	-0,00853	-0,03226	-0,04079	0,02373	7,0	0,00069	0,00069	0,00129	-0,00009
3,5	-0,01059	-0,02828	-0,03887	0,01769	$\frac{3}{4}\pi$	0,00060	0,00060	0,00121	0,00000

Z cytowanych prac autora [1] i [2] wynika, że w przypadku, w którym łączne działanie momentu  $M_0$  kGcm/cm i siły poprzecznej  $P$  kG/cm nie wywołuje ugięcia tworzących w obciążonym końcu rury ( $[w]_{x=0} = 0$ ), lecz wywołuje wyłącznie ich obrót o kąt  $\delta = [\varphi]_{x=0}$ , wielkości  $M_0$  i  $P_0$ , ich wzajemny związek oraz kąt  $\delta$  wyrażają się:

$$(3.1) \quad \begin{cases} M_0 = \frac{4p}{pn - rm} B\beta\delta = sB\beta\delta, \\ P_0 = \frac{4m}{pn - rm} B\beta^2\delta = tB\beta^2\delta, \\ P_0 = \frac{m}{p} \beta M_0 = u\beta M_0, \end{cases}$$

$$(3.2) \quad \delta = \frac{1}{s} \frac{M_0}{\beta B} = v \frac{M_0}{\beta B}.$$

Wartości funkcji  $s, t, u$  i  $v$  dla różnych wartości  $n \equiv \beta l$  podane są w tabelicy 4.

Wzory (3.1) i (3.2) mają zastosowanie w badaniu kąta obrotu tworzących rury w jej końcu połączonym z kołnierzem kołowo symetrycznym.

W zestawieniu wzorów 4 wykazano, że dla rur wykonanych z jakiegokolwiek metali stosowanych w technice można z błędem nie mającym znaczenia praktycznego przyjąć następujące wyrażenie dla współczynnika zanikania amplitudy fali:

$$(3.3) \quad \beta = \frac{1,285}{\sqrt{Ng}} = \frac{1,818}{\sqrt{Dg}}.$$

#### 4. Rura ściśnięta pierścieniem w przekroju położonym w znacznej odległości od końców

W rurze bardzo długiej, której przekrój położony z dala od jej końców jest ściskany równomiernie rozłożonymi na obwodzie siłami promieniowymi, kąt obrotu tworzącej w tym przekroju równy jest zeru.

Z wyrażenia na kąt  $\varphi$  podanego w grupie wzorów (7) zestawienia 3 wynika dla tego przypadku następująca zależność pomiędzy  $M_0$  i  $P_0$ :

$$(4.1) \quad -\frac{1}{2\beta^2 B} (P_0 - 2\beta M_0) = 0,$$

$$(4.2) \quad M_0 = \frac{P_0}{2\beta} = \frac{P}{4\beta}.$$

**Zestawienie wzorów 4. Zależność współczynnika zanikania  
amplitudy fali  $\beta$  od wartości liczby Poissona  $\nu$**

Współczynnik zanikania amplitudy fali dla powłok walcowych wyraża się ogólnie

$$(1) \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{N^2 g^3}} = \sqrt[4]{\frac{12(1-\nu^2)}{D^2 g^3}} \text{ cm}^{-1},$$

gdzie jest

$N = D/2 =$  średni promień powłoki walcowej (cm),

$g =$  grubość ścianki powłoki (cm).

Liczba Poissona  $\nu$  dla stali różnych rodzajów węglowych i stopowych równa się z zaokrągleniem 0,3 (ściślej – około 0,29), aczkolwiek dla stali chromowo-krzemowej hartowanej na sprawdziany  $\nu = 0,25$ . Dla miedzi  $\nu = 0,34$ . Dla żeliwa przy obciążeniach stosowanych w technice, a więc niewielkich,  $\nu = 0,3$ , a w przypadkach znacznych obciążeń liczba ta spadać może do  $\nu = 0,17$ . (Dla szarego żeliwa maszynowego wyższej jakości przyjmuje się moduł Younga  $E = 1050000 \text{ kG/cm}^2$ , a więc wartość dwa razy mniejszą niż dla stali).

Dla betonu ubijanego przy małych obciążeniach  $\nu = 0,25$ , a w przypadku dużych obciążeń przyjmuje się liczbę Poissona  $\nu = 0,12$ , która może spadać nawet do wartości  $\nu = 1:8,75 \approx 0,114$ . (Moduł Younga przyjmuje się dla betonu ubijanego  $E = 210000 \text{ kG/cm}^2$ , a więc wartość dziesięciokrotnie mniejszą niż dla stali).

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dla } \nu = 0 \quad \text{jest } \beta = 1,315: \sqrt{Ng} = 1,860: \sqrt{Dg} \text{ cm}^{-1}, \\ 0,114 \quad 1,312: \sqrt{Ng} = 1,855: \sqrt{Dg} \text{ cm}^{-1}, \\ 0,12 \quad 1,310: \sqrt{Ng} = 1,853: \sqrt{Dg} \text{ cm}^{-1}, \\ 0,17 \quad 1,305: \sqrt{Ng} = 1,846: \sqrt{Dg} \text{ cm}^{-1}, \\ 0,25 \quad 1,295: \sqrt{Ng} = 1,832: \sqrt{Dg} \text{ cm}^{-1}, \\ 0,3 \quad 1,285: \sqrt{Ng} = 1,818: \sqrt{Dg} \text{ cm}^{-1}, \\ 0,34 \quad 1,275: \sqrt{Ng} = 1,804: \sqrt{Dg} \text{ cm}^{-1}, \\ 0,5 \quad 1,225: \sqrt{Ng} = 1,733: \sqrt{Dg} \text{ cm}^{-1}. \end{array} \right.$$

Przyjmując ogólnie

$$(3) \quad \beta = 1,285: \sqrt{Ng} = 1,818: \sqrt{Dg} \text{ cm}^{-1}$$

jak dla stali węglowej i żeliwa przy zwykłym obciążeniu ( $\nu = 0,3$ ) popełniamy błąd w przypadku  $\nu = 0,25$  równy  $-0,778\%$ , a w przypadku  $\nu = 0,34$  równy  $+0,785\%$ ; w obydwu więc tych przypadkach błąd wyniesie mniej niż  $\pm 0,8\%$ .

Nawet w przypadkach tak znacznie różniących się wartości  $\nu$  od 0,3, jak to zachodzi przy bardzo obciążonych: (1) betonie ubijanym ( $\nu = 0,114$ ) i (2) żeliwie ( $\nu = 0,17$ ) oraz (3) w przypadku miękkiego kauczuku ( $\nu \approx 0,5$ ), błąd po kolei wyniósłby zaledwie: (1)  $+2,1\%$ , (2)  $+1,53\%$  i (3)  $-4,6\%$ . (Wartość modułu Younga dla miękkiego kauczuku znajduje się w granicach  $E = 80$  do  $2 \text{ kG/cm}^2$ ; przy dolnej granicy wartość ta jest więc około miliona razy niższa w porównaniu z modułem Younga dla stali).



W tym ostatnim wzorze przyjęto  $P_0 = 0,5P$  (por. rysunki w zestawieniu wzorów 5).

W zestawieniu 5 przedstawiono w zwiększonej skali schemat odkształcenia tworzącej rury, obciążonej w sposób wyżej omówiony (rys. IIIa), oraz schemat (rys. IIIb) sprowadzający ten sposób obciążenia rury do przypadku obciążenia przedstawionego na rys. 1.

Takie obciążenie rury można wywołać przez nałożenie na rurę wąskiego pierścienia z wciskiem. Podobne obciążenie rury występuje również dzięki działaniu wąskiego pierścienia nałożonego na rurę bez luzu i wcisku wskutek poddania jej następnie działaniu hydrostatycznego ciśnienia wewnętrznego.

Uwzględniając zależność drugą w grupie równości (6) podanych w zestawieniu 3 oraz przyjmując w nich połowę siły  $P$  zamiast całej, otrzymujemy odnośne wzory dla przypadku rury ściśkanej wąskim pierścieniem.

W zestawieniu 5 przytoczono wyrażenia  $w, \varphi, M$  i  $T$  dla rury bardzo długiej, obciążonej równomiernie w przekroju znacznie oddalonym od jej końców siłami promieniowymi.

Wartości odpowiednich funkcji zmiennej  $n = \beta x$  dla różnych wartości zmiennej  $n = \beta x$  podano w tabelicy 5. W tabelicy tej oznaczono odpowiednie funkcje przez  $a, b, c$  i  $d$ .

#### 5. Długość fal wykresów funkcj. Zanikanie amplitud fal wykresów

Ze wzorów zestawienia 5 i z tabelicy 5 widać, że funkcje  $a, b, c$  i  $d$  przedstawiają wykresy faliste, których amplitudy maleją szybko ze wzrostem odległości od przekroju obciążonego, czyli od przekroju rury położonego z dala od jej końców i ściśniętego wąskim pierścieniem.

Długość fali wykresów każdej z tych funkcj jest jednakowa, stała na całej długości rury; znajduje się ją z równości  $\beta L = 2\pi$ :

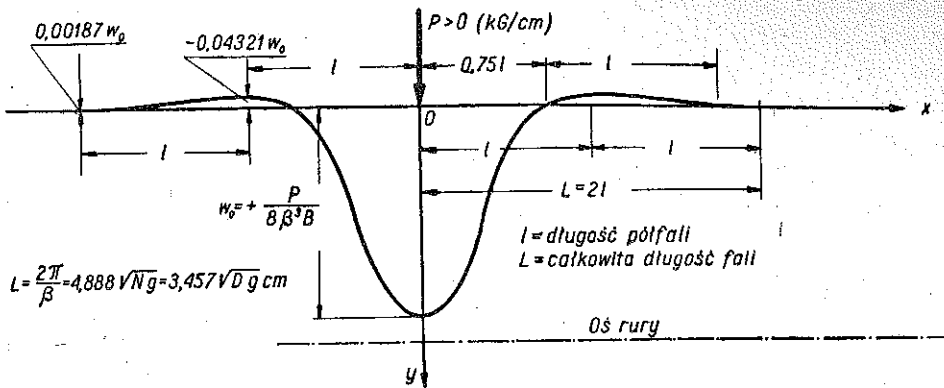
$$(5.1) \quad L = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \cdot \frac{1,285}{\sqrt{Ng}} = 2\pi \cdot \frac{1,818}{\sqrt{Dg}} = 4,888 \sqrt{Ng} = 3,4570 \sqrt{Dg} \text{ cm.}$$

Długość półfali odpowiadająca wzajemnej odległości dwóch sąsiednich punktów przechodzenia fali przez oś  $x$  (lub jej górowania liczonego jako liczba bezwzględna) wynosi zatem

$$(5.2) \quad l = \frac{L}{2} = 2,444 \sqrt{Ng} \approx 1,73 \sqrt{Dg} \text{ cm (dokładniej } 1,7285 \sqrt{Dg}).$$

Długość  $L$  fali w przypadku rury ściśniętej wąskim pierścieniem jest więc proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z iloczynu średnicy rury i grubości jej ścianki. Należy przy tym zauważyć, że na długość fali nie ma zupełnie wpływu moduł Younga  $E$ .

Zestawienie wzorów 5. Tworząca środkowej powierzchni rury bardzo długiej obciążonej równomiernie w przekroju znacznie oddalonym od jej końców siłami promieniowymi



Rys. III a

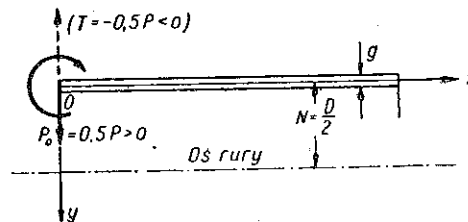
Z warunku

$$\varphi = -\frac{1}{2\beta^2 B} (P_0 - 2\beta M_0) = 0$$

otrzymujemy

$$M_0 = \frac{P_0}{2\beta} = \frac{P}{4\beta} > 0,$$

$$\beta = \frac{1,285}{\sqrt{Ng}} = \frac{1,818}{\sqrt{Dg}} \text{ cm}^{-1}.$$



Rys. III b

$$(1) \quad \begin{cases} w = +\frac{P}{8\beta^3 B} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x), & M = -\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x), \\ \varphi = -\frac{P}{4\beta^2 B} e^{-\beta x} \sin \beta x, & T = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x. \end{cases}$$

We wzorach tych

$$(2) \quad B \equiv \frac{EJ}{1-\nu^2} = \frac{Eg^3}{12(1-\nu^2)} \text{ kGem.}$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dla } \nu = 0,34 \text{ jest } B = \frac{Eg^3}{10,6} \approx 0,0943 Eg^3 \text{ kGem,} \\ 0,30 \quad \frac{Eg^3}{10,92} \approx 0,0916 Eg^3 \text{ kGem,} \\ 0,25 \quad \frac{Eg^3}{11,23} \approx 0,089 Eg^3 \text{ kGem.} \end{array} \right.$$

Różnica wartości współczynnika Poissona  $\nu$  ma, jak wiadomo (zestawienie 4), wpływ znikomo mały na wartość współczynnika  $\beta$ , od którego zależy przebieg funkcji  $a, b, c$  i  $d$  (tablica 5); przyjmując  $\nu=0,3$  popelniamy przy obliczaniu  $\beta$ , w przypadku wartości  $\nu$  znajdującej się w granicach  $0,25 \leq \nu \leq 0,34$ , błąd, którego wartość bezwzględna jest mniejsza od  $0,8\%$ , mianowicie dla  $\nu=0,25$  błąd wynosi  $-0,778\%$ , a dla  $\nu=0,34$  wynosi  $+0,785\%$ .

Wyrażenia dla  $w$  i  $\varphi$  (wzory zestawienia 5) zawierają w mianowniku poza  $\beta$  (w potęgze drugiej lub trzeciej) również wielkość  $B$ , dla której, gdy przyjmiemy  $\nu=0,3$ , błąd waha się przy  $\nu$  znajdującym się w granicach  $0,25 \leq \nu \leq 0,34$  pomiędzy  $+2,92\%$  i  $-2,86\%$ .

Jednak błędy pochodzące od obydwu tych czynników  $\beta$  i  $B$  są różnych znaków, toteż kompensują się w pewnej mierze.

W zestawieniu wzorów 6 podano wzory uproszczone, które otrzymano na podstawie przyjęcia zarówno dla  $\beta$ , jako też dla  $B$  wartości  $\nu$  równej  $0,3$ . Wynikające stąd błędy w przypadkach, w których  $\nu$  znajduje się w granicach  $0,25 \leq \nu \leq 0,34$ , są dla ugięcia zawsze mniejsze od  $\pm 0,7\%$ .

## 6. Wpływ skończonej długości rury

W przypadku rury krótkiej zachodzi konieczność uwzględnienia właściwych warunków granicznych (brzegowych), a więc np. dla rury krótkiej o końcach swobodnych należy uwzględnić, że na jej końcach zanika zarówno moment gnący  $M$ , jako też napięcie poprzeczne  $T$ , i z tych warunków łącznie z warunkami dotyczącymi przekroju obciążonego należy określić stałe całkowania  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$  w równaniach (1)-(4) zestawienia 1 według wzorów podanych w zestawieniu 2 lub danych liczbowych, przytoczonych w tablicy 3.

Wobec szybkiego zanikania amplitudy fali wykresu każdej z funkcji (2) podanych w zestawieniu 6 można już przy stosunkowo krótkich rurach z niewielkim błędem stosować wzory dla rury nieskończenie długiej.

Zauważmy, że, jak widać z przytoczonych danych w tablicy 5 i w zestawieniu 6, wartości wszystkich funkcji  $w, \varphi, M$  i  $T$  w odległości  $x=2\pi:\beta$  od przekroju obciążonego praktycznie zanikają, gdyż wynoszą one mniej niż  $0,2\%$  największej wartości bezwzględnej odpowiedniej wielkości. Już nawet w odległości  $x=1,5\pi:\beta$  od środkowego przekroju obciążonego rury bardzo długiej wartości omawianych wielkości wynoszą mniej niż  $1\%$  bezwzględnej największej wartości odpowiedniej wielkości, z wyjątkiem kąta  $\varphi$ , dla którego wartość ta wynosi  $2,79\%$ .

W zestawieniu 7 podano wyprowadzenie wzorów na nateżenie sił  $P$  kG/cm (wzór 4) i na nateżenie momentów  $M_0$  kGem/cm (wzór 5) w przekroju rury ściskany pierścieniem i oddalonym znacznie od jej końców.

**Zestawienie wzorów 6. Wzory przybliżone dla rury bardzo długiej  
obciążonej równomiernie w przekroju znacznie oddalonym  
od jej końców siłami promieniowymi**

Przybliżenie w podanych niżej wzorach polega na przyjęciu w przypadkach różnych metali jednakowej liczby Poissona o wartości  $\nu = 0,3$  zarówno dla współczynnika zanikania amplitudy fali

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\sqrt{Dg}} \text{ cm}^{-1},$$

jako też dla płytowej sztywności zginania (jednostkowej)

$$B = \frac{Eg^3}{12(1-\nu^2)} \text{ kGem.}$$

Przy takim założeniu otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$(1) \quad +\frac{P}{8\beta^3 B} = +0,227 \frac{P}{E} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3} \quad \text{i} \quad -\frac{P}{4\beta^3 B} = -0,827 \frac{P}{gE} \frac{D}{g},$$

popołniając w przypadkach, w których  $\nu$  znajduje się w granicach  $0,25 \leq \nu \leq 0,34$  błąd dla  $[w]_{x=0}$  mniejszy od  $\pm 1\%$ . Dla  $[\varphi]_{x=0}$  błąd jest większy, lecz nigdy nie osiąga wartości  $\pm 2\%$ . Jednak w obliczeniach naszych ugięcie  $w$  odgrywa istotną rolę, a nie kąt obrotu  $\varphi$ , toteż błąd dotyczący wartości  $\varphi$  nie ma na wyniki obliczeń wpływu godnego uwagi.

Uproszczone w taki sposób wzory przybierają następującą postać:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} w = +0,641 \frac{P}{E} \sqrt{\left(\frac{N}{g}\right)^3} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) = \\ \qquad \qquad \qquad = +0,227 \frac{P}{E} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) \text{ cm}, \\ \varphi = -1,65 \frac{P}{gE} \frac{N}{g} e^{-\beta x} \sin \beta x = -0,827 \frac{P}{gE} \frac{D}{g} e^{-\beta x} \sin \beta x \text{ cm/cm}, \\ M = -0,195 P \sqrt{Ng} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) = \\ \qquad \qquad \qquad = -0,138 P \sqrt{Dg} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) \text{ kGem/cm}, \\ T = -0,5 P e^{-\beta x} \cos \beta x \text{ kG/cm}. \end{array} \right.$$

Dla przekroju obciążonego wielkości te wyrażają się:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} [w]_{x=0} = +0,641 \frac{P}{E} \sqrt{\left(\frac{N}{g}\right)^3} = +0,227 \frac{P}{E} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3} \text{ cm}, \\ [\varphi]_{x=0} = 0, \\ [M]_{x=0} = +0,195 P \sqrt{Ng} = +0,138 P \sqrt{Dg} \text{ kGem/cm}, \\ [T]_{x=0} = -0,5 P \text{ kG/cm}. \end{array} \right.$$

Zestawienie wzorów 7. Wyznaczanie wartości natężenia sił  $P$  kG/cm i momentów  $M_0$  kGcm/cm w przekroju rury oddalonym od jej końców ściskany pierścieniem

Oznaczenia (przy  $\nu = 0,3$ )

$D = 2N$  Średnica powierzchni walcowej połowiącej grubość ścianki rury w cm.

$g$  Grubość ścianki rury w cm.

$w$  Zmniejszenie promienia walcowej powierzchni o średnicy  $D$  wywołane ściskaniem rury przez pierścień.

$E$  Moduł Younga materiału rury w kG/cm<sup>2</sup>.

$\beta = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\sqrt{Dg}} \approx \frac{1,818}{\sqrt{Dg}}$  Współczynnik zanikania amplitudy fali w cm<sup>-1</sup>.

$B = \frac{Eg^3}{(1-\nu^2)} \approx 0,0916Eg^3$  Sztywność (jednostkowa) zgięcia płytowego w kGcm.

$\varepsilon$  Jednostkowe wydłużenie okręgu o średnicy  $D$  w cm/cm.

$\sigma$  Naprężenie ściskające (obwodowe) w ściance rury w przekroju działania pierścienia w kG/cm<sup>2</sup>.

$\sigma_g$  Naprężenie gnące (wzdłużne) w przekroju działania pierścienia w kG/cm<sup>2</sup>.

Otrzymujemy

$$(1) \quad w = \frac{P}{8\beta^2 B} \approx 0,227 \frac{P}{E} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3}.$$

Oznaczenia

$D_1 = 2N_1$  Średnica okręgu przechodzącego przez środki ciężkości poprzecznych przekrojów ścianki pierścienia w cm.

$\Omega$  Pole przekroju (osiowego) ścianki pierścienia w cm<sup>2</sup>.

$w_1$  Zwiększenie promienia okręgu o średnicy  $D_1$  (w pierścieniu) w cm.

$E_1$  Moduł Younga materiału pierścienia w kG/cm<sup>2</sup>.

$\varepsilon_1$  Jednostkowe wydłużenie okręgu (pierścienia) o średnicy  $D_1$  w cm/cm.

$\sigma_1$  Naprężenie rozciągające w pierścieniu w kG/cm<sup>2</sup>.

Otrzymujemy

$$(2) \quad \varepsilon_1 = \frac{w_1}{N_1} = \frac{2w_1}{D_1} = \frac{1}{E_1} \frac{PD_1}{2\Omega} \text{ cm/cm,} \quad \text{czyli} \quad w_1 = \frac{PD_1^2}{4E_1\Omega}.$$

Jeżeli ponadto oznaczymy przez  $\Delta D$  różnicę pomiędzy zewnętrzną średnicą rury i mniejszą od niej wewnętrzną średnicą pierścienia, to wobec istnienia (przybliżonej) zależności  $w + w_1 = \Delta D/2$  mamy w przybliżeniu

$$(3) \quad \frac{P}{8\beta^3 B} + \frac{PD_1}{4E_1\Omega} = \frac{\Delta D}{2} \quad \text{lub} \quad 0,227 \frac{P}{E} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3} + 0,25 \frac{PD_1^2}{E_1\Omega} = \frac{\Delta D}{2},$$

czyli

$$(4) \quad P = 2 \frac{\Delta D}{\frac{1}{2\beta^3 B} + \frac{D_1^2}{E_1\Omega}} \quad \text{lub} \quad P = 2,2 \frac{\Delta D}{\frac{1}{E} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3} + \frac{1,1 D_1^2}{E_1\Omega}}$$

Ponieważ  $M_0 = P/4\beta$ , przeto

$$(5) \quad M_0 = 0,5 \frac{\Delta D}{\frac{1}{2\beta^3 B} + \frac{\beta D_1^2}{E_1\Omega}} \quad \text{lub} \quad M_0 = 0,3025 \frac{\Delta D \sqrt{Dg}}{\frac{1}{E} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3} + \frac{1,1}{E_1} \frac{D_1^2}{\Omega}},$$

oraz

$$(6) \quad \sigma = -E \frac{2|w|}{D} \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_g = \pm \frac{6M_0}{g^2} \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_1 = +E_1|\epsilon_1| = + \frac{PD}{2\Omega} \text{ kG/cm}^2.$$

Jeżeli pierścień jest połączony z rurą bez wstępnego wcisku, to za  $\Delta D$  należy przyjąć zwiększenie średnicy rury gładkiej pod wpływem działania ciśnienia, jemu bowiem zawdzięcza się jedynie nacisk pierścienia na rurę.

Dla rury z dnami przyjmując zarówno dla stali ( $\nu = 0,3$ ), jako też dla miedzi ( $\nu = 0,34$ ), ogólnie  $\nu = 0,3$ , otrzymujemy z dokładnością do około 1%.

$$(6.1) \quad \Delta D = \frac{D}{E} \left( \frac{pD}{2g} - \nu \frac{pD}{4g} \right) = p \frac{D^2}{2gE} (1 - 0,5\nu) = 0,42 \frac{D^2}{gE} p \text{ cm.}$$

Ze wzorów wyprowadzonych w zestawieniu 7 otrzymujemy:

$$(6.2) \quad P = 2,2 \frac{\Delta D}{\frac{1}{E} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3} + \frac{1,1}{E_1} \frac{D_1^2}{\Omega}} = 0,925 \frac{D^2}{gE} \frac{p}{\frac{1}{E} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3} + \frac{1,1}{E_1} \frac{D_1^2}{\Omega}},$$

$$(6.3) \quad M_0 = \frac{P}{4\beta} = P \frac{\sqrt{Dg}}{4 \cdot 1,818} = \frac{\sqrt{Dg}}{7,272} P = 0,1375 \sqrt{Dg} P =$$

$$= 0,127 \frac{D^2}{gE} \frac{\sqrt{Dg} p}{\frac{1}{E} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3} + \frac{1,1}{E} \frac{D_1^2}{\Omega}}.$$

We wzorach tych oznaczają  $E$  i  $E_1$  moduły sprężystości wzdłużnej materiału rury i pierścienia, a  $D$  i  $D_1$  średnice powierzchni połowiących ścianę rury i pierścienia.

Jeżeli rura i pierścień są wykonane z tego samego materiału, a więc  $E = E_1$ , wówczas wzory (6.2) i (6.3) upraszczają się jak następuje:

$$(6.2.1) \quad P = 0,925 \frac{D^2}{g} \frac{p}{\sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3 + 1,1 \frac{D_1^2}{\Omega}}}$$

$$(6.3.1) \quad M_0 = 0,127 \frac{D^2}{g} \frac{\sqrt{Dg} p}{\sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3 + 1,1 \frac{D_1^2}{\Omega}}}$$

### 7. Interferencja ugięć i momentów pochodzących od wielu przekrojów obciążonych

Jeżeli na rurze jest kilka przekrojów obciążonych w pewnych odległościach jeden od drugiego, to każde z obciążeń wywołuje zjawiska falowe ilustrowane wzorami zestawienia 5 i wzorami (2) zestawienia 6.

Każdy rodzaj fali odpowiadającej wielkości  $w$ ,  $\varphi$ ,  $M$  i  $T$  wywołanej obciążeniem jednego przekroju interferuje z falami tego samego rodzaju wywołanymi przez obciążenie pozostałych przekrojów.

Powyższe zjawiska zależą liniowo od natężenia  $P$  kG/cm siły ściskającej przekrój, podlegają więc w przybliżeniu superpozycji. Toteż wpływ — na jakikolwiek przekrój rury — działania wszystkich obciążeń wyrazi się sumą algebraiczną wartości odpowiednich wielkości przedstawiających działanie na ten przekrój poszczególnych obciążeń w różnych przekrojach, pod warunkiem, że zjawisko przebiegać będzie w granicach ważności prawa Hooke'a.

Przyjmować będziemy, że dane o zastosowaniu superpozycji ważne są w przybliżeniu również w przypadku, gdy obciążenie przekroju rury wywołane jest ściskaniem jej przez pierścień odpowiednio zwężony od wewnętrznej strony, aby obciążenie praktycznie dotyczyło przekroju rury, a nie jej walcowego elementu, którego tworząca posiada pewną długość.

Można tak dobrać wzajemną odległość środków pierścieni  $\lambda$ , aby przebieg zmiany wypadkowej wartości każdej z osobna wielkości  $w$ ,  $\varphi$ ,  $M$  i  $T$  był równomierny w tym znaczeniu, że dodatnie i ujemne odchylenia od wartości zamierzonej będą miały jednakową bezwzględną wartość. Jednak, jak to wykazują wykonywane próby w tym kierunku, nie można tak dobrać wzajemnej skończonej odległości  $\lambda$  środków pierścieni,

Tablica 6. Wartości skrajne ugięć  $w$  w cm i momentów  $M$  w kG cm/cm w zależności od odległości przekrojów obciążonych, określonej liczbą  $\beta\lambda$

$\beta\lambda$	Ugięcie $w$ (przy $w_0=1$ )			Moment gnący $M$ (przy $M_0=1$ )		
	w przekroju obciążonym	między przekrojami obciążonymi	uwagi	w przekroju obciążonym	między przekrojami obciążonymi	uwagi
	$A$	$a$	nie ma zastosowania	$B$	$b$	
0,6	3,3330	3,3298	Praktyczne granice stosowności. Wyróżnia się przypadek, dla którego $\beta\lambda=2$	0,2020	-0,0979	Praktycznie moment $B = 0,325 \beta\lambda M_0$ moment $ b  = 0,1625 \beta\lambda M_0$ czyli $B = 2 b $
0,8	2,5034	2,4909		0,2680	-0,1316	
1,0	2,0108	1,9890		0,3338	-0,1627	
1,2	1,6837	1,6493		0,3995	-0,1977	
1,4	1,4588	1,4014		0,4645	-0,2296	
1,6	1,2944	1,2089		0,5287	-0,2607	
1,8	1,1724	1,0557		0,5908	-0,2898	
2,0	1,0852	0,9256		0,6511	-0,3173	
2,2	1,0145	0,8108		0,7070	-0,3410	
2,4	0,9737	0,7099		0,7615	-0,3618	
2,6	0,9447	0,6174	0,8111	-0,3787		
2,8	0,9272	0,5316	0,8580	-0,3906		
3,0	0,9189	0,4503	0,8935	-0,3965		
3,2	0,9175	0,3769	0,9263	-0,3976		
3,4	0,9114	0,3086	0,9533	-0,3935		
3,6	0,9268	0,2456	0,9876	-0,3843		
3,8	0,9372	0,1883	0,9920	-0,3705		
4,0	0,9483	0,1369	1,0038	-0,3526		
4,2	0,9595	0,0915	0,9886	-0,3314		
4,4	0,9691	0,0522	0,9842	-0,3078		
4,6	0,9778	0,0207	0,9823	-0,2832		
4,8	0,9850	-0,0100	0,9822	-0,2563		
5,0	0,9909	-0,0333	1,0167	-0,2298		

aby równowartość ta dotyczyła w jednakowym stopniu na raz wszystkich wielkości  $w, \varphi, M$  i  $T$ .

Średnie naprężenie tnące  $\tau$  jest zawsze wielokrotnie mniejsze od naprężenia ściskającego  $\sigma$ . Stosunek  $\sigma:\tau$  dla przekroju obciążonego (jak widać z zestawienia 6) wyraża się jako

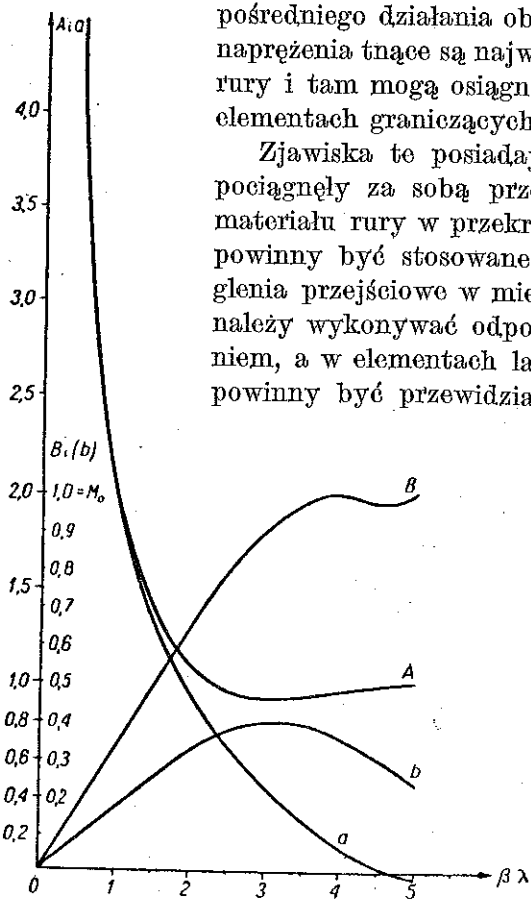
$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{2 \cdot 0,227 \frac{P}{D} \sqrt{\left(\frac{D}{g}\right)^3}}{\frac{P}{2g}} = 0,908 \sqrt{\frac{D}{g}}$$

Stosunek ten dla stosunku  $D:g$  równego od 100 do 20 wynosi od około 9,1 do około 4.



W przekrojach znajdujących się poza wpływem bezpośredniego nacisku pierścienia największe naprężenie tnące jest półtorakrotnie większe od przeciętnego i panuje w środku grubości ścianki, tj. tam, gdzie naprężenia od zginania równe są zeru, natomiast naprężenia tnące znikają w skrajnych (powierzchniowych) elementach ścianki, gdzie naprężenia gnące osiągają największe wartości liczbowe. Dopiero w przekroju bezpośredniego działania obciążenia, przy samym pierścieniu, naprężenia tnące są największe w zewnętrznych elementach rury i tam mogą osiągnąć znaczne wartości zanikając na elementach graniczących z powierzchnią wewnętrzną rury.

Zjawiska te posiadają miejscowy charakter. Aby nie pociągnęły za sobą przekroczenia granicy plastyczności materiału rury w przekroju sąsiadującym z pierścieniem, powinny być stosowane pierścienie posiadające zaokrąglenia przejściowe w miejscach łączenia się ich z rurą lub należy wykonywać odpowiednie łagodne przejścia spawaniem, a w elementach lanych powyższe łagodne przejścia powinny być przewidziane w odlewie.



Rys. 2.

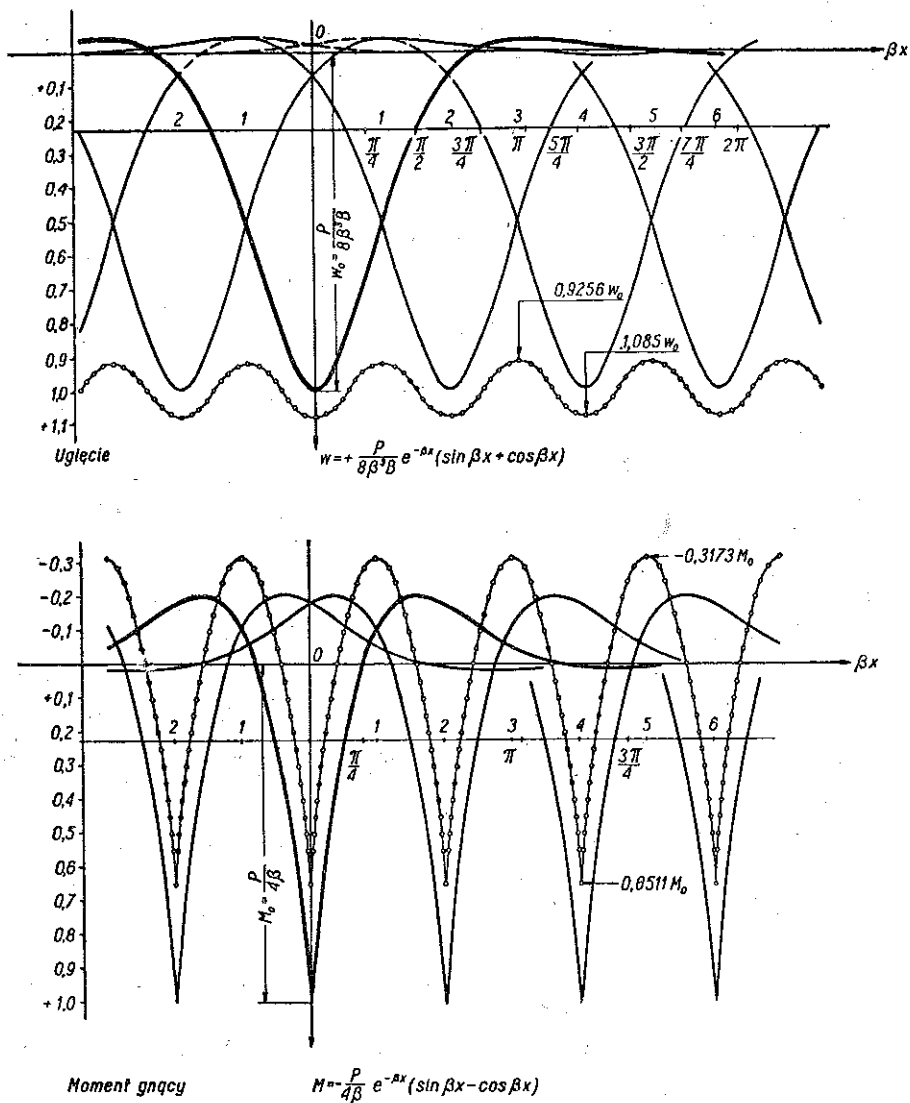
Przyjmując, że sposób połączenia pierścienia z rurą wyklucza powstawanie groźnych miejscowych naprężeń stycznych, bierzemy w obliczeniu pod uwagę jedynie naprężenia od ściskania siłą  $P$   $\text{kg/cm}$  i od zginania momentem  $M_0$ .

Wielkości, które w niniejszym obliczeniu powinny być głównie brane pod uwagę, są więc przede wszystkim: ugięcie  $w$ , jako wywołujące naprężenia w całym wymiarze grubości ścianki rury (w przybliżeniu równomiernie rozłożone w tym wymiarze),

i moment gnący  $M$  wywołujący największe liczbowo naprężenia jedynie w skrajnych (powierzchniowych) elementach ścianki rury.

Przyjmując za jedność wartość ugięcia  $w_0 = P/8\beta^3 B$  jako też wartość momentu  $M_0 = P/4\beta$  panującego w obciążonym (jedynym) przekroju w znacznej odległości od końców rury (długiej) opracowano tablicę 6 i wykres na rys. 2, uwidoczniające zmienność tych wielkości w zależności od wartości  $\beta\lambda$  przy rurze bardzo długiej.

Obliczone wartości dotyczą ugięć i momentów występujących w przekrojach obciążonych (krzywe A i B) oraz w przekrojach połowiących odległość przekrojów obciążonych (krzywe a i b).



Rys. 3

Wykresy podane na rys. 3 przedstawiają interferencje ugięcia  $w$  i momentów  $M$  dla przypadku teoretycznie obciążonych stałymi siłami promieniowymi o natężeniu  $P$  kG/cm przekrojów (idealnych), znajdujących

cych się we wzajemnej odległości charakteryzowanej wielkością równą  $\lambda\beta=2$ . Linie oznaczone punktami przedstawiają przebieg wypadkowych ugięć i momentów.

#### 8. Wpływ szerokości pierścienia i sposobu połączenia z rurą

Tablica 6 i rys. 2 są opracowane przy założeniu idealnego obciążenia przekrojów rury w takim znaczeniu, że jeżeli obciążenie jest wywołane ściskaniem pierścieni, to szerokość tych pierścieni w miejscu stykania się ich z powierzchnią (zewnątrzną) rury zdąża do zera. W rzeczywistości mamy do czynienia ze skończoną szerokością pierścienia.

Zarówno szerokość pierścienia w miejscu stykania się jego z rurą, jako też sposób połączenia z nią pierścienia, mianowicie z wciskiem wstępnym lub bez wcisku, a w tym drugim przypadku za pomocą odlania go z rurą lub też nasunięcia go na nią, ma wybitny wpływ na miarodajną w obliczeniu wartość momentu gnącego. W obliczeniu bowiem nie należy brać pod uwagę teoretycznie otrzymywanego momentu w przekroju rury, odpowiadającym środkowi pierścienia, od skupionego obciążenia kołowo symetrycznego w tym przekroju, lecz moment występujący w przekroju rury poza pierścieniem w dostatecznej odległości od niego, w którym wpływ szerokości pierścienia i łagodnego przejścia od pierścienia do rury zanika w takim stopniu, że można go nie uwzględniać.

Ze względu na odkształcalność poprzecznego przekroju wieńca pierścienia, rozmaitego dla różnych kształtów przekroju, ściśle uwzględnienie szerokości pierścienia w miejscu połączenia go z rurą jest bardzo trudne i praktycznie nie nadaje się do zastosowania.

Przyjmujemy, że ściana rury w obrębie połączenia jej z pierścieniem jest całkowicie zabezpieczona przed zginaniem, natomiast za wartość przybliżoną momentu gnącego, wystarczająco dokładną dla potrzeb technicznych i miarodajną w obliczeniu naprężeń gnących (we wzdłużnych elementach ściany rury), przyjmować będziemy tę wartość momentu, która przy teoretycznym obciążeniu rury występuje w odległości połowy szerokości  $S$  pierścienia, to jest w odległości  $0,5S$  po obydwu stronach przekroju obciążonego, czyli w płaszczyznach czołowych pierścienia<sup>3)</sup>.

W technicznych obliczeniach nie będziemy uwzględniali przy tym zmian (wywołanych zastosowaniem pierścieni o skończonej szerokości) w przebiegu momentu gnącego na odcinku tworzącej pomiędzy pierście-

<sup>3)</sup> Dokładne badania wpływu pierścieni, które mogą zmieniać średnicę wskutek działania ciśnienia wewnętrznego, lecz stanowiących sztywne utwierdzenie ściany przeciwko obrotowi tworzącej w przekroju osiowym, będą tematem oddzielnych rozważań.

niami, przyjmując do obliczenia naprężeń gnących bezwzględną wartość momentu — występującego przy teoretycznym obciążeniu — obliczoną dla przekroju odległego o  $0,5S$  od przekroju obciążonego lub dla przekroju połowiącego tę odległość, w zależności od tego, w którym z tych przekrojów wartość ta jest większa. Przy takim założeniu najkorzystniejszą szerokością pierścienia  $S$  w miejscu połączenia z rurą (zależną od odległości środków sąsiednich pierścieni) jest taka szerokość, przy której wartość bezwzględna momentu gnącego w odległości  $0,5S$  od środka przekroju obciążonego jest równa wartości bezwzględnej momentu w przekroju środkowym pomiędzy przekrojami obciążonymi, przy teoretycznym obciążeniu.

Z rys. 3 wynika, że dla przypadku charakteryzowanego wielkością  $\lambda\beta=2$ , dla którego wykresy na tym rysunku zostały sporządzone, najmniejsza szerokość pierścieni w miejscu przylegania do rury powinna wynosić około  $\lambda\beta=0,4$ , czyli że dla tego przypadku ( $\lambda\beta=2$ ) powinna stanowić przynajmniej  $0,4/2=0,2$  odległości pomiędzy środkami pierścieni.

Jeżeli w odlanych pierścieniach o postaci przekroju zbliżonej zwykle do trapezu lub w przypojonych pierścieniach przejście od pierścienia do rury posiada zaokrąglenie, to za obliczeniową szerokość  $S$  przyjmować będziemy odległość od środków obydwu łuków zaokrąglenia tego samego wzmocnienia (zebra).

Badając krzywe  $A$  i  $a$  na rys. 2 widzimy, że w miarę tego jak  $\beta\lambda$  zwiększa się, zwiększa się również stosunek ugięć w przekrojach obciążonych i w środku pomiędzy tymi przekrojami; już przy  $\beta\lambda=3$  stosunek ten wynosi (tablica 6)  $0,9189/0,4503 \approx 2,04$ , tzn. przekracza 2, toteż wzmocnienie rury za pomocą zeber poprzecznych byłoby już mało skuteczne, a więc nieopłacalne. Przy  $\beta\lambda=1$  właściwy stosunek wynosi  $2,0108/1,9890 \approx 1,01$ ; daje on duże korzyści wytrzymałościowe, ale korzyści te są okupione znacznymi kosztami, spowodowanymi użyciem dużej liczby zeber.

Biorąc pod uwagę okoliczność, że znaczne zagęszczenie kołnierzy zbytńo podraża element konstrukcyjny, a przy dużych odległościach pomiędzy kołnierzami nie wywierają one należytego wpływu na przekroje pośrednie, staraliśmy się określić najkorzystniejszą praktycznie odległość  $\lambda$  pomiędzy środkami kołnierzy, której stosowanie można by zalecać konstruktorowi. Rozważania w tym względzie doprowadziły nas do przekonania, że praktycznie najkorzystniejszą odległością  $\lambda$  jest odległość określona wielkością  $\lambda\beta=2$  (dla której zostały wykonane wykresy na rys. 2), czyli

$$(8.1) \quad \lambda = \frac{2}{\beta} = \frac{\sqrt{Dg}}{0,909} \approx 1,1 \sqrt{Dg}$$

przy stosowaniu obliczeniowej szerokości pierścieni, która może wynosić w przybliżeniu

$$(8.2) \quad S = 0,2\lambda = 0,22 \sqrt{Dg}.$$

Wykresy wypadkowych ugięć  $w$  i momentów  $M$  na rys. 3 zostały wykonane na podstawie niżej przytoczonych danych, obliczonych z tabelicy 5. W drugim zestawieniu podano wartości współczynnika  $a$  w zależności od  $\beta\lambda$ , przez który należy pomnożyć  $w_0$ , aby otrzymać ugięcie w połowie odległości pomiędzy wzmocnieniami.

$\beta x = n$	Wy-	Wy-	$\beta\lambda$		$\beta\lambda$		$\beta\lambda$	
	padkowe ugięcia $w$	padkowy moment $M$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
0,0	1,0852	0,6511	0,6	3,3298	2,0	0,9256	3,4	0,3086
0,1	1,0784	0,4619	0,7	2,9103	2,1	0,8687	3,5	0,2771
0,2	1,0641	0,2944	0,8	2,4909	2,2	0,8108	3,6	0,2456
0,3	1,0431	0,1482	0,9	2,2399	2,3	0,7603	3,7	0,2169
0,4	1,0200	0,0227	1,0	1,9890	2,4	0,7099	3,8	0,1883
0,5	0,9946	-0,0825	1,1	1,8192	2,5	0,6636	3,9	0,1626
0,6	0,9716	-0,1674	1,2	1,6493	2,6	0,6174	4,0	0,1369
0,7	0,9521	-0,2333	1,3	1,5253	2,7	0,5745	4,1	0,1142
0,8	0,9370	-0,2801	1,4	1,4014	2,8	0,5316	4,2	0,0915
0,9	0,9276	-0,3079	1,5	1,3052	2,9	0,4909	4,3	0,0718
1,0	0,9256	-0,3172	1,6	1,2089	3,0	0,4503	4,4	0,0522
			1,7	1,1323	3,1	0,4136	4,5	0,0364
			1,8	1,0557	3,2	0,3769	4,6	0,0207
			1,9	0,9906	3,3	0,3427	4,7	0,0053
			2,0	0,9256	3,4	0,3086	4,8	~ -0,01

Wobec naszego założenia, które nie zostało sprawdzone doświadczalnie, co do rozkładu momentów gnących na długości  $\lambda$  przy skończonej szerokości pierścieni wzmacniających, zwłaszcza zaś co do zmniejszenia się szczytowej wartości momentu, zaleca się, *aby szerokość  $S$  była wyraźnie większa od*

$$(8.2.1) \quad 0,2\lambda = 0,22 \sqrt{Dg}.$$

Stosowanie wzorów (8.1) i (8.2) z uwzględnieniem wzoru (8.2.1) można zalecać konstruktorowi przy projektowaniu nowych rur z żebrami obwodowymi, jeżeli te ostatnie mają oczywiście na celu wyłącznie wzmocnienie rury.

Może jednak zachodzić potrzeba obliczenia rury opatrzonej żebrami o innej wzajemnej odległości  $\lambda$ , niż uznanej przez nas za najodpowied-

niejszą. Przypadki takie mogą zachodzić przy projektowaniu rur żebranych, będących wymiennikami ciepła, w których niezbędna ilość żeber o danych wymiarach powinna przede wszystkim spełniać stawiane warunki co do wymiany ciepła i w których wzajemne odległości żeber są mniejsze, niż określone wzorem (8.1). Wreszcie może zachodzić potrzeba sprawdzenia wytrzymałości już istniejącej rury opatrzonej żebrami.

Należy tutaj nadmienić, że nie są stosowane rury żebrane przy odległości żeber charakteryzowanej iloczynem  $\beta\lambda < 0,7$ , oraz że, jak wynika z wykresu *A* na rys. 2, począwszy od  $\beta\lambda \leq 2,2$  wypadkowe ugięcie w przekroju obciążonym jest mniejsze od ugięcia, które wywołuje obciążenie w danym przekroju bez współudziału obciążeń w innych przekrojach; toteż konstrukcję taką należy uważać za wadliwą i tylko wyjątkowo może ona być tolerowana; należy ją jednak szczegółowo obliczyć korzystając z przytoczonych wykresów i tablic liczbowych.

Wobec powyższego należy się zadowolić opracowaniem roboczego obliczenia konstruktorskiego dla warunków charakteryzowanych granicami  $0,7 \leq \beta\lambda \leq 2,2$ . Zwróćmy przy tym uwagę, że dla tych granic można przyjąć z dosyć dużą dokładnością następującą przybliżoną zależność momentów *B* i *b* od wielkości  $\beta\lambda$  (rys. 2):

$$(8.3) \quad \begin{cases} B = 0,325\beta\lambda M_0, \\ b = 0,1625\beta\lambda M_0. \end{cases}$$

Z zależności  $B/b=2$  wnioskujemy, że szerokość *S* pierścienia w miejscu jego stykania się ze ścianką rury powinna być taka, żeby w punktach ograniczających odcinek szerokości pierścienia moment gnący od idealnego obciążenia, przy danej odległości  $\beta\lambda$ , był dwa razy mniejszy.

Liczne próby łatwego uwzględnienia przebiegu sumarycznego momentu *A* w zależności od iloczynu  $\beta\lambda$ , niezbędnego do każdorazowego określenia potrzebnej szerokości pierścienia *S*, doprowadziły nas do spostrzeżenia, że przebieg ten (z dużą dokładnością w potrzebnych granicach dla naszych celów) można w zależności od wypadkowego momentu maksymalnego przyjąć jako jednakowy dla wszystkich przypadków ujętych granicami  $0,7\beta \leq \lambda \leq 2,2$ .

Określenie «jednakowy przebieg» należy rozumieć w ten sposób, że jeżeli dla różnych  $\beta\lambda$  będziemy wzajemnie nakładali punkty szczytowe wykresu wypadkowych momentów gnących od strony dodatnich wartości (patrz punktowany wykres momentów na rys. 3) i zgodnie kierowali osie symetrii, to wykresy te będą się nakładały, z błędem dodatnim dla momentów nie przekraczającym 3,2%. Przedstawia to tablica 7.

Z tablicy 5 oraz z wykresu momentów na rys. 3 widać, że dla przypadku jednego obciążonego przekroju można przebieg momentów wy-

padkowych, w granicach określonych współrzędnymi od  $M=1$  i  $\beta x=0$  do  $M=0,5$  i  $\beta x=0,31$ , wyrazić wzorem

$$(8.4) \quad M=1-\frac{8}{5}\beta x,$$

przy czym największy błąd zwiększa rzeczywistą wartość momentu oraz, zachodząc między tymi granicznymi wartościami, wynosi 6<sup>o</sup>/<sub>0</sub>.

Określony w taki sposób współczynnik kątowy  $m=-\frac{8}{5}$  ważny jest z dostatecznym przybliżeniem dla wszystkich wykresów wypadkowych momentów na pewnym dosyć znacznym odcinku poczynając od punktu szczytowego, przynajmniej na odcinku odpowiadającym połowie wartości momentu szczytowego.

Posiadając współczynnik kątowy  $m=-\frac{8}{5}$  odpowiednich prostych równoległych, otrzymujemy ich równanie

$$y-B=-\frac{8}{5}(x-0), \quad M=0,325\beta\lambda=-\frac{8}{5}\beta x$$

i ostatecznie

$$(8.5) \quad M=0,325\beta\lambda-1,6\beta x.$$

Równanie (8.5) wyznacza wartość momentu wypadkowego  $M$  w funkcji  $\beta x$ , w zależności od parametru  $\beta\lambda$  określającego wzajemną odległość pierścieni; pozwala ono znaleźć szerokość pierścienia odpowiadającego warunkowi, aby w ścianie rury przy samym pierścieniu wartość bezwzględna momentu gnącego była dwa razy mniejsza od momentu szczytowego, tj. aby była równa bezwzględnej wartości momentu w przekroju połowiącym odległość pomiędzy pierścieniami.

Połowę potrzebnej szerokości  $0,5\beta S$  pierścienia znajdziemy z równania (8.5) określając  $\beta x$  i wstawiając za  $M$  połowę  $B$ :

$$0,5\beta S=\beta x=\frac{5}{8}(0,325\beta\lambda-0,5B)=\frac{5}{8}(0,325\beta\lambda-0,1625\beta\lambda)=0,1016\beta\lambda;$$

zatem najmniejsza szerokość pierścienia powinna wynosić

$$\beta S \geq 0,203\beta\lambda \approx 0,2\beta\lambda$$

lub

$$(8.6) \quad S=0,203\lambda=0,2\lambda.$$

Szerokość pierścienia powinna przekraczać wartość  $0,2\lambda$ , a nigdy nie być od niej niższą. Należy tutaj przypomnieć wzór (8.2.1).

Tablica 7. Dane do wyznaczenia przybliżonej długości  $\beta x$  odpowiadającej połowie wartości największego momentu w zależności od odległości  $\beta l$  pomiędzy przekrojami obciążonymi (do określenia korzystnej szerokości pierścieni)

$\beta l$	$\beta l = 0,6$			$\beta l = 1,0$			$\beta l = 1,4$			$\beta l = 1,8$			$\beta l = 2,2$			
	Wartość momentu			Wartość momentu			Wartość momentu			Wartość momentu			Wartość momentu			
Jeden przekrój obciążony ( $\beta l = \infty$ )	rzeczywista	zastępcza	różnica procentowa	rzeczywista	zastępcza	różnica procentowa	rzeczywista	zastępcza	różnica procentowa	rzeczywista	zastępcza	różnica procentowa	rzeczywista	zastępcza	różnica procentowa	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)
0,0	1,0000	0,2020	1,0000	0	0,3338	1,0000	0	0,4645	1,0000	0	0,5908	1,0000	0	0,7070	1,0000	0
0,1	0,8100	0,0353	0,8333	2,8	0,1540	0,8202	1,24	0,2791	0,8146	0,57	0,4025	0,8117	0,21	0,5182	0,8112	0,21
0,2	0,6398							0,1229	0,6584	4,33	0,2122	0,6214	-2,96	0,3482	0,6412	1,63
0,3	0,4888										0,0959	0,5051	3,2	0,1566	0,4496	-8,75

Objasnienia rubryk. (2) Wartości momentów gnących dla różnych wartości odległości  $\beta x$  od przekroju obciążonego w przypadku jednego przekroju obciążonego ( $\beta l = \infty$ ); (3), (6), (9), (12) i (15) wartości wypadkowego momentu gnącego przy różnej wartości jednakowych odległości  $\beta l$  przekrojów obciążonych; (4), (7), (10), (13) i (16) wartości zastępcze podanych w poprzednich rubrykach wielkości po sprowadzeniu, w celu porównania, punktów maksymalnych wartości do takiego samego punktu w przypadku podanym w rubryce (2); (5), (8), (11), (14), (17) procentowe różnice wartości momentu zastępczego dla różnych  $\beta l$  i momentu w przypadku jednego przekroju obciążonego w stosunku do momentu zastępczego.



Zestawienie wzorów 8. Schemat obliczeń przy projektowaniu naczynia walcowego wzmocnionego pierścieniem. Przykład liczbowy

Dane wyjściowe

Rura: stal stopowa,  $R_r = 6000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $Q_r = 4000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $E_r = 2150000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $k_r = 2000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $k_{gr} = 2500 \text{ kG/cm}^2$  (na zginanie łączne z rozciąganiem),  $d_w = 980 \text{ mm}$ ,  $d_z = 1020 \text{ mm}$ ,  $d = 0,5(d_w + d_z) = 1000 \text{ mm}$ ,  $g = 0,5(d_z - d_w) = 20 \text{ mm}$ ; wskaźnik wytrzymałości na zginanie (jednostkowy)

$$W = \frac{g^2}{6} = \frac{2^2}{6} = 0,667 \text{ cm}^3/\text{cm};$$

ciśnienie, przy którym naczynie mogłoby pracować bez wzmocnień

$$p_1 = 2,3 \frac{g}{d} k_r = 2,3 \frac{20}{1000} 2000 = 92 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\beta = 1,818: \sqrt{dg} = 1,818: \sqrt{100 \cdot 2} = 0,1285 \text{ cm}^{-1}.$$

Wymagane jest wzmocnienie dla pracy rury przy ciśnieniu  $p = 130 \text{ atn}$ .

Założenia

Zakładając  $\beta\lambda \leq 2$  otrzymujemy odległość pomiędzy środkami pierścieni  $\lambda \leq 2:\beta = 2:0,1285 = 15,6 \text{ cm}$ , przyjmujemy  $\lambda = 15,5 \text{ cm}$ ,  $a = 0,9256$ .

Pierścienie: stal węglowa,  $R_r = 3600 \text{ kG/cm}^2$ ,  $Q_r = 2000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $k_r = 1200 \text{ kG/cm}^2$ ,  $E_p = 2100000 \text{ kG/cm}^2$ . O biorając prostokątny przekrój pierścienia przyjmujemy po kilku próbach pole przekroju wieńca pierścienia  $\Omega = 50 \text{ cm}^2$ ; niezbędna szerokość pierścienia  $S_{min} = 0,2\lambda = 0,2 \cdot 15,5 = 31 \text{ mm}$ ; przyjmujemy  $S = 4 \text{ cm}$ , skąd wysokość przekroju pierścienia  $h = 50:4 = 12,5 \text{ cm}$  oraz średnica okręgu środków ciężkości pierścienia  $D = d_z + h = 102 + 12,5 = 114,5 \text{ cm}$ .

Obliczenia

Zwiększenie średnicy ( $\Delta d_z \approx \Delta d$ ) rury bez pierścieni wzmacniających pod wpływem ciśnienia wewnętrznego  $p$

$$\Delta d = 0,42 \frac{d^2}{g} \frac{p}{E_r} = 2100 \frac{p}{E_r} \text{ cm}.$$

Jednostkowa siła  $P$  ściskająca obwód rury

$$P = 2,2 \frac{\Delta d}{\frac{1}{E_r} \sqrt{\left(\frac{d}{g}\right)^3 + \frac{1,1 D^2}{E_p \Omega}}} = 7,12 \text{ p kG/cm}^2.$$

Zmniejszenie promienia okręgu zewnętrznego o średnicy  $d_z$

$$w = 0,227 \frac{P}{E_r} \sqrt{\left(\frac{d}{g}\right)^3} = 570 \frac{p}{E_r} \text{ cm}.$$

Moment gnący w jednym przekroju obciążonym (teoretycznym)

$$M_0 = \frac{P}{4\beta} = 13,8 \text{ p kGcm/cm}.$$

Moment obliczeniowy przy szerokości pierścienia  $S \cong 0,2\lambda$

$$M = 0,1625 \beta \lambda M_0 = 4,43p$$

Obwodowe naprężenie rozciągające od ciśnienia roboczego

$$\sigma'_1 = + \frac{pd}{2g} = 25p$$

Obwodowe naprężenie ściskające pomiędzy pierścieniami

$$\sigma''_1 = -2E_r \frac{|w|}{d} a = -10,55p$$

Obliczeniowe naprężenie gnące

$$\sigma_g = \pm \frac{M}{W} = \pm 6,65p$$

Ciśnienie  $p = 130 \text{ atn}$   
jest o  $41,30\%$  większe od  $p_1 = 92 \text{ atn}$ .

Miarodajne dla wytrzymałości naprężenie obwodowe

$$\sigma_1 = \sigma'_1 + \sigma''_1 = 14,45p = 1880 < 2000 \text{ kG/cm}^2.$$

Największe naprężenie wzdłużne

$$\sigma_2 = 0,5\sigma'_1 + \sigma_g = 19,15p = 2490 < 2500 \text{ kG/cm}^2.$$

Przeciętne naprężenie w pierścieniu

$$\sigma_p = PD : 2\Omega = 1060 < 1200 \text{ kG/cm}^2.$$

### 9. Wskazówki do zastosowania otrzymanych wyników

W zestawieniu wzorów 8 usystematyzowaliśmy kolejność działań z przytoczeniem ostatecznych wzorów w celu ułatwienia rozwiązywania zagadnienia, dotyczącego praktycznie najwygodniejszego wzmocnienia naczynia walcowego z drogiej stali stopowej pierścieniami ze zwykłej stali węglowej, przy czym w naczyniu tym nie zostało uwzględnione osłabienie w szwach. W zestawieniu 9 przytoczono kolejność działań przy sprawdzaniu dopuszczalnego ciśnienia dla trzech rur lanych, wzmocnionych żebrami obwodowymi.

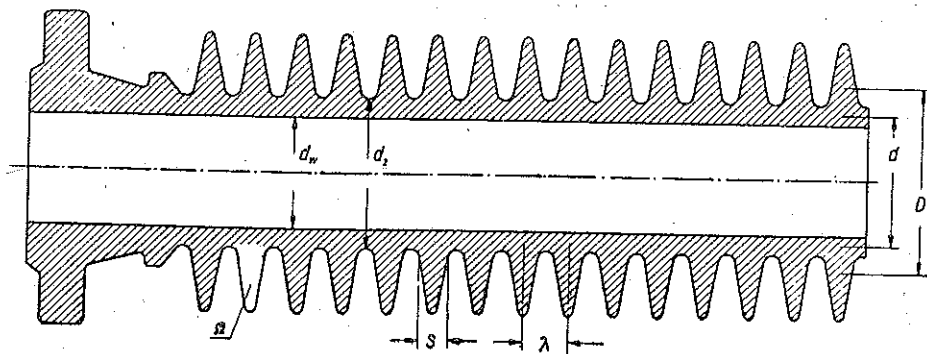
### 10. Przykład szczegółowego obliczenia

Dane wyjściowe. Przedmiotem obliczeń jest rura miedziana o średnicy wewnętrznej  $d_w = 40 \text{ mm}$ , pracująca pod ciśnieniem wewnętrznym  $300 \text{ atn}$ , przy wysokiej temperaturze płynu przepływającego przez rurę. Rura zanurzona jest w cieczy o temperaturze  $225^\circ\text{C}$ , która chłodzi rurę, tak że temperaturę jej ścianki można przyjąć za równomierną i wynoszącą  $250^\circ\text{C}$ .

Wobec trudności wykonania rury grubościennej potrzebnej długości bez połączeń poprzecznych należy tak ją wzmocnić stalowymi pierścieniami (stal kotłowa B-36), nasadzonymi na rurę bez luzu i weisku, aby ściana jej mogła być jak najcieńsza, przy naprężeniach równomiernie rozłożonych wzdłużnym i obwodowym nie przekraczających  $2/3 \approx 0,667$  granicy plastyczności miedzi przy temperaturze  $250^\circ\text{C}$ . Wyteżenie w skrajnych elementach od naprężeń gnących i równomiernie rozłożonych powinno być poniżej granicy plastyczności miedzi przy  $250^\circ\text{C}$ .

Przyjęte w obliczeniu cechy wytrzymałościowe miedzi i stali B-36 przy różnych temperaturach podano w tablicy 8.

Zestawienie wzorów 9. Schemat obliczeń przy sprawdzaniu dopuszczalnego ciśnienia dla istniejących lanych rur wzmocnionych żebrami obwodowymi. Przykłady liczbowe



Rys. IV.

Dane	P o z y c j a			Wymiary
	1	2	3	
Dane wyjściowe				
Material	Staliwo	Żeliwo	Mosiądz	
$k_r$	1 200	600	800	kG/cm <sup>2</sup>
$k_{gr}$	1 500	800	1 000	„
$E$	2 100 000	1 050 000	900 000	„
$d_w$	500	350	200	mm
$d_z$	550	380	220	„
$d=0,5(d_w+d_z)$	525	365	210	„
$g$	25	15	10	„
$D$	670	480	280	„
$\lambda$	125	75	33,5	„
$S$	$26 > 0,2\lambda$	$22 > 0,2\lambda$	$12 > 0,2\lambda$	„
$\Omega$	25	18	12	cm <sup>2</sup>
Dane obliczeniowe				
$w=g^2:6$	1,04	0,375	0,167	cm <sup>3</sup> /cm
$\beta=1,818:\sqrt{dg}$	0,159	0,246	0,396	cm <sup>-1</sup>
$\beta\lambda$	$1,99 < 2$	$1,85 < 2$	$1,33 < 2$	cm/cm
$P=0,925 \frac{d^2}{g} \frac{p}{\sqrt{\left(\frac{d}{g}\right)^3 + 1,1 \frac{D^2}{\Omega}}}$	$3,47p$	$3,15p$	$2,43p$	kG/cm

D a n e	P o z y c j a			Wymiary
	1	2	3	
$w = 0,227 \frac{P}{E} \sqrt{\left(\frac{d}{g}\right)^3}$	$75,5 \frac{P}{E}$	$85,8 \frac{P}{E}$	$53,0 \frac{P}{E}$	cm
$M_0 = \frac{P}{4\beta}$	$a = 0,913$	$a = 1,024$	$a = 1,488$	cm/cm
$M = 0,1625 \beta \lambda M_0$	$5,45p$	$3,20p$	$1,53p$	kGem/cm
$\sigma_1 = + \frac{pd}{2g} - 2E \frac{ w }{d} a$	$1,76p$	$0,960p$	$0,331p$	„
$\sigma_2 = \frac{pd}{4g} + \frac{M}{W}$	$7,87p$	$7,33p$	$13,5p$	kGem <sup>2</sup>
Przeciętne napr. w żebrze $\sigma = PD : 2\Omega$	$4,65p \leq 0,5k_r$	$4,20p \leq 0,5k_r$	$2,83p < 0,5k_r$	„
Dopuszczalne ciśnienie robocze $p$	129	71,5	61	„

Obliczenie. *Rura.* Wobec tego, że działanie pierścieni nie ma wpływu na naprężenia wzdłużne, przeto grubość ścianki rury przy  $k_r = 600 \text{ kG/cm}^2$  nie może być mniejsza od

$$g = \frac{pD}{4k} = \frac{300 \cdot 40}{4 \cdot 600} = 5 \text{ mm.}$$

W takiej rurze (na końcach zamkniętej) bez pierścieni wzmocniających ciśnienie wewnętrzne 300 atm wywołałoby przeciętne naprężenia

$$\text{obwodowe } \sigma_1 = \frac{pD}{2g} = \frac{300 \cdot 40}{2 \cdot 5} = 1200 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\text{wzdłużne, } \sigma_2 = \frac{pD}{4g} = \frac{300 \cdot 40}{4 \cdot 5} = 600 \text{ kG/cm}^2.$$

Przyrost  $\Delta d_z$  średnicy zewnętrznej  $d_z = 40 + 2 \cdot 5 = 50 \text{ mm}$  były wówczas przy  $\nu = 0,3$

$$\Delta d_z = \frac{d_z}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \frac{5}{1\,000\,000} (1200 - 0,3 \cdot 600) = 0,0051 \text{ cm.}$$

Jest to właśnie wisk naturalny, który się wytworzy wskutek działania ciśnienia wewnątrz rury.

Tablica 8. Cechy wytrzymałościowe miedzi, stali B-36 oraz stali specjalnej niklowej przy różnych temperaturach

Cechy wytrzymałościowe miedzi przy różnych temperaturach

Cechy	Przy temperaturze w °C				
	15	100	200	300	400
Doraźna wytrzymałość w $\text{kg/cm}^2$	2370	2100	1750	1570	970
Wydłużenie próbki w %	41,6	45,2	44,8	40,1	28,4
Przewężenie w szyjce próbki w %	67,0	68,5	69,5	52,7	30,0

Cechy wytrzymałościowe miedzi i dwóch rodzaj stali przy różnych temperaturach

Materiał		Doraźna wytrzymałość $R_r$ $\text{kg/cm}^2$	Granica plastyczności $Q_r$ $\text{kg/cm}^2$	Moduł sprężyst. podłużnego $E$ $\text{kg/cm}^2$	Liczba Poissona $\nu$ $\text{cm/cm}$	Do-puszczalne naprężenie $k_r = Q_r : 1,5$ $\text{kg/cm}^2$
Miedź	przy 20 °C	2200	1200	1 150 000	0,34	800
	250 °C	1700	900	1 000 000	0,30	600
Stal B-36	przy 20 °C	3600	2000	2 100 000	0,30	1333
	250 °C	4500	1600	2 100 000	0,30	1065
Stal niklowa specjalna	przy 20 °C	6000	3300	1 150 000	0,30	2200
	300 °C	4800	2000	1 150 000	0,30	1333

Liczba  $\beta$  (współczynnik zanikania amplitudy fali) przy  $d = 0,5 (d_w + d_z) = 0,5(4+5) = 4,5$  cm i  $g = 0,5$  cm wynosi

$$\beta = \frac{1,818}{\sqrt{dg}} = \frac{1,818}{\sqrt{4,5 \cdot 0,5}} = \frac{1,818}{\sqrt{2,25}} = \frac{1,818}{1,5} = 1,21 \text{ cm}^{-1}.$$

Korzystna odległość pomiędzy środkami pierścieni jest

$$\lambda \leq \frac{2}{\beta} = \frac{2}{1,21} = 1,6529 \text{ cm};$$

przyjmuje się

$$\lambda = 16,5 \text{ mm}.$$

Po kilku próbach zatrzymujemy się przy wyborze pierścieni o przekroju wieńca  $\Omega = 1,14 \text{ cm}^2$ .

Najmniejsza szerokość pierścienia powinna być  $S \geq 0,2\lambda = 0,2 \cdot 16,5 = 3,3$  mm; przyjmuje się  $S = 7,6$  mm (i wysokość  $h = 114/7,6 = 15$  mm); średnice pierścienia będą więc

$$D_w = 50 \text{ mm}, \quad D_z = 50 + 2 \cdot 15 = 80 \text{ mm}, \quad D = 0,5(D_w + D_z) = 65 \text{ mm}.$$

Jednostkowa siła  $P$  ściskająca obwód rury jest

$$P = 2,2 \frac{\Delta d}{\frac{1}{E_r} \sqrt{\left(\frac{d}{g}\right)^3} + \frac{1,1}{E_p} \frac{D^2}{\Omega}}$$

Ponieważ

$$\Delta d = 0,0051 \text{ cm}, \quad E_r = 1\,000\,000 \text{ kG/cm}^2, \quad E_p = 2\,100\,000 \text{ kG/cm}^2,$$

$$E_p : E_r = 2,1, \quad \sqrt{\left(\frac{d}{g}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{4,5}{0,5}\right)^3} = 27, \quad \frac{D^2}{\Omega} = \frac{6,5^2}{1,14} = 37,1,$$

przeto

$$P = \frac{2,2 \cdot 1\,000\,000 \cdot 0,0051}{27 + \frac{1,1}{2,1} \cdot 37,1} = 242 \text{ kG/cm}.$$

Ugięcie tworzącej w przekroju działania siły  $P$  kG/cm przy jednym przekroju obciążonym jest

$$w = 0,227 \frac{P}{E_r} \sqrt{\left(\frac{d}{g}\right)^3} = 0,227 \cdot \frac{242}{1\,000\,000} \cdot 27 = \frac{1480}{1\,000\,000} \text{ cm}.$$

Sciskające naprężenie obwodowe od ugięcia  $w$  jest

$$\sigma = 2E_r \frac{|w|}{d} = \frac{2 \cdot 1\,000\,000 \cdot 1480}{1\,000\,000 \cdot 4,5} = 659 \text{ kG/cm}^2.$$

Dzięki współdziałowi sąsiednich pierścieni w odległości charakteryzowanej wielkością  $\beta\lambda=2$ , korzystając z tablicy 6 lub rys. 2 mamy: w przekrojach obciążonych

$$659A = 659 \cdot 1,0852 = 713 \text{ kG/cm}^2,$$

w przekrojach połowiących odległość między pierścieniami

$$659a = 659 \cdot 0,9256 = 610 \text{ kG/cm}^2.$$

Największy moment zginający w przypadku jednego przekroju obciążonego jest

$$M_0 = P_0 : 2\beta = P : 4\beta = \frac{\sqrt{dg}}{7,272} = \frac{\sqrt{4,5 \cdot 0,5}}{7,272} \cdot 242 = \frac{1,5}{7,272} \cdot 242 = 49 \text{ kGem/cm}.$$

Moment obliczeniowy przy szerokości pierścienia  $S \geq 0,2\lambda$  równa się

$$M = 0,1625 \beta\lambda M_0 = 0,1625 \cdot 2 \cdot 49 = 15,9 \text{ kGem/cm};$$

$$\sigma_g = \frac{M}{W} = 6 \cdot \frac{15,9}{0,5^2} = 382 \text{ kG/cm}^2.$$

Wyniki ostateczne. Naprężenie obwodowe powłokowe

$$\sigma'_1 = + \frac{pd}{2g} = \frac{300 \cdot 4}{2 \cdot 0,5} = 1200 \text{ kG/cm}^2.$$

Naprężenie pomiędzy pierścieniami od działania pierścieni

$$\sigma''_1 = - 2E_r \frac{|w|}{d} a = - \frac{2 \cdot 1\,000\,000}{1\,000\,000} \cdot \frac{1480}{4,5} \cdot 0,9256 = - 610 \text{ kG/cm}^2.$$

Sumaryczne naprężenie obwodowe w przekrojach pomiędzy pierścieniami

$$\sigma_1 = \sigma'_1 + \sigma''_1 = 1200 - 610 = 590 \text{ kG/cm}^2.$$

Największe naprężenie wzdłużne

$$\sigma_2 = 0,5\sigma'_1 + \sigma_g = 600 + 382 = 982 \text{ kG/cm}^2.$$

Tak wielkie naprężenie przy szerokości pierścienia  $S > 0,2\lambda$  panuje w skrajnych zewnętrznych elementach rury w przekrojach połowiących odległość pomiędzy przekrojami.

Wyteżenie materiału w tym miejscu wyniesie

$$\sqrt{590^2 + 982^2} - 590 \cdot 982 = 850 \text{ kG/cm}^2 < 900.$$

Wyteżenie na przeciwnej powierzchni ścianki jest mniejsze.

*Pierścień.* Siła  $P = 242 \text{ kG}$ , odniesionej do 1 cm wewnętrznego obwodu pierścienia posiadającego szerokość 0,76 cm, odpowiada ciśnienie

$$q = \frac{242}{0,76} = 319 \text{ kG/cm}^2.$$

Ciśnienie  $319 \text{ kG/cm}^2$  nie spowoduje trwałego odkształcenia zewnętrznej powierzchni ścianki rury.

Największe naprężenie obwodowe na powierzchni otworu pierścienia o promieniach  $r$  i  $R$  równa się

$$\sigma = \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} q = \frac{4^2 + 2,5^2}{4^2 - 2,5^2} \cdot 319 = 2,28 \cdot 319 = 726 \text{ kG/cm}^2.$$

Wyteżenie materiału w tym miejscu pierścienia, w którym stan napiecia określony jest składowymi głównymi

$$\sigma_1 = 726 \text{ kG/cm}^2 \quad \text{i} \quad \sigma_2 = -319 \text{ kG/cm}^2,$$

jest

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_1 \sigma_2 = \sqrt{726^2 + 319^2} + 726 \cdot 319 = 928 \text{ kG/cm}^2 < 1600.$$

Uwagi. (1) Próba wodna powinna być wykonana na ciśnienie, które wywoła naprężenia nie przekraczające odpowiednich naprężeń dopuszczalnych w temperaturze próby. A więc jeśli próba będzie wykonana w temperaturze  $20^\circ\text{C}$ , to powinno być

dla rury

$$\sigma_1 \leq 800 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_2 \leq 1200 \text{ kG/cm}^2;$$

dla pierścieni

$$\sigma_1 \leq 2000 \text{ kG/cm}^2.$$

Warunkowi temu odpowiada ciśnienie  $300 + 100 = 400 \text{ atn}$ .

(2) Zamiast zastosowania pierścieni może być użyty drut określony na rurze przy skoku  $\lambda \leq 16,5 \text{ mm}$ , praktycznie o takiej samej wartości pola przekroju (a więc w przypadku przekroju kołowego około  $\varnothing 12 \text{ mm}$ ). Drut śrubowo nawinięty powinien być do rury dokładnie przypoiony, aby ciśnienie wywierane przez drut na ściankę rury rozkładało się równomiernie na szerokości  $S \geq 7,6 \text{ mm}$ .



(3) Wskutek różnej wartości współczynników rozszerzalności cieplnej miedzi i stali powstaje dodatkowy wcisk. Wciskowi temu (w przeciwieństwie do wcisku wywołanego działaniem ciśnienia wewnętrznego) nie towarzyszą znaczne obwodowe naprężenia rozciągające w ścianie rury, lecz prawie wyłącznie naprężenia ściskające oraz dodatkowe naprężenia zginające tworząca.

Uwzględniając ten dodatkowy wcisk otrzymamy w wyniku następujące dodatkowe naprężenia: rozciągające naprężenie w pierścieniu, ściskające naprężenie obwodowe w ścianie rury oraz naprężenia zginające tworząca rury.

Te dodatkowe zjawiska spowodują, że podczas pierwszego uruchomienia rury wzmocnionej materiał w poszczególnych jej elementach przekroczy granicę plastyczności i przy takim stanie rzeczy rura będzie następnie pracowała przy zmienionym rozkładzie naprężeń.

Wpływ tych zmienionych warunków na wytrzymałość rury i jej trwałość może być ujęty na drodze oddzielnych rozważań popartych badaniami doświadczalnymi.

#### Literatura cytowana w tekście

[1] Z. Klębowski, *Application de la théorie d'une poutre solide d'une base élastique à certaines constructions mécaniques*, Bull. Acad. Pol. Sc. Lettr., Sc. Math. et Nat., ser. A, Sc. Math., vol. 1, nr 2, suppl., Kraków 1950.

[2] Z. Klębowski, *Obliczanie wytrzymałościowe naczyń ciśnieniowych*, Państw. Zakł. Wyd. Szkoln., Warszawa 1951.

[3] W. Moszyński, *Obliczanie wytrzymałościowe rurowych połączeń kolnierzowych*, Arch. Mech. Stos., wyd. Zakł. Bud. Pol. Gd., Gdańsk 1951.

[4] R. V. Baud, *Die Berechnung fester Flanschverbindungen von Autoklawen, Rohrleitungen und der gleichen*, Zurych 1942.

[5] W. Winkler, *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, 1867.

[6] M. T. Huber, *Théorie de déformations élastiques circulairement symétrique de tubes à parois épaisses, appliquée aux problèmes de la résistance des tubes de canons*, Ann. Acad. Sc. Techn. à Varsovie, vol. 3 (1936), str. 44.

#### Резюме

ОСНОВАНИЯ РАСЧЁТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ, С УЧЁТОМ ОБОДОЧНЫХ ПОДКРЕПЛЕНИЙ

В предлагаемой работе рассматриваются два рода кольцеобразных подкреплений трубы, а именно: (1), кольцами, насаженными под давлением, и (2), без давления и зазора. Автор приводит общую характеристику этих обоих родов подкреплений и после детальных вступительных объяснений доходит к сущности проблемы; затем выводит расчетные формулы и приводит пять численных примеров. Из последних два относятся к проектированию, а три к определению допускаемого давления для уже изготовленных труб, отличных вместе с подкрепляющими ребрами.

Следующие проблемы рассмотрены детально:

(1) Тонкостенная труба среднего радиуса  $N=D:2$  со стенкой толщины  $g$ , нагружена в некотором поперечном сечении равномерно разложенными радиальными силами  $P$  кГ/см. При рассмотрении этой проблемы приходится учитывать коэффициент затухания амплитуды волны  $\beta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)/N^2g^2} = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)/D^2g^2} \text{ см}^{-1}$ .

(2) Случай трубы конечной длины  $l$ , нагруженной осесимметрично на одной стороне парами сил, интенсивность моментов которых равна  $M_0$  кГ см/см, и радиальными силами интенсивностью  $P_0$  кГ/см. Для этого случая введены следующие обозначения:  $w$ —прогиб образующей,  $\varphi$ —угол вращения,  $M$ —момент изгибающий продольный элемент,  $T$ —поперечное усилие. Приведены простые формулы, связанные с переходом к случаю очень длинной трубы (теоретически  $l=\infty$ ), и зависимость между силой  $P$  кГ/см и моментом  $M_0$  кГ см/см в нагруженном сечении, находящемся вдали от концов:  $M_0 = P:4\beta$  кГ см/см.

(3) Волнообразность графиков функций  $w, \varphi, M$  и  $T$ , с затухающей амплитудой волны, при постоянной и одинаковой для всех этих функций длине волны  $L = 2\pi/\beta = 2\pi \sqrt[4]{N^2g^2/3(1-\nu^2)}$  см.

(4) Возможность применения простых формул для  $l=\infty$  уже в том случае, когда нагруженное сечение находится на расстоянии  $x$  от концов, причем  $x=L=2\pi/\beta$ , или даже на расстоянии  $x=0,75L$ .

(5) Принимая величину  $\nu=0,3$ , автор получает более простые формулы для разных материалов, применяемых в механических конструкциях. Одновременно доказывается пренебрежимость возникающей при этом погрешности.

(6) Изучение переменности прогибов  $w$  и изгибающих моментов  $M$ — $B$  зависимости от расстояния от нагруженного сечения, в случаях многочисленных нагруженных сечений—на основании интерференции соответствующих волн; графическое представление результатов.

(7) Определение интенсивности силы  $P$  кГ/см для длинной трубы, сжимаемой кольцом в одном сечении. Соответствующие формулы в случае кольца, насаженного без давления и зазора, принимают вид  $P = (0,925 PD^2/gE) : [\sqrt{(D/g)^3/E + 1,1 D_1^2/E_1\Omega}]$ , когда модуль Юнга  $E$  кГ/см<sup>2</sup> материала трубы и модуль  $E_1$  кГ/см<sup>2</sup> материала фланца различны, или же значение  $P = (0,925 PD^2/g) : [\sqrt{(D/g)^3 + 1,1 D_1^2/\Omega}]$ , когда  $E = E_1$ . Введены здесь следующие обозначения:  $D$ —диаметр цилиндрической поверхности (переполоавливающей толщины стенки трубы, в см) после растяжения в результате действия внутреннего давления;  $D_1$ —диаметр

окружности, проходящей через центры тяжести поперечных сечений обода, в см;  $\Omega$ —поверхность осевого сечения обода в см<sup>2</sup>.

(8) Использование результатов интерференции волн на графике для определения прогибов  $w$  (для различных нагруженных сечений) и изгибающих моментов  $M$ . Определение значений прогибов  $w$  и изгибающих моментов  $M$  в нагруженных сечениях, и сечениях, переполывающих расстояния  $\lambda$  между нагруженными сечениями; определение оптимального расстояния  $\lambda$  между подкрепленными сечениями:  $\lambda=2/\beta$ ; приближенное определение минимальной полезной ширины  $s$  кольца:  $s \geq 0,2$ ;  $\lambda=0,4/\beta$ .

### Résumé

#### PRINCIPES DU CALCUL DE LA RÉSISTANCE D'UN TUBE SOUMIS À UNE PRESSION INTÉRIEURE, COMPTE TENU DES RENFORCEMENTS ANNULAIRES

L'auteur commence par une discussion des deux genres de renforcement annulaire d'un tube, c'est-à-dire (1) avec une contrainte de frettage, et (2) sans contrainte de frettage ni jeu, en les caractérisant d'une manière générale. Après des explications préliminaires détaillées il arrive à la partie essentielle du travail en déduisant les formules de calcul. Il donne les solutions des cinq exemples numériques, dont deux concernent le projet et trois — la détermination de la pression admissible dans les constructions existantes des tubes avec renforcement, en fonte. Les problèmes suivants sont étudiés en détail:

(1) Tube à parois minces, chargé d'une force uniformément répartie  $P$  kG/cm, dans une section quelconque, le rayon moyen étant désigné par  $N=D:2$  et l'épaisseur de la paroi par  $g$ . Dans la discussion on a introduit le coefficient  $\beta$  de l'amortissement de l'onde. Nous avons

$$\beta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)/N^2 g^2} = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)/D^2 g^2} \text{ cm}^{-1}.$$

(2) Tube de longueur fini  $l$ , avec une charge circonférentielle, située à une des extrémités et composée d'un moment uniformément réparti, d'intensité  $M_0$  kGcm/cm et d'une force radiale, uniformément répartie, d'intensité  $P_0$  kG/cm. On a introduit ici les désignations suivantes:  $w$  = déformation de la génératrice,  $\varphi$  = angle de rotation,  $M$  = moment de flexion d'un élément longitudinal du tube,  $T$  = tension transversale. Quelques formules simples sont déduites pour le cas d'un tube de longueur infinie ( $l=\infty$ ), ainsi que la relation entre la force  $P$  kG/cm et le moment  $M_0$  kGcm/cm dans la section chargée si celle-ci est éloignée des extrémités:  $M_0 = P:4\beta$  kGcm/cm.

(3) Discussion du type sinusoidal des courbes,  $w$ ,  $\varphi$ ,  $M$  et  $T$ , représentant des fonctions amorties, dont la longueur de l'ondulation est la même pour toutes les fonctions et égale à  $L=2\pi/\beta=2\pi\sqrt[4]{N^2g^2:3(1-\nu^2)}$  cm.

(4) Possibilité d'application des formules simples, déduites pour  $l=\infty$ , pour le cas d'une charge, agissant à une distance  $x$  des extrémités. On peut admettre la valeur minimum de cette distance ne dépassant pas  $x=L=2\pi/\beta$ , ou même  $x=0,75L$ .

(5) Simplification des formules par l'hypothèse de  $\nu=0,3$  pour de différents matériaux, employés dans les constructions mécaniques. On démontre, que l'erreur ainsi commise est négligeable.

(6) Étude de la variabilité de la déformation  $w$  et du moment de flexion  $M$  avec la distance de la section chargée, en cas de plusieurs sections chargées, au moyen du principe de superposition des ondes correspondantes; représentation graphique des résultats.

(7) Détermination de l'intensité de la force  $P$  kG/cm pour un tube long, soumis dans une section à la compression par un anneau. Les formules correspondantes prennent, en cas d'un anneau sans jeu et sans contrainte de frettage, la forme  $P=(0,925PD^2/gE):[\sqrt{(D/g)^3/E+1,1D_1^2/E_1\Omega}]$ , si les modules de Young des matériaux du tube et de la bride  $E$  et  $E_1$  sont différents, ou bien la forme  $P=(0,925PD^2/g):[\sqrt{(D/g)^3+1,1D_1^2/\Omega}]$ , si  $E=E_1$ . Dans les formules précédentes les désignations sont comme suit:  $D$ =diamètre de la surface cylindrique moyenne en cm, compte tenu de l'agrandissement par l'action de la pression intérieure,  $D_1$ =diamètre du cercle, passant par les centres de gravité des sections transversales de l'anneau en cm,  $\Omega$ =aire de la section axiale de l'anneau en  $\text{cm}^2$ .

(8) Emploi du principe de superposition des ondes de la déformation  $w$ , provenant des charges, situées dans différentes sections et des ondes du moment de flexion  $M$ ; détermination des valeurs de la déformation  $w$  et du moment de flexion  $M$ , dans les sections chargées et à mi-distance des section chargées: détermination de la valeur optimale de la distance  $\lambda$  entre les sections renforcées ( $\lambda=2:\beta$ ); détermination approximative de la valeur optimale de la largeur  $s$  de l'anneau ( $s\geq 0,2$ ;  $\lambda=0,4/\beta$ ).

*Praca została złożona w Redakcji dnia 24 listopada 1952 r.*