

JERZY NOWIŃSKI

PODSTAWY TEORII PLASTYCZNOŚCI (I).

SIEDEM WYKŁADÓW

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE

XVII

## SPIS TREŚCI

	Str.
<b>Wykład I</b>	
§ 1. Stany naprężenia i odkształcenia	71
§ 2. Stan naprężenia w punkcie. Naprężenia główne	72
§ 3. Naprężenia ośmiościenne (tzn. na ścianach ośmiościanu foremnego)	78
<b>Wykład II</b>	80
§ 4. Krańcowe wartości naprężeń stycznych (główny dwunastościan rombowy)	83
§ 5. Stan odkształcenia w punkcie	85
§ 6. Prawo sprężystości	87
§ 7. Prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci.	89
<b>Wykład III</b>	92
§ 8. Warunki plastyczności (hipotezy wytrzymałościowe)	94
<b>Wykład IV</b>	94
§ 9. Teoria plastyczności	105
<b>Wykład V</b>	108
§ 10. Twierdzenie Iljuszina	114
§ 11. Podstawowe równania mechaniki ciał sprężysto-plastycznych	114
<b>Wykład VI</b>	117
§ 12. Zadanie Lamégo (rura grubościenna poddana ciśnieniu wewnętrznemu i zewnętrznemu)	119
§ 13. Zginanie czyste	119
<b>Wykład VII</b>	124
§ 14. Związek pomiędzy zjawiskami wytrzymałościowymi i budową materii	129

## W Y K Ł A D I\*)

Chociaż w obecnym stanie wiedzy trudno byłoby określić ściśle, co stanowi istotę plastyczności materiałów, przedmiotem rozważań teorii plastyczności są, niewątpliwie, odkształcenia trwałe, tzn. odkształcenia nie znikające całkowicie lub częściowo po usunięciu sił obciążających. Tym samym w zakres rozważań teorii plastyczności wchodzi przemiany całkowicie lub częściowo nieodwracalne. Pod tym względem teoria plastyczności stanowi przeciwieństwo teorii sprężystości, która zajmuje się jedynie przemianami odwracalnymi i w której w związku z tym zakłada się jedno-jednoznaczność odpowiedniość pomiędzy stanami odkształcenia i naprężenia (jeżeli pominąć tzw. «samonaprężenia», czyli naprężenia «wstępne» lub «własne» w stanie nieobciążonym ciała). Teoria plastyczności opiera się na ujęciu fenomenologicznym rozpatrywanych zjawisk i nie wnika w ich istotę fizykalną. Posługuje się ona różnymi modelami ciała, jak ciało sprężysto-plastyczne, idealne ciało plastyczne, ciało plastyczne ulegające tzw. wzmocnieniu wraz ze wzrostem odkształcenia (tzn. wykazujące «hartowność mechaniczną») itp. Jeżeli wprowadzamy dodatkowo pojęcie czasu, to teorią plastyczności przeobraża się w tzw. reologię, czyli naukę o przepływie plastycznym (*rheos* oznacza «prąd»). Reologia zaj-

---

\*) Przedstawiony tutaj zarys teorii małych odkształceń ciał sprężysto-plastycznych stanowił treść wykładów wygłoszonych w pierwszych miesiącach 1953 r. na seminarium Grupy Technicznej B Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk. Za materiał do wykładów posłużyły głównie znane podręczniki Biezuchowa, Iljuszina, Nádaia, Sokołowskiego, Filonienki-Borodicza, Goldienblata i innych\*\*). Autor składa podziękowanie kierownikowi Grupy, profesorowi dr. Stanisławowi Turkiewiczowi, za inicjatywę dotyczącą opublikowania wykładów oraz pracownikowi Grupy, mgr Irenei Glass, za wydatną pomoc przy uporządkowaniu i opracowaniu notatek. Drugą część niniejszych *Siedmiu Wykładów* stanowią będą wykłady seminaryjne prof. dr. Wacława Olszaka, które ukażą się w druku jako *Podstawy teorii plastyczności (II)*.

\*\*\*) Por. wykaz literatury na końcu pracy. W celu nierozprasiania uwagi czytelnika zaniechano w tekście powoływania się na źródła, jednakże uważamy czytelnika z łatwością dostrzeże wpływ dzieł, z których autor wykładów czerpał materiały szczególnie obszernie.

muje się takimi zjawiskami, jak pełzanie (wzrost odkształceń przy stałym naprężeniu, głównie w wysokich temperaturach), relaksacja czyli rozluźnienie (spadek naprężeń wraz z upływem czasu, przy stałym odkształceniu) itp. Modelami ciał w reologii są ciała sprężysto-lepkie, plastyczno-lepkie itp.

Wykłady nasze nie obejmują reologii ani teorii tzw. stanów granicznych związanych z uplastycznieniem materiału. Celem ich nie jest również wyłożenie całokształtu teoretycznych i doświadczalnych podstaw teorii plastyczności, lecz tylko podanie podstawowych wiadomości, które umożliwią orientowanie się w zasadniczych zagadnieniach tej nauki i, ewentualnie, ułatwią dalsze studia.

Na początku zajmiemy się rozpatrzeniem stanów naprężenia i odkształcenia, znanych dobrze z teorii sprężystości, jednakże w ujęciu innym niż to, do którego przywykliśmy przy studiowaniu tej ostatniej nauki, kierować się bowiem będziemy myślą zastosowania wyprowadzonych wzorów do rozważań innej nauki, którą jest właśnie teoria plastyczności.

### § 1. Stany naprężenia i odkształcenia

Zauważmy, że przy rozważaniu stanu naprężenia materii w spoczynku nie ma potrzeby uwzględniania rodzaju materii, jeżeli tylko nie czyni się dodatkowych założeń co do szczególnych własności tego stanu (np. że nie istnieją siły tarcia). Może to być zarówno ciało stałe, jak i ciecz lepka (dla cieczy idealnej przyjmujemy już szczególne założenie:  $\tau = 0$ ), gdzie  $\tau$  oznacza naprężenie ścinające.

Podobnie rzecz ma się ze stanem odkształcenia. Jeżeli ograniczymy się, jak to się zwykło czynić, do rozważania małych odkształceń, to stan ten obejmuje małe odkształcenia dowolnej substancji, byleby była ona uważana za kontinuum materialne.

Jak już wspomnieliśmy, teoria plastyczności wymaga odrębnego pod względem formalnym potraktowania pojęć znanych z teorii sprężystości. Rozważmy zatem naprężenia i odkształcenia właśnie pod kątem potrzeb teorii plastyczności.

Weźmy pod uwagę składowe naprężenia panującego na dowolnej płaszczyźnie o normalnej  $\nu$ , o cosinusach kierunkowych  $l$ ,  $m$ ,  $n$  (rys. 1) Składowe te będą się wyrażały następującymi wzorami:

$$(1.1) \quad \begin{cases} p_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases}$$

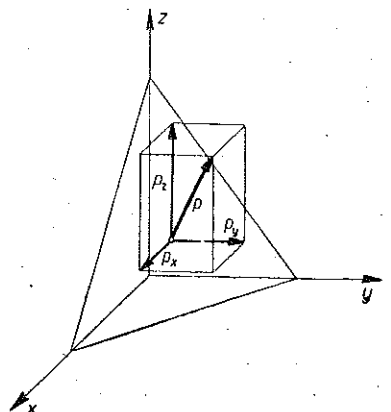
Stan naprężenia w punkcie określony jest przez tzw. tensor naprężenia  $T_0$ :

$$T_0 = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

(Klamry obejmują tutaj tabliczkę ułożoną ze składowych stanu naprężenia i mają za zadanie przypomnieć, że chodzi o pewną macierz).

Z warunku równowagi momentów sił działających na element objętości ciała otrzymuje się równość składowych stycznych naprężenia:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$



Rys. 1

Z określenia tensora symetrycznego wynika zatem, że tensor  $T_0$  jest tensorem symetrycznym.

Ogólny stan odkształcenia elementu można rozłożyć na:

- (1) czyste odkształcenie objętości,
- (2) czyste odkształcenie postaci,
- (3) ruchy bryły sztywnej (przesunięcie i obrót).

(1) Czyste odkształcenie objętości, zwane również «rozszerzeniem» objętościowym (rys. 2), przedstawia następujący wzór:

$$\Theta = \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) \left(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) \left(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) - dx dy dz}{dx dy dz} =$$

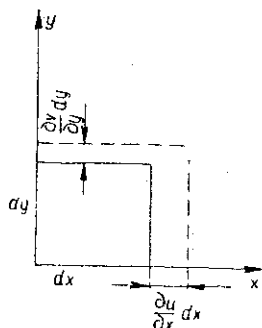
$$= (1 + \epsilon_x) (1 + \epsilon_y) (1 + \epsilon_z) - 1 \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z.$$

Przyjeliśmy tutaj oznaczenie

$$\frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x.$$

i podobnie

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{oraz} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$



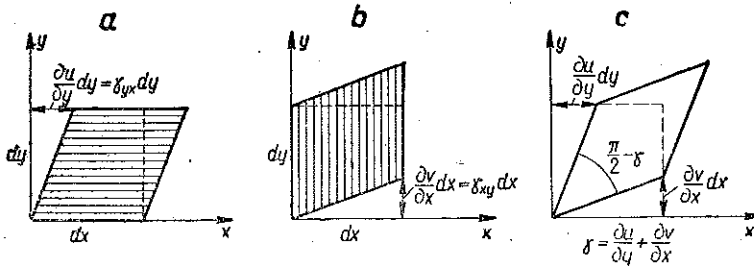
Rys. 2

gdzie  $u$ ,  $v$  i  $w$  przedstawiają składowe przemieszczenia. Jest rzeczą zrozumiałą, że wielkość  $\Theta$  nie zależy od układu odniesienia; podobnie suma

$$\pi_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

przedstawiająca z pewnym przybliżeniem wielkość  $\Theta$ , jest niezmiennikiem; niezmiennik ten nosi nazwę pierwszego niezmiennika stanu odkształcenia (por. dalej § 5).

(2) Czyste odkształcenie postaci można przedstawić za pomocą jednego z rysunków 3a, 3b lub 3c.



Rys. 3

Przedstawiają one te same stany odkształcenia, różniące się między sobą jedynie o obrót danego elementu traktowanego jako ciało sztywne.

Tensor odkształcenia (w znaczeniu ogólnym) można przedstawić w postaci następującej tabliczki (macierzy):

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Można udowodnić (jak to uczynił Helmholtz), że podczas przemieszczenia o składowych  $u$ ,  $v$ ,  $w$  kąty obrotu elementu, rozpatrywanego jako bryła sztywna, dokoła osi układu odniesienia są równe odpowiednio

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Biorąc pod uwagę znane związki C a u c h y ' e g o

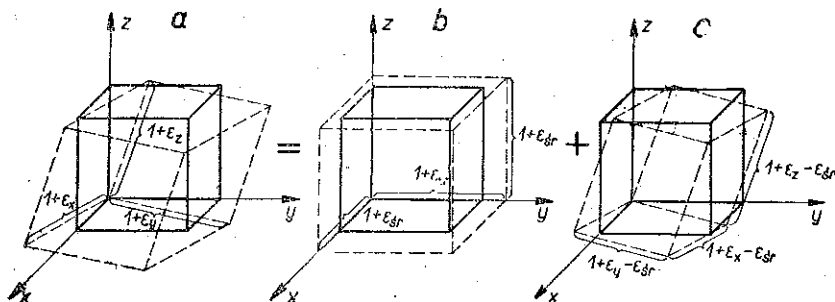
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}$$

możemy przedstawić tensor odkształcenia w postaci następującej:

$$\begin{aligned} T &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}(\gamma_{xy} - \omega_z) & \frac{1}{2}(\gamma_{xz} + \omega_y) \\ \frac{1}{2}(\gamma_{yx} + \omega_z) & \varepsilon_y & \frac{1}{2}(\gamma_{yz} - \omega_x) \\ \frac{1}{2}(\gamma_{zx} - \omega_y) & \frac{1}{2}(\gamma_{zy} + \omega_x) & \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_z & \frac{1}{2}\omega_y \\ \frac{1}{2}\omega_z & 0 & -\frac{1}{2}\omega_x \\ -\frac{1}{2}\omega_y & \frac{1}{2}\omega_x & 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

gdyż np.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\gamma_{xy} - \omega_z).$$



Rys. 4

Pierwszy składnik wyrażenia dla  $T$  jest tensorem odkształcenia czystego (rys. 4a); będziemy go oznaczali przez  $T_e$ . Drugi składnik przedstawia tensor obrotu ciała sztywnego (tzn. obrotu zachodzącego bez jakiegokolwiek odkształcenia właściwego).

Rozważać będziemy w dalszym ciągu jedynie tensor  $T_e$ .

Można wykazać, że jeżeli liczba P o i s s o n a  $\nu$  jest równa zero, to dla ciała izotropowego sprężystego każdy wyraz tensora  $T_e$  jest proporcjonalny do odpowiedniego wyrazu tensora  $T_0$ , przy czym współczynnik proporcjonalności jest równy  $1/E$  (tutaj  $E$  oznacza moduł Y o u n g a).

Odształceniem średnim nazwiemy wielkość

$$\varepsilon_{sr} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}\Theta,$$

gdzie  $\Theta$  jest odształceniem objętościowym.

Jest rzeczą oczywistą, że w przypadku (b) — rys. 4 — odształcenie jest czysto objętościowe.

Że w przypadku (c) nie ma odształcenia objętości, które oznaczamy przez  $\Theta'$  (rys. 4c), stwierdzamy za pomocą następującego rachunku:

$$\Theta' = (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}) + (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}) + (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_{sr} = 0.$$

Odształcenie w przypadku (b) określa tensor

$$(1.2) \quad T_e^0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{sr} \end{Bmatrix}.$$

Jest to tzw. kulisty tensor odształcenia, gdyż

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{sr},$$

w związku z czym powierzchnia odształceń C a u c h y' e g o przedstawia powierzchnię kuli.

Odształcenie w przypadku (c) określa tensor

$$(1.3) \quad D_e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{sr} \end{Bmatrix}.$$

Jeść to tzw. dewiator odształcenia. (W dewiatorze suma wyrazów położonych wzdłuż głównej przekątnej jest — z określenia — równa zero; por. wyżej podany warunek dla  $\Theta'$ ).

Oczywiście jest

$$T_e = T_e^0 + D_e.$$

Wykażemy teraz, że stan naprężenia w dowolnym punkcie ciała można również rozłożyć na dwa stany składowe, mianowicie na równomierne



wszeczhronne ciśnienie (ściskanie lub rozciąganie) o wielkości  $\sigma_{sr}$ , dążące do zmiany objętości elementu ciała, oraz na tzw. dewiacyjny stan naprężenia, dążący do zmiany postaci elementu bez zmiany jego objętości.

W jakim celu przeprowadzamy ten podział stanów odkształcenia i naprężenia? Otóż doświadczenia wykazują, że osiągnięcie granicy plastyczności lub wytrzymałości materiału zależy nie tylko od wielkości naprężeń, ale i od charakteru stanu naprężenia. Mianowicie, ciśnienie hydrostatyczne, powodujące w ciałach jednorodnych izotropowych odkształcenie czysto objętościowe, praktycznie nie jest w stanie spowodować uplastycznienia materiału (świadczą o tym m. inn. doświadczenia B r i d g i n a n a z ciśnieniem hydrostatycznym dochodzącym do 30 000 atm; nie dotyczy to jednak ciał posiadających pory). Natomiast siły wywołujące zmianę postaci, np. siły ścinające, stosunkowo łatwo powodują powstanie stanu plastycznego materiału. Stąd wypływa celowość podziału odkształceń na część czysto objętościową (jak się okazuje z doświadczeń, niemal całkowicie sprężystą, aż do bardzo wysokich ciśnień włącznie) i na część dewiacyjną, miarodajną dla uplastycznienia (lub zniszczenia) materiału.

Podobnie jak to robiliśmy poprzednio dla tensora odkształcenia, rozkładamy teraz tensor naprężenia.

Oznaczmy naprężenie średnie (hydrostatyczne) przez

$$\sigma_{sr} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

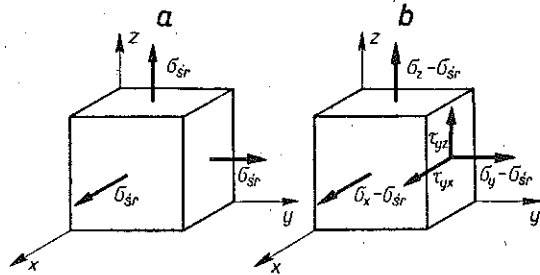
Dowolny stan naprężenia  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ , określony tensorem naprężenia  $T_o$ , możemy rozłożyć na dwa nakładające się na siebie stany naprężenia, przedstawione na rys. 5a i 5b.

Stanowi odkształcenia czysto objętościowego (rys. 5a) odpowiada kulisty tensor naprężenia

$$(1.4) \quad T_o^0 = \begin{Bmatrix} \sigma_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{sr} \end{Bmatrix}.$$

Stanowi odkształcenia czysto postaciowego (rys. 5b) odpowiada dewiator naprężenia

$$(1.5) \quad D_o = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_{sr} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{sr} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{sr} \end{Bmatrix}.$$



Rys. 5

Jest więc ogólnie

$$T_e = T_e^0 + D_e.$$

Różniczkując względem czasu wszystkie wyrazy wchodzące w skład wielkości  $T_e, T_e, T_e^0, T_e^0, D_e$  i  $D_e$  otrzymamy tensory szybkości wzrostu naprężeń, tensory szybkości wzrostu odkształceń, dewiatory szybkości wzrostu naprężeń, dewiatory szybkości wzrostu odkształceń itd.

## § 2. Stan naprężenia w punkcie. Naprężenia główne

Całkowite naprężenie  $p_n$  na płaszczyźnie dowolnie nachylonej względem osi współrzędnych przedstawia wzór

$$(2.1) \quad p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2,$$

w którym  $\sigma_n$  jest naprężeniem normalnym, a  $\tau_n$  naprężeniem stycznym w płaszczyźnie rozpatrywanej.

Jeżeli kierunek normalnej do płaszczyzny, na której badamy naprężenia, określają cosinusy kierunkowe  $l, m, i n$ , to jest

$$\sigma_n = p_x l + p_y m + p_z n.$$

Korzystając ze związków (1.1) i uwzględniając równości  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ , mamy w dalszym ciągu

$$(2.2) \quad \sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl.$$

Założmy, że na pewną płaszczyznę działa wyłącznie naprężenie normalne  $\sigma_n$  (wtedy  $\tau_n = 0$ ); nazwiemy je naprężeniem głównym. Jest wówczas  $p_n = \sigma_n$ . Oznaczmy naprężenie główne przez  $\sigma$  (rys. 6). Otrzymujemy w tym przypadku

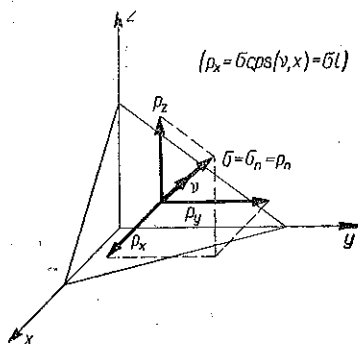
$$(2.3) \quad \sigma l = p_x, \quad \sigma m = p_y, \quad \sigma n = p_z.$$

Z równań (1.1) wynika, że

$$\sigma l = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n,$$

$$\sigma m = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n,$$

$$\sigma n = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n,$$



Rys. 6

czyli

$$(2.4) \quad \begin{cases} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0, \\ \tau_{yx} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n = 0, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n = 0. \end{cases}$$

Ponadto jest

$$(2.5) \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Z układu równań (2.4) można wyznaczyć współczynniki kierunkowe  $l$ ,  $m$  i  $n$ . Równania te są liniowe i jednorodne. Wobec istnienia związku (2.5) wielkości  $l$ ,  $m$  i  $n$  nie mogą być jednocześnie równe zeru. Zatem wyznacznik układu powinien zniknąć:

$$(2.6) \quad \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwijając ten wyznacznik otrzymujemy równanie trzeciego stopnia względem niewiadomej  $\sigma$ :

$$(2.7) \quad \sigma^3 - \sigma^2 u_1 + \sigma u_2 - u_3 = 0,$$

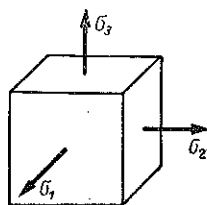
w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$$(2.8) \quad \begin{cases} u_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ u_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ u_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{cases}$$

Można udowodnić, że wszystkie trzy pierwiastki równania (2.7) (tymi pierwiastkami są naprężenia główne) są rzeczywiste (w podobny sposób w geometrii analitycznej przeprowadza się dowód istnienia rzeczywistych osi dla powierzchni środkowych drugiego stopnia). Ponieważ pierwiastki te jako naprężenia główne nie zależą od obranego układu odniesienia, to współczynniki równania przedstawione wzorami (2.8) również nie zależą od wyboru układu.

Wielkości  $u_1$ ,  $u_2$  i  $u_3$  są zatem niezmiennikami stanu naprężenia, przy czym pierwszy niezmiennik,  $u_1$ , jest tzw. niezmiennikiem liniowym, drugi,  $u_2$  — kwadratowym, a trzeci,  $u_3$  — sześciennym. Oznaczmy pierwiastki równania (2.7) przez  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  numerując je tak, aby było zawsze

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$



Rys. 7

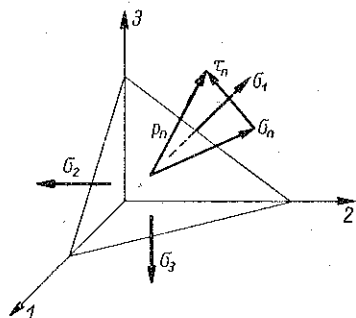
Można wyróżnić w przestrzeni tzw. sześcian główny, o ścianach prostopadłych do kierunków głównych, daje się bowiem wykazać, że naprężenia główne tworzą układ prostokątny (rys. 7).

W uzależnieniu od naprężeń głównych (dla przekrojów odpowiadających kierunkom głównym jest, oczywiście, zgodnie z określeniem  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ) niezmienniki stanu naprężenia wyrażają się następującymi wzorami:

$$(2.9) \quad \begin{cases} u_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ u_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ u_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{cases}$$

### § 3. Naprężenia ośmiościenne (tzn. na ścianach ośmiościanu foremnego)

Znajdźmy naprężenia na ścianach ośmiościanu foremnego, którego ściany są jednakowo nachylone względem osi współrzędnych. Osie obierzmy w kierunku naprężeń głównych (rys. 8). Cosinusy kierunkowe  $l$ ,  $m$  i  $n$  normalnych do tych ścian spełniają następujące równości:



Rys. 8

$$\begin{aligned} |l| &= |m| = |n|, \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1; \end{aligned}$$

zatem

$$|l| = |m| = |n| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Na podstawie wzoru (1.1) otrzymujemy (dla kierunków głównych)

$$p_1 = \sigma_1 l, \quad p_2 = \sigma_2 m, \quad p_3 = \sigma_3 n,$$

stąd

$$(3.1) \quad p_n^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2).$$

Według wzoru (2.2) jest teraz

$$(3.2) \quad \sigma_n = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{sr}.$$

Dalej mamy według (2.1)

$$(3.3) \quad \tau_n^2 = p_n^2 - \sigma_n^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2,$$

wobec czego

$$(3.4) \quad \tau_n = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Naprężenie  $\tau_n$  nosi nazwę naprężenia stycznego «ośmiościennego» (oktaedrycznego).

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia:

$$(3.5) \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{12}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \tau_{23}, \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \tau_{31}.$$

Wykażemy dalej, że  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{23}$  i  $\tau_{31}$  przedstawiają tzw. główne naprężenia styczne (tzn. naprężenia styczne ekstremalne).

Na wszystkich płaszczyznach ośmiościanu panują jednakowe naprężenia normalne o wielkości [por. (3.2)]

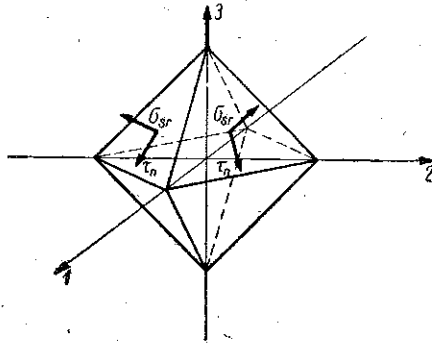
$$(3.6) \quad \sigma_n = \sigma_{sr}.$$

Te naprężenia normalne «ośmiościenne» odpowiadają stanowi ciśnienia hydrostatycznego (rys. 9).

Naprężenia styczne «ośmiościenne» noszą również nazwę intensywności naprężeń stycznych<sup>1)</sup> według propozycji H. H e n c k y' e g o.

Uwzględniając oznaczenia (3.5) możemy zapisać równość (3.4) w postaci

$$(3.7) \quad \tau_n = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}.$$



Rys. 9

Sens mechaniczny intensywności naprężeń stycznych jako naprężenia stycznego na ścianach ośmiościanu podali uczeni szwajcarscy R o š i E i c h i n g e r.

Naprężenia styczne ośmiościenne przedstawimy jeszcze w innej formie. Weźmy w tym celu pod uwagę wyrażenie  $2(u_1^2 - 3u_2)/9$  napisane w naprężeniach głównych [korzystamy tutaj ze wzorów (2.9)]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{9}(u_1^2 - 3u_2) &= \frac{2}{9}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1 - 3(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] = \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{2}{9}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Należałoby je, właściwie, nazywać w literaturze polskiej «wytężeniem», według znanej propozycji twórcy tego pojęcia M. T. H u b e r a — por. dalszy ciąg niniejszego wykładu, zwłaszcza związek (3.10) — jednakże aby ułatwić czytelnikowi studiowanie literatury obcej porzestaniemy tutaj na nazwie «intensywność».

Wynika stąd, że na podstawie (3.3) jest według (3.7.1)

$$\tau_n^2 = \frac{2}{9} (u_1^2 - 3 u_2).$$

Przyjmując zapis  $u_1$  i  $u_2$  zgodnie ze wzorami (2.8) otrzymujemy następujące wyrażenie dla intensywności naprężeń stycznych:

$$(3.8) \quad \tau_n = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

[por. wyrażenie dla  $\tau_n$  w naprężeniach głównych, wzór (3.4)].

Jedną z hipotez wytrzymałościowych, tzn. jedną z hipotez określających stan naprężenia, przy którym w danym miejscu ciała następuje jego uplastycznienie, jest hipoteza H u b e r a-M i s e s a-H e n c k y'e g o; czyli tzw. hipoteza największej stałej energii czystego odkształcenia postaciowego. Według tej hipotezy uplastycznienie materiału w pewnym jego miejscu następuje wówczas, gdy wielkość tzw. naprężenia zredukowanego, określonego wzorem

$$(3.9) \quad \sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

przekroczy pewną wartość krytyczną (charakterystyczną dla danego materiału).

Wykażemy, że wyrażenie (3.9) jest niezmiennicze, a więc że nadaje się do formułowania praw fizycznych.

Według (1.5) dewiator naprężenia napisany w naprężeniach głównych przedstawia następująca macierz:

$$D_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{sr} \end{pmatrix},$$

gdzie, jak poprzednio,

$$\sigma_{sr} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Drugi niezmiennik,  $\bar{u}_2$ , dewiatora  $D_0$  jest według wzoru (2.9) równy

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &= (\sigma_1 - \sigma_{sr})(\sigma_2 - \sigma_{sr}) + (\sigma_2 - \sigma_{sr})(\sigma_3 - \sigma_{sr}) + (\sigma_3 - \sigma_{sr})(\sigma_1 - \sigma_{sr}) = \\ &= \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_{sr} - \sigma_{sr} \sigma_2 + \sigma_{sr}^2 + \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_{sr} - \sigma_{sr} \sigma_3 + \sigma_{sr}^2 + \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_3 \sigma_{sr} - \\ &\quad - \sigma_{sr} \sigma_1 + \sigma_{sr}^2 = 3 \sigma_{sr}^2 - 2 \sigma_{sr} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \\ &= -3 \sigma_{sr}^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = -\frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1. \end{aligned}$$

Po przekształceniu wyrażenia występującego pod pierwiastkiem we wzorze (3.9) otrzymujemy dla naprężenia zredukowanego wzór

$$\begin{aligned}\sigma_{zred} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}.\end{aligned}$$

Porównując to wyrażenie z wyrażeniem  $\bar{u}_2$  dla dewiatora widzimy, że

$$\sigma_{zred} = \sqrt{-3\bar{u}_2}.$$

Wynika stąd, że; istotnie,  $\sigma_{zred}$  daje się przedstawić przez niezmiennik. Z porównania (3.4) lub (3.8) z (3.9) otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{zred} = \tau_n.$$

Zauważyć tu możemy ścisły związek zachodzący pomiędzy niebezpieczeństwem uplastycznienia (według hipotezy H u b e r a) oraz naprężeniem ośmiościennym ścinającym. W teorii plastyczności  $\sigma_{zred}$  wyprowadzone zostaje niezależnie od hipotez wytrzymałościowych i nazywa się intensywnością naprężeń,  $\sigma_i$ . Intensywność (natężenie) naprężeń jest równa

$$(3.10) \quad \sigma_i = \sigma_{zred} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n.$$

## WYKŁAD II

W pierwszym wykładzie omówiliśmy nieco szczegółowiej stan naprężenia w punkcie i określiliśmy pojęcia głównego sześcianu i głównego ośmiościanu. Przypomnijmy inne ważniejsze wnioski. Wprowadziliśmy więc pojęcia:

(1) intensywności naprężeń ścinających, wyrażającej się w naprężeniach głównych jako, (3.4),

$$\tau_n = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

oraz

(2) intensywności naprężeń, czyli naprężenia zredukowanego, (3.9),

$$\sigma_i = \sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Oczywiście jest, jak już o tym mówiliśmy, (3.10),

$$\sigma_i = \sigma_{zred} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n.$$

Wyjaśniliśmy również, że naprężenie  $\tau_n$  jest naprężeniem ścinającym na ścianach ośmiościanu głównego.

Znaleźliśmy poza tym trzy niezmienniki stanu naprężenia, wyrażające się w naprężeniach głównych w postaci następującej, (2.9),

$$\begin{cases} u_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3 \sigma_{sr}, \\ u_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ u_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{cases}$$

Przypomnijmy, że dewiator naprężenia charakteryzujący czyste odkształcenie postaciowe wyraża się w naprężeniach głównych jako, (1.5),

$$D_s = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{sr} \end{pmatrix}.$$

Macierz powyższa przedstawia rzeczywiście dewiator, gdyż suma wyrazów leżących na głównej przekątnej jest równa zeru.

Łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące związki: dla niezmienników całego tensora naprężenia, (3.7.1),

$$\tau_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{u_1^2 - 3u_2},$$

czyli, (3.7.2),

$$\sigma_i = \sqrt{u_1^2 - 3u_2};$$

dla niezmienników dewiatora naprężenia, (3.7.3),

$$\sigma_i = \sqrt{-3\bar{u}_2},$$

gdzie

$$\bar{u}_2 = (\sigma_1 - \sigma_{sr})(\sigma_2 - \sigma_{sr}) + (\sigma_2 - \sigma_{sr})(\sigma_3 - \sigma_{sr}) + (\sigma_3 - \sigma_{sr})(\sigma_1 - \sigma_{sr}).$$

Ostatni związek, (3.7.3), wynika wprost ze wzoru (3.7.2), gdyż dla dewiatora pierwszy niezmiennik stanu naprężenia znika ( $u_1 = 0$ ).

Wielkości  $\tau_n$  i  $\sigma_i$  są niezmiennicze, wobec czego można się nimi posługiwać dla formułowania praw fizycznych.



§ 4. Krańcowe wartości naprężeń stycznych (główny dwunastościan rombowy)

Obierzmy kierunki główne za osie układu odniesienia. Naprężenie normalne  $\sigma_n$  panujące na płaszczyźnie, której normalna ma kierunek określony współczynnikami  $l$ ,  $m$  i  $n$ , wyraża się w tym układzie następującym wzorem [por. (2.2)]:

$$(4.1) \quad \sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2.$$

Ze wzoru (1.1) mamy

$$(4.2) \quad p_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2,$$

zatem [por. (2.1)]

$$(4.3) \quad \tau_n^2 = p_n^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2.$$

Zastąpmy w (4.3)  $n^2$  przez  $1 - l^2 - m^2$ . Znajdźmy następnie pochodne  $\tau_n$  względem  $l$  oraz  $m$  i przyrównajmy je do zera. Otrzymamy wówczas dla wyznaczenia współczynników kierunkowych  $l$  i  $m$  dwa równania, określające kierunek płaszczyzny ukośnej, na której  $\tau_n$  przybiera wartości ekstremalne:

$$(4.4) \quad \begin{cases} l [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)] = 0, \\ m [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)] = 0. \end{cases}$$

Równania (4.4) posiadają następujące rozwiązania:

$$\left. \begin{array}{l} l = 0, \\ m = 0, \end{array} \right\} n = \pm 1;$$

$$l = 0, \quad \begin{cases} m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ n = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; \end{cases} \quad m = 0, \quad \begin{cases} l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ n = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Jeżeli wyrugowalibyśmy ze związku (4.3) nie  $n$  lecz  $l$  lub  $m$ , to otrzymalibyśmy inne, pozostałe jeszcze rozwiązania.

Wszystkie uzyskane rozwiązania zebrane są w tablicy 1.

Pierwsze trzy kolumny tablicy — zawierające cyfry — określają płaszczyzny główne (na nich  $\tau_n$  ma wartość ekstremalną, równą zero). Trzy dalsze kolumny określają płaszczyzny przechodzące przez jedną z głównych osi i dzielące na połowy kąt między dwoma pozostałymi osiami głównymi. Zespół wszystkich płaszczyzn, odpowiednio równoległe przesuniętych w przestrzeni, tworzy dwunastościan rombowy (rys. 12).

Tablica 1

$l$	$\pm 1$	0	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$m$	0	$\pm 1$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$n$	0	0	$\pm 1$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Oznaczając przez  $\tau_{\mu\nu}$  naprężenia ścinające główne na ścianach tego dwunastościanu, przecinających się z osiami  $\mu$  i  $\nu$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ;  $\mu \neq \nu$ ), otrzymamy po podstawieniu odpowiednich cosinusów kierunkowych do wzoru (4.3)

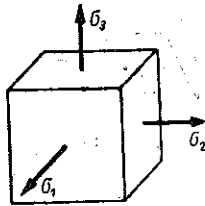
$$(4.5) \quad \tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

O wzorach (4.5) mówiliśmy już poprzednio [por. (3.5)].

Zauważmy, że po dodaniu związków (4.5) stronami otrzymamy

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0.$$

Dla płaskiego stanu naprężenia możemy teraz wyprowadzić z łatwością dobrze znany wniosek, że największe naprężenie styczne działa pod kątem  $45^\circ$  względem kierunków głównych i jest równe połowie różnicy naprężeń głównych.



Rys. 10

Reasumując to, co powiedzieliśmy o stanie naprężenia, wypada stwierdzić, że wyróżniliśmy następujące wielkości, nazwane głównymi:

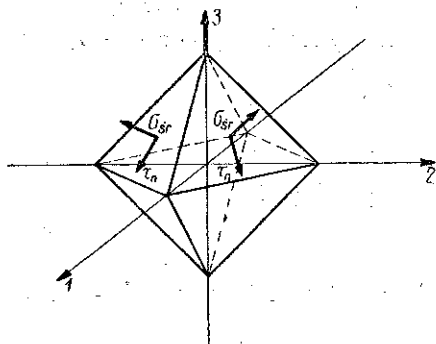
(1) sześcian główny (rys. 10); na ścianach sześcianu głównego występują jedynie naprężenia normalne, zwane naprężeniami normalnymi głównymi;

(2) ośmiościan główny (rys. 11); na ściany ośmiościanu głównego działają naprężenia normalne, odpowiadające stanowi ciśnienia hydrostatycznego

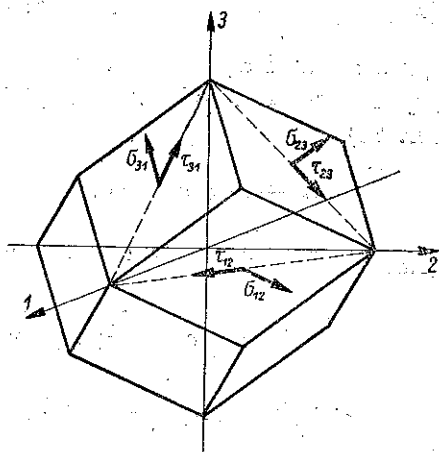
$$\sigma_{sr} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3);$$

oraz naprężenia ścinające «ośmiościenne»

$$\tau_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{zred} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2};$$



Rys. 11



Rys. 12

(3) dwunastościan główny (rys. 12); na ściany dwunastościanu głównego działają naprężenia ścinające główne

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

oraz naprężenia normalne

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{31} = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}.$$

### § 5. Stan odkształcenia w punkcie

Pomiędzy stanami odkształcenia i naprężenia istnieje ścisła analogia.

Wydłużenie odcinka, którego kierunek określają współczynniki  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , jest równe

$$(5.1) \quad \varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl.$$

Wyrażenie to jest podobne do wyrażenia (2.2) dla naprężenia normalnego. We wzorze (5.1) nie występują atoli dwójki, gdyż do tensora odkształcenia wprowadzone zostały wielkości  $\gamma_{xy}/2, \dots$ , zamiast odpowiednio  $\tau_{xy}, \dots$  (por. str. 75). Na podstawie analogii możemy wnioskować, że w każdym punkcie ciała istnieją trzy główne osie odkształcenia; włókna skierowane wzdłuż tych osi doznają tylko samych wydłużeń, a kąty proste pomiędzy kierunkami tych włókien nie ulegają zmianie.

Wydłużenia główne  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$  wyznaczyć można z równania sześciennego [analogicznego do (2.7)].

$$(5.2) \quad \varepsilon^3 - \varepsilon^2 \pi_1 + \varepsilon \pi_2 - \pi_3 = 0,$$

gdzie  $\pi_1, \pi_2$  i  $\pi_3$  są niezmiennikami stanu odkształcenia (określonymi przez wyrazy tensora odkształcenia, przy czym symbol  $\pi_1 = \varepsilon_{sr} = \Theta$ ; por. str. 76).

$$(5.3) \quad \begin{cases} \pi_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ \pi_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2), \\ \pi_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2). \end{cases}$$

W ciele izotropowym główne osie odkształcenia i naprężenia pokrywają się ze sobą.

Stosując dalej wzmiankowaną analogię otrzymamy wartość wydłużenia  $\varepsilon_n$  w kierunku normalnym do płaszczyzn ośmiościanu głównego [por. wzór (3.6)] równą

$$(5.4) \quad \varepsilon_n = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \varepsilon_{sr}.$$

Posunięcia dla płaszczyzn ośmiościanu [por. wzór (3.4), w którym  $\tau_n$  zastąpić trzeba przez  $\gamma_n/2$ ] są równe

$$(5.5) \quad \gamma_n = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Wyrażenie powyższe nazwał H e n c k y intensywnością odkształceń stycznych.

Wzór (5.5) można przedstawić również w postaci podobnej do (3.8), mianowicie

$$(5.6) \quad \gamma_n = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{2}{3}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Wyrażenia dla posuwów<sup>2)</sup> głównych [analogiczne do wyrażen (4.5) dla naprężeń głównych] przybierają postać następującą:

$$(5.7) \quad \begin{cases} \gamma_{12} = \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ \gamma_{23} = \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ \gamma_{31} = \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_1). \end{cases}$$

W teorii plastyczności dużą rolę odgrywa wielkość proporcjonalna do tzw. posuwu «ośmiościennego», zwana intensywnością odkształceń i definiowana w sposób następujący:

$$(5.8) \quad \varepsilon_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)} \gamma_n = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{2}{3}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Dla liczby Poissona  $\nu$  równej 1/2 otrzymuje się

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_n.$$

### § 6. Prawo sprężystości

Jak wiadomo, dla ciała izotropowego podlegającego prawu Hooke'a przy założeniu małych odkształceń można zapisać prawo sprężystości w następującej postaci Lamégo:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\Theta, & \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\Theta, & \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\Theta, & \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{cases}$$

Tutaj  $\lambda$  jest jedną z dwóch stałych Lamégo, wyrażającą się przez moduł odkształcenia postaciowego  $G$  i liczbę Poissona  $\nu$  w następujący sposób:

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu};$$

$\Theta$  jest odkształceniem objętościowym, co oznacza, jak wiemy, że

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_r.$$

<sup>2)</sup> Używamy tutaj również terminu «posuw» zamiast dwuznacznego «posunięcia» lub długiego «kąta odkształcenia postaciowego».

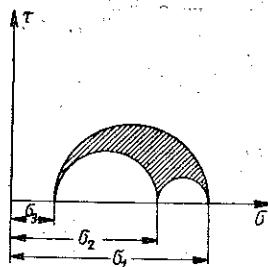
Odejmując od siebie parami pierwsze trzy równości (6.1) otrzymamy

$$(6.2) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_y = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_y), \\ \sigma_y - \sigma_z = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_z), \\ \sigma_z - \sigma_x = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_x), \end{cases}$$

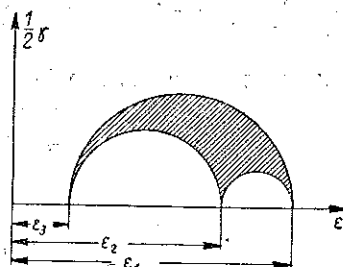
skąd

$$(6.3) \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_y - \varepsilon_z}, \quad \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{\varepsilon_z - \varepsilon_x}.$$

Przypomnijmy (por. rys. 13 i 14), jak wyglądają koła Mohra dla trójwymiarowych stanów naprężenia i odkształcenia (w założeniu, że, jak to już wspomnieliśmy, jest  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  i ponadto  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ ).



Rys. 13



Rys. 14

Równania (6.3) dowodzą, że koła Mohra dla naprężeń są w sposób ciągły geometrycznie podobne do kół Mohra dla odkształceń.

Podobieństwo kół Mohra dla naprężeń i odkształceń bywa często przyjmowane w teorii plastyczności jako jeden z aksjomatów.

Zapiszmy równania (6.2) w naprężeniach głównych, czyli dla «głównego sześcianu»:

$$(6.4) \quad \begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ \sigma_2 - \sigma_3 = 2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ \sigma_3 - \sigma_1 = 2G(\varepsilon_3 - \varepsilon_1). \end{cases}$$

Według zależności (4.5) jest (z pominięciem znaków)

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_{12}, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2\tau_{23}, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = 2\tau_{31},$$

a według zależności (5.7)

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \gamma_{12}, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \gamma_{23}, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \gamma_{31}.$$

Wobec tego zamiast wzorów (6.4) otrzymujemy

$$(6.5) \quad \begin{cases} \tau_{12} = G \gamma_{12}, \\ \tau_{23} = G \gamma_{23}, \\ \tau_{31} = G \gamma_{31}. \end{cases}$$

Wynik ten można otrzymać z bezpośredniego zastosowania prawa H o o k e' a, jeżeli rozpatrywać sześcián, którego ściany są równoległe do trzech ścian głównego dwunastościanu rombownego. Na ściany tego sześciánu będą działały główne naprężenia ścinające, określone właśnie wzorami (6.5).

Rozważmy z kolei sześcián zorientowany względem kierunków głównych tak, aby para ścian równoległych była przynależna do «głównego ośmiościanu», to znaczy, aby na te ściany i na drugą parę ścian, prostopadłych do nich, działały naprężenia ścinające «ośmiościenne»  $\tau_n$ . Niech te naprężenia będą prostopadłe do odpowiednich krawędzi tych ścian. Wówczas na podstawie prawa H o o k e' a otrzymujemy

$$(6.6) \quad \tau_n = G \gamma_n.$$

Zgodnie ze wzorami (3.8) i (5.5) mamy teraz dla kierunków głównych

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \tau_n &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= G \gamma_n = G \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \end{aligned}$$

Nazwijmy, jak poprzednio, «intensywnością naprężeń» lub «naprężeniem uogólnionym» (jest to również naprężenie zwane sprowadzonym lub zredukowanym) wielkość [por. wzory (3.8) i (3.10)]

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n,$$

a «intensywnością odkształceń» lub «odkształceniem uogólnionym» wielkość [por. wzory (5.6) i (5.8)], (3.10),

$$\varepsilon_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)} \gamma_n.$$

Biorąc pod uwagę związek

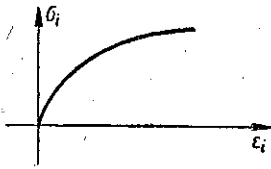
$$(6.7.1) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

otrzymujemy

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n = \frac{3}{\sqrt{2}} G \gamma_n = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_n = E \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)} \gamma_n = E \varepsilon_i.$$

Korzystając z zależności (3.10) otrzymujemy ostatecznie

$$(6.8) \quad \sigma_i = E \varepsilon_i.$$



Rys. 15

W teorii plastyczności równanie powyższe posiada doniosłe znaczenie, jednakże symbol  $E$  nie przedstawia *sensu stricto* modułu Younga (rys. 15), lecz współczynnik zmieniający się wraz ze zmianą stanu odkształcenia i ponadto zmienny od miejsca do miejsca (gdy stan naprężenia jest niejednorodny).

## § 7. Prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci

Dodajmy do siebie stronami trzy pierwsze równości (6.1). Otrzymamy wówczas

$$(7.1) \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (2G + 3\lambda)(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

gdzie wobec istnienia związku (por. str. 89)

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$$

jest

$$2G + 3\lambda = 2G \left( \frac{1-2\nu+3\nu}{1-2\nu} \right) = \frac{E}{1-2\nu}.$$

Wobec tego ze wzoru (7.1), po podzieleniu obu jego stron przez 3, otrzymujemy

$$(7.2) \quad \sigma_{sr} = E^0 \varepsilon_{sr};$$

tutaj przyjęto oznaczenie

$$E^0 = \frac{E}{1-2\nu} = 3K$$

( $E^0$  można uważać za objętościowy moduł sprężystości; symbolem  $K$  oznacza się często  $E^0/3$ ).

Ponieważ jest

$$\Theta = 3 \varepsilon_{sr},$$

więc możemy również napisać

$$(7.3) \quad \sigma_{sr} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \Theta.$$



Wzory (7.2) lub (7.3) wyrażają tzw. *prawo zmiany objętości*. Według tego prawa naprężenie średnie jest proporcjonalne do odkształcenia średniego lub też do odkształcenia objętościowego.

Doświadczenia wskazują, że prawo (7.3) nie traci ważności również przy bardzo dużych  $\sigma_{sr}$  (o wiele większych od granicy sprężystości przy prostym rozciąganiu) i wobec tego  $\Theta$  obliczane ze wzoru (7.3) jest praktycznie, w bardzo szerokim zakresie zmienności  $\sigma_{sr}$ , sprężyste. Czysta zmiana objętości jest więc niemal zawsze sprężysta, lub też inaczej: tensorowi kulistemu  $T^0$  odpowiada, praktycznie, sprężysty stan materii.

Wróćmy teraz do związków (6.1). Odejmijmy od nich stronami równość (7.2). Otrzymujemy w ten sposób pierwszą zależność w postaci

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{sr} &= 2G\varepsilon_x + \lambda\Theta - \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{sr} = \\ &= 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}3\varepsilon_{sr}\right) - \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_{sr} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}) \end{aligned}$$

i podobnie dwie dalsze zależności.

Ostatecznie mamy

$$(7.4) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}), & \tau_{xy} = 2G\frac{\gamma_{xy}}{2}, \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}), & \tau_{yz} = 2G\frac{\gamma_{yz}}{2}, \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}), & \tau_{zx} = 2G\frac{\gamma_{zx}}{2}. \end{cases}$$

Związki powyższe można również przedstawić w następującym symbolicznym zapisie tensorowym:

$$(7.5) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_{sr} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{sr} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{sr} \end{Bmatrix} = 2G \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{sr} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{sr} \end{Bmatrix}.$$

Korzystając z oznaczeń (1.3) i (1.5) mamy

$$(7.6) \quad D_\sigma = 2GD_\varepsilon.$$

Wzór (7.6) wyraża *prawo zmiany postaci*. Prawo to stwierdza, że dewiator naprężenia jest proporcjonalny do dewiatora odkształcenia, lub że czyste odkształcenie postaci jest wywołane przez dewiator naprężenia.

Jeżeli wrócimy do prawa zmiany objętości (7.2), to po zastosowaniu oznaczeń (1.4) i 4.2) możemy je zapisać również w postaci tensorowej

$$(7.7) \quad T_{\alpha}^0 = E^0 T_{\alpha}^0,$$

gdzie  $E^0 = E/(1-2\nu)$  jest objętościowym modułem sprężystości. Dla  $\nu=1/2$ , tzn. dla ciał, których objętość uważamy za nie ulegającą zmianie w trakcie odkształcenia, otrzymujemy wniosek o znaczeniu czysto formalnym  $E^0 = \infty$ .

### W Y K Ł A D III

#### § 8. Warunki plastyczności (hipotezy wytrzymałościowe)

Hipotezy wytrzymałościowe nazywa się dzisiaj raczej warunkami plastyczności. Ta nazwa jest o tyle słuszniejsza, że w istocie chodzi tutaj o uplastycznienie materiału, a nie o jego zniszczenie przez rozdzielenie, przesuw lub zmiążdżenie. O hipotezach wytrzymałościowych należałoby raczej mówić przy rozważaniu granicznej nośności ciał kruchych, czyli pękających bez uprzednich, widocznych, trwałych odkształceń. Takie zaś ciała są właściwie dotychczas nie zbadane. W dalszych naszych rozważaniach zajmiemy się wyłącznie ciałami ciągliwymi, tzn. ciałami odkształcającymi się w sposób trwały przed wystąpieniem zniszczenia (np. stal niezbyt twarda), czyli tzw. ciałami sprężysto-plastycznymi. Zagadnienie, które chcemy teraz rozważyć, sprowadza się do pytania, jakie czynniki sprawiają, że pewne miejsce ciała ulega uplastycznieniu: czy tymi czynnikami są naprężenia występujące w danym miejscu, czy też odkształcenia, czy jedno i drugie, czy wreszcie niektóre z ich składowych. Przy rozciąganiu, tzn. przy naprężeniu jednoosiowym, sprawa jest jasna: ekstremalnym naprężeniem wywołującym uplastycznienie jest naprężenie  $\sigma_{pl}$ , równe tzw. granicy plastyczności (obserwowanej na wykresie próby na rozciąganie). Przy złożonym, przestrzennym stanie naprężenia sprawa się komplikuje. Wiemy, że wtedy stan naprężenia w danym miejscu charakteryzuje sześć wielkości lub właściwie trzy, tzn. naprężenia główne, gdyż kierunki tych ostatnich dla rozpatrywanych tutaj ciał izotropowych uznać wypada za obojętne. Jeżeli za osie układu odniesienia obierzemy naprężenia główne, to można zbudować powierzchnię, zwaną graniczną powierzchnią uplastycznienia, określoną równaniem

$$(8.1) \quad f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0.$$

Zbiór trójek liczb  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  odpowiadających tej powierzchni ma przedstawiać wszystkie stany naprężenia, które powodują w danym miejscu przejście materiału w stan plastyczny.

Znamy różne hipotezy co do przyczyn powstawania stanu plastycznego materiałów.

Pierwszą hipotezę podał Galileusz w XVII w. Twierdził on, że uplastycznienie wywołane jest przez największe naprężenie główne; gdy to ostatnie osiąga pewną wartość  $\sigma_{pl}$ , następuje uplastycznienie materiału. Hipoteza ta należy do przeszłości, gdyż obala ją doświadczenie z wszechstronnym ściskaniem; ciśnienie może być w tym przypadku znacznie większe od  $\sigma_{pl}$  przy rozciąganiu, a mimo to materiał nie ulega zniszczeniu lub uplastycznieniu (doświadczenia A. Föppla i następnie P. Bridgmana). Gdyby tę hipotezę ograniczyć tylko do maksymalnego naprężenia rozciągającego, to i tak nie potwierdza się ona dla ciał ciągliwych.

Według drugiej hipotezy przyczyną uplastycznienia materiałów jest największe wydłużenie jednostkowe (główne). Doświadczenia obaliły również i tę hipotezę; mimo to była ona jako oparta na autorytecie Saint-Venanta długo uznawana we Francji i w Niemczech.

Trzecią hipotezę, hipotezę największego naprężenia stycznego, podał Coulomb w XVIII w. Jeżeli przyjąć, jak to poprzednio czyniliśmy, że

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

to ze wzorów (4.5) otrzymuje się pomijając znak

$$(8.2) \quad \tau_{max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Według hipotezy Coulomba uplastycznienie materiału następuje wówczas, gdy  $\tau_{max}$  przekroczy pewną wielkość  $\tau_{plast}$ .

Dla czystego rozciągania w kierunku  $\sigma_1$  jest

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

więc w momencie uplastycznienia jest tutaj

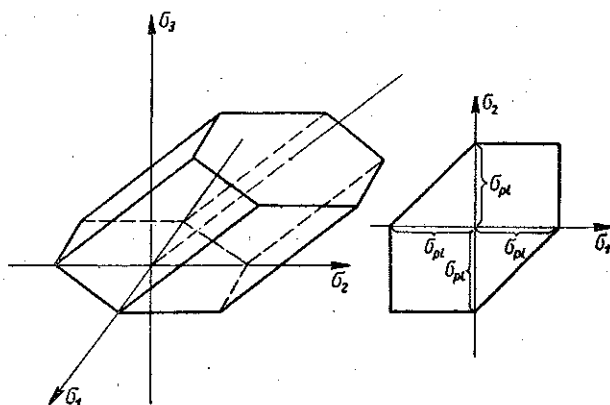
$$(8.3) \quad \tau_{max} = \tau_{plast} = \frac{\sigma_{pl}}{2}.$$

Zauważmy od razu, że współczynnik 1/2 w tym wzorze nie odpowiada wynikom doświadczeń, które określają jego wartość na bliską 0,58.

Dla hipotezy Coulomba równania określające powierzchnię graniczną, (8.1), zapisane w układzie osi głównych, przyjmują następującą postać:

$$(8.4) \quad \begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_{pl}, \\ |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_{pl}, \\ |\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_{pl}. \end{cases}$$

Nie trudno zauważyć, że warunki (8.4) określają graniastostup heksagonalny, jednakowo nachylony względem trzech osi współrzędnych  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  (rys. 16).



Rys. 16

Ze wzorów (8.4) dla  $\sigma_3 = 0$  otrzymuje się (por. sześciobok po prawej stronie rys. 16)

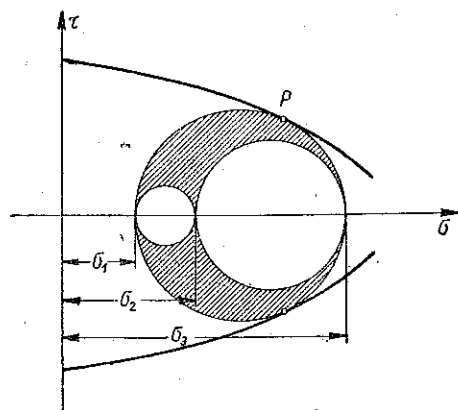
$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_{pl},$$

$$\sigma_2 = \pm \sigma_{pl},$$

$$\sigma_1 = \pm \sigma_{pl}.$$

Doświadczenia G u e s t a potwierdzają słuszność tej hipotezy (objęły one rozciąganie i skręcanie rur poddanych równocześnie działaniu ciśnienia wewnętrznego).

M o h r, twórca czwartej hipotezy, uogólnia hipotezę C o u l o m b a - G u e s t a zarówno na ciała



Rys. 17

kruche (zniszczenie ich następuje na skutek pęknięcia czyli rozdzielenia), jako też i na ciała ciągłe (zniszczenie ich następuje w ogólności na skutek przesuwów, czyli poślizgów plastycznych). Twierdzi on, że uplastycznienie lub zniszczenie materiału zależy od właściwości samego materiału: mianowicie, te stany następują albo przy pewnej granicznej wartości naprężenia stycznego  $\tau$ , zależnej jeszcze od wartości napręż-

nia normalnego  $\sigma$  w tych płaszczyznach, w których działa  $\tau$ , albo przy pewnej wartości naprężenia rozciągającego.

Przedstawmy przestrzenny stan naprężenia w danym punkcie, (tutaj  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ ) za pomocą kół M o h r a (rys. 17).

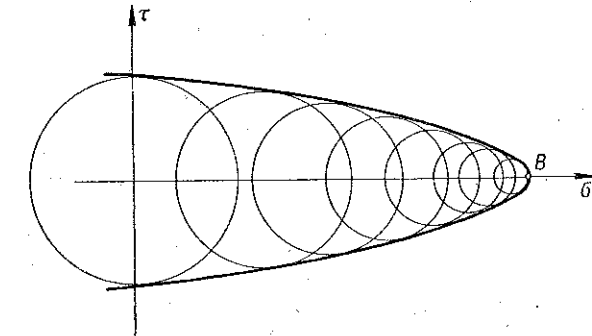
Największe koło M o h r a, wyznaczone przez naprężenia  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$ , przedstawia stan naprężenia dla płaszczyzn równoległych do osi o kierunku  $\sigma_2$ . Części zaciemnione wykresu przedstawiają naprężenia w przekrojach skierowanych dowolnie.

Ponieważ zarówno w teorii C o u l o m b a, jak i w teorii M o h r a chodzi o największe naprężenia ścinające  $\tau_{max}$  [por. wzór (8.2)], to znaczenie istotne posiada właściwie okrąg największy, natomiast wartość  $\sigma_2$  staje się obojętna (nie potwierdzają takiej opinii doświadczenia L o d e g o i analiza ważniejszych nowych doświadczeń, przeprowadzona przez I l j u s z i n a). Niech punkt  $P(\sigma, \tau)$  reprezentuje naprężenia  $\sigma$  i  $\tau$  w płaszczyźnie najniebezpieczniejszej — gotowej do poślizgu plastycznego (jak wiemy, po przekroczeniu granicy plastyczności na powierzchniach ciała pojawiają się delikatne ślady układów linii poślizgowych materiału). Zbiór tego rodzaju punktów  $P$  tworzy linie stanów granicznych, które muszą być obwiedniami rodziny kół M o h r a, bo z założenia  $P$  jest najniebezpieczniejszym stanem dla danego koła, a więc nie może być innych przecięć

tego koła z liniami stanów granicznych poza punktami  $P$ . Gdy naprężenia główne z rozciągających przechodzą w ściskające, to koła M o h r a przesuwają się coraz bardziej w lewo. Obwiednia ich musi albo rozbiegać się z lewej strony osi  $\tau$ , albo być równoległa do osi  $\sigma$ .

W przeciwnym razie miejsc

scie jej przecięcia z osią  $\sigma$  wyznaczałoby wartość niebezpieczną wszechstronnego ściskania, dla którego koło M o h r a redukowałoby się do punktu, i byłoby



Rys. 18

$$\sigma_1 = \sigma_3 (= \sigma_2) = -p \quad (p > 0).$$

A przecież stanowi wszechstronnego ściskania nie odpowiada, jak mówiliśmy, żaden stan niebezpieczny (przynajmniej praktycznie). Natomiast punkt  $B$  (por. rys. 18) odpowiada stanowi wszechstronnego rozciągania:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p.$$

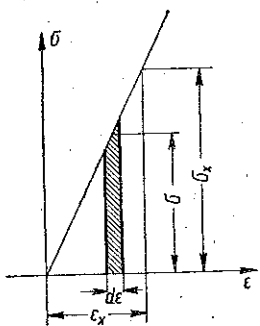
Zagadnieniom tym poświęcona jest bogata literatura, jakkolwiek brak jest dotychczas dostatecznie ścisłego ich rozstrzygnięcia. Warto wymienić tu m. inn. ostatnie prace uczonych wiedeńskich związanych ze szkołą A. L e o n a.

Zdecydowanym przeciwnikiem teorii M o h r a był twórca ogólnie dziś przyjętej (piątej) hipotezy energetycznej, M. T. H u b e r. Szkoła radziecka (I l j u s z i n, K a c z a n o w, S o k o ł o w s k i i inni) zdecydowanie popiera teorię H u b e r a jako najbardziej zgodną z doświadczeniem (warto wspomnieć przy tej okazji, że istnieje również nowa

rosyjska teoria D a w i d i e n k o w a - F r i d m a n a). Część uczonych zachodnich opowiada się jednak w dalszym ciągu za teorią M ó h r a.

Teoria H u b e r a oparta jest, jak wiadomo, na pojęciu energii sprężystej, tzn. na pojęciu energii potencjalnej, nagromadzonej w ciele sprężystym odkształconym (rys. 19).

Jeżeli ciało podlega prawu H o o k e ' a, to praca elementarna, wykonana przez naprężenia normalne  $\sigma$ , działające na dwie przeciwległe ściany sześcianu »jednostkowego«, przy jego odkształceniu o wielkości  $d\varepsilon$  jest równa



Rys. 19

$$\sigma d\varepsilon.$$

Całkowita praca wykonana przez te naprężenia do momentu odpowiadającego stanowi  $\sigma_x$ ,  $\varepsilon_x$  jest równa  $\sigma_x \varepsilon_x / 2$ .

Ostatecznie zatem energię sprężystą jednostkową (właściwą) przedstawia (w naprężeniach głównych) wzór

$$(8.5) \quad 2\mathcal{E} = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3$$

lub w zapisie tensorowym

$$(8.6) \quad 2\mathcal{E} = T_o T_\varepsilon.$$

Wobec istnienia związków (por. str. 76 i 78)

$$(8.7) \quad \begin{cases} T_o = T_o^0 + D_o, \\ T_\varepsilon = T_\varepsilon^0 + D_\varepsilon, \end{cases}$$

po ich przemnożeniu otrzymujemy

$$(8.8) \quad 2\mathcal{E} = T_o^0 T_\varepsilon^0 + D_o D_\varepsilon + T_o^0 D_\varepsilon + T_\varepsilon^0 D_o = T_o^0 T_\varepsilon^0 + D_o D_\varepsilon,$$

gdyż można wykazać, że jest

$$T_o^0 D_\varepsilon + T_\varepsilon^0 D_o = 0.$$

Wynika stąd, że energia sprężysta jest równa sumie energii sprężystej odkształcenia objętości i odkształcenia postaci. Przedstawimy to jednak wyraźniej przekształcając odpowiednio wzór (8.5).

Przyjmijmy, że naprężenia i odkształcenia główne zostają rozłożone na dwie składowe:

$$(8.9) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \bar{\sigma}_1 + \sigma_{sr}, & \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_{sr}, \\ \sigma_2 = \bar{\sigma}_2 + \sigma_{sr}, & \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_{sr}, \\ \sigma_3 = \bar{\sigma}_3 + \sigma_{sr}, & \varepsilon_3 = \bar{\varepsilon}_3 + \varepsilon_{sr}, \end{cases}$$

gdzie, jak zwykle,

$$\sigma_{sr} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \varepsilon_{sr} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Podstawmy powyższe wyrażenia do wzoru (8.5), a otrzymamy po przekształceniu

$$(8.10) \quad 2\mathcal{D} = 3\sigma_{sr}\varepsilon_{sr} + \bar{\sigma}_1\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\sigma}_2\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\sigma}_3\bar{\varepsilon}_3.$$

Jak wiemy, jest

$$3\varepsilon_{sr} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \Theta,$$

gdzie symbol  $\Theta$  oznacza odkształcenie objętościowe jednostkowe. Gdy na tę samą objętość jednostkową działa naprężenie hydrostatyczne  $\sigma_{sr}$ , to

$$(8.11) \quad 3\sigma_{sr}\varepsilon_{sr} = 2\mathcal{D}_v,$$

gdzie  $\mathcal{D}_v$  oznacza pracę (energię) odkształcenia objętości. Wobec tego reszta wyrazów we wzorze (8.10) przedstawia energię odkształcenia postaci ( $\mathcal{D}_f$ ). Jest zatem

$$(8.12) \quad 2\mathcal{D}_f = \bar{\sigma}_1\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\sigma}_2\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\sigma}_3\bar{\varepsilon}_3.$$

Otóż według hipotezy H u b e r a warunkiem uplastycznienia materiału jest osiągnięcie przez  $\mathcal{D}_f$  (czy też przez  $2\mathcal{D}_f$ ) wartości maksymalnej; gdy nastąpi już uplastycznienie, wielkość ta pozostaje stała (dlatego hipoteza ta była nazywana hipotezą stałej największej energii czystego odkształcenia postaciowego). Mamy zatem dla materiału przeprowadzonego w stan plastyczny

$$(8.13) \quad \bar{\sigma}_1\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\sigma}_2\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\sigma}_3\bar{\varepsilon}_3 = \text{const.}$$

Według prawa H o o k e'a jest

$$\bar{\sigma}_k = E\bar{\varepsilon}_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Zamiast zatem wzoru (8.13) napisać można

$$(8.14) \quad \bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^2 = \text{const.}$$

Odejmijmy teraz od powyższego wzoru stronami równość

$$\frac{(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3)^2}{3} = 0.$$

Po przekształceniu i powtórным wprowadzeniu składowych  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  otrzymujemy

$$(8.15) \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = c^2$$

(symbol  $c$  oznacza tutaj wielkość stałą).

Dochodzimy z kolei do ważnego wniosku porównując ten wzór z wyrażeniem (3.4) dla  $\tau_n$ . Okazuje się, mianowicie, że jest

$$(8.16) \quad \tau_n = \frac{c}{3}.$$

Wynika stąd, że hipoteza H u b e r a równoważna jest hipotezie największego (stałego) naprężenia ścinającego ośmiościennego.

Zastanówmy się teraz, czemu jest równa stała  $c$ . Dla czystego rozciągania w momencie uplastycznienia materiału mamy  $\sigma_1 = \sigma_{pl}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Z (8.15) otrzymujemy wówczas

$$(8.17) \quad c = \sqrt{2} \sigma_{pl}.$$

Oznacza to, że warunkiem uplastycznienia, zgodnie ze wzorem (8.16), jest osiągnięcie przez naprężenia ścinające ośmiościenne, tzn. przez tzw. intensywność naprężeń ścinających, wartości krańcowej

$$\tau_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{pl}.$$

Ponieważ wykazaliśmy poprzednio, (3.10), że

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n,$$

więc warunek uplastycznienia materiału, w uzależnieniu od intensywności naprężeń, przyjmuje następującą postać:

$$\sigma_i = \sigma_{pl}.$$

Powyższy warunek można również wyprowadzić w nieco odmienny sposób.



Jak wiadomo, energia odkształcenia postaci [por. także wzór (8.15)] jest równa

$$\partial_f = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Dla prostego rozciągania otrzymujemy

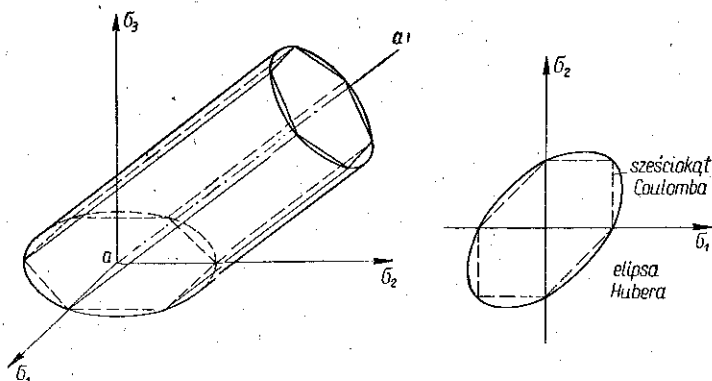
$$\partial_{f\text{ rozcz}} = 2 \frac{1+\nu}{6E} \sigma_{\text{rozcz}}^2,$$

wobec czego wprowadzając pojęcie  $\sigma_{\text{zred}}$ , tzn. «sprowadzając» złożony stan naprężenia do prostego rozciągania, mamy

$$\partial_f = 2 \frac{1+\nu}{6E} \sigma_{\text{zred}}^2 = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Możemy zatem napisać [por. (3.9)]

$$\sigma_{\text{zred}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$



Rys. 20

Podobnie więc jak istnieje warunek uplastycznienia materiału przy prostym rozciąganiu,

$$\sigma_{\text{rozcz}} = \sigma_{pl},$$

tak też otrzymuje się warunek uplastycznienia w przypadku ogólnym

$$\sigma_{\text{zred}} = \sigma_{pl}.$$

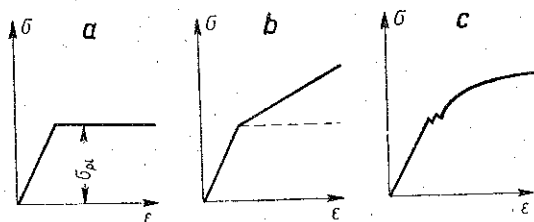
Warunek (8.15) określa tzw. wałek (kołowy) H u b e r a nachylony jednakowo względem osi współrzędnych, które obrano w kierunkach naprężeń głównych. Zarówno widok samego walca H u b e r a, jak i jego przecięcie z płaszczyzną współrzędnych  $\sigma_1, \sigma_2$  przedstawione zostały na rys. 20.

Z dokładniejszych rozważań wynika, że walec H u b e r a opisany jest na tzw. graniastosłupie C o u l o m b a. Stąd wniosek, że powierzchnie graniczne, przedstawione równaniem  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ , nie wykazują w ujęciu H u b e r a i C o u l o m b a znacznie większych od siebie odstępstw; obie zatem hipotezy, a więc hipoteza energetyczna i hipoteza największych naprężeń ścinających, są niemal równoważne. Doświadczenia (przeprowadzane głównie na rurach poddanych ciśnieniu wewnętrznemu; L o d e, N á d a i, R o ś i E i c h i n g e r, T a y l o r i Q u i n n e y, S c h m i d t i ostatnio w 1945 r. D a v i e s) wykazały wyraźnie lepszą zgodność z wynikami pomiarów warunku H u b e r a niż innych hipotez.

Zatrzymajmy się więc ostatecznie na warunku plastyczności H u b e r a, który stwierdza, że uplastycznienie materiału następuje w chwili, gdy wyrażenie (3.9)

$$\sigma_i = \sigma_{zred} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

osiąga wartość równą  $\sigma_{pl}$  (tzn. równą granicy plastyczności określonej dla prostego rozciągania), i to niezależnie od tego, jaki (liniowy, płaski czy



Rys. 21

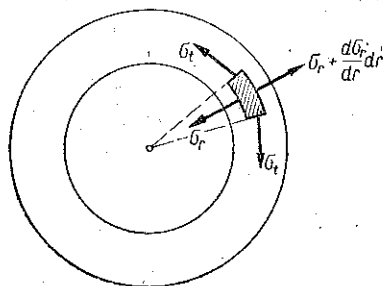
przestrzenny) stan naprężenia panuje w danym miejscu. Dla materiału idealnie plastycznego  $\sigma_{zred} = \sigma_i$  pozostaje stałe w całym okresie plastycznym. Na rys. 21a przedstawiony jest wykres  $(\sigma, \epsilon)$  dla ciała idealnie plastycznego, na rys. 21b dla

ciała plastycznego ze wzmocnieniem liniowym, a na rys. 21c dla materiału rzeczywistego (stali).

Obecnie, dla skonkretyzowania naszych dotychczasowych wywodów, pokażemy, jak rozwiązać stosunkowo proste (zresztą dość ważne) zadanie teorii plastyczności «w naprężeniach».

*Przykład.* Płaski pierścień z materiału plastycznego (rys. 22).

Założmy, że mamy pierścień poddany kołowo-symetrycznemu stanowi naprężenia. Niech odkształcenia w kierunku prostopadłym do płaszczyzny pierścienia nie natrafiają na opór (tzn. niech  $\sigma_z \equiv 0$ ).



Rys. 22

Jest z założenia

$$\sigma_r = \sigma_r(r) \quad \text{oraz} \quad \sigma_t = \sigma_t(r).$$

Wobec symetrii obciążenia i układu jest również  $\tau_{rt} = 0$ , zatem  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  są naprężeniami głównymi. Załóżmy, że odkształcenia są małe (robimy to w tym celu, aby równania równowagi elementu móc ułożyć dla elementu nieodkształconego). Z równowagi rzutów naprężeń na promień  $r$  otrzymujemy równanie, znane ogólnie z tzw. zagadnienia L a m é g o,

$$(8.18) \quad r \frac{d\sigma}{dr} = \sigma_t - \sigma_r.$$

Warunkiem idealnej plastyczności materiału (zauważmy, że chodzi o idealną plastyczność w każdym miejscu rozpatrywanej konstrukcji) jest

$$\sigma_{zred} = \sigma_{pl} = k,$$

gdzie  $k$  jest pewną stałą.

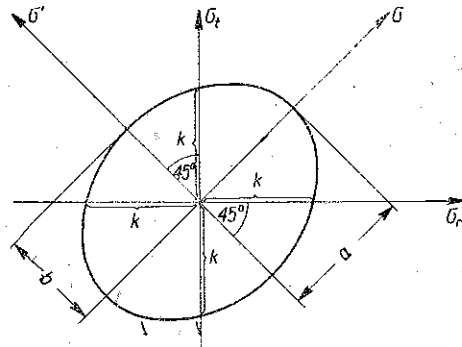
Stąd dla  $\sigma_3 = \sigma_z = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_r$  oraz  $\sigma_2 = \sigma_t$  otrzymujemy

$$(8.19) \quad \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 = k^2.$$

Jak wynika z równań (8.18) i (8.19), zadanie można rozwiązać na podstawie tych równań bez rozważania odkształceń (oczywiście, tutaj — tylko trwałych odkształceń).

Równanie (8.19) przedstawia elipsę plastyczności H u b e r a. Wprowadzimy nowe zmienne. W tym celu obróćmy współrzędne  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  o kąt  $45^\circ$ ; przyjmą one wówczas położenia odpowiednio  $\sigma$  i  $\sigma'$  i pokryją się z osiami elipsy (rys. 23).

Można dowieść, że półosie tej elipsy są równe odpowiednio



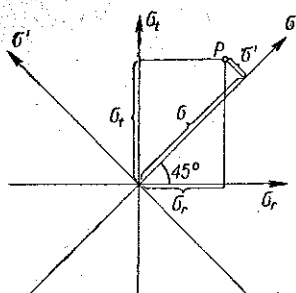
Rys. 23

$$(8.20) \quad a = \sqrt{2} k \quad \text{i} \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}} k,$$

a więc równanie kanoniczne elipsy w postaci parametrycznej jest

$$(8.21) \quad \begin{cases} \sigma = a \sin \Theta = \sqrt{2} k \sin \Theta, \\ \sigma' = b \cos \Theta = \sqrt{\frac{2}{3}} k \cos \Theta. \end{cases}$$

W wyniku dokonanego obrotu otrzymujemy (rys. 24)



Rys. 24

$$\sigma = (\sigma_r + \sigma_t) \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sigma' = (\sigma_t - \sigma_r) \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stąd

$$(8.22) \quad \begin{cases} \sigma_r + \sigma_t = 2k \sin \Theta, \\ \sigma_t - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} k \cos \Theta, \end{cases}$$

i po wykonaniu przekształceń

$$(8.23) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{2k}{\sqrt{3}} \sin \left( \Theta - \frac{\pi}{6} \right), \\ \sigma_t = \frac{2k}{\sqrt{3}} \sin \left( \Theta + \frac{\pi}{6} \right). \end{cases}$$

Napężenia  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  określone związkami (8.23) spełniają, oczywiście, warunek (8.19)<sup>3)</sup>.

Pozostała więc tylko jedna zmiana zależna, mianowicie kąt  $\Theta = \Theta(r)$ , [jest, naturalnie,  $\Theta = \Theta(r)$ , gdyż, jako kąt pomocniczy w układzie współrzędnych  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  w danym miejscu, zmienia się on w zależności od zmiany  $r$ ]. Podstawiamy (8.23) do (8.18) i otrzymujemy równanie dla  $\Theta(r)$ :

$$(8.24) \quad r \frac{d}{dr} \left[ \sin \left( \Theta - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \cos \Theta.$$

<sup>3)</sup> Sprawdźmy to twierdzenie:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 &= \frac{4}{3} k^2 \sin^2 \left( \Theta - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{4}{3} k^2 \sin \left( \Theta - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \Theta + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{4}{3} k^2 \sin^2 \left( \Theta + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{2}{3} k^2 \left[ 1 - \cos \left( 2\Theta - \frac{\pi}{3} \right) - \left( \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\Theta \right) + 1 - \cos \left( 2\Theta + \frac{\pi}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{3} k^2 \left( 2 - \cos 2\Theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\Theta \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2\Theta - \cos 2\Theta \cos \frac{\pi}{2} + \sin 2\Theta \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= \frac{2}{3} k^2 \left( 2 - 2 \cos 2\Theta \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cos 2\Theta \right) = k^2, \quad \text{c. b. d. d.} \end{aligned}$$

Całką tego równania jest

$$(8.25) \quad \frac{C^2}{r^2} = e^{-\sqrt{3}\theta} \cos \theta,$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania.

Widzimy, że w przeciwieństwie do stosunków zachodzących w teorii sprężystości warunek brzegowy może tutaj być tylko jeden (odpowiednie równanie różniczkowe jest pierwszego rzędu); np. może być dane albo ciśnienie wewnętrzne, albo ciśnienie zewnętrzne itp. Zadanie jest więc w swej istocie rozwiązane. Szczegółową dyskusję uzyskanych wyników pominiemy na tym miejscu jako mało istotną.

#### W Y K Ł A D I V

Zanim przejdziemy do ogólnego rozpatrzenia teorii plastyczności, zapoznamy się krótko z nową pracą W. W. Nowożyłowa, [10]. Praca ta rzuca ciekawe światło na poprzednie nasze wywody, wykazując wyraźnie, że teoria plastyczności znajduje się jeszcze wciąż *in statu nascendi*. Z drugiej strony na podstawie pracy Nowożyłowa możemy stwierdzić, że skromne wiadomości, które posiadaliśmy z poprzednich wykładów, umożliwiają już rozumienie prac oryginalnych.

Nowożyłow zastanawia się nad fizycznym sensem intensywności naprężeń stycznych  $\tau_n = k \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ , gdzie  $k = 1/3$ . Twierdzi on, że o ile sens fizyczny niezmiennika  $\sigma_{sr} = 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  jako średniego naprężenia normalnego jest wyraźny, to interpretacja Roşa i Eichingera  $\tau_n$  jako naprężenia stycznego ośmiościennego jest wątpliwa. Nie wiadomo bowiem, dlaczego właśnie temu naprężeniu ma być nadane tak wielkie znaczenie w teorii plastyczności (można tutaj osłabić ten zarzut przypominając, że na ścianach ośmiościanu naprężenia normalne odpowiadają stanowi ciśnienia hydrostatycznego, a więc pozostają bez wpływu na zjawiska plastyczne). Również interpretacja energetyczna  $\tau_n$  jako wielkości związanej z pracą odkształcenia postaciowego jest wątpliwa, gdyż praca ta zostaje obliczona tylko dla ciała izotropowego i podlegającego prawu Hooke'a;  $\tau_n$  staje się zatem jak gdyby funkcją cech ośrodka, a nie czystą charakterystyką stanu naprężenia. Jakież będzie wobec tego sens  $\tau_n$ , gdy materiał jest anizotropowy i nie podlega prawu Hooke'a?

Aby usunąć te trudności pojęciowe, Nowożyłow rozumuje w sposób następujący.

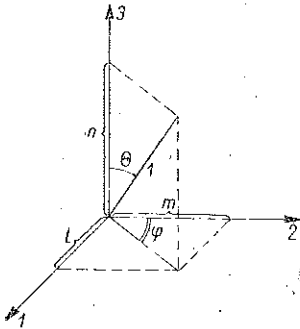
Weźmy pod uwagę naprężenia ścinające na elemencie  $dF$  powierzchni ograniczającej małą objętość w okolicy danego punktu. Na elemencie tym panuje naprężenie ścinające, przedstawione poprzednio wzorem (4.3).

$$\tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2,$$

gdzie  $l$ ,  $m$  i  $n$  są to cosinusy kierunkowe normalnej do powierzchni w układzie odniesienia, którego osie są równoległe do kierunków naprężeń głównych. Obliczmy średnie naprężenie styczne  $\tau_{sr}$  określone w sposób następujący:

$$\tau_{sr} = \lim_{F \rightarrow 0} \left( \frac{1}{F} \int_F \tau^2 dF \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Graniczna wartość zależy tu od kształtu powierzchni i od jej orientacji względem naprężeń głównych; np. dla sześcianu głównego (na którego ścianach  $\tau = 0$ ) jest  $\tau_{sr} = 0$ . Przyczyna takiego wyniku tkwi w tym, że ściany sześcianu wiążą się jedynie z sześcioma różnymi zwrotami normalnej. «Wobec tego, cytujemy słowa autora, nie będzie właściwy również inny kształt elementu objętościowego poza kulą, gdyż tylko na kuli — wobec jej pełnej symetrii — przedstawione są w równej mierze wszystkie bez wyjątku kierunki pól elementarnych». Przenosząc środek kuli do danego punktu i używając współrzędnych kulistych (rys. 25) otrzymujemy:



Rys. 25

$$l = \sin \theta \sin \varphi,$$

$$m = \sin \theta \cos \varphi,$$

$$n = \cos \theta,$$

$$dF = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta,$$

$$F = 4\pi r^2.$$

Wobec tego po scałkowaniu mamy

$$\tau_{sr} = \frac{1}{\sqrt{15}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

skąd  $k = 1/\sqrt{15}$ .

Wynika stąd, że  $\tau_n$  i  $\tau_{sr}$  różnią się od siebie tylko czynnikiem stałym. Podobnie jak  $\sigma_{sr}$  jest naprężeniem normalnym średnim, również  $\tau_n$  można (przy  $k = 1/\sqrt{15}$ ) interpretować jako średnie naprężenie styczne.

Zrozumiałą rzeczą jest z tego punktu widzenia różnica pomiędzy założeniem C o u l o m b a (uplastycznienie materiału warunkuje naprężenie  $\tau_{max}$  pojawiające się w danym miejscu) i założeniem H u b e r a - M i s e s a - H e n c k y (uplastycznienie warunkuje wielkość średniego naprężenia ścinającego). Takie ujęcie podaje również ten sam warunek plastyczności dla ciał anizotropowych i dla ciał nie podlegających prawu H o o k e ' a .

Z drugiej atoli strony nie wydaje się rzeczą możliwą, aby kryterium plastyczności mogło być zależne tylko od stanu naprężenia, a nie od rodzaju materiału. Pogląd taki narzuca się zwłaszcza przy rozważaniu materiału niejednorodnego. Dla przykładu przeprowadźmy odpowiednie obliczenie dla ośrodka, w którym moduł Y o u n g a jest funkcją miejsca,  $E = E(x, y, z)$ . Energia jednostkowa czystego odkształcenia postaciowego jest, jak już mówiliśmy poprzednio (str. 101), równa

$$(8.26) \quad \mathcal{D}_f = \frac{1 + \nu}{6 E(x, y, z)} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Dla czystego rozciągania pręta jednorodnego o module Y o u n g a  $E_0$  otrzymujemy

$$(8.27) \quad \mathcal{D}_f^{rozc} = \frac{1 + \nu}{6 E_0} 2 \sigma_1^2 = \frac{1 + \nu}{3 E_0} \sigma_{red}^2$$

Do porównania wybraliśmy tutaj jednorodny pręt, aby uzyskać jak najprostsze kryterium porównawcze. Przyrównując (8.26) i (8.27) mamy

$$\frac{1 + \nu}{6 E(x, y, z)} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1 + \nu}{3 E_0} \sigma_{red}^2$$

skąd dla ciała niejednorodnego byłoby

$$\sigma_{red} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{E_0}{E(x, y, z)} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{E_0}{E(x, y, z)}} \sigma_i$$

gdzie  $\sigma_i$  jest to znane już dobrze  $\sigma_{zred}$  Hubera [por. wzory (3.9) i (3.10)]. Otrzymujemy tu jak gdyby pewną pozorną sprzeczność z hipotezą energetyczną Hubera;  $\sigma_{zred}$  Hubera zależy bowiem, jak widać (choć pozornie — po skróceniu wielkości  $E$  — nie zależy) od modułu  $E$  (tj. od rodzaju materiału), podczas gdy według interpretacji Roša i Eichingera tej wielkości jako naprężenia ośmiościennego  $\sigma_{zred}$  zależałoby tylko od stanu naprężenia.

Przejdźmy obecnie do krótkiego przedstawienia podstawowych pojęć teorii plastyczności. Jak się z tego przedstawienia okaże, z teorią tą zapoznaliśmy się już w dużej mierze w poprzednich naszych rozważaniach.

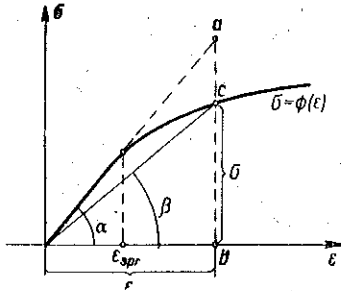
## § 9. Teoria plastyczności

Przyjmijmy, że dla danego materiału jest znany doświadczalny wykres rozciągania (rys. 26).

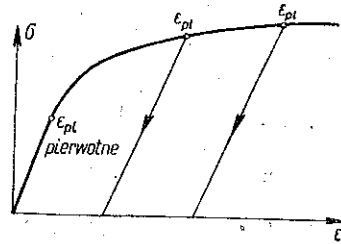
Dopóki wydłużenie jednostkowe  $\varepsilon < \varepsilon_{spr}$  ( $\varepsilon_{spr}$  oznacza tutaj graniczne wydłużenie sprężyste), to związek pomiędzy  $\sigma$  i  $\varepsilon$  jest na ogół liniowy (czyli zgodny z prawem Hooke'a):

$$(9.1) \quad \sigma = E \varepsilon.$$

Dla  $\varepsilon > \varepsilon_{spr}$  związek między naprężeniem i odkształceniem jest na ogół nieliniowy i oczywiście nieodwracalny (w tym sensie, że powrót do stanu bez naprężeń zachodzi według innego prawa niż proces pierwot-



Rys. 26



Rys. 27

nego obciążenia, por. rys. 27 i 28a). Zależy on praktycznie tylko od właściwości materiału, a nie od kształtu próbki, przynajmniej dla elementów o niezbyt małych wymiarach. Jest zatem

$$(9.2) \quad \sigma = \Phi(\varepsilon).$$

Dla uzyskania analogii do (9.1) zapiszmy ostatni związek w nieco innej formie, mianowicie

$$(9.3) \quad \sigma = E' \varepsilon,$$

gdzie  $E'$  jest pewną wielkością zmienną.

Z rysunku 27 widzimy, że

$$(9.4) \quad E' = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \Psi(\varepsilon),$$

co oznacza, że  $E'$  jest znaną funkcją odkształcenia, jeżeli znany jest wykres rozciągania.  $E'$  nazywamy sprowadzonym modułem sprężystości pierwszego rodzaju.

Zachodzi pytanie, w jakiej postaci należy zapisać związek między naprężeniami i odkształceniami, gdy rzecz nie dotyczy prostego rozcią-



gania, ale skomplikowanego, przestrzennego układu naprężeń, którego oddzielne składowe przekroczyły granicę sprężystości. Przypomnijmy, że w granicach sprężystości istniał dla takiego złożonego stanu zapis bardzo praktyczny z punktu widzenia swej zwartości [por. (68)],

$$(9.5) \quad \sigma_i = E \varepsilon_i \quad (\text{dla } \varepsilon_i < \varepsilon_{spr}),$$

zastępujący sześć związków w postaci L a m é g o (lub w innej formie).

Jak widać, wzór (9.5) odpowiada całkowicie znanemu związkowi (9.1) z tym tylko zastrzeżeniem, że wzór (9.1) dotyczy określonych składowych naprężeń i odkształcenia, a wzór (9.5) naprężeń i odkształceń «uogólnionych» (tzn. intensywności naprężeń). Powstaje zatem pytanie, czy w przypadku, gdy odkształcenia są niesprężyste i gdy panuje przestrzenny stan naprężeń, zachodzi również związek analogiczny do (9.5), tzn. czy

$$(9.6) \quad \sigma_i = E' \varepsilon_i \quad (\text{dla } \varepsilon_i > \varepsilon_{spr}).$$

Chcielibyśmy, rzecz jasna, by  $E'$  w tym związku było tożsame z  $E'$  ze związku (9.3), czyli pragnęlibyśmy, aby

$$(9.7) \quad E' = \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{było równe} \quad \frac{\Phi(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i}.$$

Doświadczenia wykazują, że taka właśnie równość zachodzi i że, istotnie,  $\Phi(\varepsilon_i)$  zależy w istocie swej tylko od rodzaju materiału, a nie od stanu naprężeń. Oznacza to, że funkcja  $\Phi(\varepsilon_i)$  ma tę samą postać, co  $\Phi(\varepsilon)$  przy prostym rozciąganiu. Stąd wynika ogromna waga pojęć intensywności naprężeń,  $\sigma_i$ , i intensywności odkształceń,  $\varepsilon_i$ ; wielkości te sprowadzają bowiem jakby stan przestrzenny naprężeń do stanu prostego rozciągania. Zauważmy poza tym, że prawo (9.6) obowiązuje niezależnie od tego, czy rozpatrywany obszar jest obszarem sprężystym, czy też niesprężystym.

Wobec pełnej analogii pomiędzy związkami (9.5) i (9.6) wszystkie zależności zachodzące w stanie sprężystym przenieść można na stan plastyczny, o ile wielkość  $E$  zastąpić wielkością  $E'$ . Muszą zatem istnieć związki podobne do poprzednio przez nas podanych dla sprężystej fazy odkształcenia:

$$(9.8) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = 2G'(\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}), & \tau_{xy} = G' \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = 2G'(\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}), & \tau_{yz} = G' \gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = 2G'(\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}), & \tau_{zx} = G' \gamma_{zx}. \end{cases}$$

Tutaj, jak poprzednio [por. (6.7.1)],

$$(9.8.1) \quad G' = \frac{E'}{2(1+\nu')},$$

gdzie  $G'$  oznacza sprowadzony moduł drugiego rodzaju, zaś  $\nu'$  rodzaj «współczynnika Poissona».

Ponieważ w obszarze plastycznym objętość materiału praktycznie można uważać za stałą, więc dla prostego rozciągania

$$\Theta = \varepsilon_x - 2\nu'\varepsilon_x = 0,$$

czyli

$$(9.9.1) \quad \nu' = \frac{1}{2},$$

a zatem

$$(9.9.2) \quad G' = \frac{E'}{3}.$$

(Przyjmuje się, że przy przechodzeniu do coraz to dalszych faz stanu plastycznego  $\nu' \rightarrow 1/2$ , poczynając od wartości odpowiadającej fazie sprężystej, np. dla stali od wartości  $\nu' = \nu = 0,3$ ).

Z (9.6) wynika, że

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},$$

a więc

$$(9.10) \quad G' = \frac{E'}{3} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$$

i dalej

$$(9.11) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}), & \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}), & \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}), & \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{zx}. \end{cases}$$

Tutaj intensywności, jak poprzednio, wyrażają się wzorami

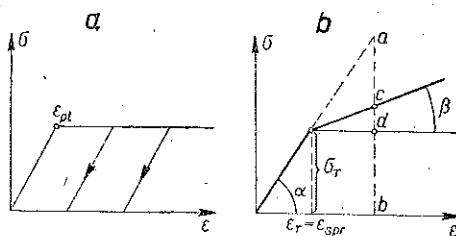
$$(9.12) \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)},$$

$$(9.13) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Rzeczywiste wykresy wytrzymałościowe wskazują na istnienie tzw. «wzmocnienia»<sup>4</sup> materiału (rys. 27). Oznacza to, że nowe granice plastyczności, po uprzednim uplastycznieniu materiału, stają się coraz wyższe (oczywiście, do pewnej granicy).

Jedynie dla uproszczenia zjawiska wprowadziliśmy poprzednio pojęcie materiału idealnie plastycznego (nie przejawiającego wzmocnienia).

W związku z tym dla uzyskania większej dokładności wyników rzeczywisty wykres wytrzymałościowy zastępuje się często dwoma liniami prostymi o różnych nachyleniach (rys. 28b).



Rys. 28

Dla najogólniejszego przypadku można wzór (9.6) przekształcić w ten sposób, aby (stały) współczynnik  $E$  wystąpił jako mnożnik. Z rysunku 26 odczytujemy wówczas, że

$$(9.14) \quad \sigma_i = \varepsilon_i \operatorname{tg} a - \overline{ac}.$$

Oczywiście,  $\overline{ac}$  jest funkcją  $\varepsilon_i$  i na ogół rośnie wraz z  $\varepsilon_i$ :

$$(9.15) \quad \overline{ac} = \varphi(\varepsilon_i).$$

Ponieważ  $\operatorname{tg} a = E$ , więc z (9.14) mamy

$$\sigma_i = E \varepsilon_i - \varphi(\varepsilon_i)$$

lub też

$$(9.16) \quad \sigma_i = E \varepsilon_i \left( 1 - \frac{\varphi(\varepsilon_i)}{E \varepsilon_i} \right) = E \varepsilon_i [1 - \omega(\varepsilon_i)],$$

gdzie

$$\omega(\varepsilon_i) = 0 \quad \text{dla} \quad \varepsilon < \varepsilon_{spr}$$

oraz

$$\omega(\varepsilon_i) = \frac{\varphi(\varepsilon_i)}{E \varepsilon_i} \quad \text{dla} \quad \varepsilon > \varepsilon_{spr}.$$

Porównując (9.16) z (9.6) otrzymujemy następujący wzór dla (zmiennego) modułu pierwszego rodzaju:

$$(9.17) \quad E' = E [1 - \omega(\varepsilon_i)].$$

<sup>4</sup> Jak słusznie zwrócił uwagę autora J. N a l e s z k i e w i c z, zamiast zapożyczonego z dawniejszej literatury terminu «wzmocnienie» (ros. *uprocznienie*, ang. *strain-hardening*, niem. *Verfestigung*) należałoby raczej używać właściwszego terminu «konsolidacja» (lub podobnego), wprowadzonego przez G. L a u r e n t a i wierniej oddającego treść fizykalną zjawiska.

W skróconym zapisie opuszcza się na ogół argument funkcji  $\omega$ .

Moduł sprowadzony drugiego rodzaju dla ciała nieściśliwego wyraża się wzorem następującym:

$$(9.18) \quad G' = G(1 - \omega).$$

Wzór ten uważać można za konsekwencję wzoru (9.17), jeżeli wykorzystać związki (6.7.1) i (9.8.1) i przyjąć  $\nu' = \nu^5$ .

Prawo (9.6) i jego rozwinięcie (9.8) uzyskaliśmy opierając się na analogii istniejącej pomiędzy stanem sprężystym i stanem plastycznym ciała. Obecnie postaramy się to prawo wyprowadzić z danych doświadczalnych. Przeprowadzone doświadczenia nad stanem plastycznym ciał pozwalają sformułować następujące wnioski w przypadku obciążenia prostego (obciążenie proste oznacza takie obciążenie, w którym wszystkie siły rosną proporcjonalnie wraz ze wzrostem pewnego parametru, np. czasu):

(1) kierunki głównych wydłużeń pokrywają się z kierunkami głównych naprężeń normalnych,

(2) gęstość (lub objętość) ciała nie zmienia się dostrzegalnie,

(3) wykres  $M$  o  $h$  r a dla odkształceń (we współrzędnych  $\gamma$  i  $\varepsilon$ ) jest zawsze geometrycznie podobny do wykresu  $M$  o  $h$  r a dla naprężeń (we współrzędnych  $\sigma$  i  $\tau$ ).

Wniosek drugi możemy zapisać następująco:

$$(9.19) \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$

a wniosek trzeci jako

$$(9.20) \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}.$$

(Analogiczne zależności — mowa o zależnościach (9.20) — poznaliśmy poprzednio dla stanu sprężystego, por. str. 90).

Na podstawie wzorów (9.19) i (9.20) mamy teraz

$$(9.21) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = c \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ \varepsilon_2 = c \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right], \\ \varepsilon_3 = c \left[ \sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right], \end{cases}$$

gdzie  $c$  jest pewną wielkością stałą.

Widzimy zatem, że przy ustalonym procesie płynięcia plastycznego zachodzą związki podobne do związków w stanie sprężystym ciała. Jedy-

<sup>5)</sup> Por. treść odsyłacza 7).

nie zamiast współczynnika  $E$  występuje stała  $1/c$ , a zamiast  $\nu$  liczba  $1/2$ . Przeprowadziwszy wszystkie poprzednie rozumowania otrzymamy w sposób czysto formalny związek

$$\sigma_i = \frac{1}{c} \varepsilon_i$$

lub, przyjmując

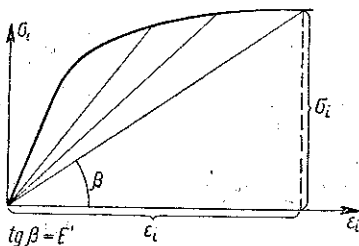
$$E' = \frac{1}{c},$$

również

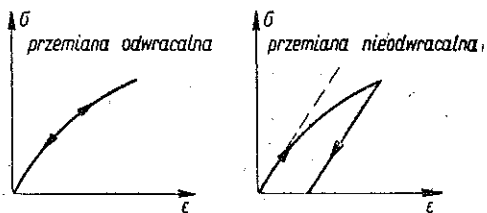
$$\sigma_i = E' \varepsilon_i.$$

Jest to właśnie prawo, które zamierzaliśmy wyprowadzić z danych uzyskanych doświadczalnie.

Powyższa zależność odkształcenia od naprężenia w fazie plastycznej ma postać podobną do postaci prawa obowiązującego w stanie sprężystym ciała. Należy jednak przypomnieć, że tutaj, tzn. w fazie plastycznej, współczynnik  $E'$  (moduł odkształcenia) ulega zmianie w zależności od wielkości odkształcenia i maleje tym bardziej, im dalej posuwamy się w fazie odkształcenia plastycznego (rys. 29).



Rys. 29



Rys. 30

Zauważmy, że dla ciała sprężystego (nawet nie podlegającego prawu Hooke'a) obowiązują te same prawa, zarówno w procesie obciążania, jak i w procesie odciążania; natomiast dla ciała plastycznego rzecz się ma inaczej: przemiany zachodzące w ciele plastycznym są bowiem w większości swej nieodwracalne (rys. 30).

Przy czystym rozciąganiu uważa się, że ciało ulega uplastycznieniu, gdy  $\sigma_{rozc} > \sigma_{spr} \approx \sigma_{pl}$ ;  $\sigma_{spr}$  oznacza tutaj graniczne naprężenie sprężyste. Dla złożonego stanu naprężenia, według energetycznej hipotezy H u b e r a, ciało przechodzi w stan plastyczny, gdy  $\sigma_i > \sigma_{pl}$ . Przy opisie zachodzących zjawisk trzeba jednak jeszcze uwzględnić naszą poprzednią uwagę o nieodwracalności przemian w okresie plastycznym. W tym celu posłużymy się pojęciami wprowadzonymi przez Iljuszina,

mianowicie pojęciami odkształcenia aktywnego (czynnego) i odkształcenia biernego.

Odształcenie czynne ma miejsce wtedy, gdy intensywność naprężeń jest funkcją nie malejącą procesu obciążenia, tzn. taką<sup>6)</sup>, dla której  $(\sigma_i)_{nast} \geq (\sigma_i)_{poprz}$ . Natomiast podczas odkształcenia biernego jest  $(\sigma_i)_{nast} < (\sigma_i)_{poprz}$ .

Zauważmy, że wszystko, o czym mówiliśmy dotychczas, nie dotyczyło jawnie odwracalności lub nieodwracalności przemian. K a c z a n o w przeprowadzając termodynamiczną analizę procesu czynnego odkształcenia plastycznego udowodnił, że w przypadku takiego odkształcenia wszystkie wielkości i związki dla stanu plastycznego (tzn. naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia oraz związki pomiędzy tymi wielkościami) nie powinny się niczym różnić od odpowiednich wielkości i związków dla ciała sprężystego nieliniowego, z identycznym wykresem przy rozciąganiu. Tylko podczas odkształcenia biernego (odciążenia) ciało nieliniowo sprężyste różni się od ciała plastycznego. W przypadku odkształcenia czynnego nieodwracalność procesu staje się jak gdyby niewyczuwalna. Wszystko zatem, o czym mówiliśmy dotychczas, dotyczy zarówno ciała nieliniowo sprężystego, jak i ciała plastycznego (oczywiście, w fazie czynnego odkształcenia).

## W Y K Ł A D V

### § 10. Twierdzenia Iljuszina

W ciągu ostatniego ćwierćwiecza powstało wiele teorii plastyczności, ale znaczna ich liczba uległa obaleniu przez coraz to nowe doświadczenia. Do wyjaśnienia sytuacji przyczynił się w znacznej mierze Iljuszina. Udowodnił on, że dla czynnego odkształcenia powstającego przy prostym obciążeniu znane teorie plastyczności są przypadkami szczególnymi jednej, ogólnej teorii (którą tu właśnie przedstawiliśmy), zgodnej z doświadczeniem, o ile ograniczymy się do małych sprężystych i plastycznych (sprężysto-plastycznych) odkształceń. Należy jednak w tym celu pominąć wpływ czasu (czyli pominąć takie zjawiska, jak np. pełzanie, relaksacja itp.), a przemiany zachodzące uważać za nieodwracalne, lecz przebiegające poprzez kolejne stany równowagi. Jest to tzw. twierdzenie I l j u s z i n a o *prostym obciążeniu*. Przy prostym obciążeniu odkształcenie jest wszędzie czynne — nawet wówczas, gdy stan naprężenia nie jest jednorodny — a  $\sigma_i$  wszędzie różnie. To właśnie pozwala na stosowanie poprzednio poznanych praw, które obowiązują tylko w przypadku czynnych odkształceń.

<sup>6)</sup> Wskaźniki przy symbolu  $\sigma_i$  oznaczają stan poprzedzający i następujący w procesie obciążenia.

Prawo dotyczące odciążania (dla odkształcenia biernego) uzyskano na podstawie doświadczeń. Wyniki badań eksperymentalnych przedstawia wykres na rys. 31.

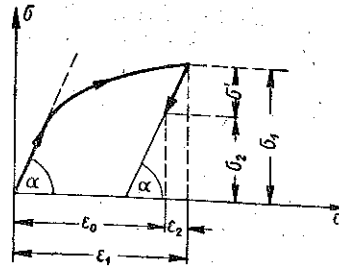
Ciało poddano najpierw obciążeniu  $\sigma_1$  przy czym

$$\sigma_1 > \sigma_{pl}.$$

Następnie obciążenie zmniejszono do wartości  $\sigma_2$ :

$$\sigma_2 < \sigma_1.$$

Z wykresu widzimy, że pozostałe jeszcze odkształcenie wynosi



Rys. 31

$$\epsilon_0 = \epsilon_1 - \epsilon_2,$$

gdzie

$$(10.1) \quad \epsilon_2 = E_*(\sigma_1 - \sigma_2) = E \sigma';$$

$\epsilon_2$  jest to sprężysta część odkształcenia całkowitego.

Wynika stąd, że dla znalezienia elasto-plastycznego odkształcenia, pozostałego po odciążeniu, trzeba od całego odkształcenia  $\epsilon_1$  odjąć jego część sprężystą  $\epsilon_2$ .

Rozumowanie to, oczywiście dla prostego rozciągania, daje się zastosować również do stanu naprężenia przestrzennego i niejednorodnego, jeżeli odciążenie jest proste; tzn. jeżeli w stanie biernego odkształcenia siły zmieniają się proporcjonalnie do pewnego parametru. Jest to twierdzenie I I j u s z i n a o odciążeniu.

Prawa dotyczące małych odkształceń sprężysto-plastycznych można wypowiedzieć jeszcze w nieco inny sposób. Podkreślamy jednak, że w podanym sformułowaniu nie są one od siebie niezależne (ale, oczywiście, są niespreczne).

(I) Prawo zmiany objętości:

$$(10.2) \quad \sigma_{sr} = \frac{E}{1 - 2\nu} \epsilon_{sr}.$$

W tym wzorze  $\nu$  oznacza liczbę Poissona<sup>7)</sup>, a  $E$  moduł Younga.

<sup>7)</sup> Oczywiście, ponieważ odkształcenie powstałe przy czystej zmianie objętości — według prawa (10.2) — jest całkowicie sprężyste, to wartość liczby Poissona wypada tutaj przyjąć równą jej wartości w fazie sprężystej. Powstaje zatem odmiennosc w stosunku do założenia (9.9.1). Zwróćmy jeszcze uwagę, że jeżeli dodać stronami równości (9.21) przyjmując  $\epsilon = 1/E'$  i  $\nu' = 1/2$  — to otrzymamy  $\sigma_{sr} = (E'/1 - 2\nu') \epsilon_{sr}$ , wobec czego na podstawie (10.2) jest  $E'/1 - 2\nu' = E/1 - 2\nu$ . Pewne uwagi na temat wewnętrznej zgodności założeń teorii plastyczności znaleźć można np. w [9]. Na tym miejscu zagadnienia tego, jako dotyczącego formalnej strony teorii plastyczności, nie będziemy bliżej omawiali.

Prawo to jest ważne dla odkształceń czynnych i biernych przed i poza granicą sprężystości.

(II) Prawo zmiany postaci przy odkształceniu czynnym:

$$(10.3) \quad D_o = 2 G' D_e.$$

Prawo to w innym zapisie wyrażają wzory (9.8) i (9.11);  $G'$  oznacza tutaj, jak zwykle, sprowadzony moduł odkształcenia drugiego rodzaju, zależny od wielkości intensywności odkształceń w danym miejscu [por. wzór (9.18)].

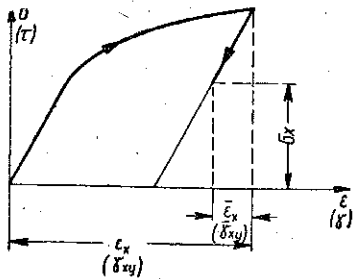
(III) Prawo zależności zachodzącej pomiędzy  $\sigma_i$  oraz  $\varepsilon_i$  dla aktywnego odkształcenia sprężysto-plastycznego.

Według tego prawa intensywność naprężeń  $\sigma_i$  w danym punkcie jest określoną funkcją intensywności odkształceń  $\varepsilon_i$  w tym punkcie, niezależnie od rodzaju stanu odkształcenia i od drogi, na jakiej dany stan odkształcenia osiągnięto. Jest zatem

$$(10.4) \quad \sigma_i = \Phi(\varepsilon_i).$$

Postać funkcji  $\Phi(\varepsilon_i)$  zależy wyłącznie od materiału ciała. Postać tę określamy doświadczalnie, przy czym na mocy poznanej właśnie prawa wystarczy przeprowadzić próbę rozciągania.

(IV) Prawo odkształcenia biernego.



Rys. 32

Według tego prawa przy prostym (całkowitym lub częściowym) odciążeniu w założeniu liniowej zależności odkształceń od naprężeń (rys. 32), zachodzi następująca zależność:

$$(10.5) \quad D_o = 2 G' D_e - 2 G D_e,$$

gdzie  $\bar{D}_e$  jest tzw. sprężystym dewiatorem odkształcenia odpowiadającym naprężeniu  $(\sigma_1 - \sigma_2)$ .

Biorąc pod uwagę składowe odpowiednich wielkości w kierunku osi współrzędnych otrzymamy zamiast (10.5)

$$(10.6) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}) - 2 G (\bar{\varepsilon}_x - \bar{\varepsilon}_{sr}), \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}) - 2 G (\bar{\varepsilon}_y - \bar{\varepsilon}_{sr}), \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}) - 2 G (\bar{\varepsilon}_z - \bar{\varepsilon}_{sr}), \\ \tau_{xy} = G' \gamma_{xy} - G \bar{\gamma}_{xy}, \\ \tau_{yz} = G' \gamma_{yz} - G \bar{\gamma}_{yz}, \\ \tau_{zx} = G' \gamma_{zx} - G \bar{\gamma}_{zx}. \end{cases}$$



## § 11. Podstawowe równania mechaniki ciał sprężysto-plastycznych

Obecnie możemy już dokonać syntezy naszych wiadomości i przedstawić matematyczny aparat teorii plastyczności. W skład jego wchodzi:

(1) Trzy równania równowagi N a v i e r a (bez uwzględnienia sił masowych)

$$(11.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

(2) Sześć związków C a u c h y' e g o pomiędzy składowymi odkształcenia i przemieszczenia

$$(11.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{cases}$$

(3) Sześć związków fizycznych między naprężeniami i odkształceniami, np. w postaci (9.11),

$$(11.3) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = \frac{2 \sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}), & \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3 \varepsilon_i} \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = \frac{2 \sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}), & \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3 \varepsilon_i} \gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = \frac{2 \sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}), & \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3 \varepsilon_i} \gamma_{zx}, \end{cases}$$

(4) Wyrażenia dla intensywności naprężeń (9.12) i dla intensywności odkształceń (9.13) oraz związek pomiędzy nimi:

$$(11.4) \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)},$$

$$(11.5) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)},$$

$$(11.6) \quad \sigma_i = E' \varepsilon_i.$$

Mamy zatem ogółem  $3+6+6+3=18$  równań oraz tyleż niewiadomych (6 składowych naprężenia, 6 składowych odkształcenia, 3 składowe przemieszczenia oraz  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  i  $E'$ ). Rozwiązania zadań teorii plastyczności muszą spełniać 18 wyżej podanych równań oraz odpowiednie warunki brzegowe, np. dla składowych sił zewnętrznych znane równania typu

$$(17.7) \quad \begin{cases} p_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_y = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_z = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{cases}$$

lub też odpowiednie warunki dla przemieszczeń.

Jeżeli rozpatrujemy sprężysto-plastyczny stan równowagi i nie interesują nas przemieszczenia, to zamiast sześciu związków Cauchy'ego można przyjąć jedną grupę równań nierozdzielności Saint-Venant'a (np. związki między składowymi odkształcenia w jednej płaszczyźnie):

$$(11.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{cases}$$

Dysponujemy zatem ostatecznie w tym przypadku

- (a) trzema równaniami statyki, (11.1);
- (b) trzema równaniami nierozdzielności, (11.8);
- (c) sześcioma związkami, (11.3), pomiędzy naprężeniami i odkształceniami; związki te według (9.8) można zapisać również w postaci następującej:

$$(11.9) \quad \begin{cases} \sigma_x - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}), & \tau_{xy} = G' \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}), & \tau_{yz} = G' \gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma_{sr} = 2 G' (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}), & \tau_{zx} = G' \gamma_{zx}; \end{cases}$$

- (d) jednym równaniem, (11.5), dla  $\varepsilon_i$ ;
- (e) jednym związkiem przedstawiającym  $G'$  w zależności od  $\varepsilon_i$  (9.18)

$$G' = G [1 - \omega(\varepsilon_i)].$$

Razem otrzymujemy więc 14 równań i tyleż niewiadomych (12 składowych stanu naprężenia i odkształcenia,  $\varepsilon_i$  oraz  $G'$ ), czyli z punktu

widzenia formalno-matematycznego zadanie jest rozwiązane. Efektywne jednak rozwiązanie tak ogólnie postawionego zadania jest niemożliwe, między innymi również ze względu na nieliniowość równań (występują w nich tego rodzaju iloczyny, jak np.  $G'\varepsilon_x$  itp.). W związku z tym znane są dotychczas efektywne rozwiązania jedynie niewielkiej liczby prostych zadań.

## W Y K Ł A D VI

### § 12. Zadanie Lamégo

(rura grubościenna poddana ciśnieniu wewnętrznemu i zewnętrznemu)

Zbliżone zadanie rozważaliśmy w § 8. Wówczas mieliśmy na uwadze dysk w płaskim stanie naprężenia (co matematycznie wyrażało się założeniem  $\sigma_z = 0$ ) z materiału całkowicie uplastycznionego. Obecnie założymy, że stan odkształcenia jest płaski (rura nieskończenie długa), czyli że  $\varepsilon_z = 0$ . Równanie równowagi przybiera znaną postać

$$(12.1) \quad \sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0.$$

Skorzystajmy teraz z równań (9.21) pamiętając, że

$$\frac{1}{c} = E'.$$

Mamy

$$(12.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_t = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_t - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_r) \right], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_t) \right] = 0. \end{cases}$$

Z ostatniego z równań (12.2) otrzymujemy w danym razie

$$(12.3) \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_t).$$

Warunkiem plastyczności H u b e r a jest

$$(12.4) \quad \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} = \sigma_{pl} = k.$$

Po podniesieniu obu stron (12.4) do kwadratu i uwzględnieniu związku (12.3) otrzymujemy

$$2k^2 = (\sigma_r - \sigma_t)^2 + \left(\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2}\right)^2 = \sigma_r^2 - 2\sigma_r\sigma_t + \sigma_t^2 + \\ + 2\left(\frac{\sigma_t^2}{4} - \frac{\sigma_r\sigma_t}{2} + \frac{\sigma_r^2}{4}\right) = \sigma_r^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \sigma_t^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 3\sigma_r\sigma_t = \frac{3}{2}(\sigma_t - \sigma_r)^2.$$

Ostatecznie więc jest

$$(12.4.1) \quad \sigma_t - \sigma_r = + \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Założyliśmy tutaj, że ciśnienie wewnętrzne  $p_a$  jest znacznie większe od ciśnienia zewnętrznego  $p_b$ , tzn. że  $p_a \gg p_b$ , i że wobec tego  $\sigma_t > 0$ , czyli  $\sigma_t$  jest naprężeniem rozciągającym; natomiast  $\sigma_r$  jest ujemne, gdyż ścianki rury poddane są ciśnieniu.

Po podstawieniu (12.4.1) do (12.1) otrzymujemy kolejno

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2k}{\sqrt{3}}, \\ (12.5) \quad \sigma_r = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln r + C.$$

Niech dla  $r = b$  będzie  $\sigma_r = -p_b$ . Stąd mamy

$$-p_b = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln b + C$$

i wobec tego

$$(12.6) \quad C = -p_b - \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln b.$$

Zatem

$$(12.7) \quad \sigma_r = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b} - p_b.$$

Założmy, że dla  $r = a$  jest  $\sigma_r = -p_a$ ; otrzymamy stąd następujący związek pomiędzy ciśnieniami  $p_a$  i  $p_b$  (równanie różniczkowe dla określenia  $\sigma_r$  było równaniem pierwszego rzędu, a więc dysponujemy tylko jedną stałą całkowania):

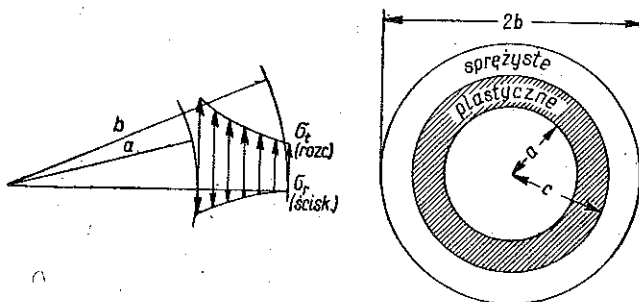
$$(12.8) \quad p_a - p_b = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

Wzór (12.8) przedstawia warunek plastyczności. Aby każde miejsce rury przeszło w stan plastyczny (idealny), trzeba, by ciśnienie wewnętrzne przewyższało ciśnienie zewnętrzne o wartość wyrażoną wzorem (12.8).

Gdy  $p_b = 0$ , to graniczna plastyczna nośność rury odpowiada ciśnieniu

$$(12.9) \quad p_a^{max} = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

Gdy ciśnienie przekroczy tę wartość, to dla materiału nie podlegającego wzmocnieniu opór plastyczny rury nie będzie wzrastał; rura zacznie się wobec tego gwałtownie odkształcać (płynąć) i w rezultacie pęknie.



Rys. 33

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy ciśnienie wewnętrzne w rurze jest mniejsze od ciśnienia odpowiadającego nośności plastycznej,  $p_a^{max}$ , ale większe od granicy nośności sprężystej. Wówczas w rurze powstają dwie strefy: wewnętrzna—plastyczna i zewnętrzna—sprężysta. Wynika to z rozkładu naprężeń powstających w rurze jeszcze w jej stanie sprężystym.

Na rysunku 33 z lewej strony podano wykresy odpowiednich naprężeń, gdy cały materiał rury znajduje się w stadium sprężystym; przyjęto tutaj, że  $p_b = 0$  ( $p_b$  jest bowiem częstokroć małe).

Ponieważ zwykle  $\sigma_t \gg \sigma_r$ , to można przyjąć, że wartość różnicy  $\sigma_t - \sigma_r$ , miarodajna dla uplastycznienia materiału [por. (12.4.1)], jest największa tam, gdzie  $\sigma_t$  jest największe, czyli na wewnętrznej powierzchni rury. Moment pojawienia się odkształceń plastycznych we wnętrzu rury jest jednak na ogół daleki od momentu pełnego wyczerpania nośności rury. To ostatnie następuje dopiero wówczas, gdy strefa plastyczna dojdzie do powierzchni zewnętrznej. Rozpatrzmy pewną fazę pośrednią (rys. 33 i 34), tzn. taką fazę, w której pierścień plastyczny o promieniu zewnętrznym  $c$  jest otoczony pierścieniem sprężystym o tym samym wewnętrznym promieniu (przy czym  $a < b < c$ ).

Niech oba te pierścienie oddziałują na siebie za pomocą ciśnień  $q$ . Wobec tego dla strefy plastycznej, dla której powinien być spełniony warunek plastyczności (12.8), mamy

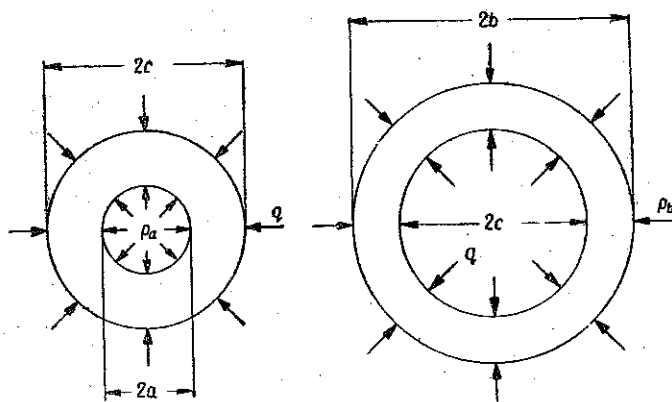
$$(12.10) \quad p_a - q = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{c}{a}.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\beta_{pl} = \frac{c}{a}.$$

Wówczas

$$(12.11) \quad p_a - q = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \beta_{pl}.$$



Rys. 34

Dla strefy sprężystej stanem granicznym jest osiągnięcie granicy sprężystości, co następuje wówczas (oczywiście, najpierw na konturze wewnętrznej pierścienia sprężystego), gdy naprężenie przekroczy granicę sprężystości  $\sigma_{spr}$ . Jako warunek graniczny (12.4) mamy zatem

$$\sigma_t = \sigma_{spr} \approx \sigma_{pl} = k$$

lub to samo w postaci (12.4.1)

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Rozwiązanie zadania L a m é g o w teorii sprężystości ma, jak to można łatwo stwierdzić, następującą postać:

$$(12.12) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{q c^2 - p_b b^2}{b^2 - c^2} - \frac{(q - p_b) b^2 c^2}{r^2 (b^2 - c^2)}, \\ \sigma_t = \frac{q c^2 - p_b b^2}{b^2 - c^2} + \frac{(q - p_b) b^2 c^2}{r^2 (b^2 - c^2)}; \end{cases}$$

stąd

$$(12.13) \quad \sigma_t - \sigma_r = \frac{2(q - p_b)b^2 c^2}{r^2(b^2 - c^2)}$$

W miejscu  $r = c$  (tzn. na granicy pierścienia sprężystego i plastycznego) ma nastąpić uplastycznienie materiału; wobec tego biorąc pod uwagę związki (12.4.1) i (12.13) otrzymujemy

$$(12.14) \quad \frac{2(q - p_b)b^2 c^2}{c^2(b^2 - c^2)} = \frac{2k}{\sqrt{3}}$$

Stąd

$$(12.15) \quad q - p_b = \frac{k}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - c^2}{b^2}$$

lub, przyjmując oznaczenie

$$\beta_{spr} = \frac{b}{c},$$

również

$$(12.16) \quad q - p_b = \frac{k}{\sqrt{3}} \frac{\beta_{spr}^2 - 1}{\beta_{spr}^2}$$

Dodając stronami równości (12.16) i (12.11) otrzymujemy następujący związek pomiędzy  $p_a$  i  $p_b$ :

$$(12.17) \quad p_a - p_b = \frac{2k}{\sqrt{3}} \left[ \ln \beta_{pl} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_{spr}^2} \right]$$

(1) Gdy  $c = b$  (tzn. gdy cały przekrój rury jest w stanie plastycznym), to

$$\beta_{pl} = \frac{b}{a} \quad \text{i} \quad \beta_{spr} = 1;$$

wówczas mamy

$$(12.18) \quad p_a - p_b = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}$$

Warunek ten jest identyczny<sup>DSZ</sup> z poznanym już poprzednio warunkiem (12.8).

(2) Gdy  $c = a$  (początek procesu uplastycznienia na wewnętrznej powierzchni rury), to  $\beta_{pl} = 1$  oraz  $\beta_{spr} = b/a$ ; wówczas jest

$$(12.19) \quad p_a - p_b = \frac{k}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

Załóżmy, że ciśnienie zewnętrzne  $p_b = 0$ . W tym przypadku początek uplastycznienia materiału następuje w chwili, gdy ciśnienie wewnętrzne osiąga wartość

$$(12.20) \quad (p_a)_{pocz. pl} = \frac{k}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2},$$

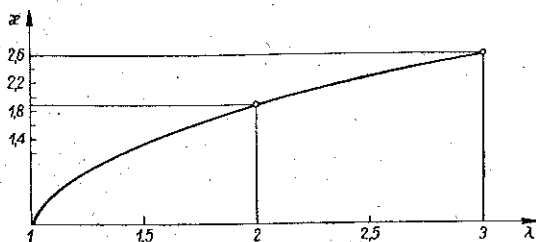
co wynika ze wzoru (12.19).

Cały przekrój przechodzi w stan plastyczny wówczas, gdy [na podstawie związku (12.18)] jest

$$(12.21) \quad (p_a)_{kon. pl} = \frac{2k}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

Oznaczmy przez  $\kappa$  stosunek granicznej plastycznej nośności rury do jej granicznej wytrzymałości, określonej według teorii sprężystości. Mamy wówczas

$$(12.22) \quad \kappa = \frac{(p_a)_{kon. pl}}{(p_a)_{pocz. pl}} = 2 \frac{b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} = 2 \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \ln \frac{b}{a}$$



Rys. 35

lub, oznaczając stosunek  $b/a$  przez  $\lambda$ , również (rys. 35)

$$\kappa = 2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \ln \lambda.$$

Oczywiście, gdy  $\lambda \rightarrow 1$ , to również  $\kappa \rightarrow 1$ .

(Stosując twierdzenie L'Hospitala otrzymujemy bowiem

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\ln \lambda \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 1} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\lambda} \lambda^2 + \ln \lambda \cdot 2\lambda}{2\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{1 + 2 \ln \lambda}{2} = \frac{1}{2}).$$

Na przykład, gdy  $\lambda = b/a = 2$ , to  $\kappa \approx 1,85$ .

Jak widzimy, faktyczna nośność (odpowiadająca pełnemu uplastycznieniu) jest znacznie większa od granicznej nośności sprężystej (przy grubych rurach nawet dwu- i trzykrotnie).

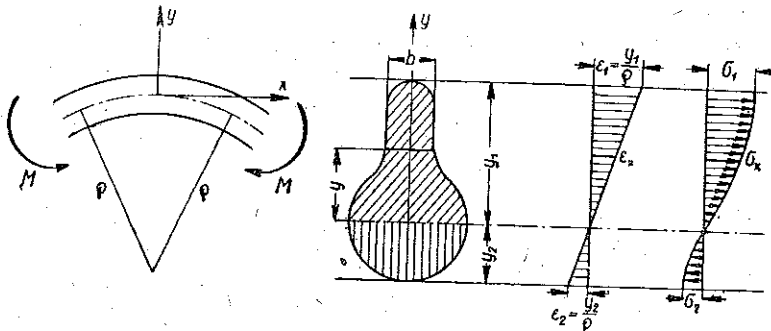
### § 13. Zginanie czyste

Zagadnienie czystego zginania należy również do tzw. prostych zadań teorii plastyczności, w których nie ma potrzeby operowania wszystkimi równaniami tej teorii; część tych równań spełniona jest tożsamościowo,



pozostałe zaś sprowadzają się do układu rozwiązalnego za pomocą prostych środków matematycznych.

Stwierdzono doświadczalnie, że hipoteza płaskich przekrojów B e r n o u l l i e g o dla czystego zginania ciał sprężystych jest ważna również



Rys. 36

w obszarze plastycznym (rys. 36). Wobec tego i tutaj, podobnie jak w elementarnej wytrzymałości materiałów, otrzymuje się związek

$$(13.1) \quad \varepsilon_x = \frac{y}{\rho},$$

gdzie  $y$  oznacza odległość włókien od osi obojętnej, a  $\rho$  promień krzywizny osi obojętnej.

Przy czystym zginaniu nie ma sił poprzecznych; można zatem przyjąć, że nie ma naprężeń ścinających i że wzajemne oddziaływanie na siebie włókien nie istnieje. Oznacza to, że

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0, \\ \sigma_y = \sigma_z &= 0, \end{aligned}$$

i jedynie

$$\sigma_x \neq 0.$$

Ze związku (11.4) wynika więc, że

$$(13.2) \quad \sigma_i = |\sigma_x|;$$

poza tym (przyjmując dla uproszczenia  $\nu = 1/2$  dla całego bez wyjątku przekroju) jest

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{1}{2} \varepsilon_x.$$

Ostatecznie więc na podstawie (11.5) mamy

$$(13.3) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2 \varepsilon_x^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Z (11.6) mamy dalej

$$(13.4) \quad \sigma_x = E' \varepsilon_x.$$

Ponieważ  $\sigma_x$  nie jest funkcją  $x$ , jak wynika ze wzorów (13.1) i (13.4), więc równania równowagi (11.1) są spełnione tożsamościowo. Podobnie są również spełnione równania Saint-Venanta.

Ze związków pomiędzy naprężeniami i odkształceniami pozostaje tylko jedno równanie, (13.4), z którego wynika, że rozkład naprężeń  $\sigma_x$  w przekroju odpowiada wykresowi otrzymanemu w próbie rozciągania i ściskania. Jeżeli znamy wykres dla rozciągania i ściskania, czyli związek

$$(13.5) \quad \sigma_x = \Phi(\varepsilon_x),$$

to można wówczas znaleźć z tzw. równań całkowych równowagi położenie warstwy obojętnej i zakrzywienie belki.

Zakładając, że zginanie następuje w płaszczyźnie symetrii  $xy$ , otrzymujemy następujące dwa równania:

$$(13.6) \quad \int_F \sigma_x dF = 0,$$

$$(13.7) \quad \int_F \sigma_x y dF = M.$$

Z warunku (13.6) określić można położenie osi obojętnej. Zauważmy, że jest [dla  $b(y)$  oznaczającego zmienną szerokość belki]

$$dF = b(y) dy.$$

Z (13.1) mamy dla  $\rho = \text{const}$

$$dy = \rho d\varepsilon_x,$$

wobec czego

$$dF = \rho b(\rho \varepsilon_x) d\varepsilon_x.$$

Zatem

$$\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \rho \Phi(\varepsilon_x) b(\rho \varepsilon_x) d\varepsilon_x = 0,$$

czyli

$$(13.8) \quad \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \Phi(\varepsilon_x) b(\rho \varepsilon_x) d\varepsilon_x = 0.$$

Ponadto jest

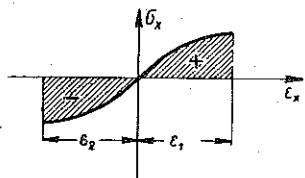
$$(13.9) \quad \rho^2 \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \Phi(\varepsilon_x) b(\rho \varepsilon_x) \varepsilon_x d\varepsilon_x = M.$$

Tutaj wszędzie  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  są wydłużeniami skrajnych włókien ( $\varepsilon_1$  jest dodatnie, a  $\varepsilon_2$  ujemne).

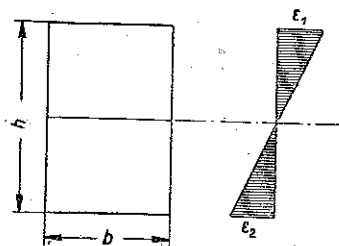
Dla  $b = \text{const}$ , tzn. dla przekroju prostokątnego, mamy na podstawie wzoru (13.8)

$$(13.10) \quad \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \Phi(\varepsilon_x) d\varepsilon_x = 0.$$

Wyrażenie podcałkowe przedstawia tutaj element powierzchni wykresu z próby na rozciąganie, a sama całka przedstawia sumę pól zakreskowanych na rys. 37.



Rys. 37



Rys. 38

Wynika stąd, że pole oznaczone znakiem + jest równe polu oznaczonemu znakiem —. Jeżeli wykres przebiega jednakowo dla rozciągania i ściskania, to równość pola dodatniego i ujemnego na wykresie ( $\varepsilon_x$ ,  $\sigma_x$ ) oznacza w danym razie równość  $y_1 = y_2$ , czyli dla przekroju prostokątnego jest  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  oraz  $\sigma_1 = \sigma_2$  (to samo jest dla każdego przekroju o dwu osiach symetrii, np. dla przekroju dwuteowego).

W fazie czysto sprężystej granicą nośności jest pojawienie się odkształceń plastycznych w warstwach skrajnych, gdyż tam wystąpią one najwcześniej (rys. 38). Oznacza to, że wówczas jest [por. (13.1)].

$$(13.11) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{pl} = \frac{h}{2\rho}.$$

Według prawa Hooke'a mamy

$$(13.12) \quad \sigma_x = \sigma_{pl} \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{pl}}.$$

Podstawmy wyrażenia (13.11) i (13.12) do (13.9). Otrzymamy wówczas

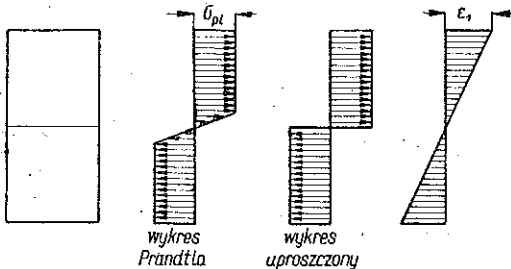
$$\begin{aligned} \rho^2 2 \int_0^{\frac{h}{2\rho} = \varepsilon_{pl}} \sigma_{pl} \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{pl}} b \varepsilon_x d\varepsilon_x &= 2 \rho^2 \frac{\sigma_{pl}}{\varepsilon_{pl}} b \left[ \frac{\varepsilon^3}{3} \right]_0^{\frac{h}{2\rho} = \varepsilon_{pl}} = \\ &= \frac{2 \rho^2}{3} b \frac{\sigma_{pl}}{\varepsilon_{pl}} \left( \frac{h^3}{4 \rho^3} \varepsilon_{pl} \right) = \sigma_{pl} \frac{b h^2}{6} = M. \end{aligned}$$

Zatem nośność sprężysta jest równa

$$M_{spr} = \sigma_{pl} \frac{bh^2}{6}$$

( $bh^2/6$  jest to znany wskaźnik wytrzymałości przekroju oznaczany zazwyczaj przez  $W$ ).

Jeżeli ciało poddamy dalszemu odkształceniu aż do momentu, gdy uplastyczni się cały przekrój (rys. 39), to dla materiału idealnie plastycznego będzie



Rys. 39

$$\Phi(\epsilon_x) = \sigma_{pl}$$

i, jak poprzednio,

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_{pl} = \frac{h}{2\rho};$$

mamy wobec tego wszędzie

$$\sigma_x = \sigma_{pl}.$$

Z (13.9) wynika wówczas, że

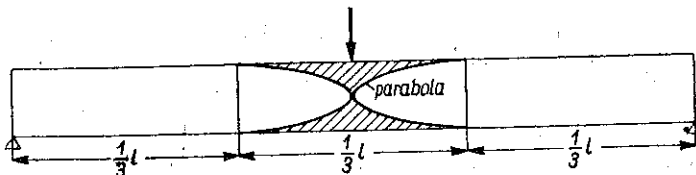
$$\rho^2 2 \int_0^{\frac{h}{2\rho} = \epsilon_{pl}} \sigma_{pl} b \epsilon_x d\epsilon_x = \rho^2 2 \sigma_{pl} b \left[ \frac{\epsilon_x^2}{2} \right]_0^{\frac{h}{2\rho}} = \rho^2 \sigma_{pl} b \frac{h^2}{4\rho^2} = \sigma_{pl} \frac{bh^2}{4} = M,$$

czyli że nośność plastyczna (bez uwzględnienia wzmocnienia materiału) jest równa

$$M_{pl} = \sigma_{pl} \frac{bh^2}{4}.$$

Nośność ta jest, jak widać, półtora razy większa od nośności sprężystej.

Gdy cały przekrój przeszedł w stan plastyczny, to mówimy, że utworzył się przegub plastyczny. Nazwa ta wynika stąd, że dla belki prostej, obciążonej siłą skupioną, strefa plastyczacji wygląda tak, jak na rys. 40.



Rys. 40

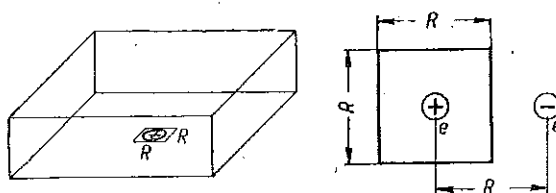
Belka może się wówczas odkształcać bez żadnych ograniczeń, tzn. staje się kinematycznie zmienna (ruchliwa), jak gdyby posiadała faktyczny

przegub. Belka taka nabywa jeden stopień swobody, tzn. ma o jedną więź wewnętrzną mniej niż przed uplastycznieniem. Upraszcza to znacznie obliczenia statyczne bardziej skomplikowanych układów. Metoda odnośna nosi nazwę metody obliczania nośności granicznej (czyli określania stanów granicznych konstrukcji).

## W Y K Ł A D VII

### § 14. Związek pomiędzy zjawiskami wytrzymałościowymi i budową materii

Wspominaliśmy o tym, że teoria plastyczności jest teorią fenomenologiczną. Obecnie zwrócimy uwagę na związek jej z teorią budowy materii. Wyjaśnienie zachowania się materiałów poddanych działaniu sił i ulegających pod ich wpływem odkształceniu, nie jest powodowane samą ciekawością poznawczą. Być może, rozpatrzenie zjawisk wytrzymałościowych pod kątem widzenia budowy materii pozwoli kiedyś na wykorzystanie ogromnych, jak się wydaje, rezerw wytrzymałościowych, które tkwią w ciałach stałych. Na istnienie tych rezerw wskazują następujące znane fakty.



Rys. 41

(1) Z obliczeń fizyków (np. P o l a n y i e g o i Z w i c k y e g o) wynika, że wytrzymałość ciał stałych powinna być wielokrotnie wyższa od wytrzymałości obserwowanej. Przytoczmy dla przykładu jedno z takich obliczeń dotyczące kryształu o sieci jonowej, dla której energia elektrostatyczna stanowi nieomal całą energię wiązania sieci (rys. 41).

Siła C o u l o m b a przyciągania jonów jest równa

$$\frac{e^2}{R^2}$$

Każdy atom «zajmuje» pole o powierzchni równej około

$$R^2,$$

czyli na jednostkę powierzchni rozdzielającej ciało działa siła

$$p = \frac{e^2}{R^2 R^2}$$

Dopiero więc takie naprężenie powinno spowodować pęknięcie ciała. Jeżeli przyjąć, że

$$e \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ cm dyn}^{\frac{1}{2}} \quad \text{i}$$

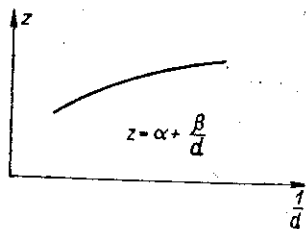
$$R \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

to otrzymujemy

$$p \approx \frac{25 \cdot 10^{-20}}{16 \cdot 10^{-32}} \text{ dyn/cm}^2 \approx 1,5 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2 \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2.$$

Pomiary wykazują, że faktyczna wytrzymałość jest znacznie mniejsza od obliczonej w ten sposób. Według teorii atomistycznej (P o l a n y i, Z w i c k y) molekularna (idealna) wytrzymałość powinna wynosić np. dla soli E/10, tzn. 20 000 do 40 000 kG/cm<sup>2</sup> wobec istotnie obserwowanej ok. 50 kG/cm<sup>2</sup>, czyli 400-800 razy mniejszej.

(2) Doświadczenia J o f f e g o i L e w i c k i e j z kryształami NaCl. J o f f e i L e w i c k a badali wytrzymałość kryształów NaCl rozmywając ich powierzchnię pod wodą. Wytrzymałość kryształów soli w tych warunkach wyniosła około 20 000 kG/cm<sup>2</sup>, podczas gdy pomiary dokonywane w zwykłych warunkach dają, jak wzmiankowaliśmy, 50 kG/cm<sup>2</sup>. Wymienieni badacze przypisywali to zmniejszenie wytrzymałości rysom; występującym na powierzchni ciała, i związanej z nimi koncentracji naprężeń.



Rys. 42

(3) Tzw. efekt skali, czyli efekt cienkich nici. Doświadczenia G r i f f i t h a, T a y l o r a i innych (najwcześniejsze pochodzą jeszcze z XIX w., Q u i n c k e i K a r m a r s c h) z niciami szklanymi i kwarcowymi wykazały następującą zależność wytrzymałości nici  $z$  od ich średnicy  $d$  (rys. 42):

$$z = a + \frac{\beta}{d}.$$

Między innymi uzyskano następujące dane doświadczalne:

średnica nici w $\mu$	wytrzymałość w kG/cm <sup>2</sup>
22	2 200
16	10 700
12,5	14 600 (wytrzymałość stali)
8	20 700
2,5	56 000

Według pomiarów A n d e r e g g a przeprowadzonych nad niciami szklanymi i silikatowymi (pomiary dokonane były w innych warunkach niż pomiary, których wyniki podane są w poprzedniej tabelicy) wytrzymałość

ich wynosi 121 000 kG/cm<sup>2</sup> dla nici o średnicy 6,6  $\mu$  oraz 367 000 kG/cm<sup>2</sup> dla nici o średnicy 3,1  $\mu$ .

(4) Efekt Podaszewskiego. Podaszewski badał wpływ barwienia fotochemicznego promieniami ultrafioletowymi i rentgenowskimi na wytrzymałość kryształów NaCl. Wyniki jego badań były następujące.

(a) Granica plastyczności i wytrzymałości kryształów zabarwionych jest podwyższona w stosunku do wytrzymałości kryształów niezabarwionych; przy sile zabarwienia odpowiadającej współczynnikowi absorpcji  $k_{max} = 55 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$  granica sprężystości podniosła się maksymalnie o 230%, średnio o 144%, a granica wytrzymałości podniosła się maksymalnie o 104%, średnio o 76%.

(b) Badania kryształów zabarwionych tylko w pewnych strefach wykazały, że płaszczyzny poślizgowe występują wyłącznie w częściach niezabarwionych, dochodząc do kilkuset na milimetr, przy absolutnym braku przesunięć w częściach zabarwionych. Pęknięcia takich kryształów następują w częściach niezabarwionych.

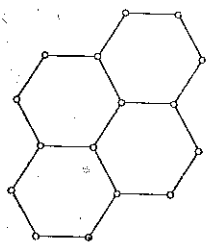
(c) Kryształy zabarwione zachowywały się po odbarwieniu jak zabarwione. Podobnych efektów można by podać jeszcze wiele. Gdyby np. udało się zamiast zbrojenia stalowego betonu zastosować zbrojenie niemi szklanymi o wytrzymałości równej wytrzymałości stali, to mogłoby to mieć doniosłe znaczenie gospodarcze (w chwili obecnej wyrób takich nici jest jeszcze bardzo kosztowny). Widzimy więc, że aczkolwiek rozważanie związków zachodzących pomiędzy nauką o wytrzymałości materiałów i teorią budowy materii nie dało jeszcze żadnych wyników konkretnych, które można by zastosować w procesach technologicznych i w produkcji, to jednak nie jest rzeczą wykluczoną, że zastosowania takie mogą nastąpić w przyszłości.

W dalszym ciągu poprzestaniemy na kilku uwagach o fizykalnym wytłumaczeniu zjawisk wytrzymałościowych związanych z plastycznością materiałów. Dokładniejsze ujęcie tych zagadnień byłoby trudne, głównie z tego względu, że brak dotychczas jakichś wyraźnych myśli przewodnich, które pozwoliłyby na uporządkowanie i wyjaśnienie ogromnego materiału doświadczalnego w tej dziedzinie. Obecny stan rzeczy można by nawet przyrównać do stanu spektroskopii przed powstaniem modelu atomu B o h r a.

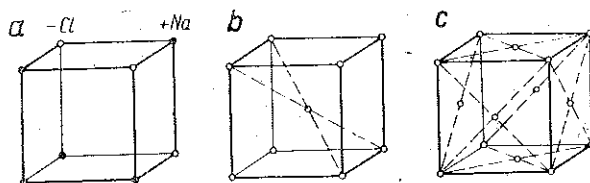
Jak wiadomo, ciała stałe dzielą się na bezpostaciowe i krystaliczne. Niektórzy uważają za ciała stałe tylko kryształy, a ciała bezpostaciowe zaliczają do cieczy przechłodzonych. W kryształach atomy względnie cząsteczki tworzą pewien regularny i periodyczny układ przestrzenny, czyli tzw. sieć krystaliczną (rys. 43). Na rysunku 44 widzimy komórki elementarne kilku typów sieci krystalicznych [44a — sieć regularna (np. sól ka-

mienna), 44b — sieć regularna scentrowana przestrzennie (np. żelazo  $\alpha$  i  $\beta$ ), 44c — sieć regularna scentrowana na ścianach (np. żelazo  $\gamma$ ).

Odległości atomów względnie cząstek w sieci krystalicznej są rzędu  $\text{\AA}$  n g s t r 6 m 6 w. Ciałami krystalicznymi są między innymi metale



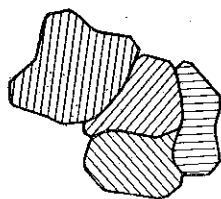
Rys. 43



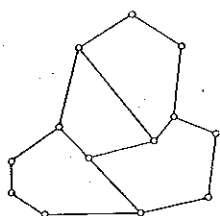
Rys. 44

i ich stopy (rys. 45). W ciałach bezpostaciowych (jak np. w szkle, kalafonii, paku) atomy tworzą również pewien określony układ przestrzenny, ale jest on nieregularny (rys. 46).

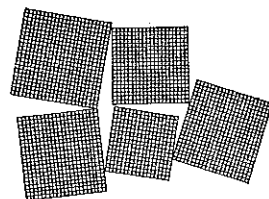
Regularność sieci krystalicznej odbija się nawet na wyglądzie makroskopowym ciał krystalicznych: swobodnie tworzący się kryształ ma postać bryły regularnej. Można sztucznie hodować pojedyncze wielkie kryształy, np. metali (Cz o c h r a l s k i wyhodował kilkunastocentymetrowe kryształy miedzi), ale na ogół roztopiona masa zaczyna krystalizować



Rys. 45



Rys. 46



Rys. 47

zować jednocześnie w wielu miejscach, przy czym tworzy się tzw. polikryształ, składający się z wielu przylegających do siebie krystalitów. Średnica krystalitów w metalach waha się od 0,01 mm do kilku milimetrów. Metale zatem i ich stopy są agregatami krystalitów (rys. 45).

Kryształy nie są idealnymi kryształami, jakby się to mogło wydawać; każde ziarno składa się z oddzielnych bloków o wymiarach  $10^{-6}$  do  $10^{-4}$  cm, (czyli o wymiarach 10 do 100 tysięcy elementarnych komórek), tworzących tzw. mozaikę (rys. 47). Każdy blok można uważać za idealny kryształ. Krawędzie tych kryształów na ogół nie przylegają do siebie, ale tworzą niewielkie kąty (do kilku stopni).



Niektórzy przypuszczają, że właśnie budowa mozaikowa powoduje koncentrację naprężeń i zmniejsza wytrzymałość ciał makroskopowych, stanowiących zbiorowiska kryształów. Są także inne próby wyjaśnienia tych zjawisk, jak np. teorie Prandtla, Taylora, Beckera, Smekala, Orowana. Jedni (Smekal, Zwick, Griffith) twierdzą, że kryształ posiada w swym wnętrzu miejsca rozluźnienia (tzw. *Lockerstellen*) oraz zanieczyszczenia lub inne nieregularności, które działają jak karby. Griffith rozwiązał nawet zadanie o koncentracji naprężeń dokoła bardzo cienkiego nacięcia w formie elipsy. Inni (Joffe, Orowan) uważają, że przyczyną koncentracji naprężeń są uszkodzenia powierzchni zewnętrznej. Frankel znowu jest zwolennikiem teorii dyslokacji atomów; o teorii tej powiemy teraz kilka słów.

Pomiędzy dwiema cząsteczkami należącymi do sieci krystalicznej działają jednocześnie siły przyciągające i odpychające (każda molekula zachowuje się jak dipol). Niech siła przyciągania będzie

$$f_{atr} = -\frac{c_1}{r^m},$$

a siła odpychania

$$f_{rep} = \frac{c_2}{r^n},$$

przy czym

$$m < n.$$

Oznacza to, że siły odpychania zmieniają się szybciej i przy dostatecznie dużych odległościach przewyższają siły przyciągania (rys. 48).

Wypadkowa sił wzajemnego działania na siebie dwu cząstek będzie równa

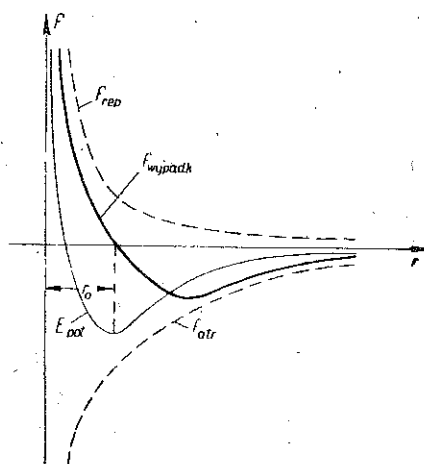
$$F(r) = f_{atr} + f_{rep}.$$

Przy  $r = r_0$  mamy do czynienia ze stanem równowagi, o ile

$$F(r_0) = 0,$$

wtedy bowiem energia potencjalna (energia wiązania) osiąga ekstremum (minimum), ponieważ

$$F(r) = -\frac{dE_{pot}}{dr}.$$



Rys. 48

Uważamy, że energia cieplna, jaką posiada dane ciało stałe, jest energią drgań cząsteczek lub atomów wokół położeń równowagi, czyli węzłów sieci. Wynika stąd, że dopóki ciało nie osiągnęło temperatury  $0^{\circ}\text{K}$ , cząsteczki jego nie tkwią nieruchomo w węzłach sieci. Abstrahując zresztą od ruchu cieplnego cząsteczek położenie ich w węzłach sieci trzeba uważać, według praw mechaniki statystycznej, jedynie za położenie najprawdopodobniejsze i cząstki mogą również znajdować się w innych położeniach, w których

$$E_{pot} \neq \text{minimum}.$$

Ten fakt, że zawsze część cząsteczek zajmuje położenie poza węzłami sieci, narusza regularność sieci (rys. 49), przy czym struktura jej jest tym silniej zaburzona, im wyższa jest temperatura. Nieregularność sieci może dochodzić nawet do zupełnego braku atomów w niektórych węzłach (tzw. «dziury») i do wklinowywania się innych w międzywęzła (tzw. atomy dyslokowane).



Rys. 49

Dziury i atomy dyslokowane nie mają stałych położeń, lecz wędrują, przeskakując pod wpływem energii cieplnej z położenia w położenie. Przy gwałtownym obniżeniu się temperatury następuje «koagulacja» dziur w postaci mikropeknięć.

Należy podkreślić, że to, co wyżej opowiedzieliśmy, przedstawia mniej lub więcej pewne przypuszczenia. Być może, że do wyjaśnienia tych zagadnień przyczyni się zastosowanie mikroskopu elektronowego, którego zdolność rozdzielcza dochodzi już do rzędu  $\text{\AA}$ . Jednak dotychczasowy brak syntetycznej teorii ciała stałego powoduje, że nawet uzyskanie bezpośrednich obrazów struktury cząsteczkowej ciał stałych nie wyjaśni chyba w pełni ich cech mechanicznych.

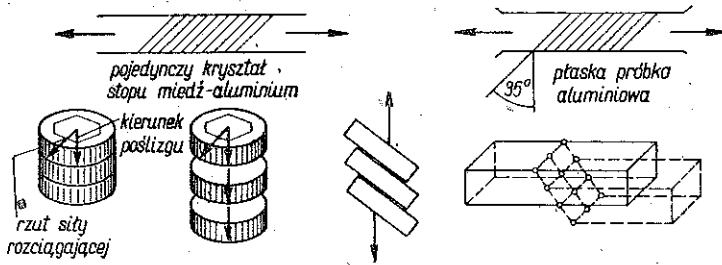
Po tych wstępnych uwagach przejdziemy do krótkiego wyjaśnienia istoty odkształceń plastycznych.

A. *Monokryształy*. Na ogół sądzimy obecnie, że odkształcenie plastyczne kryształów polega na *poślizgach* wzdłuż określonych płaszczyzn

krystalograficznych, a właściwie w pewnych kierunkach na tych płaszczyznach. Poszczególne bloki przesuwają się przy tym względem siebie jak karty w talii kart. Rysunek 50 przedstawia wyniki doświadczeń Marka, Polanyiego i Schmid'a oraz Taylora i Miss Elam.

Okazuje się, że poślizg następuje zazwyczaj wzdłuż płaszczyzn najczęściej obsadzonych przez atomy. Proces ten jest nieodwracalny, a po ustąpieniu poślizgu pozostają w jego płaszczyźnie znaczne naprężenia. Na powierzchniach kryształu widać wyraźnie linie poślizgu.

Widoczne linie poślizgów są właściwie «pakietami» linii odległych od siebie o około 2 000 odległości atomowych. Pakiety, czyli pasy poślizgowe odpowiadają przesunięciom równym setkom i tysiącom odległości ato-



Rys. 50

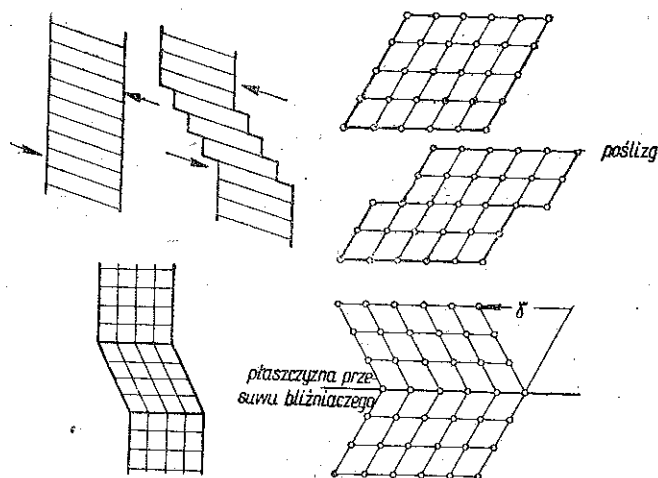
mowych. Aby nastąpił poślizg, naprężenie ścinające musi osiągnąć pewną wartość krytyczną (stąd znaczenie maksymalnego naprężenia ścinającego i intensywności naprężeń w hipotezach wytrzymałościowych); wartość ta jest charakterystyczna dla materiału i dla danej płaszczyzny krystalograficznej materiału. Jednakże również przy naprężeniach mniejszych od krytycznych następują bardzo powolne odkształcenia plastyczne (tzn. poślizgi). Są to zjawiska pełzania monokrystalitów. Poślizgi takie zachodzą bardzo powoli i dopiero, gdy naprężenie osiąga wartość krytyczną, poślizgi następują tak szybko, że można je obserwować nawet za pomocą mało dokładnych metod laboratoryjnych.

Z doświadczeń wynika, że wraz ze wzrostem odkształcenia rośnie wartość naprężeń stycznych, koniecznych do przedłużenia procesu odkształcenia (np. dla kryształu cynku ten wzrost wynosi 600%). Zjawisko takie odpowiada poznanemu już poprzednio wzmocnieniu materiału.

Z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że odkształcenie plastyczne w monokrystalicie może nastąpić nie tylko przez poślizg, ale również przez tzw. *przesuwę bliźniacze*. W tym procesie część siatki przechodzi w położenie będące odbiciem zwierciadlanym sąsiedniej części. Kryształ tak uzyskany nosi nazwę bliźniaka. Za przykład może tu służyć rozcią-

ganie bizmutu w temperaturze pokojowej: odkształcenie plastyczne polega tutaj całkowicie na przesuwach bliźniaczych. Rysunek 51 ilustruje opisane wyżej zjawiska poślizgów i przesuwów bliźniaczych.

B. *Ciała bezpostaciowe.* Odkształcenie plastyczne ciał bezpostaciowych zbliżone jest do płynięcia cieczy lepkich; jest to proces całkowicie izotropowy, a nie, jak to było w monokrystalitach, związany z określonymi płaszczyznami i kierunkami krystalograficznymi. Poza tym nie występuje tu zjawisko wzmocnienia, natomiast obserwuje się silny wpływ temperatury. Dawniej przypuszczano, że ciecze i ciała bezpostaciowe odznaczają się brakiem uporządkowania atomów względnie cząsteczek. Doświadczenia ostatnich lat przeczą temu całkowicie, wskazując na fakt, że



Rys. 51

w ciałach bezpostaciowych istnieje lokalne uporządkowanie atomów (cząsteczek), zanikające przy rozpatrywaniu większych obszarów na skutek narastania drobnych odchyień. Również i tutaj, podobnie jak w kryształach, atomy i cząsteczki prowadzą «życie osiadłe», tzn. wykonują drgania około położenia określonych najmniejszą ilością energii potencjalnej. Jednakże drgania takie dokoła określonego położenia równowagi trwają tutaj krótko (np. w niektórych cieczach okres ten wynosi  $10^{-18}$  sek) i cząsteczka lub atom przeskakuje następnie w położenie sąsiadujące z innym położeniem równowagi. Zauważmy, że czas przebywania cząsteczki w sąsiedztwie jednego położenia równowagi odpowiada czasowi relaksacji, tzn. okresowi, w ciągu jakiego siły obciążające mogą zmaleć  $e$  ( $\approx 2,718$ ) razy przy niezmiennym odkształceniu. Dla wody np. czas relaksacji jest rzędu  $10^{-11}$  sek. Warto zauważyć, że w ciągu tego mgnienia woda zachowuje się jak ciało sztywne sprężyste; ale już w okresie trwającym np. 1 sekundę nie

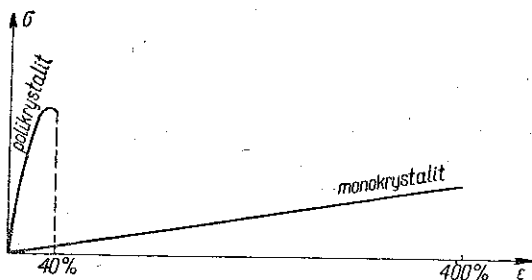
można zaobserwować — powiedzmy — oporu sprężystego wody na ścinanie, gdyż obserwację tego oporu uniemożliwia wysuwająca się na pierwszy plan cecha płynności.

Czas «osiadłego życia», czyli czas relaksacji szkła wynosi 100 lat, wobec czego w doświadczeniach trwających minuty zachowuje się ono jak ciało stałe sprężyste. Natomiast w okresach czasu rzędu tysiącleci i więcej szkło zachowuje się jak płyn, przejawiający swą własność «ciekłości». Podobnie warstwy skorupy ziemskiej w geologicznych okresach czasu (setki tysięcy lat) zachowują się jak płyny.

Krótki czas «życia osiadłego» atomów cieczy sprawia, że są one bardzo ruchliwe i stąd pochodzi zdolność płynięcia cieczy. Gdy przyłożymy np. siłę ścinającą, to przeskoki atomów, z sąsiedztwa jednych położeń równowagi do innych, stają się częstsze; następuje częściowe uporządkowanie kierunku tych przeskoków, tak że w rezultacie stwierdzamy zjawisko «płynięcia». W tej fazie opór przeciw siłom ścinającym zależy wyłącznie od gradientu szybkości płynięcia. Jest to właśnie przepływ lepki. Widzimy więc, że u ciał bezpostaciowych surogatem odkształcenia plastycznego jest właśnie płynięcie lepkie.

Należy zauważyć, że również w ciałach krystalicznych podczas występowania poślizgów mają miejsce przeskoki atomów, dyslokacje i naruszenia prawidłowości sieci. Zbliża to odkształcenia plastyczne tych ciał do płynięcia lepkiego ciał bezpostaciowych.

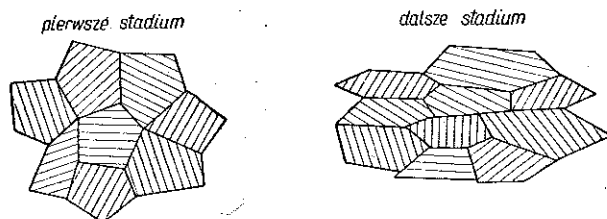
C. *Polikrystality*. Procesy plastyczne w polikrystalitach są bardzo skomplikowane. Wobec w pełni chaotycznego układu pojedynczych monokrystalitów siły zewnętrzne powodują odkształcenia plastyczne, tzn.



Rys. 52

poślizgi, jedynie w odpowiednio zorientowanych kryształach; inne kryształy doznają wyłącznie odkształceń sprężystych. Dlatego polikrystalit stawia znacznie większy opór uplastycznieniu niż monokrystalit (rys. 52). Szczególnie wyraźnie jest to widoczne na polikrystalitach metali krystalizujących w układzie heksagonalnym, gdyż przesunięcia w tego typu kryształach mogą zachodzić jedynie w płaszczyznach równoległych do podstawy komórki elementarnej (cynk).

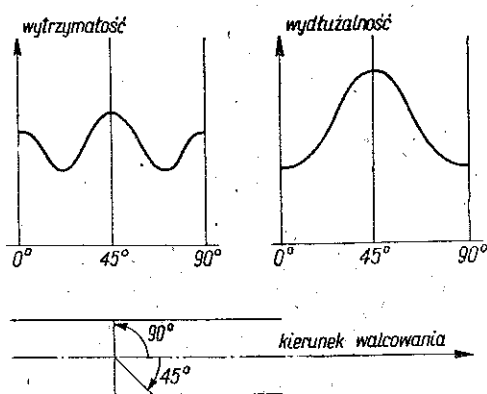
Podczas procesu uplastycznienia w pojedynczych kryształach tworzących polikryształ powstają często poślizgi w różnych kierunkach. Jednakże w dalszych fazach uplastycznienia tworzy się grubowłóknista struktura, powstała na skutek wydłużenia się poszczególnych kryształów w kierunku zachodzących odkształceń (rys. 53).



Rys. 53

Tego rodzaju budowy wynikające z procesów plastycznych, o własnościach odpowiadających dość silnej anizotropii wymuszonej, noszą nazwę *tekstur*. Ich szczególne własności przedstawiają wykresy podane na rys. 54.

Na ogół odkształcenie plastyczne jest cechą wewnętrzną poszczególnych ziaren i płaszczyzny poślizgowe nie przechodzą przez granice krysztalitów.



Rys. 54

Lepiszczce międzykryształiczne, czyli otoczki ziaren, wydają się szczególnie wytrzymałe i trudne do uplastycznienia. Wnioski takie potwierdzone zostały przez dokładne badania eksperymentalne. Jednakże w zjawiskach pełzania stwierdzamy sytuację odwrotną; główną rolę odgrywa tutaj przesuwanie się wzajemne kryształitów po sobie. Według ostatnio przeprowadzonych badań zjawisko pełzania w niskich temperaturach polega całkowicie

na wzajemnym przesuwaniu się kryształitów i dopiero w wyższych temperaturach występują poślizgi wewnątrz kryształów.

Z krótkiego przeglądu, jakiego dokonaliśmy w kilku wykładach, wyciągnijmy pewną syntezę, stanowiącą w pełni osobisty pogląd autora.

Fizyka teoretyczna, w szczególności fizyka ciała stałego, stawia sobie jako cel objaśnienie własności substancji na podstawie własności cząstek elementarnych. Poznawszy budowę ciał pragnęlibyśmy przewidzieć np.

ich własności mechaniczne, a wszystkie zjawiska makroskopowe zachodzące pod działaniem sił chcielibyśmy wyjaśnić na podstawie znajomości budowy samych ciał. Dla kryształów jonowych, w szczególności dla kryształów typu metal alkaliczny-chlorowiec (np. NaCl), próby takiej dokonał B o r n otrzymując teorię ilościową zgodną z wynikami doświadczeń. Jakże jednak daleko od tych prostych kryształów do skomplikowanych polikryształitów! Wierząc w potęgę nauki mamy prawo, oczywiście, twierdzić, że zagadnienie własności mechanicznych polikryształitów znajdzie w przyszłości rozwiązanie w formie pozwalającej na praktyczne zastosowania. Jednakże z punktu widzenia aktualnych potrzeb techniki wydaje się, że droga ta jest na długo jeszcze zamknięta. Musimy jeść obiad, jak powiedział H e a v i s i d e, nie rozumiejąc w pełni procesów trawienia. Interesuje nas bowiem zachowanie się zbiorowisk cząstek niezależnie od tego, ile wiemy o zachowaniu się poszczególnych cząsteczek tych zbiorowisk. Wydaje się więc, że poznanie ogólnych, fenomenologicznych, praw przyrody jest obecnie bardziej ważne dla dalszego, istotnego, rozwoju teorii plastyczności i jej praktycznych zastosowań, niż badanie cech makroskopowych ciała stałego z punktu widzenia jego struktury.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] N. I. B i e z u c h o w, *Wwiedzenie w teorię uprugosti i plastyczności*, Moskwa-Leningrad 1950.
- [2] A. A. I l j u s z i n, *Plastyczność*, Gostiechizdat 1948.
- [3] N á d a i, *The Theory of Flow and Fractures of Solids*, t. 1, New York 1950.
- [4] W. W. S o k o ł o w s k i, *Teoria plastyczności*, Moskwa-Leningrad 1950.
- [5] M. M. F i ł o n i e n k o - B o r o d i c z i n n i, *Kurs soprotywlenja, materialow*, t. 1, Moskwa-Leningrad 1949.
- [6] I. I. G o l d i e n b ł a t, *Wwiedzenie w teorię potzuczestni stroitielnych materialow*, Moskwa 1952.
- [7] A. D. T o m l e n o w, *Teoria plastycznych dieformacij metallow*, Moskwa 1951.
- [8] Ł. M. K a c z a n o w, *Miechanika plastycznych sried*, Leningrad-Moskwa 1948.
- [9] J. N o w i ń s k i i W. O l s z a k, *O podstawach teorii ciał sprężystych fizycznie nieliniowych*, Arch. Mech. Stos., t. 6, 1 (1954).
- [10] W. W. N o w o ż i ł o w, *Prikl. Mat. Miecz.*, 5 (1952).

#### Резюме

#### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ (1). СЕМЬ ЛЕКЦИЙ

Настоящие лекции были прочитаны на семинарии в Математическом Институте Польской Академии Наук в 1953 году. Они основаны на известных научных пособиях Б e з у х о в а, И л ь ю ш и н а,

Надая, Соколовского, Филоненко-Бородича, Гюльденבלата и других (см. перечень литературы).

Лекция I охватывает основные понятия напряженных и деформированных состояний, рассмотренных с точки зрения потребностей теории пластичности. Изложены также напряженное состояние в точке и понятия главных и октаэдрических напряжений.

В лекции II рассмотрены предельные значения касательных напряжений на плоскостях главного ромбического додекаэдра, деформированное состояние в точке, закон линейной упругости, в форме зависящей от интенсивности напряжений и деформаций, а также законы изменения объема и изменения формы.

Лекция III рассматривает условия пластичности (т. е. так называемые гипотезы прочности).

В первой части IV лекции приведено содержание новой научной работы В. В. Новожилова [Прикл. Мат. Мех. 5 (1952)], в которой автор представил оригинальное определение интенсивности напряжений. В дальнейших рассуждениях даны основы теории малых упруго-пластических деформаций, по методам советской школы.

Лекция V рассматривает теорему Ильюшина о так называемом простом нагружении и разгрузке, а также основные уравнения механики упруго-пластических тел.

В лекции VI рассмотрены примеры применения теории, являющейся темой предыдущих лекций, а именно вопрос толстостенной трубы, подвергаемой внутреннему давлению, а также чистый изгиб.

Лекция VII рассматривает связи, существующие между явлениями сопротивления и строением вещества. В этой лекции рассмотрено последовательно, на основании [6] — монокристаллиты, аморфные тела и поликристаллы. В заключение выражено мнение, что, при настоящем состоянии науки, дальнейшее развитие теории пластичности может, главным образом, состоять в феноменологическом представлении рассматриваемых явлений, без более тщательного анализа их субмикроскопической структуры.

#### Summary

#### BASIC PRINCIPLES OF THE THEORY OF PLASTICITY (I) SEVEN LECTURES

These lectures were held by the author at the Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences in 1953. They are based on the well known manuals by Bezukhov, Iliushin, Nădai, Sokolowski, Filonenko-Boroditsh, Goldenblat and others (see list of references).



Lecture I contains fundamental notions of the state of stress and strain from the point view of the requirements of the theory of plasticity. The state of stress at a point is discussed, as well as the principal and the octahedral stresses.

In lecture II the principal values of shear stresses (on the walls of the principal rhombic dodecahedron) are discussed, as well as the state of deformation at a point, the law of linear elasticity in the form depending on the intensity of stress and deformation and the laws of change of volume and shape.

In Lecture III the conditions of plasticity (strength theories) are discussed.

Lecture IV brings a short account of a new paper by W. W. Novozhilov (Prikl. Math. Mech. 5, 1952) in which a definition of stress intensity is given. Next, the basic principles of the theory of small deformations are explained in the form developed by Soviet scientists.

In Lecture V a discussion of the theorem of Iliushin, concerning the so-called simple loading and unloading, and the basic equations of elastic-plastic bodies are given.

Lecture VI is illustrated by examples of application of the theory, discussed in the foregoing lectures.

The problems considered are: a thick-walled tube subjected to internal and external pressures and the problem of pure bending.

In Lecture VII relations between the strength phenomena and the structure of matter are considered.

Monocrystalline, amorphous and polycrystalline bodies are discussed on the basis of [6]. Finally, the author expresses the opinion that further development of the theory of plasticity should be based chiefly on the phenomenological approach to the considered problems, without deeper consideration of submicroscopic structure.

INSTYTUT MATEMATYCZNY  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 stycznia 1954 r.*