

IGNACY MALECKI

METODY ZASTOSOWANIA RACHUNKU TENSOROWEGO
W TECHNICE

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XVI

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Rozwój zastosowań rachunku tensorowego	3
2. Podstawowe pojęcia rachunku tensorowego	5
3. Interpretacja fizyczna wielkości tensorowych	16
4. Znaczenie metody tensorowej w technice	20
5. Wielkości tensorowe w ośrodkach ciągłych	26
6. Metody tensorowe w technicznych zagadnieniach pola	33
7. Wielkości tensorowe występujące w systemach o wielu stopniach swobody	43
8. Metoda tensorowa badania systemów mechanicznych	49
9. Metoda tensorowa badania systemów elektrycznych	54
10. Główne problemy zastosowań metody tensorowej w technice	60
11. Bibliografia	62

1. Rozwój zastosowań rachunku tensorowego

Rachunek tensorowy rozwinął się na pograniczu, a raczej skrzyżowaniu, zainteresowań matematyków, fizyków i techników. Pojęcia typowe dziś dla zastosowań rachunku tensorowego znane już były od dawna, że zacytujemy konstrukcję elipsoidy bezwładności podaną przez Poinsot (1834 r.). Teoria sprężystości i krystalografia, które posługiwały się wówczas prymitywnym aparatem matematycznym, operowały przez przeszło pół wieku elementarnymi obrazami elipsoid dla unaocznienia naprężeń powstających w ośrodkach ciągłych. Dopiero W. Voigt w 1898 r., [81], zdecydował się na wprowadzenie nowego pojęcia matematycznego i fizycznego nazwanego tensorem, czyli obrazem naprężeń ośrodka. Jak często się zdarza w rozwoju nauki, pojęcie tensora znalazło pogłębienie i rozszerzenie w zupełnie innej dziedzinie wiedzy, mianowicie w «czystej» matematyce. Okazało się, że pozwala ono w sposób dogodny wyrazić własności przestrzeni nieeuklidesowych, n -wymiarowych, bodaj po raz pierwszy ujętych w pracach Grassmanna [33], Ricci i Levi-Civita, [72], oraz przestrzeni zakrzywionej, opisanej przez Riemanna, [71], i Christoffela, [15]. Dopiero jednak prace Minkowskiego, [65], Lorentza, [56], a zwłaszcza Łobaczewskiego i Einsteina, [22], nadały temu pojęciu głębokie znaczenie fizyczne. Śmiało można powiedzieć, że bez pomocy rachunku tensorowego ogólna teoria względności nie mogłaby znaleźć tak pełnego i logicznego wyrazu matematycznego. Rachunek tensorowy stał się podstawowym narzędziem badania właściwości kontinuum czaso-przestrzeni, a następnie pozwolił na rozwinięcie mechaniki kwantowej. Podstawowe wielkości tej mechaniki, jak funkcje *bra* i *ket* Diraca, [19], są szczególnymi przypadkami tensorów sprzężonych.

Rachunek tensorowy wprowadzono z powodzeniem i do innych dziedzin fizyki, głównie elektrodynamiki i mechaniki ośrodków ciągłych; ma on tam przeważnie na celu ustalenie niezmienników oraz opis pewnych złożonych wielkości fizycznych.

Metoda tensorowa w fizyce jest jedną z metod najbardziej generalnych, służących do syntetycznego ujęcia zjawisk i ich zmian, przy czym fizycy nie troszczyli się przeważnie o sprowadzenie wyników analizy ten-

sorowej do pojedynczych konkretnych przypadków. Nie dziwnego, że w swym ujęciu klasycznym, jakie spotykamy w podręcznikach, [67], pisanych przez fizyków i matematyków, teoria tensorów obca jest technikom i wydaje się pomysłową wprawdzie, lecz mało praktyczną spekulacją. Przypomina to trochę sytuację sprzed 50 lat, gdy technicy podobnie traktowali rachunek liczb zespolonych, [16], uważając go za bezpłodną abstrakcję matematyczną.

Trzeba jednak z drugiej strony stwierdzić, że próby zastosowania rachunku tensorowego lub metod pokrewnych spotykamy w technice od dość dawna; dotyczy to zarówno teorii sprężystości, jak i teorii obwodów elektrycznych. Na przykład, jest rzeczą ciekawą, że Kirchhoff, [40], w swoich pionierskich pracach nad przepływem strumienia elektryczności używał metody zbliżonej do topologii; również geodezji nie były obce niektóre pojęcia tensorowe. Jednakże stałe narastanie szczegółowej wiedzy technicznej i ogromnej liczby faktów, z którymi zapoznać się musi niemal każdy inżynier, a tym bardziej pracownik nauki — technik, spowodowało zacieśnienie i wyspecjalizowanie metod używanych w poszczególnych dyscyplinach, spowodowało następnie zróżnicowanie języka symbolów matematycznych w technice. Na przykład, do opisu podobnych zjawisk z dziedziny mechaniki, elektrotechniki i termodynamiki używamy dziś zupełnie innych symbolów i metod. Rezultatem tego są nie tylko trudności dydaktyczne, lecz i trudności porozumienia się różnych specjalistów pracujących nad rozwiązywaniem problemów granicznych oraz opóźnienia we wzajemnym przekazywaniu doświadczeń.

Wprowadzenie rachunku tensorowego do techniki spowodowane jest w dużej mierze chęcią przełamania tego stanu rzeczy, chęcią równoległego używania tych samych metod matematycznych w różnych dziedzinach techniki. Wydaje się to paradoksem, ale właśnie wobec zróżnicowania metod rachunkowych stosowanych w technice, syntetyczność i ogólność opisu zjawisk metodą tensorową staje się rzeczą szczególnie cenną.

Burgatti, [10], jeden z pierwszych teoretyków rachunku tensorowego, stwierdził: «Ogólność tej metody, która pozwala mówić i pisać w języku zrozumiałym we wszystkich gałęziach fizyki technicznej, jej jasna i często wymowna zwięzłość, jej zdolność przeniesienia idei w formę i formy w ideę, charakterystyczne dla niej jednoczesne ujęcie przez indukcję i dedukcję, syntezę i analizę — czyni z tej metody naprawdę pierwszorzędne narzędzie pracy naukowej i dydaktycznej».

Warunkiem zastosowania rachunku tensorowego w technice jest jednak pewna zmiana metody w porównaniu z klasycznym ujęciem spotykanym w fizyce. Nie chodzi tu tylko o uproszczenie i łatwe podanie zawiłych rozważań matematycznych. Rzecz polega przede wszystkim na uzupełnieniu rozważań fizyków konkretnymi, numerycznymi rozwiązaniami, chociażby najprostszych problemów technicznych. Jest to nie-

odzownym warunkiem, aby technik nabrał zaufania do metody matematycznej, aby miał z niej pożytek, jeżeli nie przy rozwiązywaniu szczegółowego zadania, jakie mu stawia produkcja, to przynajmniej przy zrozumieniu fizycznego sensu zjawiska. Warunek ten spełniony jest zresztą w naszym przypadku pośrednio, mianowicie metoda tensorowa umożliwia stosowanie rozwiązań numerycznych właściwych rachunkowi macierzy.

Trzeba się dla porządku zastrzec, że rachunek tensorowy — poza nielicznymi wyjątkami — jest w zastosowaniach technicznych pewnym udogodnieniem dającym się zastąpić bardziej uciążliwymi i mniej prostymi metodami elementarnymi. Wiele poważnych podręczników, że wymienimy teorię sprężystości S. T i m o s z e n k i, [78], ogranicza się do metody analizy elementarnej i rachunku całkowego, nie dając interpretacji tensorowej tak typowych wielkości, jak np. elipsoida naprężeń.

2. Podstawowe pojęcia rachunku tensorowego

Nowoczesny rachunek tensorowy, zwłaszcza w formie wprowadzanej do zagadnień elektrotechniki, jest dyscypliną, która zaczyna się rozwijać i nie okrzepła jeszcze w ściśle ustalone tradycją oznaczenia i definicje poszczególnych symbolów. Czytanie prac różnych autorów, z których wielu na własną rękę tworzy skomplikowany system oznaczeń, sprawia często znaczne trudności. Dlatego dla wzajemnego zrozumienia się nieodzowne będzie omówienie głównych pojęć rachunku tensorowego. Zaznaczamy, że robimy to jako technicy dla techników w celu pokazania perspektyw przydatności rachunku tensorowego i znalezienia nowych jego zastosowań w technice, bez szukania oryginalnych dowodów i równań matematycznych. Pomijamy również zagadnienia algebry i analizy tensorowej ograniczając się do omówienia pojęć niezbędnych do zrozumienia metod stosowania tego rachunku w technice.

W pracy miniejszej została użyta symbolika stosowana w najnowszych podręcznikach radzieckich, [43], [71], i w pracach zajmujących się specjalnie zastosowaniami rachunku tensorowego w fizyce, [8]. Rozmiary pracy nie pozwalają jednak na rozwinięcie całego systemu symbolów tensorowych. W tym zakresie dla polskiego czytelnika miarodajna będzie znajdująca się w druku książka S. G o ł ą b a i J. L i t w i n i s z y n a *Rachunek tensorowy*.

Zacznijmy od zdefiniowania samego pojęcia tensora. Nie jest to rzeczą łatwą, można bowiem podejść do zagadnienia od strony matematyka lub fizyka; w obu przypadkach będzie ono miało nieco odmienne aspekty. Trzeba dalej zwrócić uwagę, że sam termin *tensor* nie jest używany jednoznacznie. Będziemy się tutaj trzymali definicji stosowanej przez większość autorów, (por. np. [76] i [70]), którzy wyrazem *tensor* określają

najogólniejsze pojęcie matematyczno-fizyczne. Inaczej postępują tacy autorzy jak J. Schouten, [74], i A. D. Michal, [64], którzy wprowadzają jako pojęcie ogólne *afinor*, rezerwując nazwę tensora dla przypadku tensora symetrycznego zwłaszcza drugiego rzędu. Zresztą i termin *afinor* bywa używany w nieco odmiennym znaczeniu, [76]. W dalszym ciągu pracy posługiwać się będziemy pierwszą, ogólniejszą definicją tensora.

Żeby zrozumieć sens fizyczny tensora, należy najpierw omówić jego interpretację matematyczną. Napotykamy tu na pewien kłopot, gdyż poszczególni autorzy dochodzą do matematycznego pojęcia tensora z zupełnie innych punktów wyjścia, zależnie od tego, czy rozpatrują zagadnienie czysto analitycznie, czy też przypisują mu sens geometryczny w przestrzeni metrycznej bądź wektorowej (p. niżej).

Wydaje się, że dla potrzeb techniki łatwiejsze będzie wyjście ze swoich pojęć trójwymiarowej geometrii euklidesowej, opisując tensor prymitywnym pojęciem obrazu geometrycznego, następnie rozszerzając rozważania na bardziej ogólne zależności w przestrzeni r -wymiarowej, aby wreszcie przejść do opisu zjawisk fizycznych ujmowanych za pomocą geometrii wektorowej.

Otóż w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej tensor, zwany tensorem 2-go rzędu, zdefiniujemy jako operator T , który dowolnemu wektorowi \mathbf{a} (rys. 1), przyporządkowuje inny wektor \mathbf{u} , będący jego funkcją liniową. Liniowość polega na spełnieniu warunku, [35] i [73],

$$(1) \quad f(k\mathbf{a}) = kf(\mathbf{a}),$$

zatem

$$(2) \quad \mathbf{u} = f(\mathbf{a}) = T\mathbf{a}.$$

Można inaczej powiedzieć, [43], że operator nazwany tensorem 2-go rzędu wyznaczony jest 9 wielkościami powstałymi przez pomnożenie parami składowych dwóch dowolnych wektorów \mathbf{e} i \mathbf{d}

$$(3) \quad \begin{cases} t_{xx} = e_x d_x, & t_{xy} = e_x d_y, & t_{xz} = e_x d_z, \\ t_{yx} = e_y d_x, & t_{yy} = e_y d_y, & t_{yz} = e_y d_z, \\ t_{zx} = e_z d_x, & t_{zy} = e_z d_y, & t_{zz} = e_z d_z. \end{cases}$$

Warunek sprowadzenia tensora do dwóch wektorów nie jest zresztą konieczny i nie zawsze da się spełnić; wystarczy, że 9 wielkości t_{ij} , tworzących kwadratową macierz, zmienia się przy zmianie układu osi współrzędnych, tak jakby to istotnie były składowe iloczynu wektorów. Inaczej

można zatem powiedzieć, że tensor 2-go rzędu w przestrzeni 3-wymiarowej jest zespołem trzech wektorów $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, transformujących się liniowo przy zmianie układu współrzędnych; 9 składowych tych wektorów stanowi składowe tensora.

Jeżeli wyżej omówiona operacja tensorowa przeprowadzona będzie w stosunku do dwóch wektorów \mathbf{a} i \mathbf{b} , którym przyporządkujemy jak poprzednio wektor \mathbf{v} , będący ich funkcją liniową

$$(4) \quad \mathbf{v} = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

to odpowiedni operator nazwiemy tensorem 3-go rzędu. Na tej samej zasadzie określić można tensory wyższych rzędów. Trzeba zaznaczyć, że jest to tylko interpretacja geometryczna tensora, który stanowi ogólne pojęcie matematyczne.

Liniową zależność między wektorami \mathbf{a} i \mathbf{u} otrzymamy w szczególnym przypadku także wówczas, gdy tensor jest iloczynem wektora przez skalar, czyli że sam jest także *wektorem*. Wektor jest więc również tensorem, mianowicie tensorem 1-go rzędu. Podobnie dowolną wielkość liczbową, tj. *skalar*, przez którą pomnożymy wektor \mathbf{a} , otrzymując jako funkcję liniową \mathbf{u} , nazywamy tensorem zerowego rzędu.

Widzimy, że w geometrii pojęcie tensora jest ogólne i obejmuje również wektory i skalary. Zastanówmy się jeszcze bliżej nad jego interpretacją geometryczną, związaną z obrotem osi współrzędnych, zasadniczą bowiem cechą rachunku tensorowego jest badanie zachowania się danej wielkości przy zmianie układu odniesienia.

Niech wektor \mathbf{a} ma w pierwotnym układzie współrzędnych składowe a^x, a^y, a^z , a osie współrzędnych wyznaczone są *wektorami jednostkowymi* $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$.

Wektor \mathbf{a} wyraża się więc sumą

$$(5) \quad a^x \mathbf{e}_x + a^y \mathbf{e}_y + a^z \mathbf{e}_z;$$

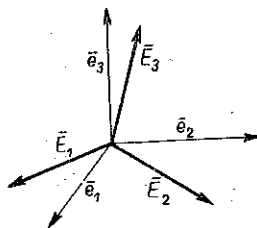
rozróżnienie dolnych i górnych indeksów wyjaśnimy dalej.

Zmienimy teraz — na przykład przez obrót osi — układ współrzędnych. Nowe osie wyznaczone będą znowu trzema wektorami jednostkowymi $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ (rys. 2). Co się stanie ze składowymi wektora \mathbf{a} ? Jaka będzie ich wartość w nowym układzie współrzędnych? Jaki jest stosunek nowych i starych wektorów jednostkowych? Oto typowe pytania dla metody algebry tensorowej.

Przejdzie do nowych wektorów jednostkowych odbywa się za pomocą zależności

$$(6) \quad \mathbf{E}_i = \sum_k C_i^k \mathbf{e}_k,$$

gdzie za i i k należy kolejno podstawić x, y, z .



Rys. 2

Zestaw dziewięciu wielkości C_i^k przedstawia zgodnie z definicją składowe tensora $\|C\|$. Dla zaznaczenia, że dana wielkość jest tensorem 2-go rzędu, ujmujemy ją w znaki $\| \|$, wówczas gdy wielkość macierzową zamykamy nawiasem $[]$:

$$(7) \quad \|C\| = \begin{vmatrix} C_x^x & C_x^y & C_x^z \\ C_y^x & C_y^y & C_y^z \\ C_z^x & C_z^y & C_z^z \end{vmatrix}.$$

Tensor $\|C\|$, tzw. *tensor transformujący*, jest pojęciem zupełnie ogólnym, z którym często spotykać się będziemy w dalszych rozważaniach.

Analogicznie z nowych osi na stare przejdziemy za pomocą zależności

$$(8) \quad e_k = \sum_l C_k^l E_l,$$

przy czym

$$(9) \quad \sum_k C_k^l C_k^i = \delta_l^i = \begin{cases} 1 & \text{dla } l = i, \\ 0 & \text{dla } l \neq i. \end{cases}$$

δ_l^i nazywamy *wskaźnikami* (symbolami) *Kroneckera*, [48]; liczbowo

$$(10) \quad C_l^k = \frac{M_l^k(C')}{\Delta(C')}, \quad C_k^l = \frac{M_k^l(C)}{\Delta(C)},$$

gdzie M_l^k oznacza minor algebraiczny macierzy $\|C\|$, tj. wyznacznik, w którym wykreślony został wiersz l i kolumna k , pomnożony przez $(-1)^{l+k}$. Przez Δ oznaczono zwykły wyznacznik tejże macierzy.

Wielkości geometryczne, których składowe zmieniają się według tego samego prawa jak wektory jednostkowe osi współrzędnych, nazywamy *współzmiennicznymi* (*kowariantnymi*); składowe te oznaczamy literami zaopatrzonymi w dolne indeksy. Jeżeli z kolei zbadamy jak następuje transformacja w przestrzeni współrzędnych punktu $P(a^x, a^y, a^z)$, lub inaczej wektora o tych składowych wyprowadzonego z początku układu współrzędnych, to okaże się, że prawa transformacji są tu przeciwnie niż przy zmianie samych osi układu. Mianowicie współrzędna A^l w nowym układzie osi wyniesie

$$(11) \quad A^l = \sum_k C_k^l a^k,$$

a przy powrocie do starych współrzędnych a^k otrzymamy zależność

$$(12) \quad a^k = \sum_l C_l^k A^l.$$

Tensor transformujący C'_k związany jest z tensorem C_i^k zależnością (9), stanowi więc jego odwrócenie. Gdy poprzednio tensor C' służył do powrotu do starych osi, obecnie transformuje układ na nowe osie współrzędnych.

Dla obliczenia całego wektora \mathbf{A} trzeba zsumować geometrycznie składowe A'_i .

$$(13) \quad \mathbf{A} = \sum_i C'_k a^k \mathbf{E}_i.$$

We wzorze tym znak sumowania według indeksów « k » pominięto, gdyż operacja sumowania wynika już z samego położenia indeksów — jest to tzw. konwencja *Einstein*, znacznie upraszczająca pisownię wzorów tensorowych. W dalszym ciągu będziemy się zasadniczo trzymali tej konwencji, jedynie w pewnych przypadkach pozostawiając znak sumy ze względów dydaktycznych. Jak widać z równań (11) i (12), współrzędne wektora są wielkościami *przeciwzmiennicznymi* (*kontrawariantnymi*), transformującymi się odwrotnie niż wektory jednostkowe układu odniesienia. Aby odróżnić tę właściwość, wielkościom kontrawariantnym przypisujemy górne indeksy. Rozróżnienie wielkości współzmiennicznych i przeciwzmiennicznych ma podstawowe znaczenie w rachunku tensorowym i może być rozciągnięte na dowolne obiekty geometryczne.

Prócz tego będziemy mieli do czynienia z wielkościami *niezmiennicznymi* (*inwariantnymi*), które zachowują swą wartość przy dowolnych zmianach układu współrzędnych.

Pewne kombinacje składowych tensora mają taki niezmienniczy charakter. Z uwagi na ich znaczenie w problemach fizyki i techniki napiszemy trzy niezależne od siebie niezmienniki J tensora 2-go rzędu w przestrzeni trójwymiarowej i osiach kartezjańskich:

$$(14) \quad \begin{aligned} J_1 &= t_{xx} + t_{yy} + t_{zz}, \\ J_2 &= \begin{bmatrix} t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{zz} & t_{zx} \\ t_{xz} & t_{xx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} \\ t_{yx} & t_{yy} \end{bmatrix}, \\ J_3 &= \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Funkcje tych niezmienników pozostają również niezmiennicze. Tensory, w których pierwszy niezmiennik jest równy zeru, nazywa się czasem *dewiatorami*, [43]; mają one duże znaczenie praktyczne w zagadnieniach teorii sprężystości i reologii.

Skalar jest, oczywiście, niezmiennikiem, wektor zaś, jak stwierdziliśmy, posiada składowe o właściwościach przeciwzmiennicznych. Zachodzi pytanie, czy można dać interpretację geometryczną wektora współzmiennicznego, ponieważ matematycznie można sobie taki wektor wyobrazić. Otóż wektor kowariantny o składnikach a_i , wyprowadzony z początku układu współrzędnych, wyznaczony jest kierunkiem i płaszczyzną do tego kierunku prostopadłą, która na osiach współrzędnych odcina wielkości x^i , spełniające zależność niezmienniczą (rys. 3)

$$(15) \quad k = a_i x^i .$$

Składowe tensora 2-go rzędu powstały, jak wiemy, z iloczynów składowych dwóch wektorów, co do których nie robiliśmy dodatkowych założeń; mogą to być zatem równie dobrze wektory kowariantne, jak kontrawariantne. Z dwóch wektorów kowariantnych otrzymujemy tensor kowariantny dwukrotnie współzmienniczny, co zaznaczamy dwoma dolnymi indeksami. Odwrotnie zachowuje się tensor podwójnie przeciwzmienniczny, cechowany dwoma górnymi indeksami. Wreszcie przez kombinację wektora kowariantnego i kontrawariantnego powstaje tensor mieszany. Odpowiednio zapiszemy następujące typy tensorów 2-go rzędu:

$$(16) \quad T_{ik}, \quad T^i_k, \quad T^{ik} .$$

Podobnie dla tensorów trzeciego rzędu o trzech indeksach wystąpią cztery kombinacje

$$(16.1) \quad T_{ikl}, \quad T^i_{kl}, \quad T^{ik}_l, \quad T^{ikl} .$$

Tensor posiada w zasadzie co najwyżej $p = r - 1$ różnych indeksów, jeżeli został wyznaczony w układzie r osi współrzędnych. W przypadku gdy $p = r$ otrzymujemy w przestrzeni euklidesowej wielkość zwaną pseudo-skalarem, do której omówienia wrócimy później (por. str. 27). W rozważaniach geometrycznych i fizycznych mamy zwykle do czynienia z *tensorami jednorodnymi*, posiadającymi wszystkie górne lub dolne indeksy.

Dowolny tensor jednorodny przedstawić można jako sumę dwóch tensorów: *symetrycznego* właściwego tensora $\|S\|$ i tensora *antysymetrycznego* $\|A\|$ (skośnego), zwanego inaczej multiwektorem. Składowe tych tensorów spełnić muszą równanie

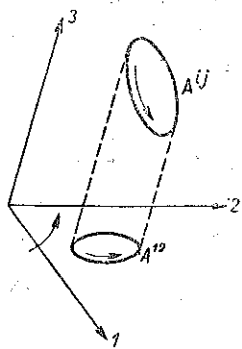
$$(17) \quad t_{ij} = kt_{ji}, \quad \text{gdzie} \quad \begin{cases} k = 1 & \text{dla } \|S\|, \\ k = -1 & \text{dla } \|A\|. \end{cases}$$

Wyszczególniając wszystkie indeksy przedstawimy odpowiednią zależność w formie

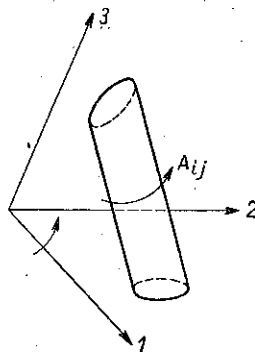
$$(18) \quad \|T\| = \|S\| + \|A\| = \begin{vmatrix} t_{xx} & \frac{1}{2}(t_{xy} + t_{yx}) & \frac{1}{2}(t_{xz} + t_{zx}) \\ \frac{1}{2}(t_{yx} + t_{xy}) & t_{yy} & \frac{1}{2}(t_{yz} + t_{zy}) \\ \frac{1}{2}(t_{zx} + t_{xz}) & \frac{1}{2}(t_{zy} + t_{yz}) & t_{zz} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(t_{xy} - t_{yx}) & \frac{1}{2}(t_{xz} - t_{zx}) \\ -\frac{1}{2}(t_{xy} - t_{yx}) & 0 & \frac{1}{2}(t_{yz} - t_{zy}) \\ -\frac{1}{2}(t_{xz} - t_{zx}) & -\frac{1}{2}(t_{yz} - t_{zy}) & 0 \end{vmatrix}.$$

Widzimy, że w drugim tensorze składowe na głównej przekątnej równe są zeru, a wyrazy poza przekątną główną są składowymi skalarnymi iloczynu zewnętrznego (wektorowego). W przypadku indeksów kontrawariantnych obrazem (rys. 4) tensora antysymetrycznego jest zatem



Rys. 4



Rys. 5

pole o wewnętrznej orientacji określonej porządkiem indeksów $i j k$. Inaczej, tensor ten można uważać za biwektor kontrawariantny, który oprócz kierunku i wielkości posiada *znak* zmieniający się zależnie od porządku osi współrzędnych. Jego wartość liczbowa jest, oczywiście, równa wyróżnikowi macierzy tensora antysymetrycznego. Odpowiednio iloczyn zewnętrzny wektorów kowariantnych przedstawić można (rys. 5) jako walec o określonym kierunku, przekroju i orientacji zewnętrznej; będzie to obraz biwektora kowariantnego. Widzimy, że tensor, antysymetryczny

o dwóch indeksach w przestrzeni trójwymiarowej daje się sprowadzić do nieco prostszego pojęcia geometrycznego.

Bardziej złożona jest interpretacja geometryczna *tensora symetrycznego*. W literaturze znajdujemy, [12], [21] i [38], szereg mniej lub więcej udanych sposobów geometrycznego ujęcia tensora 2-go rzędu; często się przy tym zdarza pomieszanie sensu fizycznego, zaczerpniętego z teorii sprężystości, z interpretacją czysto geometryczną. Ponieważ chodzi nam o różnorodne zastosowania fizyczne rachunku tensorowego, wygodniej będzie na razie ograniczyć się do ściśle geometrycznego zobrazowania tensora, aby nie zaciemnić jego obrazu fizycznego zbyt ogólną definicją. Ponieważ mówimy obecnie o tensorze symetrycznym, to równanie (2) wypisane z uwzględnieniem zmienniczości ma postać

$$(19) \quad \mathbf{u}_i = T_{ik} \mathbf{a}^k \quad \text{lub} \quad \mathbf{u}^i = T'^{ik} \mathbf{a}_k,$$

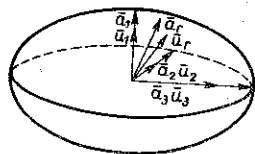
czyli przy operacji tensorowej wektor kowariantny przechodzi w kontrawariantny lub odwrotnie.

Jeżeli sformujemy wyrażenie

$$(20) \quad \mathbf{a}^i T_{ik} \mathbf{a}^k = K,$$

to jest ono niezmiennicze i określa zachowanie się wektora kowariantnego $\mathbf{u}_i = T_{ik} \mathbf{a}^k$ przy zmianie kierunku normalnej płaszczyzny, określającej wektor kontrawariantny \mathbf{a}^i .

Miejszem geometrycznym końców tego wektora będzie powierzchnia drugiego stopnia, która w przypadku, gdy wszystkie $T_{rr} \geq 0$, staje się elipsoidą (rys. 6), a dla tensora symetrycznego jest elipsoidą symetryczną względem środka. Wektory \mathbf{a} i \mathbf{u} mają na ogół różne kierunki w przestrzeni, istnieją jednak pewne osie, będące osiami symetrii powierzchni tensorowej, dla których oba wektory mają ten sam kierunek. Osie te nazywamy *osiąmi głównymi tensora*. Operacja tensorowa na tych osiach redukuje się do pomnożenia wektora \mathbf{a} przez skalar $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{a}$.



Rys. 6

Dla uzyskania możliwości stosowania różnych układów odniesienia rzeczą pożyteczną będzie wprowadzenie pojęcia tzw. *podstawowego tensora metrycznego* $\|g\|$. Składowe tego tensora są współczynnikami, przez które należy pomnożyć iloczyn dwóch wektorów jednostkowych \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j danego punktu, aby je sprowadzić do wspólnej skali, czyli *metryki*. Wektory jednostkowe można otrzymać przez transformację wektora przyjętego za podstawę skali długości, zatem posługując się równaniem (6) możemy napisać

$$(21) \quad g_{im} = \sum_{i,k} C_i^i C_m^k.$$

Mnożąc wektor (lub tensor) przez funkcję podstawowego tensora, zmieniamy w przestrzeni metrycznej charakter zmienniczości tego wektora (lub tensora), czyli poziom indeksów.

Ponieważ odległość ds między dwoma sąsiednimi punktami pozostać musi stałą w przestrzeni euklidesowej, niezależną od wyboru współrzędnych, zdefiniujemy ją za pomocą równania

$$(22) \quad (ds)^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k.$$

Jeżeli wybraliśmy osie kartezjańskie o jednakowej skali, odległość ds wynosi

$$(23) \quad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

i podstawowy tensor metryczny ma postać

$$(24) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Przejdźcie na inne współrzędne przestrzeni euklidesowej nie sprawia również specjalnych trudności. W przypadku gdy zachowana jest ortogonalność (tj. gdy w każdym punkcie osie współrzędnych są do siebie prostopadłe), pociąga to za sobą jedynie zmianę składowych tensora metrycznego na jego głównej przekątnej. Np. dla ortogonalnych współrzędnych cylindrycznych

$$(25) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

dla współrzędnych sferycznych

$$(26) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}.$$

Przy użyciu współrzędnych prostoliniowych ukośnokątnych zjawiają się prócz tego różne od zera wyrazy poza główną przekątną. Np. dla dwóch osi współrzędnych prostoliniowych, tworzących kąt φ , podstawowy tensor metryczny na płaszczyźnie jest

$$(27) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 \cos \varphi \\ e_2 e_1 \cos \varphi & e_2^2 \end{vmatrix}.$$

Dla potrzeb elektrotechniki pewne znaczenie posiada geometria przestrzeni euklidesowej charakteryzującej się tym, że podstawowy tensor metryczny ma także składowe g_{rr} ujemne, a więc niektóre osie są urojone.

Rozważania dotyczące trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej przenieść można bez trudności na przestrzeń euklidesową o r wymiarach.

Wyróżniającą właściwością przestrzeni euklidesowej jest to, że zawsze można w niej dobrać taki układ współrzędnych (np. współrzędne kartezjańskie), dla którego podstawowy tensor metryczny ma wartość stałą, niezależną od punktu przestrzeni. Przestrzeń euklidesowa jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego pojęcia, tzw. *przestrzeni R i e m a n n a*. W przestrzeni tej tensor metryczny, będący funkcją ciągłą, jest tensorem symetrycznym ($g_{ik} = g_{ki}$), a jego wyróżnik nie równa się zeru, [39]. Prócz tego, jeśli przestrzeń ma być rzeczywistą, forma kwadratowa $g_{ik} x^i x^k$ musi być określona i dodatnia. Przestrzeń taka jest, ogólnie biorąc, zakrzywiona, tzn. nie potrafimy znaleźć podstawowego tensora, który byłby stały dla całego obszaru. Natomiast zależność (22) jest tutaj nadal spełniona, co oznacza, że odległość dwóch sąsiednich punktów jest w przestrzeni *R i e m a n n a* określona jednorodną formą kwadratową. Ponieważ składowe tensora metrycznego zmieniają się od punktu do punktu, dane zależności geometryczne obowiązują jedynie w określonym punkcie przestrzeni. Typową metodą postępowania w zagadnieniach tensorowych tego typu jest *usztywnienie* tensora $\|g\|$ dla danego punktu, to jest przejście do przestrzeni euklidesowej *stycznej* w danym punkcie do przestrzeni *R i e m a n n a*. Zazwyczaj nic nie stoi na przeszkodzie, aby w owej pomocniczej przestrzeni stycznej wybrać najdogodniejszy dla badanego przypadku, np. kartezjański, układ współrzędnych. Składowe wektora lub tensora sprowadzone do tych współrzędnych kartezjańskich — zamiast do współrzędnych krzywoliniowych — niektórzy autorzy, [17], [49], nazywają *współrzędnymi fizycznymi*. Termin ten usprawiedliwiony jest faktem, że współrzędne kartezjańskie zostają tu utworzone za pomocą podstawowego tensora metrycznego, a więc uwzględniają właściwości przestrzeni *R i e m a n n a* w danym punkcie. Klasycznym przykładem zastosowania tej metody jest układ osi odniesienia przyjmowany w szczególnej teorii względności. Takie postępowanie stwarza jednak pewne niedogodności. Otrzymane związki matematyczne dotyczyć będą wówczas (i to z pewnymi zastrzeżeniami) bezpośrednio otoczenia punktu przyjętego za początek układu współrzędnych.

Dlatego w rachunku tensorowym stosujemy często inną metodę. Mówiąc o odległości między dwoma nieskończenie bliskimi punktami w przestrzeni *R i e m a n n a* rozumiemy przez nią długość najkrótszej drogi

łączącej te punkty. Droga ta przeprowadzona od punktu do punktu wyznacza tzw. *krzywą geodezyjną*, której równanie różniczkowe ma postać

$$(28) \quad \frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0,$$

gdzie Γ_{ij}^k jest tzw. *symbolem Christoffela drugiego rodzaju*

$$(29) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_r g^{rk} \left[\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} \right] = \sum_r g^{rk} \Gamma_{r,ij}.$$

$\Gamma_{r,ij}$ oznacza symbol Christoffela pierwszego rodzaju.

Niektórzy autorzy, [75], wprowadzają odmienne oznaczenia, tzw. *nawiasy Christoffela*

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \quad \text{oraz} \quad \Gamma_{r,ij} = [r,ij].$$

Zwróćmy uwagę, że symbol Christoffela drugiego rodzaju nie jest tensorem. Wynika to chociażby z faktu, że w osiach prostoliniowych $\Gamma_{ij}^s = 0$, a przy innych współrzędnych ma on wartość różną od zera. Symbol Christoffela określa poprawkę, jaką trzeba dodać do wektora (lub tensora) A^r przy jego przeniesieniu do sąsiedniego punktu w przestrzeni Riemanna. Obowiązuje tu zależność

$$(30) \quad A^r + \delta A^r = A^r - \Gamma_{ij}^r A^i dx^j.$$

Metoda ta pozwala na wygodne przekształcenie układu współrzędnych i dobranie najdogodniejszych w danych warunkach osi odniesienia.

Poprzednio omówiona interpretacja geometryczna tensora w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej służyła do elementarnego wprowadzenia w zagadnienia tensorowe i stanowiła wąski wycinek problemu. Przy przejściu do przestrzeni Riemanna pojęcia geometryczne stają się znacznie ogólniejsze, chociaż bardziej abstrakcyjne. Matematycy przedstawiają tu wielkość tensorową jako *obiekt geometryczny* (liniowy), tj. utwór matematyczny, posiadający składowe transformujące się liniowo przy przejściu od jednego układu współrzędnych do drugiego za pomocą dowolnych transformacji tworzących *grupę*. Prawo, jakiemu podlega grupa transformacji, określa typ obiektu geometrycznego, czyli charakter tensora. W tym najogólniejszym ujęciu obiekt geometryczny zostaje opisany nie intuicyjnym obrazem plastycznym, lecz istotnymi cechami zmienności danej grupy. Rozumiemy teraz, że omówiona na początku transformacja układu współrzędnych nie jest przypadkową operacją matematyczną, lecz ma podstawowe znaczenie zarówno fizyczne, jak geometryczne. Za pomocą transformacji możemy bowiem wykryć niezmiennicze, a więc najistotniejsze właściwości obiektu.

3. Interpretacja fizyczna wielkości tensorowych

Celowo zaczęliśmy od rozpatrzenia geometrycznego obrazu tensorów, aby na tej podstawie przejść do określenia ich sensu fizycznego. Wydaje się bowiem, że metoda geometryzacji zjawisk fizycznych, szeroko stosowana w fizyce teoretycznej, jest zbyt mało wykorzystana w technice, mimo swych niewątpliwych walorów logicznych i dydaktycznych. Geometryczne, a ściślej biorąc tensorowe przedstawienie zjawisk fizycznych stwarza bowiem uniwersalny język, pozwalający opisać bardzo odległe od siebie zjawiska przyrody. W niektórych dziedzinach — zwłaszcza w elektrotechnice — *rachunek symboliczny* dał tak łatwe i przejrzyste metody geometryzacji, że stały się one codziennym narzędziem pracy inżyniera nie tylko w zakładzie naukowym, lecz i w produkcji. W bardziej złożonych przypadkach *technika* napawa jeszcze lękiem wyobrażenie układu mechanicznego o n stopniach swobody, jako punktu w przestrzeni r -wymiarowej. Tu jednak właśnie tkwią możliwości potencjalne zastosowań rachunku tensorowego, który może być bardziej ogólnym środkiem geometryzacji niż rachunek liczb zespolonych.

W celu przejścia od wielkości geometrycznych do zjawisk fizycznych musimy przede wszystkim uogólnić pojęcie przestrzeni, a właściwie geometrii. Dotychczas posługiwaliśmy się *przestrzenią metryczną*, w której określić można było jednoznacznie odległości i kąty liniowe w przestrzeni, używając podstawowego tensora metrycznego. W fizyce i technice mamy natomiast przeważnie do czynienia z parametrami danego zjawiska, które nie dadzą się mierzyć wspólną miarą, chociaż z powodzeniem można je przedstawić w postaci wykresu geometrycznego płaskiego, przestrzennego czy r -wymiarowego. Takim wykresem jest np. obraz entropii w funkcji ciśnienia, gęstości i temperatury gazu lub obraz napięcia w funkcji zmian oporności rzeczywistej i urojonej obwodu elektrycznego.

Pojęcie przestrzeni metrycznej trzeba będzie zastąpić ogólniejszym pojęciem *przestrzeni wektorowej*. Układem odniesienia jest tu układ «wektorów», których długości nie dadzą się porównać ze sobą. Jedna z nich jest, na przykład, miarą czasu, druga oznacza temperaturę stygnącej bryły lub też trzy wektory są mierzone długością i wyznaczają miejsce pomiaru wewnątrz sali, ale czwarty odpowiada głośności dźwięku wyrażonej, oczywiście, nie w cm, lecz w fonach. Pojęcie wektora jest tu bardzo uogólnione i mówi o porównaniu lub przejściu między dwoma stanami fizycznymi danego układu. Takie pojęcia, jak kąty między osiami współrzędnych, skale wspólne dla tych osi i podstawowy tensor metryczny, tracą w tych warunkach określony sens.

Analitycznie można zdefiniować taki uogólniony wektor jako ciąg o n wyrazach $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, przy czym wyrazy te są elementami pew-

nego zbioru liczb, zwanego niekiedy *ciałem matematycznym*, [66]. Zbiór takich wektorów określa n -wymiarową przestrzeń wektorową.

Należy tutaj przejść na kategorie rozumowania geometrii afinicznej, aby zbadać niezmiennicze właściwości układu, niezależne od przypadkowego wyboru osi współrzędnych. Brzmi to nieco abstrakcyjnie, w rzeczywistości jednak jest tłumaczeniem na język geometrii różniczkowej najprostszymi czynnościami technicznymi, jakie spełniamy np. określając moc maszyny parowej na podstawie wykresu indykatorowego.

Chcąc więc najogólniej określić znaczenie fizykalne tensora, musimy przenieść to pojęcie do przestrzeni wektorowej. Właściwości tensorowe obiektów, wyrażone w geometrii euklidesowej lub np. geometrii Ł o b a c z e w s k i e g o, stanowią szczególne przypadki geometrii wektorowej.

Otóż trzeba przede wszystkim odpowiedzieć na pytanie, czy rzeczą słuszną będzie traktowanie tensora jako obrazu wielkości fizycznej, a nie tylko pojęcia geometrycznego i analitycznego.

Postaramy się pośrednio odpowiedzieć na to pytanie. Każdy z nas zdaje sobie sprawę, że poprawne zależności matematyczne układać można jedynie między wielkościami o tych samych mianach lub, idąc dalej, określonych tymi samymi jednostkami. Ta naczelna zasada ważnej dla potrzeb praktyki dyscypliny matematycznej, jaką jest *analiza wymiarowa*, [13], stała się zrozumiała już dla ucznia szkoły podstawowej.

Może się czasem zdarzyć, że dla wielkości wyrażonych w pewnych odpowiednio dobranych, chociaż różnych, jednostkach potrafimy ułożyć równania pozornie sprzeczne z zasadami analizy wymiarowej. Na przykład, w podstawowym dla akustyki wzorze $S a b i n e' a$, [60], po lewej stronie figuruje czas pogłosu w sekundach, po prawej mamy iloraz pojemności sali w m^3 przez zdolność pochłaniania w m^2 . Rzecz polega na tym, że występujący we wzorze współczynnik 0,161 ukrywa w sobie odwrotność prędkości rozchodzenia się dźwięku, wyrażoną w sek/m. Jeżeli zamiast w metrach wielkość po prawej stronie wzoru wyrazimy w stopach, wzór przestaje obowiązywać, gdyż zmienia się jego współczynnik liczbowy. Używając języka tensorowego powiemy zatem, że *charakter niezmienniczy* (inwariantny), tj. niezależny od wyboru jednostek, mają tylko równania o tych samych *mianach*.

Zasadę tę można potraktować szerzej odnosząc ją nie tylko do jednostek miar, lecz ogólnie do obiektów geometrycznych, pozostających w określonym stosunku do układu wektorów jednostkowych, wyznaczających współrzędne w geometrii afinicznej. Inaczej mówiąc, cechy inwariantne mają jedynie równania wiążące wielkości o tym samym charakterze tensorowym, a więc wielkości identycznie zachowujące się przy zmianie układu współrzędnych. To ogólne prawo ma również głębokie

znaczenie, jak przytoczona zasada zgodności wymiarów. W tym punkcie, jak zresztą i w innych, występuje silne powiązanie analizy wymiarowej z rachunkiem tensorowym. Nawet pewne symbole graficzne, [52], używane w analizie wymiarowej mają swój odpowiednik w rachunku tensorowym i macierzowym.

Na przykład, typowe równanie analizy wymiarowej, odnoszące się do zespołu wielkości x_i ,

$$(31) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

przy zmianie wielkości i typu jednostek na zespół X_i transformuje się za pomocą zależności

$$(32) \quad \|X\| = \begin{vmatrix} k_1^1 & k_2^1 & \dots & k_n^1 \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ k_1^n & k_2^n & \dots & k_n^n \end{vmatrix} \cdot \|x\|,$$

gdzie $k_i^m = \partial X_m / \partial x_i$ jest odpowiednikiem tensora (7). W przypadku gdy wymiary wielkości są zachowane, a zmienia się tylko ich wartość, równanie należy pomnożyć przez symbol Kroneckera δ_r^k , otrzymujemy wówczas elementarną zależność

$$(33) \quad X_s = k_s^r \delta_r^k x_k.$$

W geometrii elementarnej spotykamy się z dwoma rodzajami wielkości. Pierwsze z nich są to skalary, które nie reagują na najbardziej wymyślne zmiany układu współrzędnych. Drugie — to wektory, do których określenia obok wartości bezwzględnej potrzebne jest podanie kierunku; inaczej mówiąc, musimy znać r składowych wektora wzdłuż jego osi współrzędnych. Przy zmianie układu odniesienia składowe dowolnych wektorów (mówimy o wektorach geometrii elementarnej) transformują się w ten sam sposób.

Ujęcie zjawisk przyrody za pomocą ruchu i sumowania się wektorów nie jest jednak w bardzo wielu przypadkach wystarczające. Zjawiska te podlegają znacznie bardziej skomplikowanym prawom niż proste przekształcenia wektorowe. Okazało się, że istnieje wielka grupa faktów przynależnych do bardzo, zdawałoby się, odległych od siebie dziedzin fizyki i techniki, które to fakty zmieniają się wedle tych samych praw, dających się wyrazić za pomocą odpowiednich tensorów. Ponieważ, jak widzieliśmy poprzednio, zarówno skalary, jak wektory są niczym innym jak tensorami szczególnego rodzaju, fragmentaryczna i przypadkowa interpretacja geometryczna zjawisk przyrody może być ujęta w logicznie

zamkniętą całość, w system rozumowania matematycznego dający się wszechstronnie wykorzystać. Rodzaj charakteru tensorowego równań matematycznych pozwala na sklasyfikowanie nie tylko obiektów geometrycznych, ale i zjawisk fizycznych. Daje to nadzwyczaj dogodny sposób zorientowania się, czy obserwowana zależność matematyczna ma charakter przypadkowy, związany z lokalnymi warunkami przeprowadzonego doświadczenia, czy też jest inwariantna i reprezentuje istotne powiązanie parametrów fizycznych.

Można tu sformułować ogólne twierdzenie, że charakter niezmienniczy posiadają jedynie zależności między zjawiskami przyrody dającymi się przedstawić tensorami tego samego rzędu i typu zmienniczości. Dla zjawisk, w których występują parametry nie dające się mierzyć wspólną miarą, a więc dla zjawisk wymagających opisu kategoriami geometrii wektorowej, oba warunki są równie istotne. Przy opisie zjawisk, ujmowanych za pomocą geometrii metrycznej, warunek drugi może być pomijany, gdyż posługując się podstawowym tensorem metrycznym mamy, jak wiadomo, prawo zmieniać charakter zmienniczości, co wyraża się zmianą poziomu indeksów. Natomiast w przestrzeni wektorowej nie można na ogół utworzyć tensora metrycznego, a więc charakter zmienniczości (poziom indeksów) staje się istotną cechą opisywanej wielkości.

Często się zdarza, że zjawisko fizyczne opisujemy zespołem równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Rachunek tensorowy jest wówczas szczególnie pożyteczny, gdyż pozwala usunąć wpływ przypadkowego wyboru osi odniesienia na przebieg różniczkowania.

Posługujemy się w tym celu metodą różniczkowania bezwzględnego, stanowiącego trzonowy składnik rachunku tensorowego. Metodę różniczkowania bezwzględnego bodaj najjaśniej ujmuje P. K. R a s z e w s k i, [71]. Jeżeli badamy dowolne pole tensorowe $T_{klm}^{ij}(M)$ w bezpośrednim otoczeniu punktu M , wówczas w zwykłym rachunku różniczkowym rozpatrujemy pełne pochodne $dT_{klm}^{ij}(M)/dx^i$ tej funkcji względem kolejnych współrzędnych. Wielkość ta zawiera wyrazy podobnego typu jak równanie (28), które nie będąc tensorami zaciemniają charakter zmienniczości zjawisk i nie pozwalają na transformację układu współrzędnych. Opisaną trudność przewyżczamy przy tensorowym różniczkowaniu w ten sposób, że równolegle przesuwamy do punktu M tensor $T_{klm}^{ij}(M')$ z punktu M' nieskończenie bliskiego punktu M . Liniowa część różnicy tego tensora z tensorem dla punktu M daje właśnie różniczkę bezwzględną $D T_{klm}^{ij}$ tensora. Otrzymana tą metodą pochodna tensora ma np. dla prostego przypadku kowariantnego wektora postać

$$(34) \quad D_i A_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - A_s \Gamma_{ik}^s.$$

Jako symbolu różniczkowania bezwzględnego niektórzy autorzy, [43] używają symbolu nabra, ∇ .

W ten sposób przy różniczkowaniu wyeliminowany został wpływ czynnika zawierającego symbol *C h r i s t o f f e l a*. Nastąpiło jakby wyprostowanie i sprowadzenie do stałej skali osi współrzędnych, co przejawia się tym, że przy różniczkowaniu bezwzględnym podstawowy tensor metryczny przechodzi jako wielkość stała:

$$(35) \quad D_r g_{ik} = 0.$$

Jest to tzw. *twierdzenie R i c c i' e g o*.

Jak wspomniano poprzednio, ujęcie geometryczne matematyki tensorowej wcale nie jest konieczne; z powodzeniem można by się ograniczyć do operowania zbiorami symboli nie przypisując im elementarnych właściwości geometrycznych, a jedynie pewne prawa transformacji. Nie wynika stąd jednak równoznaczność pojęć tensora i macierzy; podobieństwo graficzne symboli jest tu zwodnicze. W teorii przekształceń liniowych *macierz kwadratowa* przedstawia, jak wiemy, współczynniki rodziny równań liniowych zachodzących między m wielkościami. Współczynnikiem tym, czyli składowym macierzy, nie przypisujemy specjalnych właściwości transformowania. Mogą to być zależności między dwoma wielkościami przestrzeni r -wymiarowej, obowiązujące jedynie dla danego układu współrzędnych. Przy zmianie układu współrzędnych macierz traci na ogół sens i na jej podstawie nie potrafimy wnioskować o niezmienniczych właściwościach obiektu, które głównie nas interesują. Macierz pozwala na zrytmizowanie rachunku, na zrutynizowanie przekształceń pośrednich, sama przez się nie jest jednak wielkością, której można by przypisać sens fizyczny; nie kryje się też za nią synteza zjawisk przyrody. Tymczasem tensor przedstawiony w postaci macierzy posiada specjalne właściwości, które czynią z niego obraz wielkości fizycznej; mianowicie, macierz tensorowa przy zmianie układu współrzędnych wykazuje określone *prawa transformacji*, a jej składniki są ze sobą w organiczny sposób związane. Trzeba przy tym zwrócić uwagę, że tensory 2-go rzędu, określone wyżej omówionymi prawami transformacji, mogą być rozwinięte zasadniczo jedynie na macierze kwadratowe, gdy odpowiednikami tensorów 1-go rzędu (poliwektorów) są macierze wierszowe lub słupowe. «Tensor to macierz (kwadratowa) plus prawa jej transformowania», [9].

4. Znaczenie metody tensorowej w technice

Przejdźmy do głównego interesującego nas zagadnienia, tj. do perspektyw wykorzystania rachunku tensorowego w technice. Zagadnienie należałoby podzielić na odpowiedzi na dwa pytania:

(1) co może dać rachunek tensorowy w zagadnieniach technicznych, w których występują typowe wielkości tensorowe, a więc w których dają się stosować metody tego rachunku i

(2) w jakich dziedzinach techniki występują wielkości tensorowe, a więc gdzie oczekiwać należy konkretnych korzyści z zastosowania tej metody.

Pytanie pierwsze wymaga syntetycznej odpowiedzi, opartej na ogólnej znajomości rachunku tensorowego, pytanie drugie pociąga za sobą konieczność analizy związków i zjawisk fizycznych za pomocą rachunku tensorowego.

Wydaje się, że istotna cecha użyteczności rachunku tensorowego polega na stopniu uogólnienia wprowadzanym przez ten rachunek. Proces technicznego obliczenia opiera się przecież na zastąpieniu konkretnych liczb odnoszących się, na przykład, do obwodu elektrycznego — symbolami oraz na wykonaniu na tych symbolach działań matematycznych, aby potem od symbolów przejść z powrotem do wartości numerycznych.

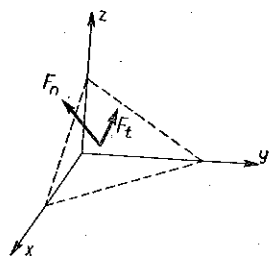
Najprostszym rodzajem uogólnienia będzie uogólnienie *algebraiczne*, w którym symbolami zastępujemy poszczególne liczby. Na podstawie takiego uogólnienia wnioskować możemy o przebiegu pojedynczego zjawiska. Jeżeli zaś rozważania chcemy odnieść do zbioru elementów, nie zajmując się każdym z nich z osobna, to użyjemy metody *macierzowej* zastępując dany zbiór liczb lub symboli algebraicznych pojedynczym symbolem macierzowym. Geometrycznie biorąc jest to przejście od układu o r stopniach swobody do pojedynczego punktu w przestrzeni r -wymiarowej. W postępowaniu takim kryje się jednak poważne niebezpieczeństwo. Ujęcie macierzowe skróciło formę zapisu, ale do poznania zjawiska nie wniosło nowych elementów, gdyż otrzymane wnioski odnoszą się tylko do pewnych warunków, czyli do wybranego układu współrzędnych.

Jeżeli chcemy zmienić układ współrzędnych, czyli rozciągnąć dane równanie na całą grupę zjawisk o analogicznych właściwościach lub zbać wpływ jednego z parametrów (współrzędnych) danego przebiegu, to staje się nieodzowne znalezienie *inwariantnych* cech tej grupy elementów, a więc metody przejścia z jednego układu współrzędnych na inne. Staje się więc rzeczą konieczną zastosowanie metody *tensorowej*. Zależnie od charakteru badanego obiektu geometrycznego (zjawiska fizycznego) oraz od stopnia zmian i uogólnień, jakie mamy wprowadzić, zmienia się rodzaj potrzebnej transformacji tensorowej.

Schematyczna klasyfikacja metod transformacji przydatnych w technice jest dość ryzykowna i może doprowadzić do zupełnie błędnych wniosków, jak to miało miejsce w pracach G. K r o n a, [45], i [47]. Wydaje się natomiast rzeczą logiczną przeprowadzenie podziału opartego na roz-

różnieniu celu, któremu ma służyć transformacja. W poglądowy sposób można tu rozróżnić trzy grupy problemów technicznych, którym podporządkować można swoiste metody transformacji tensorowych.

(1) Najprostszy typ transformacji ogranicza się zazwyczaj do przesunięcia lub obrotu sztywnego układu współrzędnych. Transformacja ta ma na celu zbadanie właściwości danego obiektu geometrycznego bez czynnego wkraczania w przebieg zjawiska. Poglądowo można powiedzieć, że obserwator, znajdujący się na układzie osi współrzędnych luźno związanych z badanym obiektem, a więc nie podlegających zmianom zachodzącym w obiekcie, ogląda ten obiekt z różnych stron.



Rys. 7

Przykładem tej metody będzie np. obliczenie za pomocą transformacji tensorowej naprężeń panujących w różnych przekrojach bryły przestrzennej. Jeżeli w pierwotnym kartezjańskim układzie współrzędnych wyznaczyliśmy tensor naprężeń $\|\sigma\|$ (rys. 7) o składowych σ_{ij} , to dla znalezienia sił normalnych F_n i stycznych F_t , panujących w pewnej płaszczyźnie P , trzeba w ten sposób obrócić osie współrzędnych, aby w nowym układzie X^i np. oś X^1 była równoległa do kierunku normalnej do płaszczyzny. Posługujemy się w tym celu transformacją analogiczną do (11)

$$(36) \quad \sigma'^{kl} = \sum_{i,j} C_i^k C_j^l \sigma^{ij};$$

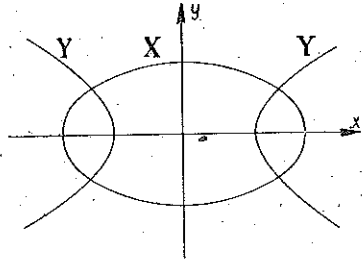
składowe σ'^{kl} dają żądane składowe sił.

(2) Bardziej skomplikowana transformacja będzie potrzebna wówczas, gdy będziemy chcieli formalnie przekształcić badany obiekt geometryczny. Przekształcenie takie może mieć na celu uproszczenie rozpatrywanego zjawiska lub sprowadzenie dwóch różnych obiektów do obiektów o tej samej postaci w celu ich porównania. Po rozpatrzeniu takiego uproszczonego obiektu musimy z powrotem transformować wyniki na układ pierwotny, czyli dokonać transformacji, która ma za zadanie wyciągnięcie wniosków o obiekcie bardziej skomplikowanym na podstawie prostego obiektu. We wszystkich tych przypadkach transformacja wpływa na formalny opis zjawiska nie zmieniając jego istotnego przebiegu. Zależnie od rodzaju obiektu i wymaganego stopnia uproszczenia trzeba przy tego rodzaju problemach posługiwać się transformacją przez przesunięcie lub obrót, bądź też zmianę układu osi współrzędnych, co oznacza zmianę podstawowego tensora metrycznego. Na przykład, chcąc sprowadzić układ trzech symetrycznych cewek sprzężonych do trzech niezależnych obwodów wystarczy transformacja przez obrót w układzie kartezjańskim, jeżeli natomiast przepływ cieczy w przewodzie eliptycznym chcemy spro-

wadzić do przepływu w rurze okrągłej, to potrzebna jest transformacja osi odniesienia. Dla walca o przekroju kołowym podstawowy tensor metryczny $\|g_0\|$ wyznaczony był przez równanie (25), gdy dla przekroju elipsoidalnego przy wprowadzeniu osi ortogonalnych XY (rys. 8)

$$(37) \quad \|g_e\| = \begin{vmatrix} a\sqrt{\cosh^2 X - \cos^2 Y} & 0 & 0 \\ 0 & a\sqrt{\cosh^2 X - \cos^2 Y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Współrzędna Z pozostaje niezmienniona, można więc ją opuścić. Transformacji dokonamy posługując się wzorem (22). Transformacje tego typu możemy sobie uzmysłowić jako oglądanie przedmiotu w krzywym zwierciadle, które nadaje obrazowi pożądanę przez nas uproszczone zarysy.



Rys. 8

(3) Wreszcie celem trzeciego typu transformacji jest *odwzorowanie rzeczywistych procesów* zachodzących w obiekcie przez zmianę układu współrzędnych. Gdy w obu poprzednich problemach osie współrzędnych były niejako luźno związane z obiektem, a transformacja miała charakter formalny, uzależniony od położenia (pierwszy problem) lub sposobu patrzenia (drugi problem) postronnego widza, to w ostatnim problemie transformacja jest wyrazem istotnego przebiegu zjawiska fizycznego. Obserwator, zamiast patrzeć z boku, został przyczepiony do pewnego elementu układu (np. do cząstki materii i z tego stanowiska widzi zjawiska. Problemy tego typu są nadzwyczaj różnorodne, przeważnie wymagają one transformacji na współrzędne krzywoliniowe i przejścia od przestrzeni euklidesowej do przestrzeni $Riemann$ a. W wielu jednak przypadkach sprawa ogranicza się do przesunięcia lub obrotu osi współrzędnych. Najprostszym przykładem jest odwzorowanie względnego ruchu dwóch obiektów przez odpowiednie przemieszczenie osi współrzędnych. Często metoda ta jest stosowana przy badaniu odkształceń ośrodka ciągłego, mianowicie ze współrzędnych nieruchomych x^i przechodzimy na współrzędne X^i związane z materią odkształconego ośrodka (współrzędne *Lagrange'a*). W nowych współrzędnych otrzymujemy znacznie prostszą postać niektórych wzorów, opląca się zatem użycie skomplikowanego układu odniesienia. Na przykład praca dL naprężeń σ^{kl} powodujących przemieszczenia δu_l da się przedstawić w osiach odkształconych X^i różniczkami absolutnymi

$$(38) \quad dL = \frac{1}{2} \sum_{kl} \int_V \sigma^{kl} \left[\frac{D \delta u_k}{D X^l} + \frac{D \delta u_l}{D X^k} \right] dX^1 dX^2 dX^3,$$

co sprawiałoby trudność, gdyby równanie to odnosiło się do osi x' . Powyższy podział da się streścić w następujący sposób:

grupa 1 obejmuje transformacje formalne nie zmieniające postaci obiektu,

grupa 2 obejmuje transformacje formalne powodujące zmianę postaci (składowych) obiektu,

grupa 3 obejmuje transformacje odwzorowujące rzeczywiste zmiany w obiekcie.

W zastosowaniach będziemy mieli czasem do czynienia z kombinacją różnych grup transformacji, najczęściej będzie to dotyczyło badania za pomocą transformacji grupy pierwszej właściwości obiektu, który uległ transformacji grupy trzeciej.

Transformacje takie występują w wielu zagadnieniach fizyki, jeżeli posługujemy się równoległe różnymi typami współrzędnych, np. współrzędnymi *E u l e r a* i *L a n g r a n g e'* a. Przyjęty tu podział wydaje się znacznie logiczniejszy od koncepcji *K r o n a*, [45], która nigdy nie znalazła udokumentowania w praktycznych zastosowaniach.

Uzyskanie formuły, uogólniającej w formie równania tensorowego szczególne zależności, występujące w jakiejś konstrukcji czy procesie technologicznym, nie zadowoli jednak praktycznych wymagań inżyniera. W celu uzyskania przydatnego technicznie rozwiązania, po wykonaniu generalizacji obiektu metodą tensorową, przejść trzeba drogę powrotną do coraz bardziej szczegółowych przypadków. Należy zatem rozwinąć tensory na odpowiednie macierze, następnie znaleźć wartości algebraiczne tych macierzy i wreszcie podstawić wartości liczbowe, znajdując potrzebne dane techniczne.

Nasuwa się wobec tego pytanie, czy istotnie dla potrzeb techniki lub nauk technicznych potrzebne jest to uogólnienie. Równie dobrze można zapytać, czy z doliny (od znanych wartości numerycznych) warto iść na górę (ku uogólnieniom), aby potem znów zejść w doliny (do wartości numerycznych poszukiwanych). Czy nie byłoby lepiej wędrować dolinami, to jest stosować stopniowe przeliczanie wartości liczbowych.

Otóż przedłużając nasze porównanie można powiedzieć, że na szczyt góry warto wejść w czterech przypadkach: (1) jeżeli chcemy zbadać, z czego składa się wierzchołek góry, (2) jeżeli pragniemy obejrzeć widok ze szczytu, (3) gdy droga przez góry okaże się w wyniku łatwiejsza niż bardzo długa droga dolinami, i, wreszcie, wówczas (4) gdy dolina jest całkowicie otoczona górami, nie ma więc z niej innego wyjścia.

Podobnie jest w naszym przypadku. Błędne byłoby twierdzenie, że rachunek tensorowy jest wszędzie i zawsze przydatny; nie ma sensu silić się na jego zastosowanie wówczas, gdy kompletny i jasny opis zjawiska dają prostsze metody, chyba że zależy jedynie na ilustracji zasto-

sowania symboli tensorowych. Tam jednak, gdzie użycie pojęć tensorowych jest uzasadnione, mogą one dać poczwórną korzyść.

(1) Proste w swej formie algebraicznej wzory tensorowe ujmują w sposób *syntetyczny* bardzo skomplikowane przebiegi i pozwalają technikowi zorientować się w generalnych zależnościach, które rządzą projektowanym przez niego urządzeniem. Równanie takie, nawet bez rozwiązania numerycznego, pozwala konstruktorowi na wpołintuicyjne określenie, w jaki sposób należy dobrać parametry układu, aby uzyskać zamierzony efekt, lub też daje możliwość zorientowania się, jak wpłynie zmiana jednego z elementów na działanie całego urządzenia. Ustalenie typów tensorów opisujących badaną grupę zjawisk pozwala na ich *sklasyfikowanie*, daje zatem możliwość określania charakteru zmienniczości i inwariantnych związków, łączących poszczególne części danego urządzenia czy też czynniki procesu technologicznego. W ten sposób głębiej wnikamy w istotę zjawisk fizycznych. Zamiast rzutu oka z jakiejś określonej perspektywy, mogącej wytworzyć złudne skróty obrazu, oglądamy obiekt ze wszystkich stron, wyławiając jego istotne cechy, a odrzucając przypadkowe deformacje obrazu zależne od kierunku patrzenia.

(2) Równania tensorowe mają identyczną postać dla bardzo różnych zjawisk fizycznych. Raz ustalone zależności można więc stosować do różnych dziedzin techniki. Ten właśnie aspekt zagadnienia jest dla autora osobiście szczególnie atrakcyjny, pozwala bowiem na bardziej przejrzyste niż w dotychczasowych pracach, [58] i [59], ujęcie *analogii* elektromechanicznych. Nie będziemy tu powtarzać podanych wówczas motywów decydujących o wadze zagadnienia analogii we współczesnej technice. Podkreślić tylko wypada, że rachunek tensorowy posiada w tym zakresie ogromne walory dydaktyczne.

W możliwości operowania tymi samymi związkami w różnych dziedzinach nauk technicznych tkwi jeszcze, oprócz zagadnienia analogii, inna ważna korzyść praktyczna. Chodzi o to, że obecne problemy techniczne, zwłaszcza problemy, które przed nami stawia *kompleksowy* przemysł gospodarki ludowej, są z reguły wieloparametrowe i bardzo różnorodne, wiążące się z zupełnie odrębnymi dziedzinami wiedzy. Otóż przy metodzie tensorowej możemy, przynajmniej symbolicznie, operować dowolną ilością zmiennych (wektorów podstawowych), a wskaźniki zmienniczości pozwalają na zorientowanie się, jaki jest wpływ poszczególnych czynników.

(3) O ile chodzi o *rachunkowe zastosowanie* metody tensorowej, a więc zejście do rozwiązań numerycznych, to sytuacja wygląda analogicznie jak przy użyciu algebry macierzowej, do niej bowiem sprowadzają się działania arytmetyczne, które trzeba wykonać przy rozwijaniu tensorów. Sprawa ta była w swoim czasie przedmiotem dyskusji w Zakładzie Elek-

rotechniki Teoretycznej PAN; wartościowe uwagi zawiera praca T. Cholewickiego, [14]. Zainteresowani znajdą szczegóły w podręcznikach specjalnych, [25]. O przydatności rachunku macierzowego (i tensorowego) decyduje tu stopień skomplikowania zagadnienia i jego powtarzalność. Pojedynczy obwód prądowy lub rozkład naprężeń w mało skomplikowanej bryle na pewno łatwiej rozwiążemy rachunkiem elementarnym (pójdziemy do celu dolinami). Natomiast przy zagadnieniach wymagających żmudnych i często powtarzających się przeliczeń metoda macierzowa staje się przewodnikiem i organizatorem rachunku, pozwala bowiem, jak już wspomnieliśmy, na zautomatyzowanie obliczeń. Trudno się jeszcze zorientować, w jakim stopniu rachunek tensorowy i macierzowy będzie przydatny przy posługiwaniu się maszynami matematycznymi. Wydaje się jednak, że zarówno przy opracowaniu programu, jak i przy ustalaniu analogii będzie on bardzo użyteczny.

(4) Trzeba wreszcie stwierdzić, że są pewne problemy, które nie dadzą się w ogóle praktycznie rozwiązać bez użycia metody tensorowej, co oznacza, że zastosowanie rachunkowe tej metody do istotnego numerycznego rozwiązania zagadnienia sięga dalej niż zastosowanie metody macierzowej. Wynika to z wyżej omówionego faktu, że metoda macierzowa nadaje się tylko do określonego typu współrzędnych, podczas gdy przechodząc na równania tensorowe możemy operować przestrzenią o niemal dowolnych własnościach. Możemy zatem skomplikowane zagadnienia — nie dające się rozwiązać w układzie odwzorowywanym według praw geometrii euklidesowej — sprowadzić do stosunkowo prostych zależności obowiązujących przy odpowiednio dobranych współrzędnych krzywoliniowych [problemy grupy (2) i (3)].

Przejdźmy teraz do zbadania, jak te ogólne wytyczne dostosować do różnych gałęzi techniki. Byłoby rzeczą niecelową przypadkowe wymienianie tych dziedzin, w których sporadycznie spotykamy przykłady użycia metody tensorowej. Należy raczej zapytać, jakie są podstawowe problemy techniki dające się wyrazić i rozwiązać symbolami tensorowymi.

5. Wielkości tensorowe w ośrodkach ciągłych

Na wstępie stwierdziliśmy, że rachunek tensorowy powstał z potrzeb kryształografii i teorii sprężystości rozwijając się przede wszystkim jako narzędzie badania kontinuum r -wymiarowego. Obecnie jednak znaleziono już, [3], [6], dogodne metody adaptacji tego rachunku do systemów o stałych skupionych. Rachunek tensorowy może zatem przeniknąć do elektrotechniki i mechaniki zarówno przez zagadnienia pola, jak i przez problemy systemów. Używać będziemy nazwy *system* dla określania obiektu składającego się z elementów skupionych, natomiast termin *układ* rezerwujemy nadal dla zespołu osi odniesienia.

Zachowamy historyczną kolejność i zaczniemy od zagadnienia pola abstrahując na razie od tego, czy jest to pole sił sprężystych, czy też pole elektromagnetyczne. Należy przede wszystkim zbadać, jaki charakter tensorowy mają występujące w polu wielkości fizyczne, co pozwoli na prawidłowe ułożenie równań tensorowych i ocenę ich przydatności.

Przedtem jednak musimy uzupełnić nasze wiadomości dotyczące różnego typu niepełnych tensorów, jakie skonstruować możemy w przestrzeni metrycznej i wektorowej. Użyjemy przy tym możliwie prostych określeń, nie wdając się w subtelności wprowadzone przez niektórych autorów, [55].

Poprzednio mówiliśmy, że tensor antysymetryczny może być przedstawiony w formie multiwektora. Ta interpretacja fizikalna ma sens wówczas, gdy rząd tensora n jest mniejszy od ilości współrzędnych p . W przypadku gdy n równa się r , a tensor jest antysymetryczny względem wszystkich indeksów, wartość różną od zera będzie miał tylko wyraz i, j, \dots, r tego tensora, mianowicie wyraz nie zawierający dwóch jednakowych indeksów. Pozostałe wyrazy równe są zeru. Tensor tego typu daje się więc przedstawić pojedynczą liczbą, która jednak nie jest skalar, lecz tzw. pseudoskalar, gdyż zmienia swą wartość zależnie od układu współrzędnych. Oznaczmy go literą gotycką \mathfrak{A} . Używa się również oznaczenia literami pisanymi półgrubym drukiem, [74].

W problemach technicznych i fizycznych nie stoi na przeszkodzie, aby przyjąć jako stałe obowiązującą pewną kolejność indeksów, podobnie jak to robimy w rachunku wektorowym, oznaczając zwrot wektora względem osi. Wtedy naszemu pseudoskalarowi przypisujemy jeszcze określony zwrot (według S c h o u t e n a jest to tzw. W -skalar, [74].

W jaki sposób transformuje się pseudoskalar przy zmianie współrzędnych? Na podstawie wzoru (10), zważywszy ponadto znikanie składników o dwóch lub więcej jednakowych indeksach, otrzymamy

$$(39) \quad \mathfrak{A} = \begin{matrix} \Delta^{\alpha} & \mathfrak{A} \\ (L) & (M) \end{matrix} \begin{cases} \alpha = 1 & \text{dla tensora kontrawariantnego,} \\ \alpha = -1 & \text{dla tensora kowariantnego.} \end{cases}$$

Litery w nawiasach nie mają tu takiego znaczenia jak indeksy w zwykłych równaniach tensorowych, służą jedynie do określenia, do jakiego systemu współrzędnych odnosi się pseudoskalar (litery duże) i czy powstał on z wektora kontrawariantnego (indeks górny), czy też kowariantnego (indeks dolny). Ważną własnością pseudoskalara jest zależność jego transformacji od rodzaju zmienniczości wyjściowego tensora. W geometrii wektorowej oznacza to istotną różnicę cech danego zjawiska. W geometrii metrycznej sprawa daje się z łatwością wyjaśnić, mianowicie ilo-

czyn składników o różnych indeksach będzie miał w tensorze kontrawariantnym postać

$$(40) \quad \mathfrak{M}^{(x)} = x^1 x^2 x^3,$$

przedstawia zatem pojemność elementu przestrzennego. Odpowiedni iloczyn składników wektora kowariantnego

$$(41) \quad \mathfrak{M}_{(y)} = y_1 y_2 y_3,$$

przedstawia odwrotność pojemności, jakie tworzą odpowiednie wektory kontrawariantne. Stąd nazwa *gęstość skalarna*. Wygodne przy rozważaniach fizycznych rozróżnienia gęstości i pojemności skalarnej wprowadzone zostało przez L. Brillouin, [8]; inni autorzy mówią ogólnie o gęstości. Iloczyn gęstości przez pojemność

$$(42) \quad \mathfrak{M}_{(x)} \mathfrak{M}^{(y)} = K$$

jest wielkością niezmienniczą, która w ośrodku ciągłym odpowiada zawartości materii w danym elemencie.

Iloczyn gęstości (pojemności) przez dowolny tensor daje tzw. *gęstość (pojemność) tensorową*. Wielkości te można ogólnie nazwać *pseudotensarami*: D u b n o w, [20], używa terminu «tensor względny». W przestrzeni trójwymiarowej pojemność tensorowa jest powierzchnią o określonym kierunku normalnej i określonym zwrocie, stanowi zatem odpowiednik poprzednio wspomnianego biwektora kontrawariantnego. Dla odróżnienia pseudotensory oznaczają będziemy literami gotyckimi.

W przestrzeni metrycznej, ze względu na wzory (22) i (39), przejście z tensora A na pseudotensor \mathfrak{A} następuje za pomocą wielkości

$$(43) \quad A = (|\gamma|)^{k/2} \mathfrak{A} \begin{cases} k = -1 & \text{dla } \mathfrak{A}^{ij}, \\ k = +1 & \text{dla } \mathfrak{A}_{ij}, \end{cases}$$

gdzie γ jest wyróżnikiem podstawowego tensora metrycznego $\|g\|$.

Zauważymy mimochodem ważną w zastosowaniach technicznych zależność geometryczną, mianowicie rzeczywista objętość elementu dV w układzie współrzędnych x^i równa się

$$(44) \quad dV = (|\gamma|)^{1/2} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Zmiana wartości pseudoskalara następuje, jak widać z równania (39), jedynie wówczas, gdy zmieni się podstawowy tensor metryczny.

Przejście z tensorów właściwych na pseudotensory w wielu przypadkach bardzo upraszcza rachunek, gdyż tensor antysymetryczny rzędu n w przestrzeni r -wymiarowej, posiadający $r!/n!(r-n)!$ na ogół różnych od zera i różnych między sobą składowych, redukuje się do pseudotensora o $(r-n)$ składowych. Takim pseudotensorem pierwszego rzędu jest np. multiwektor o określonym zwrocie, który poprzednio rozpatrzyliśmy. W przestrzeni trójwymiarowej objętość tensorowa jest powierzchnią o określonym kierunku normalnej i określonym zwrocie; odpowiada ona biwektorowi kontrawariantnemu.

Mamy tu doskonałą logikę systemu wielkości tensorowych, pozwalającą na łatwe orientowanie się w skomplikowanych zagadnieniach wielowymiarowych.

W problemach elektrotechniki i drgań mechanicznych specjalne znaczenie mają tensory, których składniki są liczbami zespolonymi typu $a + jb$. Tensory takie przy odwróceniu przechodzą na tensory sprzężone o składowych typu $a - jb$. Tensory zawierające składniki proste i sprzężone, tzw. tensory *H e r m i t e ' a* czyli *spinory*, zajmują ważne miejsce w fizyce atomowej. W technice macierze tego typu znajdują zastosowania w zagadnieniach złożonych obwodów elektrycznych.

Wróćmy do określenia charakteru tensorowego wielkości pola. Postaramy się wyjść z interpretacji operatorów polowych w geometrii wektorowej, gdyż daje to najogólniejszy obraz zjawisk. Trzeba przy tym pamiętać, że wówczas od punktu do punktu zmieniają się prawa transformacji, a poziom indeksów określających zmienniczość musi pozostać nie naruszalny. Przypadek przestrzeni metrycznej traktować będziemy jako szczególny, jest on zresztą mniej interesujący i wyczerpująco rozważony w literaturze, np. [37].

Przejdźmy kolejno podstawowe operacje wektorowe, ograniczając się do sformułowania najważniejszych wzorów tensorowych.

Gradientem nazywamy pewien wektor G przyporządkowany funkcji skalarnej V (potencjałowi):

$$(45) \quad G = \text{grad } V;$$

można to również przedstawić przez formalne pomnożenie potencjału przez operator *H a m i l t o n a* ∇ (nabla), mający jednocześnie charakter wektorowy i będący symbolem różniczkowym (por. np. N. A. G o r k o w a, [32]):

$$(46) \quad G = \nabla V.$$

W postaci tensorowej gradient określamy wzorem

$$(47) \quad G_k = \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

W przestrzeni metrycznej wzór ten będzie uzupełniony do postaci

$$(48) \quad G_k = \frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial x^k},$$

gdzie l jest długością jednostkową, określoną przez jednostkowe składowe za pomocą wzoru (22). Za pośrednictwem tensora podstawowego przejść możemy w przestrzeni metrycznej na wygodniejszy w analizie geometrycznej wektor kontrawariantny

$$(49) \quad G^i = \sum_k \frac{g^{ik}}{l} \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

Następnym pojęciem jest *rotacja*

$$(50) \quad \mathbf{R} = \text{rot } \mathbf{B},$$

którą można formalnie przedstawić jako iloczyn zewnętrzny (wektorowy) operatora *H a m i l t o n a* przez wektor \mathbf{B} :

$$(51) \quad \mathbf{R} = [\nabla \cdot \mathbf{B}].$$

Składniki rotacji w formie tensorowej przedstawiają się następująco:

$$(52) \quad R_{ik} = \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \frac{\partial B_k}{\partial x^i}.$$

Jest to jednorodny tensor antysymetryczny, który odpowiada biwektorowi. Jeżeli wybierzemy jako obowiązujący pewien porządek indeksów tego tensora, to sprowadzimy rotację do gęstości tensorowej.

Przy przejściu do współrzędnych metrycznych ortogonalnych znajdziemy rzeczywiste długości składników wektora rotacji przez wprowadzenie jednostkowych długości $l_{(i)}$, $l_{(k)}$ przyporządkowanych wielkościom B_i , B_k ; przyjmując $B_i = B'_i/l_{(i)}$ oraz $B_k = B'_k/l_{(k)}$ otrzymujemy

$$(53) \quad R_{ik} = \frac{1}{l_{(i)} l_{(k)}} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (l_{(k)} B'_k) - \frac{\partial}{\partial x^k} (l_{(i)} B'_i) \right].$$

Ciekawe właściwości posiada w ujęciu tensorowym *diwergencja*. Równanie

$$(54) \quad D = \text{div } \mathbf{C}$$

przedstawia inaczej iloczyn wewnętrzny (skalarny) operatora *H a m i l t o n a* przez wektor

$$(55) \quad D = \nabla \cdot \mathbf{C}.$$

Diwergencja w przestrzeni r -wymiarowej ma następującą postać, w której nie sprecyzowaliśmy na razie charakteru tensorowego poszczególnych wielkości:

$$(56) \quad D = \sum_i \frac{\partial C^i}{\partial x^i}.$$

Zauważyć trzeba, że cała diwergencji przedstawia strumień wypływający z danego obszaru. Szukanie rozbieżności jest więc operacją wektorową, którą przeprowadzamy na wektorze kontrawariantnym C^i pomnożonym przez gęstość skalarną \mathcal{G} , czyli na gęstości tensorowej pierwszego rzędu (wektorowej) \mathcal{G}^i . Łatwo udowodnić, że wówczas diwergencja jest również gęstością skalarną, czyli że wzór (56) należy poprawnie napisać jako

$$(57) \quad \mathcal{D} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{G}^i}{\partial x^i}.$$

Rozumowanie pozostaje w mocy, jeżeli zamiast gęstości wektorowej wprowadzimy gęstość tensorową wyższego, np. n -rzędu w przestrzeni r -wymiarowej, pod warunkiem, że gęstość ta pozostanie całkowicie antysymetryczną; w przeciwnym razie pojawią się czynniki wyższego rzędu tensorowego. Możemy teraz podać ważną zależność dla gęstości tensorowej drugiego rzędu:

$$(58) \quad \mathcal{D}' = \text{Div } \mathcal{G}^{ij} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{G}^{ij}}{\partial x^i}.$$

Diwergencja jest tu wielkością wektorową, a nie jak w rachunku elementarnym skalarną, i dlatego piszemy ją dla odróżnienia z dużej litery.

W przestrzeni metrycznej, gdy szukamy rozbieżności pól zwykłych wektorów, rozumowanie jest uproszczone, gdyż przez operację $\mathcal{G}^i = \sqrt{|\gamma|} C^i$ przechodzimy od wektora do gęstości wektorowej. Dla współrzędnych ortogonalnych w przestrzeni trójwymiarowej, podobnie jak we wzorze (53), możemy przejść do długości rzeczywistych wektorów według wzoru

$$(59) \quad \text{div } C = \frac{1}{l_{(1)} l_{(2)} l_{(3)}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (l_{(2)} l_{(3)} C_1^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (l_{(1)} l_{(3)} C_2^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (l_{(1)} l_{(2)} C_3^3) \right].$$

Na uwagę zasługują jeszcze właściwości *laplasjanu* w ujęciu tensorowym. Możemy go napisać w postaci

$$(60) \quad \nabla^2 V = \text{div grad } V = \sum_k \frac{\partial^2 V}{(\partial x^k)^2};$$

jest to, inaczej mówiąc, iloczyn skalarny (kwadrat) operatora *H a m i l t o n a*:

$$(61) \quad \nabla^2 V = (\nabla \cdot \nabla) V.$$

W przestrzeni wektorowej wielkości takiej nie można w prosty sposób utworzyć, gdyż nie mamy przejścia od składowych kowariantnego wektora gradientu G_k do kontrawariantnego wektora potencjału o składowych B^i .

W przestrzeni metrycznej jest to manipulacja dająca ze skalaru skalar, która musi być przeprowadzona przy uwzględnieniu zmiany położenia indeksów:

$$(62) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|\gamma|} g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right).$$

Zamiast $\sqrt{|\gamma|}$ podstawić można odpowiednie długości jednostkowe, co dla osi ortogonalnych w przestrzeni trójwymiarowej daje dobrze znane z analizy wektorowej, [24], wyrażenie laplasjanu

$$(63) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{l_{(1)} l_{(2)} l_{(3)}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{l_{(2)} l_{(3)}}{l_{(1)}} \frac{\partial V}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{l_{(1)} l_{(3)}}{l_{(2)}} \frac{\partial V}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{l_{(1)} l_{(2)}}{l_{(3)}} \frac{\partial V}{\partial x^3} \right) \right].$$

Za pomocą analizy tensorowej pojęcia gradientu, rotacji i diwergencji można rozszerzyć nie tylko na wektory i skalary, ale i na tensory dowolnego rzędu. Wymienione operacje polegają tu na zmianie rzędu tensora, czego szczególnym przypadkiem są przekształcenia analizy wektorowej. Obowiązują przy tym następujące reguły:

- (1) *gradient tensora* ma rząd o 1 wyższy od tensora pierwotnego,
- (2) *diwergencja tensora* jest o 1 rząd niższa od tensora pierwotnego,
- (3) *rotacja tensora* wyraża się tensorem o 1 rząd wyższym, ale zawsze antysymetrycznym.

Istotne korzyści w ujęciu tensorowym dynamicznych przebiegów zachodzących w ośrodku ciągłym otrzymamy przez wprowadzenie czasu jako współrzędnej niezależnej lub związanej, co otwiera drogę do zastosowań rachunku tensorowego w zagadnieniach teorii drgań, [9]. Aby zachować fizyczną poprawność określeń, musimy tu zacerpnąć wzory ze szczególnej teorii względności. Jak wiemy, główną trudnością w przejściu z układu o współrzędnych nieruchomych do układu o współrzędnych ruchomych jest fakt niezmiennej prędkości światła (doświadczenie Michelsona). Zagadnienie to zostało rozwiązane w 1905 roku przez Ein-

s t e i n a za pomocą wprowadzenia pojęcia względności czasu i związanego z tym zasadniczego równania

$$(64) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 - c^2 t''^2,$$

z którego wynikają transformacje Lorentza, [7].

W technice — przynajmniej na razie — posługujemy się tak małymi prędkościami, że wielkość v^2/c^2 może być w transformacji Lorentza pominięta. Interesuje nas natomiast podana w 1908 roku przez Minkowskiego, [65], interpretacja geometryczna równania Einsteina. Ma ona duże znaczenie praktyczne, mimo pozornie abstrakcyjnej formy, którą w dodatku w antynaukowy sposób starano się zaciemnić różnymi idealistycznymi hipotezami. Minkowski wprowadza pojęcie współrzędnych czasowo-przestrzennych x, y, z, jct oraz pojęcie «wektora w świecie» wyznaczonego tymi współrzędnymi. Ruch punktu materialnego w przestrzeni przedstawia «linię w świecie».

Wielkości cosinusów kierunkowych są tu określone przez równanie

$$(65) \quad a_1 = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad a_2 = \frac{dy}{ds}, \quad a_3 = \frac{dz}{ds}, \quad a_4 = jc \frac{dt}{ds}.$$

Z transformacji Lorentza wynika

$$\frac{dt}{ds} = \frac{j}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

zaś $dx/dt, dy/dt, dz/dt$ są składowymi prędkościami v .

Jeżeli «linia w świecie» zlewa się z osią jct , $a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = 1$, to punkt materialny pozostaje w spoczynku. Zmiany prędkości tłumaczą się jako przesunięcia kątowe. Widzimy, że stwarza to bogate możliwości operowania tak wygodnymi w rachunku tensorowym pojęciami przestrzeni r -wymiarowej, przy czym zaniebdanie czynników wynikających z transformacji Lorentza znacznie przyspiesza obliczenia.

6. Metody tensorowe w technicznych zagadnieniach pola

Rachunek tensorowy odniesiony do ośrodków ciągłych znajduje liczne zastosowania w mechanice i elektrotechnice. Przedmiotem niniejszej pracy nie jest szczegółowe omawianie tych zastosowań, punkt ciężkości położyliśmy bowiem na samej metodzie podejścia do zagadnienia. Niemniej należy wymienić przynajmniej główne kierunki, w jakich rozwijają się lub będą się zapewne rozwijały zastosowania, aby na tym tle uwydatnić specyficzne dla techniki metody posługiwania się rachunkiem tensorowym.

Klasyczną dziedziną zastosowania rachunku tensorowego w technice są zagadnienia statyczne teorii sprężystości. Metody tensorowe w tej nau-

ce nie tylko były najdawniej znane i stosowane jeszcze przed właściwym sprecyzowaniem pojęć tensorowych [69], ale i nadal pozostaną zapewne stosunkowo najbardziej popularne. Wynika to z dwóch przyczyn:

(1) Tensor pola sił sprężystych jest łatwo dającą się wyobrazić, niemal namacalną, wielkością fizyczną. Specyficzne właściwości geometryczne elipsoidy naprężeń lub odkształceń są tak zrozumiałe, że wprowadzenie pojęcia matematycznego, które jednym symbolem ujęłoby te właściwości, narzuca się samo przez się.

(2) Obliczanie naprężeń i odkształceń w różnych przekrojach ośrodka spotyka się stale w konkretnych zagadnieniach technicznych, a jednocześnie stanowi typowy problem transformacji tensorowej.

Ze względu na bogatą i szeroko znaną literaturę przedmiotu (np. [32a]) nie będziemy się tutaj zajmowali teorią tensora sprężystości. Trzeba jednak podkreślić, że stopień przydatności metody tensorowej do istotnego rozwiązania problemów teorii sprężystości, a nie tylko do ich zwięzłego zapisu i wygodnej manipulacji, zależy w dużej mierze od rodzaju zagadnienia. Przy rozpatrywaniu w układzie osi kartezjańskich ośrodka izotropowego o liniowej charakterystyce — zależności matematyczne są stosunkowo proste i dadzą się wyrazić metodami elementarnymi. Niemniej transformacja tensorowa, należąca do problemów grupy (2), może tu oddać cenne usługi. Upraszcza ona kształt rozpatrywanego obszaru i daje wzory uwidoczniające wszystkie interesujące technika właściwości elipsoidy naprężeń i odkształceń.

Posługując się poprzednio omówioną metodą *Riemanna - Christoffela* uzyskuje się znaczną oszczędność przeliczeń i przejrzystą formę zależności. Jako przykład, [49], rozpatrzmy zachowanie się ośrodka sprężystego ograniczonego powierzchnią walcową. Zagadnienie polega na znalezieniu zależności tensora naprężeń $\|\sigma\|$ od tensora potencjału naprężeń $\|T\|$. Użyjemy współrzędnych walcowych ϱ , θ i z przyjmując, że tensor $\|T\|$ jest niezależny od kąta θ . Ograniczymy się do podania toku rozumowań wymagających gruntowniejszej znajomości rachunku tensorowego. Badaną zależność napiszemy w postaci tensorowej w sposób nierzwykły prosty:

$$(66) \quad \|\sigma\| = \text{Rot}(\text{Rot}\|T\|)_s,$$

gdzie indeks s oznacza, że drugą rotację wyznaczamy w stosunku do transponowanego, a nie prostego tensora ($\text{Rot}\|T\|$).

Tensor $\|T\|$ ma postać

$$\|T\| = \begin{vmatrix} t_{\varrho\varrho} & 0 & t_{\varrho z} \\ 0 & t_{\theta\theta} & 0 \\ t_{z\varrho} & 0 & t_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & t_{13} \\ 0 & t_{22} & 0 \\ t_{31} & 0 & t_{33} \end{vmatrix}.$$

Długość elementu liniowego wynosi

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\Theta)^2 + (dz)^2;$$

stąd tensor metryczny

$$(67) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \rho^2,$$

i symbole Christoffela

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\rho}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\rho, \quad \text{pozostałe } \Gamma_{jk}^i = 0.$$

Rotacja tensora $\|T\|$ jest tensorem 3-go rzędu o składowych

$$(68) \quad R_{ijk} = \frac{\partial t_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial t_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^r t_{ir} - \Gamma_{ik}^r t_{jr}.$$

Dzieląc te składowe przez $\sqrt{|\gamma|}$ odwracamy charakter ich zmienniczości względem ij , traktowanych jako łączny indeks l . W ten sposób otrzymujemy tensor mieszany $\|S\|$ o składowych S_k^l , który po transponowaniu daje kowariantny tensor

$$(68.1) \quad \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \rho \left(\frac{\partial t_{13}}{\partial \rho} - \frac{\partial t_{11}}{\partial z} \right) & 0 \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial t_{22}}{\partial z} - \rho t_{13} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial t_{22}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} t_{22} + \rho t_{11} \right) \\ 0 & \rho \left(\frac{\partial t_{33}}{\partial \rho} - \frac{\partial t_{13}}{\partial z} \right) & 0 \end{array} \right\|.$$

Łatwo teraz obliczyć składowe $\|\sigma\|$ jako rotację ostatniego tensora:

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 t_{22}}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial t_{33}}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial t_{13}}{\partial z}, \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial t_{22}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} t_{22} + \rho t_{11} \right), \\ \sigma_{22} = \rho^2 \left(\frac{\partial^2 t_{33}}{\partial \rho^2} - 2 \frac{\partial^2 t_{13}}{\partial \rho \partial z} + \frac{\partial^2 t_{11}}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_{33} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 t_{22}}{\partial \rho^2} - \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial t_{22}}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^4} t_{22} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial t_{11}}{\partial \rho}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0. \end{array} \right.$$

Równania te można przedstawić w dogodniejszej formie wprowadzając wspomniane wyżej fizyczne składowe tensorów oznaczone * (gwiazdką). Dochodzimy do nich przez transformację

$$t_{ij}^* = \frac{t_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}},$$

$$t_{11}^* = t_{11}, \quad t_{22}^* = \frac{t_{22}}{\rho}, \quad t_{33}^* = t_{33}, \quad t_{13}^* = t_{13}.$$

Dalsze przeliczenie nie nastęrcza większych trudności. Przykład ten wskazuje dobitnie na zwiezłość przeprowadzonego rachunku i drogę dojścia do numerycznych wyników poprzez uogólnienie tensorowe. Również pożyteczna jest wyżej wspomniana transformacja tensorowa odniesiona do *ośrodka odkształconego*, należąca do (3) grupy zagadnień. Szereg przykładów zastosowania tej transformacji znajdziemy w pracach specjalnych, [8], [42]. Autor wykorzystał tę transformację do obliczenia ciśnienia promieniowania fali ultradźwiękowej, [61].

Klasyczna teoria sprężystości operuje odkształceniami nieskończenie małymi. Taki uproszczony obraz zjawisk nie zawsze jednak nas zadowala nie tylko pod względem teoretycznym, ale i w zastosowaniach praktycznych. Dlatego poświęcono dużo uwagi zbadaniu *odkształceń skończonych*, które występują przede wszystkim w szeroko stosowanych w nowoczesnej technice materiałach o dużej podatności jak guma i plastyki, [2].

Otóż do rozwiązywania zagadnień z zakresu odkształceń skończonych rachunek tensorowy staje się niezbędnym narzędziem. Wynika to z dwóch powodów.

(1) Teoria odkształceń nieskończenie małych operuje jednym układem współrzędnych, gdy dla odkształceń skończonych posługujemy się dwoma odmiennymi układami związanymi z ośrodkiem współrzędnymi *L a g r a n g e' a*, przy których za punkt wyjścia przyjmuje się pierwotny (nieodkształcony) stan ośrodka, i sztywnymi współrzędnymi *E u l e r a*, opartymi na ośrodku już odkształconym. Przy przejściu z jednych współrzędnych do drugich nieodzowne staje się, zazwyczaj, użycie krzywoliniowego układu odniesienia, a więc posługiwanie się pojęciami geometrii *R i e m a n n a*.

(2) Przy odkształceniach nieskończenie małych pominąć można wyrazy rzędu drugiego i wyższych, co bardzo upraszcza rachunek. Dla odkształceń skończonych takie uproszczenie jest, oczywiście, niesłuszne; pociąga to za sobą niewygodne skomplikowanie wzorów elementarnych. Używając natomiast rachunku tensorowego i wprowadzając symbole *Christoffela* możemy pozostać przy klasycznych zależnościach zawierających jedynie odpowiednie poprawki.

Dla zilustrowania zalet metody, rozpatrzmy składowe tensora odkształceń skończonych, [51]. Przy odkształcaniu ośrodka odległość między dwoma sąsiednimi jego elementami P i P' zmienia się z pierwotnej ds na $d\bar{s}$. Ze stosunków geometrycznych wynika

$$(70) \quad (d\bar{s})^2 - (ds)^2 = 2 d\mathbf{r} (d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u}) + (d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u})^2,$$

gdzie \mathbf{r} jest promieniem (wektorem poprowadzonym z początku układu) punktu P , $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ promieniem punktu P' (do chwili odkształcenia $d\mathbf{r} = ds$), a \mathbf{u} wektorem przemieszczenia punktu P .

Przy odkształceniach skończonych nie możemy, jak to się robi dla odkształceń nieskończenie małych, pominąć ostatniego wyrazu równania (70). Zamiast jednak wykonywać skomplikowany rachunek elementarny, znacznie logiczniejsze i łatwiejsze będzie sprowadzenie tego równania do formy dwuliniowej:

$$(71) \quad (d\bar{s})^2 - (ds)^2 = 2 (d\mathbf{r} \cdot \varepsilon_{ij} r^i) (r^j d\mathbf{r}).$$

Jeżeli ε_{ij} charakteryzuje odkształcenie w danym punkcie, to $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} r^i r^j$ są składowymi tensora odkształceń we współrzędnych Lagrange'a. Z równania (70)

$$(72) \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j}.$$

Z drugiej strony postępując się równaniem (22) otrzymamy

$$(72.1) \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij} - g_{ij}),$$

gdzie g_{ij} i \bar{g}_{ij} są tensorami metrycznymi ośrodka przed i po odkształceniu. Jeżeli wychodzimy ze współrzędnych kartezjańskich, to g_{ij} redukuje się do symbolu *Kroneckera* [równanie (9)].

Widzimy, że zagadnienie sprowadza się do równań tensorowych używanych w klasycznej teorii sprężystości. Różnica polega na tym, że składowe odpowiednich tensorów nie są tu wielkościami stałymi.

Niezaprzeczone usługi oddaje rachunek tensorowy w badaniach ośrodków *anizotropowych*, [53], i to zarówno kryształów, jak i ośrodków o makroskopowej, sztucznej lub naturalnej, strukturze anizotropowej. Zagadnienia te są interesujące przede wszystkim dla budownictwa, gdzie spotykamy się często z elementami anizotropowymi. Jednak i w innych dziedzinach — nieraz od siebie bardzo odległych — występują przebiegi w ośrodkach anizotropowych, dające się doskonale ująć metodą tensorową. Wymienić tu można badania rozchodzenia się *fal ultradźwiękowych* w ośrodkach uwarstwionych. Praca nad tym zagadnieniem, [44], była zresztą punktem wyjścia do bliższego zajęcia się przez autora sprawą zastosowań rachunku tensorowego.

Rachunek tensorowy stał się niezbędnym narzędziem w pracach nad drganiami *elementów piezoelektrycznych*, mających podstawowe znaczenie w telekomunikacji. Przypomnijmy, że w krytalografii mamy do czynienia z nader skomplikowanymi zagadnieniami anizotropii (36 współczynników), dotyczącymi 32 klas kryształów, i że anizotropię wykazują nie tylko wielkości mechaniczne, ale również własności elektromagnetyczne kryształów, [63]. Dla zorientowania się w rodzaju zagadnienia wystarczy zestawień występujących przy drganiu kryształów efekty fizyczne; niżej podano, [11], charakter tensorowy parametrów tych wielkości (S = skalar, V = wektor, T = tensor 2-go rzędu):

Zjawisko	Parametry
sprężystości	$T \quad T$
dielektryczne	$V \quad V$
piezooptyczne	$T \quad T$
piezomagnetyczne	$T \quad V$
piezoelektryczne	$T \quad T$
elektrooptyczne	$T \quad V$
pyroelektryczne	$S \quad T$
rozszerzalności cieplnej	$S \quad T$
tarcia wewnętrznego	$T \quad T$

Również w niektórych zagadnieniach *hydro- i aerodynamiki* można posługiwać się metodą tensorową. W hydrodynamice klasycznej zakres jej zastosowań jest mniejszy niż w mechanice ciała stałego, gdyż w przeważnej liczbie przypadków nie występują tu siły ścinające i zagadnienie sprowadza się do tensorów kulisto-symetrycznych, które można przedstawić prościej klasycznymi metodami analizy. Natomiast w problemach przepływów cieczy lepkich i przy badaniu przepływów naddźwiękowych rachunek tensorowy może być w pełni wykorzystany. Na przykład, dla przepływów w cieczach lepkich, [17], obowiązuje równanie tensorowe

$$(73) \quad -\frac{\partial p}{\partial x^k} + g^{it} \frac{\partial E_{ki}}{\partial x^t} + \rho F_k = \rho f_k,$$

gdzie p jest ciśnieniem, f wektorem przyspieszenia, F siłą masową oraz ρ gęstością ośrodka.

W równaniu tym E_{ki} jest tensorem lepkości (wiskozy) zależnym od współczynników lepkości γ_{ik}^{mn} i odkształceń ośrodka W_{mn} :

$$E_{ki} = \gamma_{ki}^{mn} W_{mn}.$$

Odpowiednio dobierając tensor metryczny g^{it} znaleźć możemy dogodny sposób liczbowego wyrażenia interesujących nas zależności $p(f)$ dla skomplikowanych geometrycznie przypadków.

Rozszerzenie równań hydrodynamiki na przestrzeń nieeuklidesową zostało podane w pracy J. Litwiniszyna, [54].

W ostatnich latach żywe zainteresowanie, zarówno uczonych jak i konstruktorów, wzbudziły zagadnienia *reologii*, tj. nauki traktującej o zmianach zachodzących w czasie w ośrodku poddanym działaniu sił zewnętrznych. Na przykład, sprawa pełzania metali i betonu stała się poważnym zagadnieniem gospodarczym, oczekującym teoretycznego ujęcia. W zagadnieniach reologicznych rachunek tensorowy daje najwygodniejsze przedstawienie zależności fizycznych. Mamy tu do czynienia z uogólnieniem pojęcia tensora odkształceń ε_{ij} na skutek wprowadzenia tensora szybkości zmiany odkształceń $\partial \varepsilon_{ij} / \partial t$. Sprawę komplikuje fakt, że przy ustalaniu zależności między naprężeniami σ_{ij} i odkształceniami ε_{ij} trzeba uwzględnić *odkształcenia plastyczne*, [31], przy których występują nieliniowe zależności między σ_{ij} i ε_{ij} . Właśnie przez użycie równań tensorowych sens fizyczny tych złożonych procesów zostaje wyraźnie uwypuklony. Widać to na przykładzie ogólnego równania tensora szybkości odkształceń

$$(74) \quad \frac{d \varepsilon_{ij}}{d t} = F_0(J_1, J_2, J_3) \delta_{ij} + F_1(J_1, J_2, J_3) \sigma_{ij} + F_2(J_1, J_2, J_3) \sum_k \sigma_{ik} \sigma_{kj},$$

gdzie F_0, F_1, F_2 są niezmienniczymi funkcjami niezmienników J_1, J_2, J_3 tensora naprężeń σ_{ij} a δ_{ij} , symbolem *Kroneckera*. Równanie to po wyznaczeniu niezmienników staje się bardzo przejrzyste i pozwala na obliczenie pełzania materiału w różnych przekrojach. Dlatego również uogólnienia prac doświadczalnych, zmierzające np. do ujęcia zjawiska *pełzania betonu*, [4], przedstawiane bywają w postaci równania tensorowego o empirycznie ustalonych współczynnikach.

Zastosowania rachunku tensorowego do badania zagadnień technicznych *rozkładu pola elektromagnetycznego* i elektrodynamiki pól nie mają takich tradycji i nie są tak rozwinięte, jak zastosowania w mechanice. Zakres przydatności rachunku jest jednak analogiczny. Trzeba zaznaczyć, że niektóre podstawowe równania pola elektromagnetycznego są w formie tensorowej nadzwyczaj proste i łatwe do stosowania w złożonych układach, w których niezbędne jest wprowadzenie współrzędnych krzywoliniowych.

W innej pracy, [59], analizując podobieństwa pola sprężystości i pola elektromagnetycznego, autor przechodzi od wielkości tensorowych do operatorów wektorowych. Otrzymane rezultaty, przydatne do prostych układów, nie odznaczają się zbytnią jasnością w rozważaniach ogólnych. Tymczasem posługiwanie się wielkościami tensorowymi daje bardzo przejrzystą i ogólną interpretację matematyczną, która po odpowiednim przystosowaniu z korzyścią służyć może potrzebom techniki.

W związku z powiększeniem napięć i mocy w urządzeniach energetycznych i coraz lepszym wykorzystaniem obwodów magnetycznych, wzrasta znaczenie techniczne przebiegów *nieliniowych* w polu elektromagnetycz-

nym. Berendiejew, [6], zwrócił uwagę na pewne możliwości, jakie kryje rachunek tensorowy przy rozwiązywaniu nieliniowych zagadnień elektrotechniki. Dotyczą one przede wszystkim zagadnień pola, choć dają się użyć także do obwodów elektrycznych.

Jest rzeczą charakterystyczną, że gdy w mechanice punkt ciężkości zastosowania rachunku tensorowego do ośrodków ciągłych leży dotychczas w zagadnieniach statyki, to w elektrotechnice chodzi prawie wyłącznie o przebiegi falowe, a więc dynamiczne. Dlatego w badaniach pola elektromagnetycznego występują przeważnie wzory tensorowe w układzie czterech zmiennych x^i (czasoprzestrzeń). Dla przykładu podajemy równania Maxwella, [36], przedstawione w postaci tensorowej przez Minkowskiego:

$$(75) \quad \begin{cases} \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = s^i, & \frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0, \\ \frac{\partial F^{*ik}}{\partial x^k} = 0, & F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}. \end{cases}$$

We wzorach tych H^{ik} , F^{*ik} i F_{ik} są to tensory antysymetryczne, wyrażające się następująco:

$$(76) \quad H^{ik} = \begin{vmatrix} 0 & H^z & -H^y & -jD^x \\ -H^z & 0 & H^x & -jD^y \\ H^y & -H^x & 0 & -jD^z \\ jD^x & jD^y & jD^z & 0 \end{vmatrix},$$

$$(77) \quad F_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & B_z & -B_y & -jE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -jE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -jE_z \\ jE_x & jE_y & jE_z & 0 \end{vmatrix},$$

$$(78) \quad F^{*ik} = \begin{vmatrix} 0 & E_x & -E_y & jB_x \\ -E_x & 0 & E_z & jB_y \\ E_y & -E_z & 0 & jB_z \\ -jB_x & -jB_y & -jB_z & 0 \end{vmatrix}.$$

F^{*ik} nazywamy tensorem dualnym F_{ik} .

Pozostałe wielkości we wzorach (75) oznaczają:
współrzędne przestrzennoczasowe

$$x^i = x, y, z, jct,$$

potencjał

$$\varphi = A_x, A_y, A_z, jK$$

(A potencjał wektorowy indukcji magnetycznej \mathbf{B} , $K =$ potencjał skalarny pola elektrycznego \mathbf{E}),

wektor gęstości przepływu ładunku (prądu)

$$\frac{s^i}{4\pi} = \sigma_0 v^x, \sigma_0 v^y, \sigma_0 v^z, j\sigma_0 c$$

(v jest prędkością ładunku, σ_0 gęstością ładunku).

Równania (75)-(78) odnoszą się do współrzędnych prostoliniowych. Przy ich wyrażeniu we współrzędnych krzywoliniowych pojawiają się wyrazy z symbolami Christoffela. Równania te nadają się szczególnie do rozpatrywania wzajemnych zależności między polami elektromagnetycznymi w układach poruszających się względem siebie, np. w maszynach elektrycznych. Ostatnio w pracach G. Marksa, [62], znajdujemy zastosowanie tych równań do ośrodków *anizotropowych* poruszających się względem siebie.

Również dogodne wyrażenia matematyczne otrzymamy stosując metodę tensorową do ważnego w technice zagadnienia, jakim jest obliczanie *naprężeń mechanicznych* występujących w polu elektrycznym i magnetycznym (naprężeń *Maxwella*). Siła działająca na element o jednostkowej pojemności, [1], równa jest divergencji tensorowej tensora naprężeń, obliczonej z uwzględnieniem wzoru (44). Tensor ten jest analogiczny do tensora naprężenia spotykanego w klasycznej teorii sprężystości. Dla pola elektrostatycznego tensor naprężenia ma postać

$$(79) \quad \|\sigma_e\| = \begin{vmatrix} \frac{\epsilon}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + \kappa E^2) & \frac{\epsilon}{4\pi} (E_x E_y) & \frac{\epsilon}{4\pi} (E_x E_z) \\ \frac{\epsilon}{4\pi} (E_y E_z) & \frac{\epsilon}{8\pi} (E_y^2 - E_z^2 - E_x^2 + \kappa E^2) & \frac{\epsilon}{4\pi} (E_y E_x) \\ \frac{\epsilon}{4\pi} (E_z E_x) & \frac{\epsilon}{4\pi} (E_z E_y) & \frac{\epsilon}{8\pi} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 + \kappa E^2) \end{vmatrix}$$

gdzie κ jest stałą elektrostrykcji, $\kappa = (\rho/\epsilon) (d\epsilon/d\rho)$.

Dla pola magnetostatycznego tensor $\|\sigma_m\|$ ma analogiczną formę, ale E_j zostaje zastąpione przez H_i , zaś ϵ przez μ . W elektrodynamice ujęcie

matematyczne naprężenia jest bardziej złożone i wymaga wprowadzenia wektora Poyntinga - Umowa bądź operowania *tensorem energii impulsu*.

Ta ostatnia wielkość ma znaczenie praktyczne nie tylko w mechanice falowej. Interesujące perspektywy rokuje użycie pojęcia dwukrotnie kontrawariantnego tensora energii-impulsu S^{ik} w zagadnieniach telekomunikacji. Tensor $\|S\|$ zapisujemy podobnie jak inne wielkości pola w przestrzeni czterowymiarowej. Składowa S^{ik} tego tensora przedstawia gęstość strumienia energii w kierunku osi k dla rzutu wektora impulsu na oś i . Składowa S^{00} określa gęstość energii w polu, zaś składowa S^{0k} (podzielona przez c) gęstość strumienia energii w kierunku osi k . Tensor energii impulsu jest pojęciem ogólnym, odnoszącym się zarówno do fal elektromagnetycznych, jak i do fal mechanicznych; można go również z powodzeniem wykorzystać w teorii fal ultradźwiękowych. Dla pola elektromagnetycznego tensor ten wyraża się wzorem

$$(80) \quad S_{ik} = \frac{1}{4\pi} [F_{ir} H_{kr} - \frac{1}{4} g_{ik} F_{rs} H_{rs}]$$

[oznaczenia wielkości jak we wzorach (75)]. Jest to tensor asymetryczny, tzw. *tensor Minkowskiego*. Odpowiedni tensor symetryczny (Abrahama), [26], ma budowę bardziej skomplikowaną i nie nadającą się do praktycznych przeliczeń. Tensor Minkowskiego charakteryzuje rozkład pola i przepływ energii występujący w wielu problemach telekomunikacji, związanych z nowoczesną techniką impulsową.

Do zagadnień związanych z zastosowaniami rachunku tensorowego do ośrodków ciągłych można zaliczyć niektóre problemy *geodezji*. Zmianę współrzędnych geodezyjnych lub rodzaju siatki geograficznej traktować można jako typowe przekształcenie tensorowe na płaszczyźnie lub zakrzywionej powierzchni. Praktyczne zastosowanie znalazł rachunek tensorowy w *aerotriangulacji przestrzennej*, polegającej na kolejnym dołączeniu sąsiadujących ze sobą zdjęć lotniczych, przedstawiających różne wiązki perspektywiczne.

Pojedyncze zdjęcie daje obraz w pewnym układzie współrzędnych określonych osią zdjęcia, osią perspektywy i osią głównego pionu. Przyłączeniu tych zdjęć we wspólny obraz przestrzenny dokonać trzeba obrotu osi współrzędnych i zrównania skali poszczególnych obrazów. Przekształcenia tego dokonuje się za pomocą *tensora obrotu*, [79], będącego podwójnym tensorem mieszanym (7) w kartezjańskim układzie współrzędnych. Ogólne pojęcie tensora obrotu używane jest zresztą w algebrze tensorowej, niezależnie od zastosowań w geodezji, i nosi czasem nazwę *wersora*, [51]. Osobliwość przyjętej w geodezji metody polega na tym,

że kąty obrotu dla sąsiednich obrazów (wiązek perspektywicznych) są bardzo małe, można zatem pominąć wyrazy rzędu trzeciego i wyższych i przedstawić składowe tensora w formie algebraicznych, a nie trygonometrycznych kombinacji funkcji a_x, a_y, a_z kątów obrotu współrzędnych:

$$(81) \quad \|C\| = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} a_x^2 - \frac{1}{2} a_z^2 & a_z - \frac{1}{2} a_x a_y & a_x \\ -a_z - \frac{1}{2} a_x a_y & 1 - \frac{1}{2} a_y^2 - \frac{1}{2} a_z^2 & a_y \\ -a_x + a_y a_z & -a_y - a_x a_y & 1 - \frac{1}{2} a_x^2 - \frac{1}{2} a_y^2 \end{vmatrix}$$

Operując jeszcze większym przybliżeniem — przez pominięcie wyrazów drugiego rzędu — tensor (81) przekształcamy w sumę tensora $\|g\|$ i tensora antysymetrycznego. Składowe tego ostatniego można przedstawić za pomocą wektora, zwanego *wektorem elementarnego obrotu*. Iloczyn zewnętrzny dowolnego wektora R przez wektor α daje zmianę wektora R przy elementarnym obrocie

$$(82) \quad \delta R = [\alpha \cdot R].$$

Jak widać, w omawianych zagadnieniach przejście na metodę tensorową oznacza ściślejsze ujęcie niektórych wzorów traktowanych w pierwszym przybliżeniu jako wzory wektorowe.

Istnieje, wreszcie, szereg problemów *fizyki* teoretycznej i doświadczalnej, w których, jak na początku wspomniano, metody tensorowe odgrywają ważną rolę. Zagadnienia te są jeszcze na razie obce technice, jednak perspektywy coraz szerszego wykorzystania energii atomowej zblizają je w przyszłości do techników-pracowników nauki.

7. Wielkości tensorowe występujące w systemach o wielu stopniach swobody

W dotychczasowych zastosowaniach technicznych rachunek tensorowy odnoszono głównie do ośrodków ciągłych. Wynika to z faktu, że wielkości tensorowe bezpośrednio odzwierciedlają zjawiska zachodzące w obszarze zajętym przez ośrodek ciągły. Sens fizyczny tensora, jako wielkości obrazującej zachowanie się *systemu* mechanicznego lub elektrycznego o stałych skupionych, jest mniej popularny niż przy analizie ośrodków ciągłych [30], jednak i tutaj, jak między innymi wykazała dyskusja na łamach *Elektryczestwa*, [34], [57], wprowadzenie tego pojęcia może dać duże korzyści.

W najogólniejszej formie zagadnienie przedstawić możemy w sposób następujący. Mamy system przestrzenny N elementów powiązanych między sobą określonymi zależnościami, przy czym może to być system w dowolnej metrycznej lub wektorowej przestrzeni r -wymiarowej. Pod nazwą *elementu* rozumiemy część układu, która przy dalszych rozważaniach traktowana jest jako jedna całość, posiadająca pewną ograniczoną ilość stopni swobody, mniejszą niż cały system. Elementem może być zatem nie tylko punkt, ale również obwód prądowy lub magnetyczny. Zależnie od natury elementów połączenia między nimi mogą mieć różny charakter: sprzężeń magnetycznych, połączeń galwanicznych, połączeń za pomocą sprężyn lub urządzeń tarciovych.

Otóż przy użyciu analizy elementarnej rozpatrujemy zachowanie się pojedynczego elementu, odcinając go od pozostałych. Odwrotnie postępujemy przy metodzie tensorowej, a częściowo i macierzowej. Cały system traktujemy jako pewną wielkość fizyczną, dającą się przedstawić jednym symbolem lub sprzężoną grupą symbolów, i badamy prawa rządzące tą wielkością. Na przykład, zamiast mówić o poszczególnych prądach w sieci, macierz zawierającą te prądy składowe oznaczamy jedną literą; podobnie postępujemy przy określaniu szybkości układu mechanicznego o wielu stopniach swobody.

Przy zastosowaniu rachunku tensorowego do problemów ośrodków ciągłych transformacja oznaczała przeważnie przesunięcie, obrót lub zakrzywienie przestrzennych osi odniesienia, zatem operacje te można było przedstawić za pomocą *realnego modelu geometryczno-fizycznego*.

W przypadku systemu o stałych skupionych składowymi tensora są poszczególne rzeczywiste wielkości fizyczne, np. prędkości lub prądy związane z oddzielnymi elementami układu, transformacja nie ma więc bezpośredniego odbicia przestrzennego. Podstawowy tensor metryczny na ogół posiada tu określony sens fizyczny, mamy bowiem do czynienia z kilku współmiernymi wielkościami fizycznymi; nie możemy natomiast przypisać temu tensorowi prostego znaczenia geometrycznego. Mówiąc więc o własnościach tensorowych systemu, traktujemy go jako *obiekt* geometryczny w ogólniejszym rozumieniu tego terminu, czyli, jak wyjaśniliśmy wyżej, opisujemy dany obiekt przez sposoby jego transformowania, a nie przez rzeczywiste stosunki przestrzenne. Nasuwa się pytanie, czy tensor obrazujący system przedstawia istotnie pewną wielkość fizyczną, czy też mamy tu do czynienia ze zwykłymi macierzami, a wprowadzenie pojęć tensorowych stanowi niepotrzebną komplikację. Otóż jest rzeczą bezsporną, że rachunkowe przeliczenie równań tensorowych prowadzi się do algebry macierzowej, a tensor jest macierzą o określonych prawach transformacji.

Jeżeli mamy dowolny układ równań liniowych o stałych parametrach obrazujących zachowanie się wielkości fizycznych

$$(83) \quad \begin{cases} a_{11} x^1 + a_{12} x^2 + \dots + a_{1n} x^n = C_1, \\ a_{21} x^1 + a_{22} x^2 + \dots + a_{2n} x^n = C_2, \\ a_{n1} x^1 + a_{n2} x^2 + \dots + a_{nn} x^n = C_n, \end{cases}$$

to przy jego rozwiązaniu nie potrzeba wprowadzać tensorów, a metody macierzowej można użyć jako pewnego ułatwienia rachunkowego, pod warunkiem, że wyznacznik charakterystyczny układu równań jest różny od zera. W technice rzadko jednak mamy do czynienia z tak prostym zagadnieniem. Zazwyczaj albo ilość równań jest mniejsza od ilości współrzędnych x^i i zadanie polega na wybraniu optymalnych wartości tych współrzędnych, albo też zbadać należy wpływ zmiany parametrów na przebieg zjawiska, gdy wiadomo, że związek między tymi parametrami jest funkcją liniową (lub nieliniową):

$$(84) \quad f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) = 0.$$

W obu przypadkach spotykamy typowy problem transformacji tensorowej. Krok w uogólnieniu od macierzy do tensora rozszerza więc możliwości analizy zmierzającej do znalezienia optymalnego rozwiązania problemu technicznego. Samo ujęcie skomplikowanego zespołu zjawisk jako jednej wielkości o bardzo bogatych właściwościach fizycznych stanowi cenną syntezę, mającą swój odpowiednik w dialektycznej współzależności różnorodnych czynników, charakteryzujących przebieg procesu technicznego jako zjawiska przyrodniczo-ekonomicznego. Przy posługiwaniu się metodą tensorową wymagana jest jednak pewna ostrożność; wyeliminować trzeba, mianowicie, pozorne transformacje tensorowe, które są w istocie przekształceniami macierzy, a ich geometryzacja wprowadza jedynie zamęt. Do sprawy tej wrócimy jeszcze przy omawianiu możliwości użycia rachunku tensorowego do analizy obwodów elektrycznych.

Metoda tensorowa, którą zastosujemy przy analizie systemów o wielu stopniach swobody, jest nieco odmienna od tej, z jaką zapoznaliśmy się przy badaniu ośrodków ciągłych. W zagadnieniach ośrodków ciągłych tensor zapisujemy zwykle we współrzędnych przestrzeni trój- lub czterowymiarowej; dodatkowe osie współrzędnych, np. temperatury, mają charakter pomocniczy. Natomiast w przypadku systemu o stałych skupionych konieczne jest operowanie przestrzenią o liczbie wymiarów zależnej od rodzaju systemu, na tym bowiem polega istota geometryzacji obiektu fizycznego i otwarcia drogi do prawidłowego stosowania transformacji tensorowych.

Metoda jest zupełnie ogólna i może być zastosowana zarówno do systemów mechanicznych, jak i elektrycznych, magnetycznych lub termodynamicznych. Załóżmy, że badany system składa się z N elementów. Chwilowy stan elementu (m) określony jest przez K współrzędnych $x_{(m)}^1, x_{(m)}^2, \dots, x_{(m)}^K$. Każdy z elementów można więc przedstawić w przestrzeni K -wymiarowej.

Jeżeli badamy mechanikę systemu punktów materialnych, to element określony jest współrzędnymi przestrzennymi punktu, $K = 3$ i czasem t . Własności fizyczne elementu mogą być jednak wyrażone inną liczbą współrzędnych, np. pojedynczemu obwodowi prądowemu przypisujemy dwie współrzędne: chwilowe wartości napięcia i prądu.

Do opisu całego systemu — w przypadku gdy wszystkie elementy są niezależne — użyć trzeba $p = NK$ współrzędnych przestrzennych plus czas, czyli rozpatrywać problem jako badanie ruchu umyślnego punktu P w przestrzeni p -wymiarowej. Współrzędne tego punktu, wystarczające do jednoznacznego określenia stanu systemu nazywamy *współrzędnymi uogólnionymi* q^i . W systemie o elementach od siebie niezależnych liczba stopni swobody systemu M jest równa liczbie współrzędnych p i punkt P może zajmować dowolne położenie w przestrzeni p -wymiarowej, a system rozpada się na N prostych elementów.

W praktyce interesować nas będą systemy o elementach współzależnych. W takim systemie ułożyć można R niezależnych od siebie równań typu

$$(85) \quad f^i(x_{(1)}^1, x_{(1)}^2, \dots, x_{(1)}^K, \dots, x_{(N)}^1, x_{(N)}^2, \dots, x_{(N)}^K) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, R),$$

co we współrzędnych uogólnionych napiszemy

$$(86) \quad f^i(q^1, \dots, q^p) = 0.$$

System taki posiada $M = NK - R$ stopni swobody. W przestrzeni $p = NK$ -wymiarowej punkt P może teraz poruszać się jedynie po pewnej powierzchni $(p - R)$ -wymiarowej. Ruch punktu jest natomiast swobodny w podprzestrzeni $p' = M$ -wymiarowej. Dla takiej przestrzeni nie będziemy mogli ułożyć niezależnego równania (85), zatem punkt P może znowu zajmować w podprzestrzeni dowolne położenie. Zależnie od rodzaju zagadnienia posługujemy się obydwoma metodami, bądź sprowadzając system do niezbędnej liczby współrzędnych, bądź też dla zachowania symetrii współrzędnych pozostawiając p -wymiarowy układ odniesienia.

Zwróćmy uwagę, że współrzędne punktu P określają pewien wektor w przestrzeni p -wymiarowej. W dalszym ciągu wektor taki dla odróżnienia od wektora w przestrzeni trójwymiarowej nazywać będziemy *poliwektorem*, nie dając zresztą temu terminowi znaczenia używanego czasem w podręcznikach rachunku wektorowego. Tensory wyższych rzędów wy-

stąpią bądź jako parametry stałe poszczególnych elementów, bądź też jako liniowe kombinacje różnych współrzędnych tych elementów.

Do wyjaśnienia pozostaje sprawa omówionych w p. (4) trzech grup transformacji tensorowych. Zgodnie z tym co powiedziano przy równaniu (83), transformacja dotyczy zmiany układu współrzędnych bieżących poszczególnych elementów x^i lub zmiany parametrów stałych tych elementów a_{rs} związanych równaniem (84). Na przykład, zmieniamy położenie punktu materialnego (x^i) bądź jego masę (a_{rs}) lub też regulujemy napięcie (x^i) albo indukcyjność obwodu (a_{rs}).

Przy przejściu do współrzędnych uogólnionych q^i rozróżnienie to z punktu widzenia matematycznego nie ma zasadniczego znaczenia, gdyż zmienne parametry a_{rs} traktujemy jako dodatkowe współrzędne q^j, q^k, \dots

(1) Transformacja formalna bez zmiany postaci obiektu służy do zbadania, w jaki sposób powiązane są ze sobą współrzędne poszczególnych elementów i jakie są niezmiennicze właściwości systemu. Tą metodą można np. ustalić, jaki kierunek powinna mieć oś obrotu systemu, aby uzyskać maksymalny moment bezwładności lub tak dobrać częstotliwość sprzężonych obwodów elektrycznych, aby w danym przewodzie prąd był jak najmniejszy.

Często spotykaną transformacją jest przejście z układu nieruchomego do ruchomego. Można przy tym posługiwać się poprzednio omówioną metodą wprowadzenia czasu jako dodatkowej współrzędnej. Wprawienie systemu w ruch odwzorowuje się jako obrót osi współrzędnych względem osi t .

W wielu jednak przypadkach dogodniejsze będzie posługiwanie się nieco odmiennym przekształceniem. Zamiast wprowadzać czas jako nowy wymiar, prostsze rachunkowo okazać się może użycie czasu jako wielkości transformującej przestrzenny układ współrzędnych. Sposób ten można zastosować równie dobrze w geometrii metrycznej, jak i wektorowej. Prędkość postępową tłumaczy się wówczas jako przesunięcie układu współrzędnych, obrót układu przedstawiamy jako odpowiedni obrót osi odniesienia.

Oczywiście, metoda tego rodzaju jest znacznie łatwiejsza do zastosowania w układach skleronomicznych, tj. takich, w których współrzędne x^i zależą od n czynników typu p^j , natomiast nie zależą wyraźnie od czasu. Sprawa komplikuje się w układach reonomicznych, w których układ współrzędnych zmienia się nie tylko w funkcji czynników p^j , lecz i czasu t :

$$(87) \quad x^i = x^i(p^j, t).$$

Czas jest tu parametrem niezależnym, co odpowiada ujęciu problemu w fizyce klasycznej.

W zagadnieniach technicznych ruch jednostajny postępowy można traktować jako przekształcenie czysto formalne. Z chwilą gdy występują przyspieszenia, w systemie mogą powstać zmiany wewnętrzne, np. wzajemne przesunięcia elementów powodujące zakłócenie przebiegu zjawiska fizycznego. Transformacja taka wiąże się ze stanem fizycznym układu i przestaje być tylko formalna.

(2) Transformacja formalna *zmieniająca typ systemu* ma przeważnie na celu dogodnie ujęcie sprzężeń między elementami. Przez odpowiedni wybór układu odniesienia możemy np. sprowadzić do zera niektóre sprzężenia i w ten sposób rozbić system na kilka prostszych podsystemów, co jest szczególnie przydatne w elektrotechnice.

Transformacji tego typu możemy dokonać przez odpowiedni wybór podstawowego tensora metrycznego, bądź obrót i przesunięcie sztywnego układu współrzędnych. Możemy również od razu uwzględnić transformację przez odpowiedni wybór związku między współrzędnymi elementu $x_{(m)}^i$ i współrzędnymi uogólnionymi q^r :

$$(88) \quad x_{(m)}^i = x_{(m)}^i(q^1, q^2, \dots, q^p).$$

Wtedy składowe prędkości uogólnianej dq/dt wyrażą składowe prędkości punktu M przy pomocy równania często spotykanego przy rozwiązywaniu systemów

$$(89) \quad \frac{dx_{(m)}^i}{dt} = \frac{\partial x_{(m)}^i}{\partial q^r} \frac{dq^r}{dt} + \frac{\partial x_{(m)}^i}{\partial t}.$$

Przykładem pożytecznej transformacji upraszczającej system jest sprowadzenie tensora do jego osi głównych. Dokonujemy tego przez rozwiązanie tzw. *równania sekularnego* (wiekowego), stosowanego między innymi w astronomii do wyznaczania względnych ruchów planet,

$$(90) \quad \left\| \begin{array}{ccc} t_{xx} - \lambda & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} - \lambda & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} - \lambda \end{array} \right\| = 0.$$

Pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tego równania wyznaczają kierunki, dla których transformacja tensorowa jest równoważna mnożeniu przez skalar.

(3) Transformacja odwzorowująca *rzeczywiste zmiany obiektu* może mieć różnorodny charakter i polega zwykle na związaniu osi odniesienia z wybranym elementem systemu (współrzędne *L a g r a n g e'a*), gdy chodzi np. o zbadanie, co się dzieje z tym elementem przy dowolnych ruchach.

Konieczność posługiwania się krzywoliniowym układem odniesienia napotykamy tu przede wszystkim w zagadnieniach zniekształceń *nielinio-*

wych. Wynika to z faktu, że umyślony punkt P porusza się po płaszczyźnie ($p - R$)-go stopnia w przestrzeni p -wymiarowej jedynie wówczas, gdy równania (85) są liniowe. Jeżeli równania (85) są nieliniowe, to punkt P związany jest z powierzchnią przestrzenną; podprzestrzeń $p' = (NK - R)$ -wymiarowa nie zawsze jest euklidesowa, lecz staje się zakrzywioną. Wobec tego zagadnienia nieliniowe sprowadzają się często do badania systemów w przestrzeni R i e m a n n a, co jest dotychczas problemem bardzo słabo opracowanym i stanowiącym wdzięczne pole do pracy naukowej.

8. Metoda tensorowa badania systemów mechanicznych

Poprzednio stwierdziliśmy, że tensor jest macierzą podlegającą określonemu prawu transformacji. Rozpatrując zakres zastosowań rachunku tensorowego w technice dorzucić trzeba jeszcze trzeci warunek, mianowicie transformacja wielkości tensorowej powinna mieć określony sens fizyczny, wiążący się z procesami technicznymi, zachodzącymi w systemie. Motyw ten decyduje o przydatności transformacji tensorowej do zbadania właściwości systemu.

W przeciwnym razie wystarczy przedstawić zespoły wielkości fizycznych symbolami pojedynczymi lub macierzami. W problemach technicznych ograniczamy się wówczas do metod algebraicznych i macierzowych, nie potrzebując uciekać się do metody tensorowej. Trzeba się zastrzec, że chodzi tu o zakres użyteczności metody tensorowej, a nie o charakter wielkości fizycznych. To, czy wykorzystujemy lub nie właściwości tensorowe w obliczeniu technicznym, nie zmienia, oczywiście, w niczym faktu ich obiektywnego istnienia. Na przykład, typowa transformacja elektrycznej oporności pozornej (p . niżej) obrazuje wpływ zmiany częstotliwości i może być pożyteczna np. w radiotechnice. Natomiast w energetyce, gdzie prawie wyłącznie operujemy częstotliwością 50 c/s, transformacja taka jest, oczywiście, możliwa, ale nie posiada technicznego uzasadnienia.

Sprawy tej nie poruszaliśmy przy rozpatrywaniu ośrodków ciągłych, tam bowiem transformacja przestrzenna metrycznego układu odniesienia stanowiła klucz do rozwiązania problemów technicznych i nie było powodów do kwestionowania jej przydatności technicznej. W systemach o wielu zmiennych zagadnienie jest bardziej skomplikowane. Tutaj również nie budzą zastrzeżeń transformacje odwzorowujące fizyczne przesunięcia lub ruchy przestrzenne systemu bądź osi odniesienia. Wprawdzie samo pojęcie tensora staje się przy tym nieco bardziej abstrakcyjne niż w mechanice ośrodków ciągłych, ale transformacja przestrzenna układu odniesienia pozostaje nadal głównym sposobem badania systemu. Obrót i przesunięcie sztywnych osi współrzędnych lub przejście do współrzęd-

nych krzywoliniowych ma w tym przypadku oczywisty sens fizyczny. Fakt, że operacje te — przy użyciu współrzędnych uogólnionych — odbywają się w przestrzeni p-wymiarowej, nie ma większego znaczenia. Jeżeli natomiast transformacja tensorowa ma dotyczyć zmian niektórych wielkości fizycznych — nie zaś współrzędnych przestrzennych elementu — to zalecana jest daleko idąca ostrożność, możemy bowiem albo niepotrzebnie skomplikować zagadnienie, albo też dojść do błędnych wniosków, używając transformacji fizycznie nieprawidłowych.

W zagadnieniach mechaniki brył lub punktów materialnych przeważają transformacje przestrzenne, dlatego właśnie zakres zastosowania rachunku tensorowego do tych problemów jest jasno wytyczony. Tymczasem w zagadnieniach obwodów elektrycznych mamy prawie wyłącznie do czynienia z transformacjami fizycznymi, które często bywają stosowane zbyt szeroko i schematycznie. W rezultacie rola rachunku tensorowego w elektrotechnice nie jest do dziś całkowicie wyjaśniona i wywołuje żywe dyskusje.

Z tych względów użycie rachunku tensorowego w zastosowaniach technicznych mechaniki systemów o wielu stopniach swobody nie wymaga szczegółowych komentarzy. Metoda tensorowa pozwala na bardzo proste i przejrzyste zapisanie praw mechaniki klasycznej we współrzędnych uogólnionych q^i , co już stanowi duże udogodnienie dla technika. Jako przykład możemy podać równanie Lagrange'a wiążące uogólnioną siłę Φ i energię kinetyczną T systemu punktów materialnych,

$$(91) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \Phi_i.$$

To proste równanie w rozwinięciu analitycznym staje się długie i zawiąklane, gdy tymczasem w ujęciu tensorowym otrzymamy nieskomplikowane zależności.

$$(92) \quad \dot{T} = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

oraz

$$(92.1) \quad \Phi_i = \sum_r F_r \frac{\partial x^r}{\partial q^i} = a_{ij} (\ddot{q}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{q}^k \dot{q}^l);$$

tutaj a_{ij} jest tensorem transformującym system we współrzędnych uogólnionych

$$a_{ij} = \sum_k g_{rs} m_r \frac{\partial x^r}{\partial q^i} \frac{\partial x^s}{\partial q^j} \quad (r, s = 1, 2, 3) ..$$

We wzorach powyższych przyjęto następujące oznaczenia:

x^i współrzędne przestrzenne punktu materialnego,
 m_r masa punktu materialnego,

F_r składowe siły działającej na punkt,
 \dot{q} pochodna q względem czasu.

Wychodząc z równania Lagrange'a rozwiązać można metodą tensorową wiele szczegółowych zagadnień mechaniki. Dla przykładu obliczymy, [75], równanie podwójnego wahadła płaskiego (rys. 9). Jako współrzędne uogólnione wybieramy kąty odchylenia $q_1 = \varphi$ i $q_2 = \psi$. Współrzędne prostokątne x^i zawieszonych mas m_1 i m_2 będą

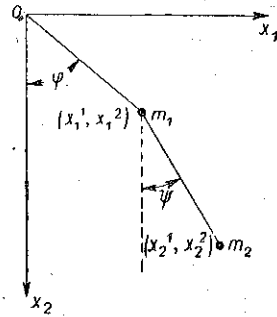
$$(93) \quad \begin{cases} x_1^1 = l_1 \sin q^1, & x_2^1 = l_1 \sin q^1 + l_2 \sin q^2, \\ x_1^2 = l_1 \cos q^1, & x_2^2 = l_1 \cos q^1 + l_2 \cos q^2, \end{cases}$$

Obliczamy energię kinetyczną

$$(94) \quad T = \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^i \dot{x}_k^j$$

oraz siłę uogólnioną (posługując się metodą pracy wirtualnej)

$$(95) \quad \Phi_i = -g l_i \sin q^i \sum_i m_i,$$



Rys. 9

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim.

Stąd na zasadzie równania Lagrange'a znajdujemy żądane równanie ruchu.

Innym przykładem dobitnie podkreślającym zalety metody tensorowej są jej zastosowania do równań Hamiltona-Jacobiego, [8].

Specjalnym polem zastosowania rachunku tensorowego jest obliczanie *ramownic przestrzennych*. W najprostszym przypadku siły działające w prętach ramownicy można uważać za składowe siły uogólnionej, która przy zmianie sił zewnętrznych ulega pewnej transformacji tensorowej. Tego rodzaju ujęcie może być w pewnych przypadkach pożyteczne, z punktu widzenia rozwinięcia metody tensorowej nie wnosi jednak nowych momentów.

Interesujące perspektywy otwiera natomiast zastosowanie rachunku tensorowego do kratownic o dźwigarach powierzchniowych, gdy konieczne staje się bliższe zbadanie odkształceń i naprężeń w poprzecznym przekroju pręta. Kompletny obraz naprężeń występujących w danym przekroju lub węźle ramownicy daje zespół sił i momentów. Zespół ten traktować można jako pewną wielkość fizyczną, którą Gorbunow, [28], [29], nazywa *motorem sił*; analogicznie wyznacza on *motor przemieszczeń*. Motor sił \bar{F} określony jest siedmioma składowymi, z których

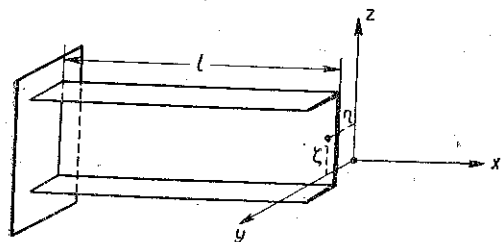
q_1, q_2, q_3 są rzutami na osie współrzędnych sił działających w przekroju (lub węźle),

q_4 odpowiada bimomentowi,
 q_5, q_6, q_7 są składowymi momentu działającego w badanym przekroju. Współrzędne te związane są w różny sposób z kartezjańskim układem przestrzennych osi odniesienia x, y, z . Współrzędne q_1, q_2, q_3 i q_4 nie zależą od równoległego przesunięcia układu odniesienia, podczas gdy q_5, q_6, q_7 ulegają zmianie przy przesunięciu osi. Jeżeli jedną z osi (np. x) ustawimy wzdłuż dźwigara (rys. 10), a początek układu odniesienia umieścimy w środku ciężkości przekroju, to q_1 określać będzie siłę podłużną w dźwigarze, q_2 i q_3 siły poprzeczne, q_5 i q_6 odpowiadają momentom zginającym dźwigar, wreszcie q_7 jest momentem skręcającym, ale jedynie wówczas, gdy środek ciężkości przekroju pokrywa się ze środkiem zginania.

Podobnie motor przemieszczeń \bar{U} wyznaczony jest siedmioma składowymi, z których

p^1, p^2, p^3 są kątami obrotu przekroju w stosunku do osi,
 p^4 jest miarą deplanacji przekroju,
 p^5, p^6, p^7 są składowymi przesunięcia liniowego początku osi współrzędnych.

Analogicznie jak w «motorze» sił jedynie składowe p^5, p^6, p^7 zależą od przesunięcia osi odniesienia. Zespół wielkości nazwanych motorem nie jest wielkością tensorową, gdyż, jak widzimy, jego składowe w rozmaity sposób reagują na zmianę układu odniesienia. Natomiast operator R , za pomocą którego przechodzimy od motoru \bar{U} do motoru \bar{F} , nosi cechy tensora w myśl elementarnego określenia podanego na początku niniejszej pracy [wzór (2)], jeżeli zamiast wektorów operować będziemy «motorami».



Rys. 10

Równanie ogólne ma zatem postać

$$(96) \quad \bar{F} = \|R\| p^i.$$

Ponieważ zmienność sił i przemieszczeń posiada odmienny charakter, tensor $\|R\|$ jest tensorem jednorodnym drugiego rzędu. Jeżeli za punkt wyjścia przyjmujemy przesunięcia p przypisując im charakter kontrawariantny, to tensor $\|R\|$ ma składowe R_{ik} . Transformacja dokonana za pomocą tego tensora nie jest w sensie fizycznym transformacją przestrzenną, gdyż ze względu na specyficzne właściwości motoru przestrzenna zmiana układu odniesienia nie będzie odpowiadała przekształceniu tensorowemu.

W rozpatrywanym przypadku mamy typową transformację «fizyczną». Zobaczmy później, że podobny charakter ma transformacja poliwektora prądów na poliwektor napięć poprzez tensor oporności o składowych Z_{ik} . Analogia między wielkościami elektrycznymi i mechanicznymi jest utrzymana według klasycznego systemu analogii, [58].

Dla przykładu napiszemy, [28], składowe tensora dla dźwigara przedstawionego na rysunku 10:

$$(97) \quad \|R\| = \begin{vmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES\xi}{l} & -\frac{ES\eta}{l} \\ 0 & \frac{12EJ_z}{(l)^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{(l)^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{(l)^3} & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{(l)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ_x\alpha & GJ_x\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ_x\beta & GJ_x\gamma & 0 & 0 \\ \frac{ES\xi}{l} & 0 & \frac{6EJ_y}{(l)^2} & 0 & 0 & \frac{E}{l} [4J_y + S(\xi)^2] & -\frac{ES\xi\eta}{l} \\ -\frac{ES\eta}{l} & -\frac{6EJ_z}{(l)^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES\xi\eta}{l} & \frac{E}{l} [4J_z + S(\eta)^2] \end{vmatrix}$$

We wzorze tym przyjęto następujące oznaczenia:

- E moduł sprężystości objętościowej,
- G moduł sprężystości postaciowej,
- S przekrój poprzeczny dźwigara,
- J_i momenty bezwładności,
- η, ξ współrzędne środka ciężkości przekroju, odniesione do układu, którego początek znajduje się w środku zginania przekroju.
- α, β, γ współczynniki będące funkcjami (algebraiczno-hyperbolicznymi) zmiennej $w = l\sqrt{GJ_x/EJ_0}$.

Zespół wielkości określonych wzorem (97) jest macierzą kwadratową o wyróżniku nierównym zeru.

Przy zmianie układu współrzędnych składowe tej macierzy transformują się jako funkcje momentów bezwładności.

Nasuwa się zastrzeżenie, czy wobec ograniczonych możliwości transformacji i jej «fizycznego» charakteru usprawiedliwione jest tutaj wprowadzenie pojęcia tensora. Wydaje się, że — przynajmniej w obecnym stanie rozwoju techniki — używanie wielkości tensorowych w praktycz-

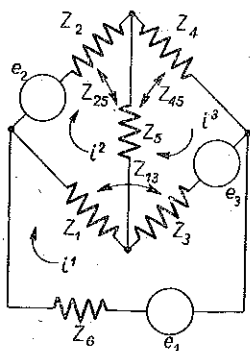
nych obliczeniach ramownic przestrzennych byłoby zbyt dużą komplikacją. Natomiast w pewnych pracach naukowych, zwłaszcza w połączeniu z teorią «motorów», metoda tensorowa może dać dogodny sposób zapisu i przejrzyste ujęcie skomplikowanych zależności między siłami i przemieszczeniami w ramownicy.

Dla uzupełnienia obrazu zasięgu metody tensorowej w mechanice trzeba wspomnieć o ogromnym znaczeniu tej metody dla rozwoju mechaniki relatywistycznej. Obliczenie ruchu peryhelium planety Merkury, ugięcia światła w sferze przyciągania słońca i przesunięcia linii spektralnych widma gwiazd stanowią klasyczne już dziś, [82], przykłady poznania tą drogą zjawisk przyrody. Oczywiście rząd wielkości obserwowanych zjawisk wybiega daleko poza aktualne potrzeby techniki, zagadnienie wykracza zatem poza ramy określone niniejszym opracowaniem.

9. Metoda tensorowa badania systemów elektrycznych

Wyżej omówiliśmy powody, dla których sprawa użycia rachunku tensorowego w elektrotechnice wymaga szczególnie starannej i krytycznej analizy. Sytuację zaciemnia jeszcze fakt rozreklamowania przez amerykański koncern *General Electric Co* «metody G. Krona».

Metoda «zastosowania tensorów do obliczeń sieci i maszyn elektrycznych» została przedstawiona przez Krona w szeregu artykułów, poczynając od 1935 r., [47], i w dwóch książkach, [45] i [46]. Metoda ta zyskała pewien rozgłos i naśladowców, [77], nie można więc nad nią przejść do porządku dziennego, tym bardziej, że niezorientowany czytelnik może w niej widzieć istotnie nowe perspektywy zastosowań rachunku tensorowego. Kilku autorów, [6], [21], [34], [57], przeprowadziło analizę błędów popełnionych przez Krona, toteż tutaj ograniczamy się do wyjaśnienia, w toku ogólnego rozumowania, podstawowego nieporozumienia, które tkwi w ujęciu «tensorowym» Krona.



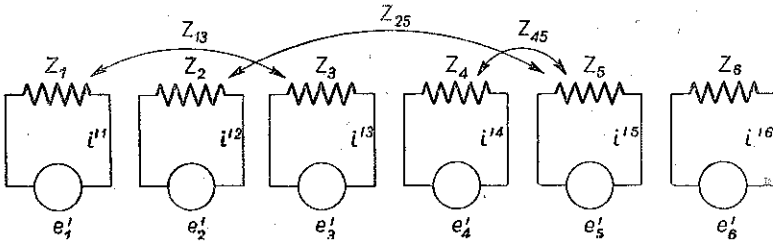
Rys. 11

W obwodach elektrycznych mamy do czynienia z dwoma rodzajami wielkości zmiennych: prądami i i napięciami e , oraz z parametrami stanowiącymi składowe oporności pozornej (impedancji) Z : indukcyjnością L , pojemnością C i opornością rzeczywistą R . Chcąc wprowadzić rachunek tensorowy musimy posługiwać się wyżej omówioną metodą przedstawienia systemu we współrzędnych uogólnionych. W tym celu trzeba rozbić rozpatrywaną sieć na obwody elementarne, będące odpowiednikami punktów materialnych systemu mechanicznego. Na przykład sieć uwidoczniłą na rys. 11, [14], przedstawimy w postaci sześciu obwodów elementarnych

nych (rys. 12), powiązanych opornościami kojarzącymi Z_{ij} . Oporności te tworzą macierz kwadratową, która w rozpatrywanym przypadku ma postać

$$(98) \quad [Z] = \begin{vmatrix} Z_{11} & 0 & Z_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{22} & 0 & 0 & Z_{25} & 0 \\ Z_{31} & 0 & Z_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{44} & Z_{45} & 0 \\ 0 & Z_{52} & 0 & Z_{54} & Z_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{66} \end{vmatrix}$$

Prądy w obwodach elementarnych wyznaczymy bez trudu jako kombinacje rozplywu prądów sieci pierwotnej. Prądy te można przedstawić w postaci macierzy jednowskaźnikowych (kolumnowych) $[i]$ i $[i']$. Zależ-



Rys. 12

ność między tymi dwoma macierzami wyraża się przez zespół równań algebraicznych i może być zapisana w formie macierzy łączącej

$$(99) \quad [C] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Kolumny macierzy odnoszą się do prądów w obwodach elementarnych, wiersze — do prądów w oczkach sieci pierwotnej. Otóż cała filozofia systemu K r o n a ogranicza się do tego przekształcenia, które jest typowym przekształceniem algebry macierzowej, znanym zresztą przed

K r o n e m. Macierz łącząca (99) K r o n nazywa tensorem transformującym bez żadnego przekonywującego uzasadnienia, gdyż nie mamy tu do czynienia z transformacją w danym układzie współrzędnych, a jedynie z przebudową sztywnych osi odniesienia. Obiekt geometryczny, odwzorowujący badany system elektryczny, otaczamy jakby rusztowaniami różnych systemów, ale samego obiektu jeszcze nie poruszyliśmy i nie dokonaliśmy żadnej z typowych transformacji tensorowych. Podział na obwody elementarne trzeba zatem traktować jako swoistą metodę *wyłącznie macierzową*, która stanowi dopiero punkt wyjścia do ewentualnych zastosowań rachunku tensorowego. Trzeba przy tym pamiętać, że macierz odwrotna w stosunku do macierzy łączącej, niezbędna do dalszych wywodów K r o n a, nie zawsze istnieje, [57], co ogranicza zakres stosowalności metody rozczłonkowania systemu. Podobnie jak przy rozpatrywaniu zagadnień pola trzeba przede wszystkim stwierdzić, jaki charakter tensorowy mają napięcia, prądy i oporności i jak je przedstawić we współrzędnych uogólnionych. Rozpatrzmy wartości chwilowe napięć i prądów. Ponieważ prądy odwzorowujemy w postaci macierzy wierszowej, więc nie stoi na przeszkodzie, aby każdemu prądowi w obwodzie elementarnym podporządkować współrzędną uogólnioną q^k . Wówczas obrazem zespołu prądów płynących w obwodach elementarnych jest poliwektor kontrawariantny o składowych i^k . Gdyby obwody elementarne były nieskojarzone, to koniec poliwektora i^k mógłby poruszać się w przestrzeni p -wymiarowej w dowolny sposób. Jeżeli jednak sieć składa się z połączonych ze sobą obwodów, to dla każdego z R węzłów napisać można równanie Kirchhoffa, co we współrzędnych uogólnionych wyrazimy wzorem

$$(100) \quad \sum_r \sum_s C_{rs} i^r = 0.$$

Równania te oznaczają zmniejszenie liczby stopni swobody o R , w następstwie czego wszystkie prądy są jednoznacznie określone przez napięcia zasilające system. Przy zmianie jednego z tych napięć punkt P porusza się po torze wyznaczonym parametrami systemu.

Mnożąc składowe i^k przez odpowiednie składowe macierzy oporności (98) znajdujemy składowe innego poliwektora, mianowicie poliwektora napięcia. Poliwektor ten posiada przeciwny charakter zmienniczości niż i , jest więc poliwektorem kowariantnym o składowych e_i .

Widzimy, że za pomocą macierzy $[Z]$ poliwektor i^k przekształciliśmy na poliwektor e_i , wobec czego dokonaliśmy przekształceń, które na początku przyjęliśmy za transformację tensorową [równania (2) i (19)]. Fakt, że przy transformacji zmienił się charakter fizyczny wielkości — z prądów przeszliśmy na napięcia — nie ma znaczenia z punktu widzenia geo-

metryzacji przebiegu. Dochodzimy więc do wniosku, że macierz oporności traktować można jako podwójnie kowariantny tensor transformacji i równanie wiążące prądy i napięcia napisać należy w postaci tensorowej

$$(101) \quad e_l = \sum_k Z_{kl} i^k.$$

Rozumowanie można równie dobrze przeprowadzić biorąc za punkt wyjścia poliwektor napięć; tensorem transformującym jest wtedy macierz przewodności (admitacji) systemu [Y]:

$$(102) \quad i^r = \sum_s Y^{rs} e_s.$$

W ośrodkach ciągłych mieliśmy do czynienia z transformacjami, które przez zmianę układu odniesienia pozwalały zbadać przebieg zjawiska. Podobnie możemy postępować w obwodach elektrycznych, z tym, oczywiście, że transformacja dotyczyć będzie zmian pewnych właściwości fizycznych układu.

Zauważmy, że dla każdej składowej napięcia w obwodzie e_{kl} w ogólnym przypadku obowiązuje zależność

$$(103) \quad e_{kl} = R i^l + L \frac{d i^l}{dt} + \frac{1}{C} \int i^l dt.$$

Wprowadzając operator różniczkowania (H e a v i s i d e ' a) $p = d/dt$ możemy napisać

$$(104) \quad e_{kl} = (R + L p + C^{-1} p^{-1}) i^l.$$

Jeżeli założymy przez analogię z systemami mechanicznymi, że w najprostszym przypadku R , L i C są parametrami stałymi, to wielkością, którą możemy zmieniać, jest p . Oznacza to, że transformacja tensorowa pozwala na zbadanie wpływu przebiegów czasowych na zachowanie się systemu. Jeżeli wprowadzilibyśmy dodatkową oś współrzędnych t , to zmiana d/dt oznaczałaby obrót układu odniesienia względem osi. To samo zagadnienie można ująć bardziej poglądowo, gdy mamy do czynienia z prądami sinusoidalnymi o stałych amplitudach. Każdemu z prądów w obwodzie elementarnym przyporządkowujemy wówczas dwie współrzędne, q^{rk} i q^{ik} , odpowiadające składowym rzeczywistej i urojonej prądu i^k . Odpowiednikiem zmiany d/dt jest zmiana częstotliwości napięć zasilających układ. Zmiana częstotliwości pociąga za sobą obrót wektorów prądowych we współrzędnych q^{rk} , q^{ik} .

System elektryczny o stałych R , L i C jest przypadkiem szczególnym, który nie wyczerpuje zagadnień stojących przed techniką w dziedzinie energetyki, zwłaszcza w telekomunikacji. Dlatego nieodzowne jest roz-

ciągnięcie przekształcenia tensorowego na systemy o zmiennych R , L i C . Sprawa ta jest bardzo skomplikowana i jeszcze mało zbadana.

Dla scharakteryzowania metody, jakiej należy użyć, rozpatrzmy system elektryczny złożony z obwodów elementarnych o samych indukcyjnościach własnych L_{ij} lub wzajemnych L_{ij} ($i \neq j$), [6]. Najogólniejsza zależność między napięciem i prądem jest

$$(105) \quad e_k = \sum_l L_{kl} \frac{di^l}{dt} + \sum_l i^l \frac{dL_{kl}}{dt} - \sum_{l,m} \Gamma_{lk}^m \Phi_m \frac{di^l}{dt},$$

gdzie Φ_m oznacza strumień magnetyczny skojarzony z indukcyjnością, a Γ_{lk}^m symbol Christoffela, który wyznaczamy z równania

$$(106) \quad \sum_m L_{lm} \Gamma_{kl}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{kh}}{\partial i^l} + \frac{\partial L_{lh}}{\partial i^k} - \frac{\partial L_{kl}}{\partial i^h} \right).$$

Trzy wyrazy prawej strony równania (105) mają ważny sens fizyczny:

(a) wyraz pierwszy charakteryzuje zmiany $e(i)$ w systemie liniowym o parametrach stałych;

(b) wyraz drugi oznacza zmiany parametryczne systemu, które w przypadku napięć sinusoidalnych o stałych amplitudach są odpowiednikiem zniekształceń liniowych;

(c) wyraz trzeci charakteryzuje nieliniowość systemu, jedynie bowiem w systemach nieliniowych lewa strona równania (106) nie jest tożsamościowo równa zero. Tu właśnie tkwi drugi zasadniczy błąd Krona, który szafuje symbolami Christoffela w układach liniowych, nie sprawdzwszy, że wszystkie człony zawierające ten symbol równe są zero.

Z równania (105) widać, że, obok transformacji odpowiadającej zmianie częstotliwości w układzie o stałych parametrach, możliwe są inne przekształcenia układu odniesienia. Transformacja *parametryczna* wynikająca ze zmiany wartości R , L i C może mieć dwojaki charakter:

(a) w przypadkach gdy badamy zachowanie się systemu w funkcji częstotliwości, przy czym jest $R(\omega)$, $L(\omega)$, $C(\omega)$, to mamy do czynienia z transformacją, która odwzorowuje rzeczywiste zmiany systemu [problemy grupy (3)], co nie wymaga dodatkowych wyjaśnień;

(b) możemy jednak zastosować zmianę R , L i C jako transformację formalną, mającą na celu uproszczenie systemu [problemy grupy (2)].

Takiej metody używamy w pewnych zagadnieniach energetycznych przeważnie dla usunięcia sprzężeń wzajemnych między obwodami, tj. składowych Z_{ij} ($i \neq j$) w tensorze oporności, gdy częstotliwość napięć zasilających pozostaje stała. Transformację realizujemy przez odpowiednie dobranie podstawowego tensora metrycznego. Przykładem tego typu transformacji jest znane od dawna *przekształcenie Fortescue*, [23], za

pomocą którego symetryzuje się i pozbawia sprzężeń np. układ cewek silnika.

Układ trzech cewek silnika asynchronicznego posiada oporność

$$(107) \quad \|Z\| = \begin{vmatrix} Z & M_1 & M_2 \\ M_1 & Z & M_1 \\ M_2 & M_1 & Z \end{vmatrix}.$$

Zastępujemy prądy (wartości skuteczne) w obwodach rzeczywistych J^1, J^2 i J^3 prądami umyślonymi J^{11}, J^{12} i J^{13} stosując tensor metryczny

$$(108) \quad \|g\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & h^2 & h \\ 1 & h & h^2 \end{vmatrix},$$

gdzie $h = e^{j120^\circ}$.

Oporność zastępcza dla prądów umyślonych wynosi

$$(109) \quad \|Z'\| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} Z + M_1 + M_2 & 0 & 0 \\ 0 & Z + h^2 M_1 + h M_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z + h M_1 + h^2 M_2 \end{vmatrix}$$

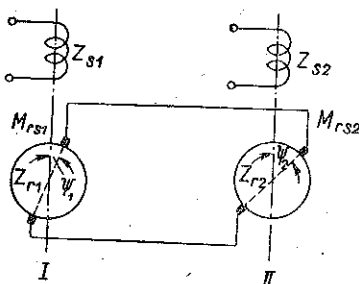
W nowym układzie prądów sprzężenia zostały wyeliminowane i tensor $\|Z'\|$ przybrał postać macierzy diagonalnej. Metoda diagonalizacji macierzy posiada zresztą szereg poważnych opracowań, [68], i jest szczególnie przydatna do rozwiązywania sprzężonych obwodów trójfazowych.

Powyżej przytoczyliśmy przykład, w którym tensor $\|Z\|$ był symetryczny. Tego typu tensory spotykamy z reguły w obwodach energetycznych, gdzie kierunek sprzężenia nie wpływa na rozływ prądów $Z_{ij} = Z_{ji}$. Natomiast w urządzeniach z elementami czynnymi (lampami elektronowymi) tensor $\|Z\|$ jest na ogół niesymetryczny; np. w lampie trój elektrodowej podporządkowanie prądu anodowego prądowi siatki nie jest równoznaczne z zależnością odwrotną.

W przemyśle spotykamy wiele urządzeń elektrycznych, w których obok przebiegów elektrycznych następują przesunięcia przestrzenne elementów systemu. W pojedynczych silnikach czy prądnicach zastosowanie metody tensorowej byłoby zbyt dużą komplikacją. Natomiast w systemach bardziej złożonych, np. przy obliczaniu współpracy kilku prądnic lub projektowaniu urządzeń sterujących, zwięzłość i przejrzystość zapisu tensorowego może być bardzo pożyteczna. Na przykład dla zespołu selsyn (rys. 13), [45], w którym szczotki maszyny sterującej ustawione są pod kątem ψ_1 , a silnika sterowanego pod kątem ψ_2 , otrzymamy macierz oporności dla prądów chwilowych w postaci

$$(110) \quad \|Z\| = \begin{vmatrix} R_{s1} + pL_{s1} & pM_{rs1}e^{j\psi_1} & 0 \\ pM_{rs1}e^{-j\psi_1} & R_{r1} + R_{r2} + p(L_{r1} + L_{r2}) & -pM_{rs2}e^{-j\psi_2} \\ 0 & -pM_{rs2}e^{j\psi_2} & R_{s2} + pL_{s2} \end{vmatrix}$$

Indeksy r odnoszą się do wirnika, indeksy s do stojana pierwszej lub drugiej maszyny. Obracając przestrzenny układ współrzędnych o kąt $-\psi_1$ otrzymamy tensor transformujący o zmiennym parametrze $\psi_1 - \psi_2$, który w dogodny sposób obrazuje wpływ przesunięcia szczotek na pracę układu.



Rys. 13

Można by podać wiele przykładów obliczania podobnych urządzeń złożonych z maszyn komutatorowych. Powyższa metoda może się również nadawać do badania przebiegu prądów w silniku w czasie rozruchu, gdy prędkość kątowna pola wirnika jest parametrem zmiennym.

10. Główne problemy zastosowań metody tensorowej w technice

W niniejszej pracy starano się znaleźć sposoby właściwego wykorzystania rachunku tensorowego dla potrzeb techniki. Widzieliśmy, że potencjalne możliwości tych zastosowań w różnych dziedzinach techniki są bardzo rozległe. Z drugiej jednak strony zakres aktualnego wprowadzenia metody tensorowej jest bardzo nierównomierny, gdyż w jednych gałęziach techniki — jak np. w teorii sprężystości — stała się ona ważnym narzędziem pracy naukowców, natomiast w innych jest prawie nieznaną i wymaga pionierskich badań matematyków i techników.

Droga tych badań jest ułatwiona dzięki temu, że, jak wykazano w niniejszej pracy, metody przystosowania rachunku tensorowego do różnych dziedzin techniki noszą wiele cech wspólnych. Przy atakowaniu problemów technicznych, związanych z ośrodkami ciągłymi lub z systemami o stałych skupionych, kierować się należy następującymi wytycznymi, wynikającymi z poprzednio przeprowadzonej analizy:

(1) Rachunek tensorowy stosować można jedynie do obiektów, które dadzą się przedstawić za pomocą tensorów i których właściwości tensorowe występują w badanym przez nas problemie technicznym. Dlatego podstawą prawidłowego posługiwania się metodą tensorową w technice jest zbadanie sensu fizycznego zależności matematycznych.

(2) Wyniki obliczeń tensorowych szczególnie łatwo dają się przenosić z jednej dziedziny techniki do innej. Dlatego stając przed nowym problemem trzeba przede wszystkim stwierdzić, czy w innych dyscyplinach technicznych nie opracowano już zagadnienia o zbliżonym charakterze matematycznym.

(3) Geometryzacja zjawiska powinna być przeprowadzona w ten sposób, aby we wzorach tensorowych uwydatniły się najistotniejsze dla technika współzależności między parametrami, będącymi przedmiotem projektowania, bądź też między wielkościami zmiennymi, decydującymi o ekonomice danego procesu technologicznego.

(4) Układ odniesienia trzeba tak dobrać, aby uzyskać najwygodniejsze zależności matematyczne. W zagadnieniach ośrodków ciągłych posługujemy się zasadniczo trój- lub czterowymiarowym układem odniesienia; dalsze osie współrzędnych noszą przeważnie charakter pomocniczy. W systemach o stałych skupionych stosuje się współrzędne uogólnione, których liczba jest funkcją liczby stopni swobody układu. Zależnie od charakteru badanego zjawiska czas można traktować jako niezależną współrzędną lub też odwzorowywać zmiany w czasie przez transformację układu odniesienia.

(5) Nie wolno sugerować się efektywnym ujęciem wzorów tensorowych we współrzędnych krzywoliniowych; rzeczą konieczną jest sprawdzenie, czy wyrażenia w tych wzorach lub ich częściach nie stają się tożsamościowo równe zeru.

(6) Pożądane jest, aby transformacje tensorowe upraszczały badane zjawisko, sprowadzając je do typowego, lepiej znanego obiektu. Należy sprawdzić prawidłowość transformacji przez określenie niezmienników i zbadanie ich znaczenia fizycznego.

(7) Należy ściśle rozgraniczać metodę tensorową od zastosowań technicznych algebry macierzowej. Sprawdzianem jest tutaj sposób transformacji i jej użyteczność przy obliczeniach technicznych.

Posługiwanie się metodą tensorową jako narzędziem badawczym wymaga opanowania zasad algebry tensorowej oraz zdobycia pewnej rutyny w obliczeniach. Dlatego stosowanie metody tensorowej do fragmentarycznych, rzadko spotykanych zagadnień technicznych jest nieuzasadnione, chyba że inne prostsze metody obliczeniowe całkowicie zawiodą. Główny nacisk należy zatem położyć na gruntowne zbadanie przydatności metody tensorowej do rozwiązywania problemów podstawowych, występujących w wielu dziedzinach techniki lub mających zasadnicze znaczenie dla jakiejś ważnej dyscypliny technicznej. Jedynie wówczas opłaca się trud opanowania specjalnego aparatu matematycznego.

Trudno na podstawie dotychczasowego stanu nauki podać ściśłą i kompletną liczbę zagadnień, które należałoby badać metodą tensorową. Należą do nich jednak następujące zagadnienia, które ze względu na ich doniosłość dla nauki i gospodarki narodowej zasługują przede wszystkim na zbadanie metodą tensorową:

- (1) obliczenia rozkładu pól statycznych oraz przebiegów falowych i impulsowych w ośrodkach anizotropowych,
- (2) badania zmian reologicznych w ośrodkach ciągłych,

(3) ogólna teoria przebiegów nieliniowych w ośrodkach ciągłych i systemach,

(4) określanie optymalnych parametrów złożonych obwodów elektrycznych.

Wymienione zagadnienia są bardzo obszerne i stosunkowo mało zbadane, wobec czego opracowanie ich może dać cenne rezultaty jedynie przy zespołowej i planowej współpracy matematyków i techników.

Bibliografia

- [1] M. Abraham-R. Becker, *Theorie der Elektrizität*, t. 1, Teubner, Lipsk 1932.
- [2] R. Arian o, *Deformazioni finite*, Hoepli, Mediolan 1936.
- [3] P. Appel - R. Thiry, *Mécanique rationelle*, t. 5, Gauthier-Villars, Paryż 1932.
- [4] N. H. Arutiunian, *Trudy IV konfieriencji po bietonu i żelezobietonnym konstrukcjam*, Strojizdat, Moskwa 1949.
- [5] J. Barbotte, *Le calcul tensoriel*, Masson, Paryż 1948.
- [6] W. Bierie diejew, *O robotach Krona po primienienju tiensornowo isczislenja w elektrotechnike*, Elektrizestwo 12 (1950), str. 78.
- [7] P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice-Hall, Naw York 1942.
- [8] L. Brillouin, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Masson, Paryż 1949.
- [9] W. Bulgakow, *Kolebanja*, t. 1, Gostiechizdat, Moskwa 1949.
- [10] P. Burgatti, *Sulle deformazioni finite dei corpi continui*, Mem. dell'Ac. di Bologna, ser. 7a I, 1913 (cyt. według [76]).
- [11] W. G. Cady, *Piezoelectricity*, McGraw-Hill, New York 1946.
- [12] E. Cartan, *Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paryż 1928. (Tłumaczenie ros. ONTI, Moskwa 1936).
- [13] P. Chalmor, *Teorja miery*, Izd. Inostr. Lit., Moskwa 1951.
- [14] T. Cholewicki, *Zastosowania macierzy w elektrotechnice*, PWN, Warszawa 1952.
- [15] L. B. Christoffel, *Über die Fortpflanzung von Stößen durch elastische feste Körper*, Ann. d. Math., t. 8, 1877, str. 193.
- [16] R. V. Churchill, *Introduction to Complex Variable and Applications*, McGraw-Hill, New York 1948.
- [17] A. J. Mc. Connell, *Applications of the Absolute Differential Calculus*, Blackie-Sons, Londyn 1947.
- [18] M. Denis - Papin - A. Kaufmann, *Cours de calcul tensoriel appliqué*, Paryż 1953.
- [19] P. A. M. Dirac, *Homogeneous Variables in Classical Dynamics*, Proc. Cambr. Phil. Soc., t. 29, 1933, str. 389.
- [20] J. Dubnow, *Osnovy wiektornowo isczislenja*, t. 2, Moskwa 1952.
- [21] A. Duschek - A. Hochrainer, *Grundzüge der Tensorrechnung in analitischer Darstellung*, Springer, t. 1, Wiedeń 1948, t. 2, 1950.
- [22] A. Einstein, *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie*, Barth, Lipsk 1916.
- [23] C. L. Fortescue, *Method of Symmetrical Co-ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks*, Trans. Amer. Inst. of Elect. Eng., t. 37, cz. 2, 1918.

[24] P. Frank - R. Mises, *Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, Vieweg, Brunswik 1930.

[25] Frazer - Duncan - Collar, *Elementary Matrices*, Cambridge Univ. Press, 1938.

[26] J. Frenkel, *Lehrbuch der Elektrodynamik*, Springer, Berlin 1928.

[27] B. G. Galerkin, *Obszczeje reszenje urawnienja teorji uprugosti*, Wiestnik miech. i prikl. mat., t. 2, Leningrad 1931, str. 3.

[28] B. N. Gorbunow - J. Krotow, *Osnowy rasczeta prostranstwiennych ram*, ONTI, Moskwa 1936.

[29] B. N. Gorbunow - A. Strielbickaja, *Tieorja ram iz tonkostiennych stierzniej*, OGIZ, Moskwa 1948.

[30] F. R. Gautmachier - M. G. Kriejn, *Oscillacionnyje matricy i малыje kolebanja miechaniczeskich sistiem*, Moskwa-Leningrad 1941.

[31] J. Goldienblat, *Wwiedienje w tieorju potzuczesti stroitelnyh materialow*, Gosizdat, Moskwa 1952.

[32] W. A. Goworkow, *Elektriczeskije i magnitnyje pola*, Swjazizdat, Moskwa 1951.

[32a] A. Grzedzielski, *Zarys ogólnej teorii sprężystości*, Spraw. Inst. Techn. Lot. 1 (1938).

[33] M. G. Grassmann, *Die Ausdehnungslehre*, Berlin 1862.

[34] L. N. Gruzow, *K statje Maksimowicza*, *Elektriczestwo* (12) 1952, str. 82.

[35] A. Haas, *Vektoranalysis*, Gruyter, Berlin 1929.

[36] L. Infeld, *Elektrodynamika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1953 (skrypt).

[37] D. Iwanienko - A. Sokołow, *Klasiczeskaja tieorja pola*, Gosizdat tiechn.-tieor. lit., Moskwa 1951.

[38] G. Juvvert, *Introduction au calcul tensoriel*, Blanchard, Paryż 1922.

[39] W. G. Kagan, *Osnowy teorji powierchnostiej w tienzornom iztoženji*, Gostiechizdat, t. 1, Moskwa 1947.

[40] R. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik*, Elektrizität und Magnetismus, M. Planck, Berlin 1891.

[41] E. Karaśkiewicz, *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN, Poznań 1953 (skrypt).

[42] P. Kotielnikow - W. A. Fok, *Niekotoryje primienienja idiei neewklidowej geometrii Łobaczewskowo w miechanikie i fizikie*, Gostiechizdat, Moskwa-Leningrad 1950.

[43] N. E. Koczin, *Wiekturnoje isczislenje i naczala tienzornowo isczislenja*, Izdat. A. N. SSSR, Moskwa 1951.

[44] W. Kołtoński - I. Malecki, *La méthode ultrasonore pour les recherches des couches géologiques*, Bull. de l'Acad. Pol. des Sc. kl. IV. t. 1, 3 (1953).

[45] G. Kron, *Tensor Analysis for Electrical Engineers*, J. Wiley, New York 1942.

[46] G. Kron, *Tensor Analysis of Networks*, J. Wiley, New York 1949.

[47] G. Kron, *The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery*, Gen. Electr. Rev., kwiecień 1935.

[48] I. L. Kronecker, *Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale*, Teubner, Lipsk 1894.

[49] J. A. Krutkow, *Tieazor funkcij napriaženij*, Izdat. A. N. SSSR, Moskwa 1949.

[50] R. Courant - D. Hilbert, *Mietody matiematiczeskoj fiziki*, Gostiechizdat, Moskwa 1949.

[51] D. I. Kułilin, *Tieorja koniecznych dieformacij*, Gostiechizdat, Moskwa 1947.

- [52] M. Landolt - E. Thomas, *Grandeur, mesure et unité*, Paryż 1947.
- [53] S. G. Lechnicki, *Teorja uprugosti anizotropnowo tieta*, Gosizdat tiechn.-teor. lit., Moskwa 1950.
- [54] J. Litwiniszyn, *Uogólnienie równań hydromechaniki*, Prace mat.-fiz. t. 48 (1952).
- [55] T. Levi - Civita, *The absolute Differential Calculus (Calculus of Tensor)*, Blackie-Sons, Londyn 1947.
- [56] H. A. Lorentz, *Das Relativitätsprinzip*, Berlin 1914.
- [57] N. G. Maksimowicz, *K teorji prieobrazowanja schiem G. Krona*, Elektricestwo 11 (1952), str. 56.
- [58] I. Malecki, *Interpretacja fizyczna analogii elektromechanicznych*, Przegląd Elektr., 1 (1952), str. 3.
- [59] I. Malecki, *Rozszerzenie poprawionego systemu analogii na ośrodki ciągłe izotropowe*, Arch. Elektr. 1 (1953).
- [60] J. Malecki, *Akustyka filmowa i radiowa*, PWT, Warszawa 1950.
- [61] I. Malecki, *Teoria ciśnienia promieniowania fal ultradźwiękowych*, Mat. I Konf. Ultradźw., PWN, Warszawa 1953 (w druku).
- [62] G. Marx, *Das elektromagnetische Feld in bewegten anizotropen Medien*, Acta Phys. Acad. Sci. Hung., t. 3, 2 (1953), str. 75.
- [63] W. P. Mason, *First and Second Order Equations for Piezoelectric Crystals Expressed in Tensor Form*, Bell System Techn. Journ., t. 26, 1947, str. 80.
- [64] A. D. Michal, *Matrix and Tensor Calculus*, J. Wiley, New York 1948.
- [65] H. Minkowski, *Raum und Zeit*, Getynga 1909.
- [66] A. Mostowski - M. Stark, *Algebra wyższa*, cz. 1, P.T.M., Warszawa 1953.
- [67] O. Nikodym, *Teoria tensorów wraz z zastosowaniem do geometrii i fizyki matematycznej*, Kasa im. Mianowskiego, Warszawa 1938.
- [68] L. A. Pipes, *Steady-state Analysis of Multiconductor Transmission Lines*, Journ. of Appl. Physics, 11 (1942).
- [69] H. Poincaré, *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, Carré, Paryż 1829.
- [70] W. Pogorzelski, *Analiza matematyczna*, t. 3, Czytelnik, Warszawa 1949.
- [71] P. K. Raszewski, *Rimanowa geometrija i tienzornyj analiz*, Gosizdat tiechn.-teor. lit., Moskwa 1953.
- [72] G. Ricci - T. Civita, *Méthodes de calcul differential absolu et leur application*, Math. Ann., t. 54, 1901, str. 195.
- [73] W. Rubinowicz, *Wektory i tensory*, Warszawa 1950.
- [74] J. A. Schouten, *Tensor Analysis for Physicists*, Clarendon, Oksford 1951.
- [75] I. S. Sokolnikoff, *Tensor Analysis*, J. Wiley, New York 1951.
- [76] P. A. Szirokow, *Tienzornyje iszczislenja*, Moskwa-Leningrad 1934.
- [77] S. A. Stigant, *Modern Electrical Engineering Mathematics*, Hutchinson, Londyn 1947.
- [78] S. Timoshenko, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York 1936.
- [79] N. A. Urmajew, *Elementy fotogrammetrii*, Geodiezizdot, Moskwa 1941.
- [80] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Getynga 1910.
- [81] W. Voigt, *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Kristalle*, Teubner, Lipsk 1898.
- [82] H. Weyl, *Raum, Zeit und Materie*, Springer, Berlin 1921.
- [83] E. W. Zieliach, *Osnowy obszczej teorji liniejnych elektriczeskich schiem*, Izwiest. A. N. SSSR, 1951.

МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ТЕХНИКЕ

Целью настоящей работы является определение степени полезности тензорного исчисления в различных отраслях техники и исследование классических методов приспособления тензорных методов для решения технических проблем.

Краткое историческое введение указывает пути перенесения тензорных методов из математики и теоретической физики в область механики и электротехники. В виду того, что работа предназначена главным образом для техников, необходимо было привести основные тензорные понятия. Исходным пунктом принято геометрическую интерпретацию тензорных трансформаций в декартовых координатах, общая затем эти понятия на криволинейные координаты и пространство Римана.

Основой для технических применений метода является физическая интерпретация тензора. Рассмотрено тензорный характер физических зависимостей и тензорный метод определения инвариантных свойств объектов. Проведено аналогии между методами, применяемыми в анализе мер и тензорной алгебре. Далее, исследованы различия физического характера между понятиями тензора и матрицы.

Подтверждено, что в технических проблемах существуют три типа тензорных трансформаций:

- (а) формальные трансформации, не изменяющие типа объекта,
- (б) формальные трансформации, вызывающие изменение типа объекта,
- (в) трансформации, отображающие действительные изменения, происходящие в объекте.

Приведена характеристика и примеры каждого из этих типов трансформаций.

Проанализировано выгоды применения тензорного исчисления в технике, вытекающие из его универсальности, синтетичности и пригодности для расчётов.

Совокупность применений тензорного исчисления в технике разделено на вопросы, касающиеся сплошных сред и систем со многими степенями свободы.

Исследовано тензорный характер физических величин, появляющихся в упругом и электромагнитном поле, и особенные типы тензоров, употребляемых при исследовании сплошных сред.

Далее указывается, что соответственно модифицированные тензорные методы могут быть полезны в следующих отраслях техники, связанных с вопросами сплошных сред:

- (а) классической теории упругости, а в особенности анизотропных сред,
- (б) теории конечных деформаций,
- (в) гидродинамике вязких жидкостей,
- (г) теории пластичности и реологии,
- (д) нелинейных явлениях в электромагнитном поле,
- (е) импульсной передаче электромагнитных волн,
- (ж) пространственной аэротриангуляции.

Для каждой из этих областей определены наиболее соответствующие тензорные методы и приведены примеры.

Следует подчеркнуть, что в работе рассмотрены: техническая применимость тензора энергии импульса, тензорная форма уравнений Максвелла, а также и тензор с переменными составляющими, выступающий в вопросах реологии и конечных деформаций.

Проведено сравнение физического смысла тензора в системах с сосредоточенными постоянными и в сплошных средах. Кроме того исследовано область применения метода обобщенных координат.

На этом основании установлено, что тензорное исчисление пригодно для исследования систем, выступающих в:

- (а) некоторых вопросах классической механики (например в уравнениях Лагранжа и Гамильтона),
- (б) пространственных фермах,
- (в) сложных электрических сетях,
- (г) сложных системах телесвязи, работающих на переменной частоте.

Особенное внимание обращено на соответствующие разграничение между тензорным исчислением и исчислением матриц. Отсюда следует отношение к теории Г. Крона и заключающихся в ней погрешностей. Исследован тензорный характер мнимого электрического сопротивления и пригодные для техники методы его трансформирования. Далее указаны возможности, скрывающиеся в применении криволинейных координат и теории „моторов” Горбунова при исследовании механических систем.

Самыми актуальными проблемами применения тензорного исчисления в технике, по мнению автора, являются:

- (а) определение статических полей, волновых и импульсных явлений в анизотропных средах,
- (б) исследование реологических изменений в сплошных средах,
- (в) общая теория нелинейных процессов в системах и сплошных средах,
- (г) исследование сложных электрических цепей.

S u m m a r y

METHODS OF APPLICATION OF TENSOR CALCULUS TO TECHNICAL PROBLEMS

The author's aim is to determine the degree of utility of the tensor calculus in various branches of technical sciences and to discuss the application of the classical methods of tensor analysis to technical problems.

A short historical introduction indicates the ways in which the methods of tensor calculus have been applied to problems of mechanics and electrotechnics. Since the paper is destined for technicians, it has been considered desirable to explain some fundamental notions relating to tensors. The geometrical interpretation of tensor transformations in Cartesian co-ordinates was taken as the starting point, generalizing the notion to curvilinear co-ordinates and to Riemannian space.

The basis of technical applications of tensor analysis is the physical interpretation of the tensor. The tensorial character of physical relations and the use of tensors for detecting invariable features of the investigated object are discussed. The methods of dimensional analysis are compared with those of tensor algebra. Next, the physical differences between the notion of the tensor and that of the matrix are investigated.

It was found that in technical problems there are three types of tensor transformations:

- (a) formal transformations, in which the type of the object is not changed,
- (b) formal transformations changing the type of the object,
- (c) transformations representing real changes in the object.

Each type of transformation is characterised and examples given.

The advantages of tensor calculus in technical problems resulting from its general and synthetic character and its suitability for calculations are analysed. The whole of the applications discussed is divided into two groups of problems, the first concerning continuous media, and the other — systems of many degrees of freedom.

The tensorial character of physical quantities relative to the elastic and the electromagnetic fields are discussed, as well as special types of tensors used for investigation of continuous media.

It was found that the methods of tensor calculus, when suitably modified, can be applied in the following branches of technics, concerning continuous media:

- (a) classical theory of elasticity, especially the theory of anisotropic bodies,
- (b) theory of finite deformations,