

JERZY KLOTT, JAROSŁAW NALESZKIEWICZ, JERZY RUTECKI,
KAZIMIERZ WITUSZYŃSKI

**STUDIA WSTĘPNE Z DZIEDZINY SKRĘCANIA
KADŁUBA OKRĘTU NA FALI SKOŚNEJ**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXXIV**

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Teoria profili cienkościennych stosowanych w okrętownictwie	419
1.1. Środek ścinania i powierzchnia wycinkowa przekrojów złożonych	419
1.2. Równanie różniczkowe skręcania w przypadku przekrojów złożonych. Rozkład naprężeń	442
2. Skręcanie kadłuba okrętu na fali skośnej	453
2.1. Uwagi o cienkościennych przekrojach złożonych kadłuba okrętowego	453
2.2. Równanie skręcania przekroju dwuspójnego	453
2.3. Obciążenia i warunki brzegowe dla statku o przekroju nieciągłe zmiennym	459
2.4. Ciągłość naprężeń w miejscach zetknięcia się dwóch różnych profili	460
2.5. Rozkład naprężeń stycznych w przekrojach złożonych	463
2.6. Przykład liczbowy	464
2.7. Układy wyrównujące naprężenia w przekrojach granicznych	470
3. Obliczenie kadłuba okrętowego jako kratownicy przestrzennej	475

1. TEORIA PROFILI CIENKOŚCIENNYCH STOSOWANYCH W OKRĘTOWNICTWIE

1.1. Środek ścinania i powierzchnia wycinkowa przekrojów złożonych

Zagadnienie skrępowanego skręcania kadłuba okrętu na fali skośnej poprzedzimy omówieniem własności przekrojów geometrycznie uproszczonych — tj. takich, których kontur składa się z odcinków prostych — lecz zachowujących pewne podobieństwo z rzeczywistymi przekrojami okrętowymi.

Przekroje te są bardziej złożone od dotychczas teoretycznie zbadanych przekrojów otwartych i zamkniętych, dlatego będzie rzeczą wskazaną przeprowadzenie na wstępie krótkich rozważań dotyczących wyznaczania powierzchni wycinkowych wspomnianych profili.

Jak wiadomo, spaczenie pręta cienkościennego o otwartym profilu, poddanego skręcaniu, powstałe między dwoma punktami A i B linii środkowej konturu, wyraża się następująco:

$$(1.1.1) \quad \zeta_B - \zeta_A = -\varphi' \omega_{AB},$$

gdzie φ' jest kątem skręcenia przypadającym na jednostkę długości, a ω_{AB} polem powierzchni wycinkowej (względem środka zginania czyli ścinania przekroju otwartego) zawartym pomiędzy punktami A i B .

Spaczenie pręta o profilu zamkniętym wyraża się wzorem

$$(1.1.2) \quad \zeta_B - \zeta_A = -\varphi' \hat{\omega}_{AB},$$

gdzie $\hat{\omega}_{AB}$ jest polem powierzchni wycinkowej (względem środka zginania przekroju zamkniętego), zawarty między punktami A i B .

Powierzchnie wycinkowe ω_{AB} i $\hat{\omega}_{AB}$ różnią się od siebie o wielkość

$$\oint \frac{\Omega}{\delta} \int_{AB} \frac{ds}{\delta}$$

Wyrażenia określające spaczenie odpowiednich przekrojów zostały wyprowadzone z zależności, wyznaczających posunięcie elementu leżącego w płaszczyźnie linii środkowej konturu. Różnica polega na przyjęciu

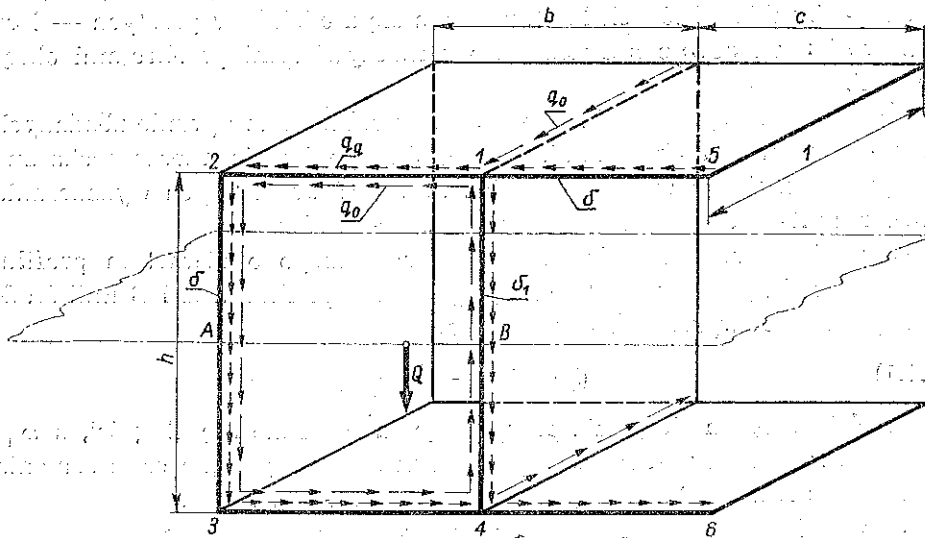
kąta odkształcenia postaciowego γ dla profilu otwartego jako równego zero, natomiast dla profilu zamkniętego jako różnego od zera ($\gamma = q/G\delta$).

Wzory (1.1.1) i (1.1.2) pozwalają wnioskować, że spaczenie dowolnego profilu wyraża się jako iloczyn wielkości φ' przez odpowiednie pole powierzchni wycinkowej, ściśle zależnej od kształtu przekroju.

Na podstawie powyższego możemy twierdzić, że w przypadku profilu złożonego z elementów otwarto-zamkniętych spaczenie przekroju pomiędzy dwoma dowolnymi punktami A i B linii środkowej konturu wyraża się wzorem

$$(1.1.3) \quad \zeta_B - \zeta_A = -\varphi' \tilde{\omega}_{AB},$$

gdzie $\tilde{\omega}_{AB}$ jest polem powierzchni wycinkowej przekroju otwarto-zamkniętego, zawartym pomiędzy punktami A i B , obliczonym względem środka zginania.



Rys. 1

Należy podkreślić, że mamy tu do czynienia z zagadnieniem wieloparametrowym, a w przypadku profilu podanego na rys. 1 — ze względu na symetrię przekroju — dwuparametrowym, gdyż $\tilde{\omega}$ jest zależne od dwóch parametrów $\hat{\omega}$ i ω . Wielkość $\hat{\omega}$ jest parametrem przedstawiającym pole powierzchni wycinkowej, dotyczącej profilu złożonego w obrębie zamkniętym, natomiast ω jest drugim parametrem przedstawiającym pole powierzchni wycinkowej w części otwartej. Parametry $\hat{\omega}$ i ω są wielkościami statycznie niewyznaczalnymi dla danego typu profilu otwarto-zamkniętego; możemy je obliczyć jedną ze znanych metod, mianowicie metodą energetyczną lub metodą przyrównania odkształceń. W dalszych

rozważaniach obrano metodę drugą, tzn. przyrównano do siebie spacznięcia w punkcie granicznym części przekroju zamkniętej i otwartej.

Tą drogą będziemy postępowali przy dalszych wieloparametrowych profilach.

Szczegółową analizę rozpoczniemy od rozpatrzenia przekroju przedstawionego na rys. 1. Przekrój ten obciążony siłą Q jest najprostszym przekrojem otwarto-zamkniętym. Brak podwójnej symetrii przekroju stwarza konieczność znalezienia poziomej współrzędnej środka zginania. Dokonujemy w myśli rozcięcia przekroju w punktach 1 i 4; wskutek tego w obu ceownikach 1 2 3 4 i 5 1 4 6 jako profilach otwartych powstaną strumienie napięć stycznych q_q , pochodzących od siły poprzecznej Q . W celu zlikwidowania posunięcia względnego, powstałego wskutek rozcięcia, wprowadzamy strumień stałych napięć stycznych q_0 , płynących w obwodzie zamkniętym 1 2 3 4 1. Wielkość strumienia q_Q w każdym punkcie przekroju można bez trudności wyznaczyć ze wzoru

$$(1.1.4) \quad q_q = \frac{Q S_x}{I_x},$$

gdzie S_x jest momentem statycznym części przekroju znajdującej się ponad warstwą, w której obliczamy wielkość napięć stycznych.

Dla określenia q_0 posługujemy się dodatkowym warunkiem stwierdzającym, że suma przesunięć poszczególnych elementów przekroju zamkniętego musi się równać zero:

$$(1.1.5) \quad \oint \gamma \cdot 1 \cdot ds = 0.$$

Ponieważ

$$\gamma = \frac{q}{G \delta} = \frac{q_q + q_0}{G \delta},$$

to

$$(1.1.6) \quad \oint \frac{q_q + q_0}{G \delta} ds = 0.$$

Układając równanie dla części zamkniętej przekroju oraz uwzględniając wartość q_q ze wzoru (1.1.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{Q}{I_x G} \int_{12} \frac{S_x ds}{\delta} + \frac{q_0}{G} \int_{12} \frac{ds}{\delta} + \frac{Q}{I_x G} \int_{23} \frac{S_x ds}{\delta} + \frac{q_0}{G} \int_{23} \frac{ds}{\delta} + \frac{Q}{I_x G} \int_{34} \frac{S_x ds}{\delta} + \\ + \frac{q_0}{G} \int_{34} \frac{ds}{\delta} - \frac{Q}{I_x G} \int_{41} \frac{S_x ds}{\delta_1} + \frac{q_0}{G} \int_{41} \frac{ds}{\delta_1} = 0 \end{aligned}$$

Wartości momentów statycznych w składnikach powyższego równania są następujące:

$$S_{x_{12}} = x \delta \frac{h}{2}, \quad S_{x_{23}} = \frac{b \delta h}{2} - \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) \delta y,$$

$$S_{x_{34}} = \frac{b \delta h}{2} - x_1 \delta \frac{h}{2}, \quad S_{x_{45}} = c \delta \frac{h}{2} + \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) \delta y.$$

Po skróceniu przez G i przeprowadzeniu odpowiednich całkowań równania (1.1.6) zapisujemy w postaci

$$(1.1.7) \quad q_0 \left(2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1} \right) + \frac{Q}{I_x} \left[\left(\frac{b^2 h}{4} \right)_{12} + \left(\frac{b h^2}{2} + \frac{h^3}{12} \right)_{23} + \left(\frac{b^2 h}{4} \right)_{34} - \left(\frac{c h^2}{2} \frac{\delta}{\delta_1} + \frac{h^3}{12} \right)_{45} \right] = 0,$$

skąd

$$q_0 = - \frac{Q}{I_x} \frac{\left(\frac{b^2 h}{4} \right)_{12} + \left(\frac{b h^2}{2} + \frac{h^3}{12} \right)_{23} + \left(\frac{b^2 h}{4} \right)_{34} - \left(\frac{c h^2}{2} \frac{\delta}{\delta_1} + \frac{h^3}{12} \right)_{45}}{2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}}.$$

Moment strumienia q_0 wyraża się wzorem

$$(1.1.8) \quad M_2 = \frac{Q}{I_x} \Omega \frac{\left(\frac{b^2 h}{4} \right)_{12} + \left(\frac{b h^2}{2} + \frac{h^3}{12} \right)_{23} + \left(\frac{b^2 h}{4} \right)_{34} - \left(\frac{c h^2}{2} \frac{\delta}{\delta_1} + \frac{h^3}{12} \right)_{45}}{2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}},$$

gdzie $\Omega = 2bh$. Moment strumienia q_0 względem punktu B jest

$$(1.1.9) \quad M_1 = \frac{Q}{I_x} \left(\int_{12} S_x \varrho ds + \int_{34} S_x \varrho ds + \int_{51} S_x \varrho ds + \int_{46} S_x \varrho ds + \int_{23} S_x \varrho ds \right) = - \frac{Q}{I_x} \left[\left(\delta \frac{b^2 h^2}{8} \right)_{12} + \left(\delta \frac{b^2 h^2}{8} \right)_{34} + \left(\delta \frac{c^2 h^2}{8} \right)_{51} + \left(\delta \frac{c^2 h^2}{8} \right)_{46} + \left(\delta \frac{b^2 h^2}{2} + \delta \frac{b h^3}{12} \right)_{23} \right].$$

Odległość środka ścinania od punktu B otrzymujemy z warunku równoważności momentów napięć stycznych i momentu zewnętrznego (a nie, co pragniemy podkreślić, z równania równowagi momentów):

$$(1.1.10) \quad a_{xx} = \frac{-M_1 + M_2}{Q}.$$

Za dodatni uważamy moment powodujący obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara. W oparciu o oznaczenia podane na rys. 1 i na podstawie wzoru (1.1.10) można stwierdzić, że moment M_1 jest ujemny, zaś moment M_2 dodatni.

Zapiszemy wzór na środek ścinania w postaci całkowej:

$$(1.1.11) \quad a_{xx} = \frac{1}{I_x} \left\{ \frac{\int_0^b x \delta \frac{h}{2} \frac{dx}{\delta} + \int_0^h \left[\frac{b \delta h}{2} + \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) \delta y \right] \frac{dy}{\delta}}{2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}} + \right. \\ \left. + \frac{\int_0^b \left(b \delta \frac{h}{2} - x_1 \delta \frac{h}{2} \right) \frac{dx}{\delta} - \int_0^h \left[\frac{c \delta h}{2} + \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) \delta, y \frac{dy}{\delta_1} \right]}{2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}} \right. \\ \left. - \int_0^b x \delta \frac{h}{2} \frac{h}{2} dx - \int_0^b \left(b \delta \frac{h}{2} - x_1 \delta \frac{h}{2} \right) \frac{h}{2} dx - \int_0^h \left[\frac{b \delta h}{2} + \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) \right] b dy - \int_0^c x \delta \frac{h}{2} \frac{h}{2} dx - \int_0^c \left(c \delta \frac{h}{2} - x_1 \delta \frac{h}{2} \right) \frac{h}{2} dx \right\}.$$

Natomiast wzór na środek ścinania względem dowolnego bieguna przy wprowadzeniu powierzchni wycinkowych jest

$$(1.1.12) \quad a_{xx} = \frac{1}{I_x} \int \tilde{\omega} y dA,$$

lub w postaci uwzględniającej każdy element rozpatrywanego przekroju (rys. 1)

$$(1.1.13) \quad a_{xx} = \frac{1}{I_x} \left(\int_{12} \hat{\omega} y dA + \int_{23} \hat{\omega} y dA + \int_{34} \hat{\omega} y dA + \right. \\ \left. + \int_{41} \hat{\omega} y dA + \int_{51} \omega y dA + \int_{46} \omega y dA \right).$$

We wzorze (1.1.11) podobnie jak i we wzorze (1.1.13) można wydzielić część odpowiadającą momentowi statycznemu $y dA$; pozostała część powinna odpowiadać powierzchni wycinkowej.

Mając na uwadze, że powierzchnia wycinkowa dowolnego odcinka n -tego konturu zamkniętego ma postać

$$(1.1.14) \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}_{n-1} - \omega_n + \frac{\Omega}{s_0} \frac{s_n}{\delta_n}$$

lub

$$\hat{\omega}_n = -\omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{n-1} + \frac{\Omega}{s_0} \left(\frac{s_1}{\delta_1} + \frac{s_2}{\delta_2} + \dots + \frac{s_{n-1}}{\delta_{n-1}} \right) - \omega_n + \frac{\Omega}{s_0} \frac{s_n}{\delta_n}$$

gdzie

$$\hat{\omega}_{n-1} = -\omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{n-1} + \frac{\Omega}{s_0} \left(\frac{s_1}{\delta_1} + \frac{s_2}{\delta_2} + \dots + \frac{s_{n-1}}{\delta_{n-1}} \right),$$

powierzchnie wycinkowe występujące we wzorze (1.1.11) przedstawimy w postaci

$$(1.1.15) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\omega}_{B1} &= \frac{\Omega}{2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}} \int_0^{h/2} \frac{dx}{\delta_1} = \frac{\Omega}{s_0} \frac{h}{2\delta_1} \quad (\omega_{B1} = 0), \\ \tilde{\omega}_{12} &= \tilde{\omega}_1 + \frac{\Omega}{2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}} \int_0^b \frac{dx}{\delta} - \int_0^b \frac{h}{2} dx = \tilde{\omega}_1 + \frac{\Omega}{s_0} \frac{b}{\delta} - \omega_{12}, \\ \tilde{\omega}_{23} &= \tilde{\omega}_2 + \frac{\Omega}{2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}} \int_0^h \frac{dy}{\delta} - \int_0^h b dy = \tilde{\omega}_2 + \frac{\Omega}{s_0} \frac{h}{\delta} - \omega_{23}, \\ \tilde{\omega}_{34} &= \tilde{\omega}_3 + \frac{\Omega}{2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}} \int_0^b \frac{dx}{\delta} - \int_0^b \frac{h}{2} dx = \tilde{\omega}_3 + \frac{\Omega}{s_0} \frac{b}{\delta} - \omega_{34}, \\ \tilde{\omega}_{4B} &= \tilde{\omega}_4 + \frac{\Omega}{2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}} \int_0^{h/2} \frac{dx}{\delta_1} = \tilde{\omega}_4 + \frac{\Omega}{s_0} \frac{h}{2\delta_1} \quad (\omega_{4B} = 0), \\ \omega_{15} &= \tilde{\omega}_1 + \int_0^c \frac{h}{2} dx = \tilde{\omega}_1 + \omega_{15}, \\ \omega_{46} &= \tilde{\omega}_4 - \int_0^c \frac{h}{2} dx = \tilde{\omega}_4 - \omega_{46}. \end{aligned} \right.$$

Jak widać ze wzorów (1.1.15), składowe wyrażenia dla powierzchni wycinkowych w postaci $(\Omega/s_0)(b/\delta)$ lub $(\Omega/s_0)(h/2\delta)$ nie zależą od położenia pomocniczego bieguna B , natomiast wpływ tego bieguna uwidacznia się w wyrażeniach $\int h dx$ i $\int b dx$.

Ten wniosek znajduje potwierdzenie we wzorach (1.1.8) i (1.1.9) określających momenty M_1 i M_2 . Wielkość momentu M_1 związanego z profilem otwartym zależy od umiejscowienia bieguna, natomiast moment M_2 ma wartość stałą bez względu na położenie bieguna.

Łatwym sprawdzeniem słuszności wyprowadzonych wzorów (1.1.15) jest obliczenie wyrażenia

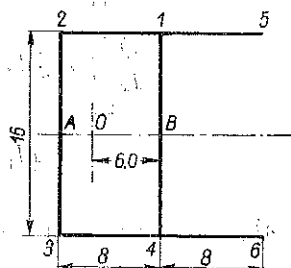
$$\frac{\Omega}{s_0} \int \frac{S ds}{\delta} - \int S e ds$$

jako symbolicznie zapisanego licznika ilorazu we wzorze (1.1.11) odpowiadającego $\int \tilde{\omega} y dA$, tzn. wycinkowemu liniowemu momentowi, który dla środka zginania jako głównego bieguna powinien równać się zeru.

Dla większej przejrzystości rozumowań podamy następujący przykład liczbowy.

Dany jest przekrój z «wypustkami» o wymiarach jak podano na rys. 2; grubość przekroju jest stała i równa $\delta = 0,01$ m. Moment bezwładności względem osi x jest

$$I_x = 2 \frac{0,01 \cdot 16^3}{12} + 2 \cdot 16 \cdot 0,01 \cdot 8^2 = 6,83 + 20,48 = 27,31 \text{ m}^4.$$



Rys. 2

Środek ścinania obliczamy za pomocą momentów strumieni naprężeń stycznych:

$$\int_{12} \frac{S ds}{\delta} = \frac{b^2 h}{4} = 64 \cdot 4 = 256 \text{ m}^3, \quad \int_{1B} \frac{S ds}{\delta} = \int_{2A} \frac{S ds}{\delta} = 682,67 \text{ m}^3,$$

$$\int_{2A} \frac{S ds}{\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{b h^2}{2} + \frac{h^3}{12} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{8 \cdot 256}{2} + \frac{16^3}{12} \right) = 512 + 170,67 = 682,67 \text{ m}^3;$$

stąd

$$\frac{Q}{I_x} \int_{12341} \frac{S ds}{\delta} = 2 \cdot 256 \frac{Q}{I_x} = 512 \frac{Q}{I_x}$$

oraz

$$\int \frac{ds}{\delta} = \left(2 \frac{16}{0,01} + 2 \frac{8}{0,01} \right) = 4800.$$

Na podstawie wzoru (1.1.7) obliczymy q_0 :

$$4800 q_0 + \frac{Q}{I_x} 512 = 0, \quad q_0 = -0,107 \frac{Q}{I_x} \text{ t/m.}$$

Moment M_2 jest równy

$$M_2 = 0,107 \frac{Q}{I_x} \Omega = 0,107 \cdot 256 \frac{Q}{I_x} = 27,4 \frac{Q}{I_x} \text{ tm.}$$

Obliczamy moment M_1 względem punktu B:

$$\frac{Q}{I_x} \int_{B1} S_{\rho} ds = -256 \cdot 0,01 \cdot 8 \frac{Q}{I_x} = -20,48 \frac{Q}{I_x},$$

$$\frac{Q}{I_x} \int_{2A} S_{\rho} ds = -682,67 \cdot 0,01 \cdot 8 \frac{Q}{I_x} = -54,62 \frac{Q}{I_x},$$

$$M_1 = (-4 \cdot 20,48 - 2 \cdot 54,62) \frac{Q}{I_x} = -191,16 \frac{Q}{I_x}.$$

Mając wartości obu momentów obliczymy położenie środka ścinania:

$$\bar{B}_0 = a_{xx} = \frac{-191,16 + 27,40}{27,31} \approx 6,00 \text{ m.}$$

Powierzchnie wycinkowe względem środka ścinania obliczamy na podstawie wzorów (1.1.15):

$$\frac{\Omega}{s_0} s' = \frac{256}{4800} \cdot 800 = 42,6, \quad \hat{\omega}_{B1} = -\omega_{B1} + \frac{\Omega}{s_0} s' = -48 + 42,6 = -5,4,$$

$$\hat{\omega}_{15} = \hat{\omega}_{B1} + \omega_{15} = -5,4 + 64 = 58,6,$$

$$\hat{\omega}_{12} = \hat{\omega}_{B1} - \omega_{12} + \frac{\Omega}{s_0} s' = -5,4 - 64 + 42,6 = -26,8,$$

$$\hat{\omega}_{2A} = \hat{\omega}_{12} - \omega_{2A} + \frac{\omega}{s_0} s' = -26,8 - 16,0 + 42,6 \approx 0.$$

Sprawdzenie obliczenia sprowadza się do obliczenia całek $\int \tilde{\omega} x dA$ oraz $\int \tilde{\omega} y dA$, które, jak wiadomo, dla środka ścinania jako bieguna mają wartości zerowe.

Pierwsza całka równa się zeru, co wynika z symetrii powierzchni wy-
cinkowych względem osi x ; całkę $\int \tilde{\omega} y dA$ rozbijamy na następujące po-
szczególne elementy dla jednej połowy profilu:

$$\int_{b1} \tilde{\omega} y dA = -\frac{1}{2} 5,4 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} 8 \cdot 0,01 = -1,15,$$

$$\int_{11} \tilde{\omega} y dA = -\frac{1}{2} 0,675 \cdot 5,4 \cdot 8 \cdot 0,01 = -0,1084,$$

$$\int_{1'S} \tilde{\omega} y dA = \frac{1}{2} 7,325 \cdot 58,6 \cdot 8 \cdot 0,01 = 17,1698,$$

$$\int_{12} \tilde{\omega} y dA = \frac{1}{2} (26,8 + 5,4) \cdot 8 \cdot 8 \cdot 0,01 = -10,304,$$

$$\int_{2A} \tilde{\omega} y dA = -\frac{1}{2} 26,8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} 8 \cdot 0,01 = -5,717,$$

$$\frac{1}{2} \int \tilde{\omega} y dA = -1,15 - 0,1084 - 10,304 - 5,717 + 17,1698 = -0,1112 \approx 0.$$

Jest rzeczą oczywistą, że dla drugiej połowy profilu otrzymamy wynik identyczny.

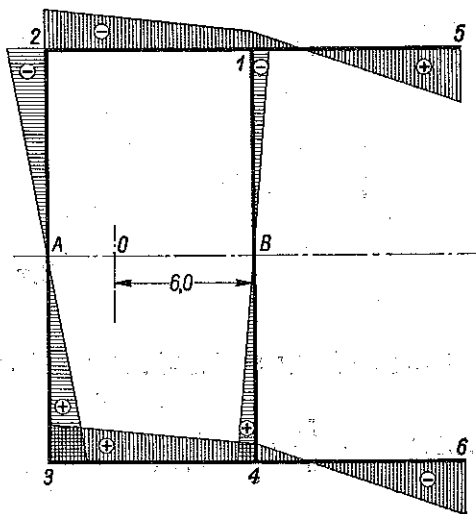
Omówimy teraz przekrój dwuspójny.

Przez dodanie boku zamykającego 5 6 z przekroju jedno-
spójnego z «wypustkami» otrzymamy przekrój dwuspójny.

Określamy z kolei środek ścinania. Rozcięcia dokonujemy w punktach 1 i 5, co powoduje automatycznie rozcięcia w punktach 4 i 6 (rys. 4).

Ażeby znaleźć strumienie zamykające q_{01} i q_{02} , należy ułożyć

warunki typu $\oint \gamma ds = 0$, przedstawiające odrzucenie posunięcia [por. wzór (1.1.5)] dla obu konturów zamkniętych I i II; trzeba również rozwiązać otrzymane równania względem q_{01} i q_{02} .



Rys. 3

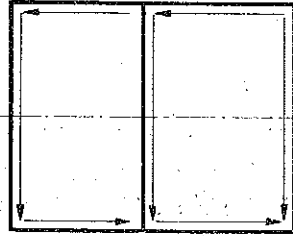
Środek ścinania określamy analogicznie jak we wzorze (1.1.10):

$$(1.1.19) \quad a_{xx} = \frac{M_1 + M_2}{Q} = \frac{M_1 + \Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02}}{Q},$$

gdzie

$$\Omega_1 = 2bh, \quad \Omega_2 = 2ch.$$

Z poprzednich rozważań dotyczących określenia powierzchni wycinkowych wynika, że w wyrażeniach na moment M_1 strumieni naprężeń stycznych, pochodzących od «otwarcia» profilu, zawarta jest część pola wycinkowego ω przynależna do przekroju otwartego. Zatem dla każdego profilu rozciętego znalezienie pola wycinkowego ω nie napotyka na trudności, gdyż określa się je tak samo, jak dla najprostszych kształtowników, np. dla ceownika lub dwuteownika.



Rys. 5

Natomiast w miarę wzrostu spójności profilu wyrazy określone dla przekroju jednospójnego jako $\Omega s'/s_0$ przybierają bardziej skomplikowaną postać i wyznaczenie ich przeprowadza się w sposób podobny jak dla profilu otwarto-zamkniętego. Dla tego ostatniego przekroju omawiane wyrażenie składało się z części stałej dla wszystkich elementów, tj. Ω/s_0 , oraz z członu będącego ilorazem długości i jego grubości. Ta reguła jest słuszna dla wszystkich części przekroju zamkniętego.

Przeprowadzając to samo rozumowanie dla przekroju dwuspójnego w oparciu o wzory (1.1.14) i (1.1.18) otrzymujemy wyrażenia dla zredukowanych współczynników typu $\Omega s'/s_0$:

$$(1.1.20) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\Omega s'}{s_0} \right)'_{B1} &= \frac{\Omega_1 \left(p_2 - \frac{h}{\delta_1} \right) + \Omega_2 \left(p_1 - \frac{h}{\delta_1} \right)}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta_1} \right)^2} \frac{h}{2\delta_1}, \\ \left(\frac{\Omega s'}{s_0} \right)'_{12} &= \frac{\Omega_1 p_2 + \Omega_2 \left(\frac{h}{\delta_1} \right)}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta_1} \right)^2} \frac{b}{\delta}, & \left(\frac{\Omega s'}{s_0} \right)'_{C5} &= \frac{\Omega_1 \left(\frac{h}{\delta_1} \right) + \Omega_2 p_1}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta_1} \right)^2} \frac{h}{2\delta}, \\ \left(\frac{\Omega s'}{s_0} \right)'_{2A} &= \frac{\Omega_1 p_2 + \Omega_2 \left(\frac{h}{\delta_1} \right)}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta_1} \right)^2} \frac{h}{2\delta}, & \left(\frac{\Omega s'}{s_0} \right)'_{51} &= \frac{\Omega_1 \left(\frac{h}{\delta_1} \right) + \Omega_2 p_1}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta_1} \right)^2} \frac{c}{\delta}. \end{aligned} \right.$$

Oczywiście, w elementach należących tylko do obszaru I bierzemy pod uwagę te wyrazy we wzorach (1.1.19) i (1.1.20), w których czynnikiem jest funkcja Φ_1 ; podobnie postępujemy z obszarem II związanym z funkcją Φ_2 . Natomiast w elemencie wspólnym dla obu obszarów (np. B 1) istotne są wyrazy, w których występuje zarówno funkcja Φ_1 , jak i Φ_2 .

W poprzednim przypadku profilu otwarcio-zamkniętego wzór na środek zginania (ścianania) można było zapisać w postaci podobnej do wzoru (1.1.10):

$$(1.1.21) \quad a_{xx} = \frac{M_1 + M_2}{Q} = - \frac{\Sigma S \rho ds}{Q} + \frac{\Phi}{IS_x},$$

gdzie

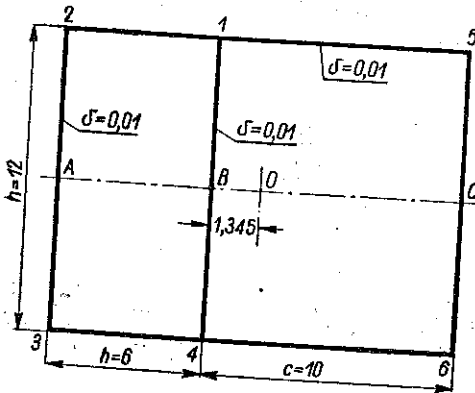
$$\Phi = \oint \frac{S ds}{\delta}.$$

Dla tego profilu obiegliśmy przekrój w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara, czemu towarzyszyła ujemna wartość ω , ale dodatnia wartość $\Omega s'/s_0$. Zgodnie z tym wartość powierzchni wycinkowej na odcinku zawartym między punktem B i 1 wynosiła

$$(1.1.22) \quad \hat{\omega}_{B1} = -\omega_{B1} + \frac{\Omega}{s_0} \frac{h}{2\delta_1}.$$

Oczywiście, zmiana kierunku obiegu spowoduje zmianę znaku obu składników powyższego wyrażenia i np. dla odcinka B 4 otrzymuje się

$$(1.1.23) \quad \hat{\omega}_{B4} = \omega_{B4} - \frac{\Omega}{s_0} \frac{h}{2\delta_1}.$$



Rys. 6

Odrzucając chwilowo w przekroju dwuspójnym bok zamykający 5 c 6 otrzymamy przekrój z «wyrostkami» omówiony poprzednio. Strumieniowi Φ ze wzoru (1.1.21) będzie odpowiadał strumień Φ_1 o tym samym kierunku, a powierzchnię wycinkową będzie można obliczyć tak jak we wzorze (1.1.15). Zamknięcie profilu, a przez to wprowadzenie na odcinku 1 B 4 strumienia Φ_2 o kierunku przeciwnym do kierunku Φ_1 stwarza konieczność zmiany znaków w wyrażeniach zawierających Φ_2 [przy obliczeniu powierzchni wycinkowych na podstawie wzorów wyjściowych (1.1.18) i (1.1.20)].

Przejdźmy znowu do przykładu liczbowego biorąc pod uwagę przekrój przedstawiony na rys. 6.

Określmy położenie środka ścinania. Na podstawie wzorów (1.1.16) otrzymujemy wartości funkcji Φ_1 i Φ_2 :

$$-\Phi_1 = \left(\frac{36 \cdot 12}{2} + \frac{6 \cdot 144}{2} - \frac{10 \cdot 144}{2} \right) = -72,$$

$$-\Phi_2 = \left(\frac{100 \cdot 12}{2} + \frac{10 \cdot 144}{2} \right) = 1320.$$

Układ równań (1.1.17) ma teraz postać

$$3600x - 1200y - 72 = 0, \quad -1200x + 4400y + 1320 = 0,$$

gdzie

$$p_1 = 3600, \quad p_2 = 4400, \quad \frac{h}{\delta} = 1200, \quad x = \frac{I_x}{Q} q_{01}, \quad y = \frac{I_x}{Q} q_{02},$$

$$x = -0,088, \quad y = -0,324.$$

Moment M_2 jest

$$\frac{I_x}{Q} M_2 = \Omega_1 x + \Omega_2 y = \Omega_1 \frac{I_x}{Q} q_{01} + \Omega_2 \frac{I_x}{Q} q_{02} = 144 \cdot 0,088 + 240 \cdot 0,324 = 90,43.$$

Moment M_1 względem punktu B jest

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{I_x}{Q} M_1 &= - \left(\int_{12} S \rho ds + \int_{2A} S \rho ds + \int_{51} S \rho ds + \int_{65} S \rho ds \right) = \\ &= \left(\int_{12} \frac{S ds}{\delta} \right) \rho \delta + \left(\int_{2A} \frac{S ds}{\delta} \right) \rho \delta + \left(\int_{51} \frac{S ds}{\delta} \right) \rho \delta + \left(\int_{65} \frac{S ds}{\delta} \right) \rho \delta = \\ &= -108 \cdot 6 \cdot 0,01 - 288 \cdot 6 \cdot 0,01 - 300 \cdot 6 \cdot 0,01 + 72 \cdot 10 \cdot 0,01 = -38,56 \text{ m}^5, \end{aligned}$$

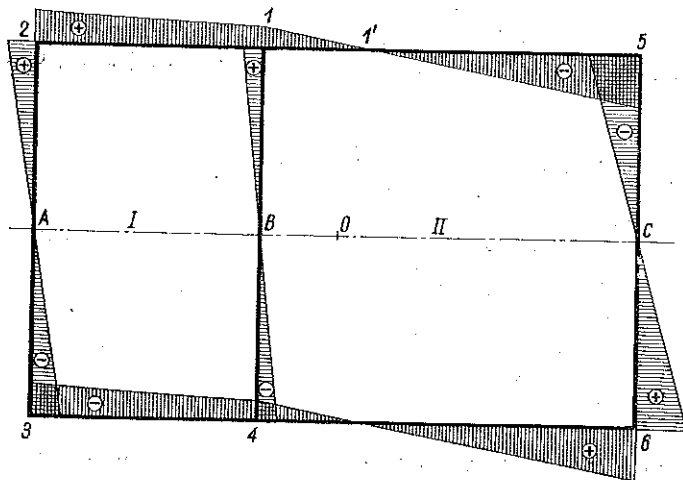
$$I_{xx} = 3 \frac{0,01 \cdot 12^3}{12} + 2 \cdot 0,01 \cdot 6^2 = 15,84 \text{ m}^4,$$

$$a_{xx} = \frac{M_1 + M_2}{I_{xx}} = \frac{-69,12 + 90,43}{15,84} = 1,345 \text{ m}.$$

Powierzchnie wycinkowe względem środka ścinania są równe:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{B1} &= \omega_{B1} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)'_{B1} = + 8,07 + \\ &+ \frac{144(4400 - 1200) + 240(-3600 + 1200)}{144 \cdot 10^5} 600 = 3,27, \\ \hat{\omega}_{12} &= \hat{\omega}_1 - \omega_{12} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{12} = + 3,27 - 36 + \frac{144 \cdot 4400 + 240 \cdot 1200}{144 \cdot 10^5} 600 = 5,67, \\ \hat{\omega}_{2A} &= \hat{\omega}_2 - \omega_{2A} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{2A} = + 5,67 - 44,07 + \frac{144 \cdot 4400 + 240 \cdot 1200}{144 \cdot 10^5} 600 = 0, \\ \hat{\omega}_{C5} &= -\omega_{C5} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{C5} = - 51,93 + \frac{144 \cdot 1200 + 240 \cdot 3600}{144 \cdot 10^5} 600 = - 8,73, \\ \hat{\omega}_{51} &= \hat{\omega}_5 - \omega_{51} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s'\right)_{51} = - 8,73 - 60 + \frac{144 \cdot 1200 + 240 \cdot 3600}{144 \cdot 10^5} 1000 = 3,27.\end{aligned}$$

Potwierdzeniem słuszności rozumowania jest otrzymanie tych samych wartości liczbowych powierzchni wycinkowych w punktach wspólnych, liczonych oddzielnie dla konturu I i II.



Rys. 7

Sprawdzenie wykonamy podobnie jak dla przekroju z «wyróstkami», mianowicie sprawdzimy, czy całka $\int \hat{\omega} y dA$ dla połowy przekroju jest równa zeru.

Podobnie jak w przypadkach poprzednich wprowadzimy oznaczenia

$$(1.1.24) \quad \begin{cases} \int_I \frac{ds}{\delta} = p_1 = \frac{h}{\delta} + \frac{2b}{\delta} + \frac{h}{\delta_1}, & -\Phi_1 = \frac{b^2 h}{2} + \frac{bh^2}{2} - \frac{ch^2}{2}, \\ \int_{II} \frac{ds}{\delta} = p_2 = \frac{h}{\delta_1} + \frac{2c}{\delta} + \frac{h}{\delta_2}, & -\Phi_2 = \frac{c^2 h}{2} + \frac{ch^2}{2} - \frac{dh^2}{2}, \\ \int_{III} \frac{ds}{\delta} = p_3 = \frac{h}{\delta_2} + \frac{2d}{\delta} + \frac{h}{\delta}, & -\Phi_3 = \frac{d^2 h}{2} + \frac{dh^2}{2}. \end{cases}$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$(1.1.25) \quad \begin{cases} p_1 x - \frac{h}{\delta_1} y + 0 \cdot z = \Phi_1, \\ -\frac{h}{\delta_1} x + p_2 y - \frac{h}{\delta_2} z = \Phi_2, \\ 0 \cdot x - \frac{h}{\delta_2} y + p_3 z = \Phi_3, \end{cases}$$

gdzie

$$x = \frac{I_x}{Q} q_{01}, \quad y = \frac{I_x}{Q} q_{02}, \quad z = \frac{I_x}{Q} q_{03},$$

stąd

$$(1.1.26) \quad \begin{cases} x = \frac{I_x}{Q} q_{01} = -\frac{\Phi_1 p_2 p_3 - \Phi_1 \frac{h}{\delta_1} \frac{h}{\delta_2} + \Phi_3 \frac{h}{\delta_1} \frac{h}{\delta_2} + \Phi_2 p_3 \frac{h}{\delta_1}}{D}, \\ y = \frac{I_x}{Q} q_{02} = \frac{\Phi_2 p_1 p_3 + \Phi_3 p_1 \frac{h}{\delta_2} + \Phi_1 p_3 \frac{h}{\delta_1}}{D}, \\ z = \frac{I_x}{Q} q_{03} = \frac{\Phi_3 p_1 p_2 + \Phi_2 p_1 \frac{h}{\delta_2} - \Phi_3 \frac{h}{\delta_1} \frac{h}{\delta_2} + \Phi_1 \frac{h}{\delta_1} \frac{h}{\delta_2}}{D}, \end{cases}$$

gdzie

$$(1.1.27) \quad D = p_1 \left(\frac{h}{\delta_2} \right)^2 + p_3 \left(\frac{h}{\delta_1} \right)^2 - p_1 p_2 p_3.$$

Dla środka ścinania jest

$$(1.1.28) \quad \alpha_{xx} = \frac{1}{I_x} (M_1 + \Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02} + \Omega_3 q_{03}).$$

Zgodnie z regułami znakowania podanymi przy omawianiu przekroju dwuspójnego obliczamy powierzchnie wycinkowe profilu przedstawionego na rys. 9.

Na podstawie wzorów (1.1.24) i (1.1.27) obliczymy wielkości parametrów:

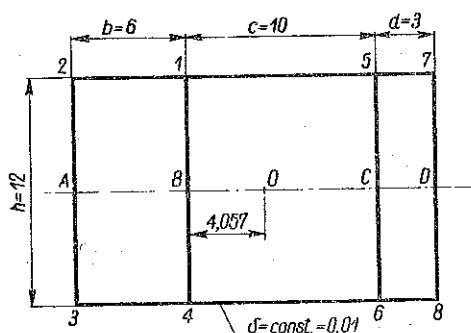
$$p_1 = \frac{2h}{\delta} + \frac{2b}{\delta} = 2400 + 1200 = 3600,$$

$$p_2 = \frac{2h}{\delta} + \frac{2c}{\delta} = 2400 + 2000 = 4400,$$

$$p_3 = \frac{2h}{\delta} + \frac{2d}{\delta} = 2400 + 600 = 3000,$$

$$D = 6600 \cdot 1200^2 - \\ - 3600 \cdot 4400 \cdot 3000 = -38\,016 \cdot 10^6,$$

$$\Omega_1 = 144, \quad \Omega_2 = 240, \quad \Omega_3 = 72.$$



Rys. 9

Powierzchnie wycinkowe [na podstawie wzorów (1.1.26) i (1.1.28)] są

$$\hat{\omega}_{B1} = -\omega_{B1} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s' \right) = 6 \cdot 4,037 + \left(-144 \frac{4400 \cdot 300 - 1200^2 - 3000 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - \right. \\ \left. - 240 \frac{-3600 \cdot 3000 + 3000 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - 72 \frac{-3600 \cdot 1200 + 1200^2}{-38\,016 \cdot 10^6} \right) 600 = 12,222,$$

$$\hat{\omega}_{12} = \omega_1 - \omega_{12} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s' \right)_{12} = 12,222 - 36 + \left(-144 \frac{4400 \cdot 3000 - 1200^2}{-38\,016 \cdot 10^6} - \right. \\ \left. - 240 \frac{3000 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - 72 \frac{1200^2}{-38\,016 \cdot 10^6} \right) 600 = 18,222,$$

$$\hat{\omega}_{2A} = \omega_2 - \omega_{2A} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s' \right)_{2A} = 18,222 - 10,037 \cdot 6 + 42 = 0,$$

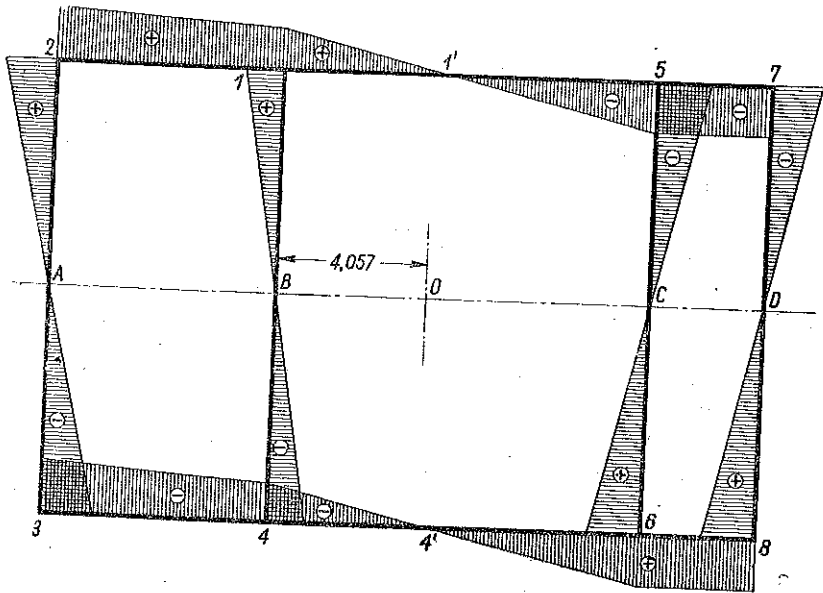
$$\hat{\omega}_{C5} = -\omega_{C5} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s' \right)_{C5} = -6 \cdot 5,963 \left(-144 \frac{-1200^2 + 3000 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - \right. \\ \left. - 240 \frac{3600 \cdot 3000 - 3600 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - \right. \\ \left. - 72 \frac{-3600 \cdot 4400 + 3600 \cdot 1200^2}{-38\,016 \cdot 10^6} \right) 600 = -17,778,$$

$$\hat{\omega}_{51} = \omega_5 - \omega_{51} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s' \right)_{51} = -17,778 - 60 \left(-144 \frac{3000 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} - \right. \\ \left. - 240 \frac{3600 \cdot 3000}{-38\,016 \cdot 10^6} - 72 \frac{3600 \cdot 1200}{-38\,016 \cdot 10^6} \right) 1000 = 12,222,$$

$$\hat{\omega}_{D7} = -\omega_{D7} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s' \right)_{D7} = -8,963 \cdot 6 + \left(-144 \frac{1200^2}{-38016 \cdot 10^6} - 240 \frac{3600 \cdot 1200}{-38016 \cdot 10^6} - 72 \frac{3600 \cdot 3000 - 1200^2}{-38016 \cdot 10^6} \right) 600 = -17,778,$$

$$\hat{\omega}_{75} = \omega_7 - \omega_{75} + \left(\frac{\Omega}{s_0} s' \right)_{75} = -17,778 - 18 + 18 = -17,778.$$

Sprawdzamy obliczenia na podstawie warunku, że $\int w y dA = 0$ dla jednej połowy symetrycznego przekroju.



Rys. 10

Otrzymujemy kolejno dodatnie wartości całek:

$$\int_{A2} \hat{\omega} y dA = \frac{1}{2} 6 \cdot 18,222 \cdot 0,01 \frac{2}{3} 6 = 0,01 \cdot 12 \cdot 18,222 = 2,187,$$

$$\int_{B1} \hat{\omega} y dA = \frac{1}{2} 6 \cdot 12,222 \cdot 0,01 \frac{2}{3} 6 = 0,01 \cdot 12 \cdot 12,222 = 1,467,$$

$$\int_{12} \hat{\omega} y dA = \frac{1}{2} (18,222 + 12,222) \cdot 6 \cdot 0,01 \cdot 6 = 0,01 \cdot 30,444 \cdot 18 = 5,480,$$

$$\int_{11'} \hat{\omega} y dA = \frac{1}{2} 4,017 \cdot 12,222 \cdot 0,01 \cdot 6 = 0,01 \cdot 49,096 \cdot 3 = 1,473,$$

których suma równa się 10,607, oraz wartości ujemne całek

$$\int_{D7} \hat{\hat{\omega}} y dA = -\frac{1}{2} 6 \cdot 17,778 \cdot 0,01 \frac{2}{3} 6 = -0,01 \cdot 17,778 \cdot 12 = -2,133,$$

$$\int_{C5} \hat{\hat{\omega}} y dA = -\frac{1}{2} 6 \cdot 17,778 \cdot 0,01 \frac{2}{3} 6 = -0,01 \cdot 17,778 \cdot 12 = -2,133,$$

$$\int_{S7} \hat{\hat{\omega}} y dA = -17,778 \cdot 3 \cdot 0,01 \cdot 6 = 17,778 \cdot 0,18 = -3,200,$$

$$\int_{I7} \hat{\hat{\omega}} y dA = -\frac{1}{2} 5,983 \cdot 17,778 \cdot 0,01 \cdot 6 = -0,01 \cdot 3 \cdot 106,365 = -3,191,$$

których suma równa się — 10,657; stąd

$$\int \hat{\hat{\omega}} y dA = 10,603 - 10,657 \approx 0.$$

Jednym z ciekawszych przekrojów, mającym zastosowanie w okrętownictwie, jest przekrój złożony z elementów otwarto-zamkniętego i zamkniętego dwuspójnego.

Kształt profilu, sposób rozcięcia oraz bieg strumieni napięć stycznych uwidoczniony jest na rys. 11.

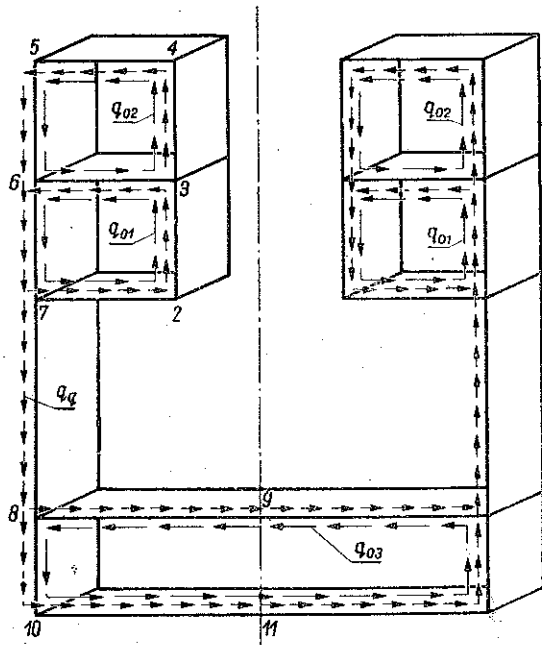
Na podstawie wzorów (1.1.17) napiszemy układ równań dla części dwuspójnej:

$$p_1 q_{01} - \frac{h}{\delta} q_{02} = \Phi_1 \frac{Q}{I_x},$$

$$-\frac{h}{\delta} q_{01} + p_2 q_{02} = \Phi_2 \frac{Q}{I_x};$$

stąd określimy strumienie napięć zamykających q_{01} i q_{02} . Strumień q_{03} znajdziemy podobnie jak dla przekroju jednospójnego z «wypustkami»:

$$p_3 q_{03} = \frac{Q}{I_x} \Phi_3.$$



Rys. 11

Mając dane q_{01} , q_{02} i q_{03} możemy obliczyć położenie środka ścinania oraz, w dalszej kolejności, powierzchnie wycinkowe, które będziemy określali

korzystając ze wzoru ogólnego

$$a_{xx} = \frac{M_1}{Q} + \left[\Omega_1 \frac{\Phi_1 p_2 - \Phi_2 \frac{h}{\delta}}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta}\right)^2} + \Omega_2 \frac{\Phi_2 p_1 - \Phi_1 \frac{h}{\delta}}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta}\right)^2} + \Omega_3 \frac{\Phi_3}{p_3} \right] \frac{1}{I_x},$$

napisanego na podstawie rozumowań analogicznych jak w przypadkach poprzednich.

Przykład liczbowy. W odróżnieniu od ostatniego przykładu rachunek przeprowadzimy teraz szczegółowiej, uwzględniając przede wszystkim obliczenie współrzędnej środka zginania. Obliczenie naprężeń q_{01} , q_{02} i q_{03} wiąże się bezpośrednio z określeniem funkcji Φ_1 , Φ_2 i Φ_3 :

$$\Phi_1 = \int_{72} \frac{S ds}{\delta} + \int_{23} \frac{S ds}{\delta} + \int_{36} \frac{S ds}{\delta} + \int_{67} \frac{S ds}{\delta},$$

$$\Phi_2 = \int_{34} \frac{S ds}{\delta} + \int_{45} \frac{S ds}{\delta} + \int_{56} \frac{S ds}{\delta} - \int_{80} \frac{S ds}{\delta},$$

$$\Phi_3 = \int_{810} \frac{S ds}{\delta} + \int_{1011} \frac{S ds}{\delta} + \Phi_1 + \int_{78} \frac{S ds}{\delta}.$$

Należy zwrócić uwagę, że momenty statyczne są obliczone od punktów rozcięcia (punkty 7, 3 i 8 na rys. 12), co schematycznie jest przedstawione na rys. 13. Natomiast w całe

Tablica 1

Kolejne elementy	Moment statyczny poprzednich elementów	$\int \frac{S ds}{\delta}$	$\int S p ds^*)$
7-2	0,000	22,5	0,675
2-3	0,135	33,0	0,99
3-6	0,195	76,5	3,825
3-4	0,000	6,0	0,18
4-5	0,060	36,0	2,52
5-6	0,195	51,0	3,06
6-7	0,645	141,0	8,46
7-8	0,765	256,5	15,39
8-9	0,945	639,0	0,00
8-10	0,000	3,0	0,18
10-11	0,060	108,0	1,08

*) Biegun pomocniczy w punkcie B.

$$\int_{67} \frac{S ds}{\delta}$$

moment statyczny S składa się z elementu bieżącego na odcinku 6-7 oraz z sumy momentów poprzednich elementów zbiegających się w punkcie 6: $S_{7236} + S_{3456}$.

Wynika z tego, że w punktach węzłowych, które nie są punktami rozcięcia ani symetrycznych momentów statycznych poprzednich

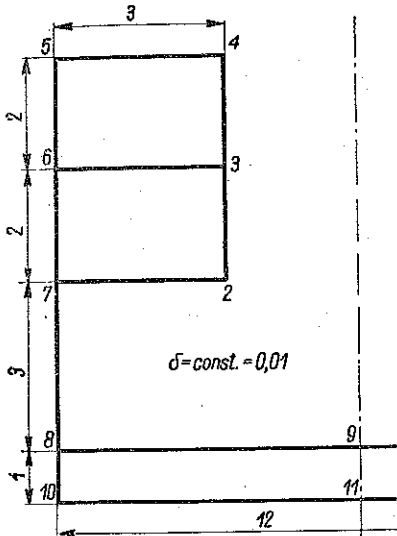
nymi względem nich, należy sumować momenty statyczne poprzednich elementów.

Korzystając z tablicy 1 obliczamy parametry równań:

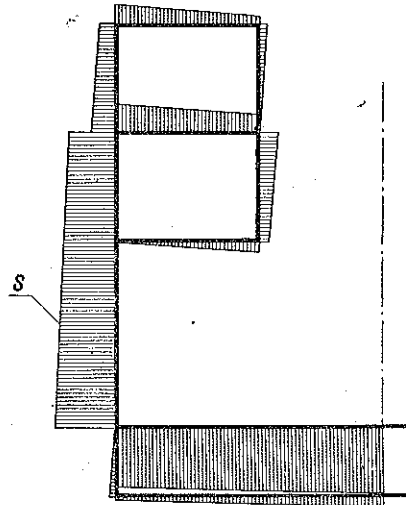
$$p_1 = p_2 = \frac{1}{0,01} (S_{12} + S_{23} + S_{36} + S_{67}) = \frac{1}{0,01} (3 + 2 + 3 + 2) = 1000,$$

$$\Phi_1 = -(22,5 + 33 + 76,5 + 141) = -273, \quad \frac{h}{\delta} = \frac{3}{0,01} = 300,$$

$$\Phi_2 = -(6 + 36 + 51 - 76,5) = -16,5.$$



Rys. 12



Rys. 13

Po uwzględnieniu tych wartości układ równań otrzymuje postać

$$1000 q_{01} - 300 q_{02} = -\frac{Q}{I_x} 273, \quad -300 q_{01} + 1000 q_{02} = -\frac{Q}{I_x} 16,5,$$

a jego pierwiastki są równe

$$q_{01} = -0,3054 \frac{Q}{I_x}, \quad q_{02} = -0,108 \frac{Q}{I_x}.$$

Strumień q_{03} obliczymy na podstawie wzoru (1.1.7):

$$1300 q_{03} = -\frac{Q}{I_x} (3 + 108 - 639), \quad q_{03} = 0,406 \frac{Q}{I_x}.$$

Po określeniu wszystkich wartości strumieni napięć stycznych obliczamy momenty:

$$M_1 = 2 \frac{Q}{I_x} (0,675 + 0,99 \cdot 3,825 + 0,18 - 2,52 - 3,06 - 3,46 - 15,39 - 0,18 - 1,08) = -2 \cdot 32,67 \frac{Q}{I_x},$$

$$M_2 = \frac{Q}{I_x} (2\Omega_1 q_{01} + 2\Omega_2 q_{02} + \Omega_3 q_{03}) = 2 \frac{Q}{I_x} (-0,3054 \cdot 12 - 0,108 \cdot 12 + 0,406 \cdot 12) = 2 \frac{Q}{I_x} 0,084.$$

Z kolei określamy położenie środka zginania przy $I_x = 13,14 \text{ m}^4$. Otrzymamy

$$a_{xx} = \frac{M_1 + M_2}{Q} = \frac{-65,34 + 0,168}{13,14} = -4,96 \text{ m}.$$

Powierzchnie wycinkowe wyznaczamy zgodnie z poprzednimi rozwiązaniami:

$$\tilde{\omega}_{98} = -\omega_{98} + \left(\frac{\Omega_3}{p_3} s' \right)_{98} = -4,96 \cdot 6 + \frac{24}{2600} \cdot 600 = -24,222,$$

$$\tilde{\omega}_{8,10} = \tilde{\omega}_8 - \omega_{8,10} + \left(\frac{\Omega_3}{p_3} s' \right)_{8,10} = -24,222 - 6 + 0,923 = -29,299,$$

$$\tilde{\omega}_{10,11} = \tilde{\omega}_{10} - \omega_{10,11} + \left(\frac{\Omega_3}{p_3} s' \right)_{10,11} = -29,299 + 3,96 \cdot 6 + 5,538 \approx 0;$$

$$\tilde{\omega}_{8,7} = \tilde{\omega}_8 + \omega_{87} = -24,222 + 18 = -6,222,$$

$$\tilde{\omega}_{16} = \tilde{\omega}_1 + \omega_{16} + \left(\frac{\Omega_1}{p_1} s' \right)_{16} = -6,222 + 12 - 3,428 = 2,353,$$

$$\tilde{\omega}_{63} = \tilde{\omega}_6 + \omega_{63} + \left[\left(\Omega_1 \frac{p_2 - \left(\frac{h}{\delta} \right)}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta} \right)^2} + \Omega_2 \frac{p_1 - \left(\frac{h}{\delta} \right)}{p_1 p_2 - \left(\frac{h}{\delta} \right)^2} \right) s' \right]_{63} =$$

$$= 2,353 + 9,96 \cdot 3 + 0 = 32,233,$$

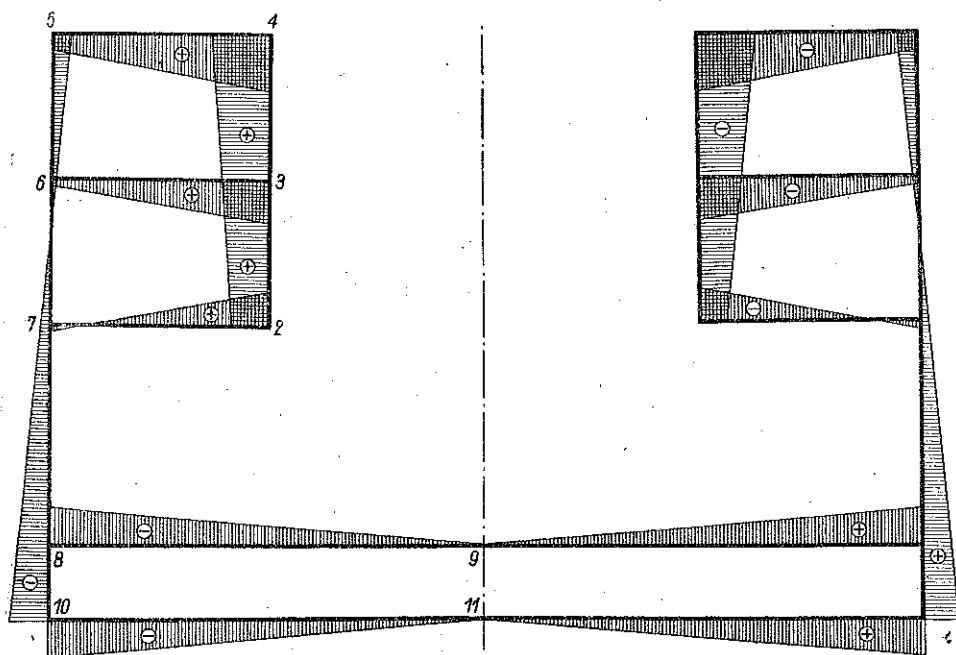
$$\tilde{\omega}_{32} = \tilde{\omega}_3 - \omega_{32} + \left(\frac{\Omega_1}{p_1} s' \right)_{32} = 32,233 - 6 - 3,428 = 22,805,$$

$$\tilde{\omega}_{27} = \tilde{\omega}_2 - \omega_{27} + \left(\frac{\Omega_1}{p_1} s' \right)_{27} = 22,805 - 7,96 \cdot 3 - 5,143 = -6,218,$$

$$\tilde{\omega}_{65} = \tilde{\omega}_6 + \omega_{65} + \left(\frac{\Omega_2}{p_2} s' \right)_{65} = 2,353 + 12 - 3,428 = 10,925,$$

$$\hat{\omega}_{54} = \hat{\omega}_5 + \omega_{54} + \left(\frac{\Omega_2}{p_2} s' \right)_{54} = 10,925 + 11,96 \cdot 3 - 5,143 = 41,662,$$

$$\hat{\omega}_{43} = \hat{\omega}_4 - \omega_{43} + \left(\frac{\Omega_2}{p_2} s' \right)_{43} = 41,662 - 6 - 3,428 = 32,234.$$



Rys. 14

Kontrolę przeprowadzamy podobnie jak w poprzednich przypadkach sprawdzając, czy całka $\int \hat{\omega} y dA$ dla symetrycznej połowy przekroju jest równa zero. Suma całek ujemnych

$$\int_{8,9} \hat{\omega} y dA = -24,222 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 0,01 = -2,90664,$$

$$\int_{8,10} \hat{\omega} y dA = -\frac{1}{2} (24,222 + 29,299) \cdot 1 \cdot 6 \cdot 0,01 = -1,60563,$$

$$\int_{10,11} \hat{\omega} y dA = -29,299 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 0,01 = -3,5158,$$

$$\int_{8,7} \hat{\omega} y dA = -\frac{1}{2} (24,222 + 6,222) \cdot 3 \cdot 6 \cdot 0,01 = -2,73996,$$

$$\int_{76} \hat{\omega} y dA = -6,222 \cdot 1,4511 \frac{1}{2} 6 \cdot 0,01 = -0,27862,$$

$$\int_{72} \hat{\omega} y dA = -6,222 \cdot 0,643 \frac{1}{2} \left(3 + 2,357 + \frac{2}{3} 0,643 \right) \cdot 0,01 = -0,115734,$$

jest równa $-11,16238$.

Suma całek dodatnich

$$\int_{76} \hat{\omega} y dA = 2,353 \cdot 0,5489 \frac{1}{2} 6 \cdot 0,01 = 0,038747,$$

$$\int_{84} \hat{\omega} y dA = \frac{1}{2} (41,662 + 32,234) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0,01 = 2,21688,$$

$$\int_{64} \hat{\omega} y dA = \frac{1}{2} (41,662 + 10,925) \cdot 3 \cdot (3 + 1,20775) \cdot 0,01 = 3,31909,$$

$$\int_{63} \hat{\omega} y dA = \frac{1}{2} (2,353 + 32,233) \cdot 6 (3 + 1,06803) \cdot 0,01 = 2,11046,$$

$$\int_{72} \hat{\omega} y dA = 22,805 \cdot 2,4511 \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{3} 2,4511 \right) \cdot 0,01 = 1,0668,$$

$$\int_{65} \hat{\omega} y dA = \frac{1}{2} (2,353 + 10,925) \cdot 2 \cdot 6 \cdot 0,01 = 0,79668,$$

$$\int_{23} \hat{\omega} y dA = \frac{1}{2} (32,234 + 22,805) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0,01 = 1,65117$$

jest równa $11,19982$.

Stąd $\int \hat{\omega} y dA = 11,19982 - 11,16238 \approx 0$, jak być powinno.

1.2. Równanie różniczkowe skręcania w przypadku przekrojów złożonych. Rozkład naprężeń

Dotychczasowe rozważania doprowadziły nas do znalezienia powierzchni wycinkowych dowolnych profilów, dla których za główny biegun przyjęto środek zginania.

Otrzymane powierzchnie wycinkowe umożliwiają obliczenie parametrów przekrojów wchodzących do równań teorii skręcania.

Przy rozpatrywaniu profilów otwartych opieramy się na znanym równaniu teorii skręcania przekrojów cienkościennych

$$(1.2.1) \quad \varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \zeta m,$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$k^2 = \frac{GI_s}{EI_\omega}, \quad \zeta = \frac{1}{EI_\omega}, \quad I_s = a \sum \frac{s\delta^3}{3}, \quad I_\omega = \int \omega^2 d.$$

Ostatnie symbole I_s oraz I_ω oznaczają odpowiednio moment bezwładności Saint-Venanta przy skręcaniu oraz wycinkowy moment bezwładności.

Całka powyższego równania znaleziona za pomocą metody głównych parametrów Cauchy'ego ma postać następującą (w przypadku braku obciążeń):

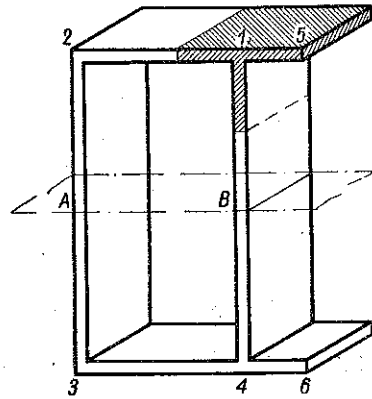
$$(1.2.2) \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{l}{k} \varphi'_0 \sinh \frac{kx}{l} - \frac{B_0}{GI_s} \left(\cosh \frac{kx}{l} - 1 \right) - \frac{1}{GI_s} M_{skr} \left(\frac{l}{k} \sinh \frac{kx}{l} - x \right).$$

Nie będziemy się zajmowali obecnie bliższą analizą tej całki. Przejdziemy do wyprowadzenia analogicznego równania dla przekrojów złożonych z elementów otwartych i zamkniętych.

Podobnie jak w p. poprzednim początkowe rozważania przeprowadzimy dla przekroju jednospójnego posiadającego «wyrostki».

Element wytniemy w taki sposób, ażeby jego dolna krawędź biegła wzdłuż zerowej linii deplanacji, bowiem w przekroju poprzecznym w tych punktach naprężenia normalne są równe zero, a istnieją jedynie naprężenia styczne q_0 .

Szczegółowy rozkład naprężeń normalnych i stycznych wpływających na równowagę elementu przedstawiony jest na rys. 16. Strumień napięć stycznych na odcinku 14 jest następujący:



Rys. 15

$$(1.2.3) \quad q_1 = q_0 + \int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} \delta ds.$$

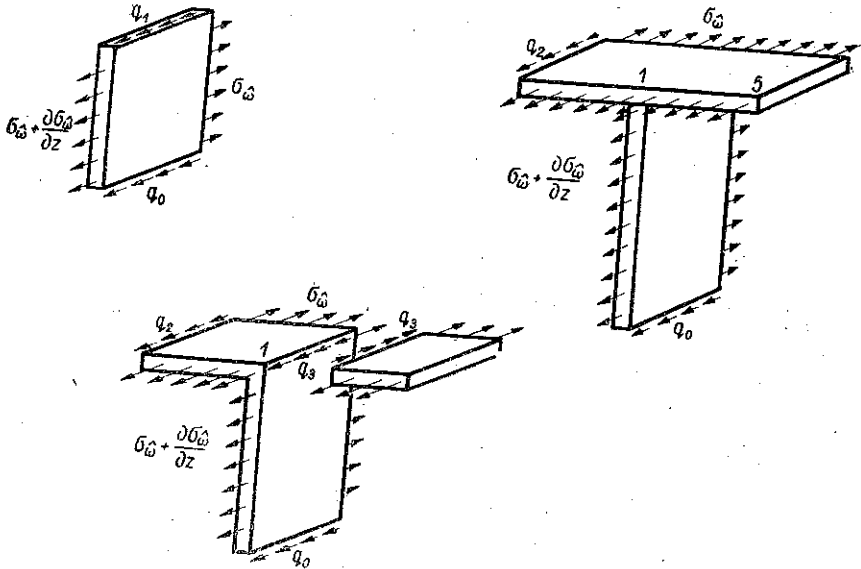
Ten sam strumień na odcinku 1234 wynosi

$$(1.2.4) \quad q_2 = q_0 + \int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} \delta ds + \int_{s_1}^s \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} \delta ds = q_0 + q_3 + \int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} \delta ds,$$

gdzie

$$q_s = \int_{s_1} \frac{\partial \sigma_{\omega}}{\partial z} \delta ds$$

oznacza strumień napięć stycznych w obrębie wyrostka 5 i.



Rys. 16

Jak wiadomo, naprężenie deplanacyjne normalne wyraża się wzorem

$$(1.2.5) \quad \sigma_{\omega} = -E \varphi'' \tilde{\omega}$$

Oznaczmy przez \$\sigma_0\$ naprężenia normalne odpowiadające stałej wartości \$\tilde{\omega} = 1\$; wówczas

$$(1.2.6) \quad \sigma_0 = -E \varphi''$$

a strumienie napięć stycznych określonych wzorem (1.2.3) będą

$$(1.2.7) \quad q_{14} = q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^s \tilde{\omega} dA,$$

$$(1.2.8) \quad q_{1234} = q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^s \tilde{\omega} dA + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{s_1} \tilde{\omega} dA.$$

Możemy obecnie wyznaczyć moment skrecający:

$$(1.2.9) \quad M = \int_{14} \rho ds \left(q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^s \tilde{\omega} dA \right) + \int_{1234} \rho ds \left(q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^s \tilde{\omega} dA + \right. \\ \left. + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{51} \tilde{\omega} dA \right) + \int_{51} h ds \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^{s_1} \tilde{\omega} dA = \oint \rho ds q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \left(\int_{14} \rho ds \int_0^s \tilde{\omega} dA + \right. \\ \left. + \int_{1234} \rho ds \int_0^s \tilde{\omega} dA + \int_{1234} \rho ds \int_{51} \tilde{\omega} dA + \int_{51} h ds \int_0^{s_1} \tilde{\omega} dA \right).$$

Stąd obliczamy niewiadome napięcia

$$(1.2.10) \quad q_0 = \frac{M}{\Omega} - \frac{d\sigma_0}{dz} \frac{1}{\Omega} \left(\oint \rho ds \int_0^s \tilde{\omega} dA + \int_{1234} \rho ds \int_{51} \tilde{\omega} dA + \right. \\ \left. + \int_{51} h ds \int_0^{s_1} \tilde{\omega} dA \right).$$

Dla ilustracji przytoczymy wzór na q_0 dla profilu zamkniętego:

$$(1.2.11) \quad q_0 = \frac{M}{\Omega} - \frac{d\sigma_0}{dz} \frac{\oint \rho ds \int_0^s \tilde{\omega} dA}{\Omega}.$$

Ten sam wynik otrzymamy ze wzoru (1.2.10) pomijając wpływ «wyrostków».

W celu uproszczenia wzoru (1.2.10) oznaczymy wyrażenie w klamrze przez β . Wymiar tego wyrażenia jest cm^4 . Wówczas

$$(1.2.12) \quad q_0 = \frac{M}{\Omega} - \frac{d\sigma_0}{dz} \beta,$$

a odpowiednie strumienie napięć stycznych na odcinku 14 i 1234 będą

$$(1.2.13) \quad q_1 = \frac{M}{\Omega} - \frac{d\sigma_0}{dz} (\beta + \delta) = \frac{M}{\Omega} - \frac{d\sigma_0}{dz} \Phi,$$

$$(1.2.14) \quad q_2 = \frac{M}{\Omega} - \frac{d\sigma_0}{dz} (\beta + \delta + \gamma) = q_1 - \frac{d\sigma_0}{dz} \gamma,$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$\delta = \int_0^s \tilde{\omega} dA, \quad \gamma = \int_0^{s_1} \tilde{\omega} dA.$$

Określmy z kolei energię potencjalną nagromadzoną w badanym elemencie podczas odkształcenia.

Energia całkowita będzie się składała z energii naprężeń normalnych σ_0 i energii naprężeń stycznych.

Energia naprężeń normalnych wynosi

$$(1.2.15) \quad U_0 dz = \left(\int \frac{\sigma_0^2 dA}{2E} \right) dz = \frac{\sigma_0^2}{2E} \left(\int \omega^2 dA + 2 \int_{51} \tilde{\omega}^2 dA \right) dz,$$

a energia naprężeń stycznych

$$(1.2.16) \quad U_p dz = \left(\int_{14} \frac{q_1^2 ds}{2G\delta} + \int_{1234} \frac{q_2^2 ds}{2G\delta} + 2 \int_{51} \frac{q_3^2 ds}{2G\delta} \right) dz =$$

$$= \int_{14} \frac{\left(\frac{M}{\Omega} - \frac{d\sigma_0}{dz} \Phi \right)^2 ds}{2G\delta} + \int_{1234} \frac{\left[\frac{M}{\Omega} - \frac{d\sigma_0}{dz} (\Phi + \gamma) \right]^2 ds}{2G\delta} +$$

$$+ \left[\int_{51} \frac{\left(\frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^{s_1} \tilde{\omega} dA \right)^2 ds}{G\delta} \right] dz = \frac{1}{2G} \left\{ \int_{14} \left[\left(\frac{M}{\Omega} \right)^2 - 2 \frac{M}{\Omega} \frac{d\sigma_0}{dz} \Phi + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)^2 \Phi^2 \right] \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \left[\left(\frac{M}{\Omega} \right)^2 - 2 \frac{M}{\Omega} \frac{d\sigma_0}{dz} (\Phi + \gamma) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)^2 (\Phi + \gamma)^2 \right] \frac{ds}{\delta} + 2 \int_{51} \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)^2 \lambda^2 \frac{ds}{\delta} \right\} dz,$$

gdzie $\lambda = \int_0^{s_1} \tilde{\omega} dA.$

Energia całkowita układu jest sumą obu całek:

$$U = \int_0^L (U_0 + U_p) dz.$$

Równanie Eulera w tym przypadku posiada postać

$$(1.2.17) \quad \frac{\partial (U_0 + U_p)}{\partial \sigma_0} - \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial (U_0 + U_p)}{\partial \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)} \right] = 0.$$

Składnik pierwszy wyrażenia powyższego jest

$$(1.2.18) \quad \frac{\partial (U_0 + U_p)}{\partial \sigma_0} = \frac{\sigma_0}{E} \left(\int \tilde{\omega}^2 dA + 2 \int_{51} \tilde{\omega}^2 dA \right) = \frac{\sigma_0}{E} I_{\tilde{\omega}},$$

zaś składnik pozostały

$$(1.2.19) \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial (U_0 + U_p)}{\partial \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)} = \frac{d}{dz} \left\{ \int_{14} \left(-2 \frac{M}{\Omega} \Phi + 2 \frac{d\sigma_0}{dz} \Phi^2 \right) \frac{ds}{\delta} + \right. \\ \left. + \int_{1234} \left[-2 \frac{M}{\Omega} (\Phi + \gamma) + 2 \frac{d\sigma_0}{dz} (\Phi + \gamma)^2 \right] \frac{ds}{\delta} + \int_{51} 4 \frac{d\sigma_0}{dz} \lambda^2 \frac{ds}{\delta} \right\}.$$

Po dalszych przekształceniach otrzymamy

$$(1.2.20) \quad \frac{d^2 \sigma_0}{dz^2} - \sigma_0 \frac{G}{E} \frac{I_{\tilde{\omega}}}{\int_{14} \Phi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} (\Phi + \gamma)^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{51} \lambda^2 \frac{ds}{\delta}} = \\ = \frac{m}{\Omega} \frac{\int_{14} \Phi \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} (\Phi + \gamma) \frac{ds}{\delta}}{\int_{14} \Phi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} (\Phi + \gamma)^2 \frac{ds}{\delta} + 2 \int_{51} \lambda^2 \frac{ds}{\delta}}$$

Wzór powyższy można napisać w postaci uproszczonej

$$(1.2.21) \quad \frac{d^2 \sigma_0}{dz^2} - \sigma_0 k^2 = m \xi,$$

gdzie

$$k^2 = \frac{G}{E} \frac{I_{\tilde{\omega}}}{\int_{14} \Phi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} (\Phi + \gamma)^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{51} \lambda^2 \frac{ds}{\delta}}, \\ \xi = \frac{\int_{14} \Phi \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} (\Phi + \gamma) \frac{ds}{\delta}}{\int_{14} \Phi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} (\Phi + \gamma)^2 \frac{ds}{\delta} + 2 \int_{51} \lambda^2 \frac{ds}{\delta}}$$

Porównując wyrażenie (1.2.21) z (1.2.1) dotyczącym skręcania pręta możemy powiedzieć, że odpowiednikiem momentu bezwładności Saint-Venanta I_s będzie wielkość

$$I_{\tilde{s}} = \frac{I_{\tilde{\omega}}}{\int_{14} \Phi \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} (\Phi + \gamma) \frac{ds}{\delta}} \Omega \text{ cm}^4,$$

zaś wycinkowego momentu bezwładności $I_{\tilde{\omega}}$ wielkość

$$I_{\tilde{\omega}_s} = \frac{\int_{14} \Phi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} (\Phi + \gamma)^2 \frac{ds}{\delta} + 2 \int_{51} \lambda^2 \frac{ds}{\delta}}{\int_{14} \Phi \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} (\Phi + \gamma) \frac{ds}{\delta}} \Omega \text{ cm}^6.$$

Podstawiając wartości ze wzoru (1.2.6) otrzymamy równanie czwartego rzędu w postaci

$$(1.2.22) \quad \varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \zeta m,$$

gdzie $\zeta = \xi/E$

lub

$$(1.2.23) \quad \varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = f(z),$$

gdzie $\zeta m(z) = f(z)$.

Rozwiązaniem równania (1.2.23) jest funkcja

$$(1.2.24) \quad \varphi = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz + \int_0^z \varphi(z-t) f(t) dt$$

lub po wyznaczeniu stałych

$$(1.2.25) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_0' z + \frac{\varphi_0''}{k^2} (\cosh kz - 1) + \frac{\varphi_0'''}{k^3} (\sinh kz - kz) + \int_0^z \varphi(z-t) f(t) dt.$$

Funkcję tę można napisać w postaci krótszej $\varphi = \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}}$ przy oznaczeniu

$$(1.2.26) \quad \bar{\varphi} = \varphi_0 + \varphi_0' z + \frac{\varphi_0''}{k^2} (\cosh kz - 1) + \frac{\varphi_0'''}{k^3} (\sinh kz - kz),$$

$$(1.2.27) \quad \bar{\bar{\varphi}} = \int_0^z \varphi(z-t) f(t) dt.$$

Spełniając warunki Cauchy'ego otrzymujemy

$$\bar{\varphi} = \frac{\sinh kz - kz}{k^3} = \varphi_4, \quad \bar{\bar{\varphi}} = \int_0^z \varphi_4(z-t) f(t) dt,$$

$$f(t) = \zeta m(t) = \frac{m(t)}{E I_{\omega_s}};$$

stąd

$$\bar{\bar{\varphi}} = \int_0^z \frac{[\sinh k(z-t) - k(z-t)]}{k^3} \frac{m(t)}{E I_{\omega_s}} dt = \frac{1}{k G I_s} \int_0^z [\sinh k(z-t) - k(z-t)] m(t) dt.$$

Uwzględniając powyższe, równanie (1.2.24) można napisać w postaci

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_0' z + \frac{\varphi_0''}{k^2} (\cosh z - 1) + \frac{\varphi_0'''}{k^3} (\sinh kz - kz) + \frac{1}{k G I_s} \int_0^z [\sinh k(z-t) - k(z-t)] m(t) dt.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\beta = -E I_{\omega} \varphi'', \quad E I_{\omega_s} \varphi''' - G I_s \varphi' = -M_s,$$

a dla $z = 0$

$$\varphi_0'' = -\frac{B_0}{E I_{\omega}}, \quad \varphi_0''' = \frac{G I_s \varphi_0' - M_{s_0}}{E I_{\omega_s}},$$

otrzymamy ostatecznie

$$(1.2.28) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_0' \frac{\sinh kz}{k} + \frac{B_0}{G I_s \eta} (1 - \cosh kz) + \frac{M_{s_0}}{G I_s} \left(z - \frac{\sinh kz}{k} \right) + \frac{1}{k G I_s} \int_0^z [\sinh k(z-t) - k(z-t)] m(t) dt,$$

gdzie nowy parametr $\eta = I_{\omega}/I_{\omega_s}$ określa stosunek właściwego wycinkowego momentu bezwładności do sprowadzonego wycinkowego momentu bezwładności I_{ω_s} . W rezultacie przekrój skręcany jest scharakteryzowany w równaniu dwoma parametrami k i η .

Ostatni wyraz równania (1.2.28) w zależności od rodzaju obciążenia będzie przyjmował następującą postać:

(1) dla równomiernie rozłożonego momentu skręcającego $m(t) = m$ działającego na odcinku pręta $a \leq z \leq b$

$$\frac{m}{k^2 G I_s} \left[-\cosh k(z-a) + 1 + \frac{k^2(z-a)^2}{2} \right];$$

(2) dla momentu M_{s_c} działającego w przekroju $z = c$

$$-\left[\frac{M_{s_c}}{k G I_s} [\sinh k(z-c) - k(z-c)]; \right.$$

(3) w przypadku przyłożenia w przekroju $z = d$ bimomentu B_d

$$\left. - \frac{B_d}{G I_s} [\cosh k(z-d) - 1]. \right.$$

Ostatecznie więc, gdy pręt (utwierdzony na jednym końcu a na drugim swobodny) jest obciążony momentem skupionym M_{s_c} w przekroju $z = c$, bimomentem B_d w przekroju $z = d$ oraz momentem równomiernie rozłożonym w przedziale $a \leq z \leq b$, wyrażenie dla φ przybiera postać

$$(1.2.29) \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k} \varphi_0' \sinh kz - \frac{B_0}{G I_s \eta} (\cosh kz - 1) - \\ - \frac{M_{s_0}}{k G I_s} (\sinh kz - kz) - \frac{B_d}{G I_s} [\cosh k(z-d) - 1] - \frac{M_{s_c}}{k G I_s} [\sinh k(z-c) - \\ - k(z-c)] - \frac{m}{k^2 G I_s} \left[\cosh k(z-a) - 1 - \frac{k^2(z-a)^2}{2} \right].$$

Pierwsza pochodna kąta skręcenia wyraża się wzorem

$$(1.2.30) \quad \varphi' = \varphi_0' \cosh kz - \frac{k}{G I_s \eta} B_0 \sinh kz - \frac{M_{s_0}}{G I_s} (\cosh kz - 1) - \\ - \frac{k}{G I_s} B_d \sinh k(z-d) - \frac{M_{s_c}}{G I_s} [\cosh k(z-c) - 1] - \\ - \frac{m}{k G I_s} [\sinh k(z-a) - k(z-a)].$$

Druga pochodna, przy uwzględnieniu $B = E J_{\omega} \varphi''$, jest

$$(1.2.31) \quad B = -\varphi_0' \frac{\eta G I_s}{k} \sinh kz + B_0 \cosh kz + \frac{\eta M_{s_0}}{k} \sinh kz + \\ + \eta B_d \cosh k(z-d) + \eta \frac{M_{s_c}}{k} \sinh k(z-c) + \frac{\eta m}{k^2} [\cosh k(z-a) - 1].$$

Wreszcie moment giętno-skrętny wyniesie

$$(1.2.32) \quad M_{\omega}^{\sim} = \frac{dB}{dz} = -\varphi_0' \eta G I_s \cosh kz + B_0 k \sinh kz + \eta M_{s_0} \cosh kz + \\ + \eta B_d k \sinh k(z-d) + \eta M_{s_c} \cosh k(z-c) + \frac{\eta m}{k} [\sinh k(z-a)].$$

Wzory powyższe pozwalają wyznaczyć odkształcenie profilu o niezmiennym przekroju przy dowolnym stanie obciążenia.

W podobny sposób można ułożyć równania dla przekrojów bardziej złożonych, rozpatrywanych w poprzednim p. niniejszej pracy. Można przewidzieć, że budowa wzorów będzie w tych przypadkach podobna do wyżej wyprowadzonych, a jedynie istotne różnice wystąpią w wielkościach parametrów k i η . Z tego względu ograniczymy się do podania wspomnianych wzorów w części drugiej tej pracy przy rozważaniu przykładu liczbowego.

Korzystając ze wzorów (1.2.31) i (1.2.32) można wyznaczyć naprężenia

$$\sigma_{\omega}^{\sim} = \frac{B \tilde{\omega}}{I_{\omega}^{\sim}}, \quad \tau_{\omega}^{\sim} = \frac{M_{\omega}^{\sim} S_{\omega}^{\sim}}{I_{\omega}^{\sim} \delta}$$

Wzory (1.2.29), (1.2.30) i (1.2.31) w przypadku braku obciążenia zewnętrznego będą miały postać

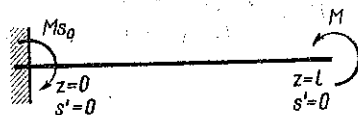
$$(1.2.33) \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k} \varphi_0' \sinh kz - \frac{B_0}{G I_s \eta} (\cosh kz - 1) - \frac{M_{s_0}}{G I_s \eta k} (\sinh kz - 1),$$

$$(1.2.34) \quad \varphi' = \varphi_0' \cosh kz - \frac{k}{G I_s \eta} B_0 \sinh kz - \frac{M_{s_0}}{G I_s \eta} (\cosh kz - 1),$$

$$(1.2.35) \quad B = -\varphi_0' \frac{\eta G I_s}{k} \sinh kz + B_0 \cosh kz + \eta \frac{M_{s_0}}{k} \sinh kz.$$

Rozpatrzmy z kolei pręt zamocowany na jednym końcu. Założmy, że przekrój swobodny $z=l$ nie może się deplanować. Wtedy mamy dwa warunki

$$\varphi_0' = 0 \quad \text{i} \quad \varphi_{z=l} = 0.$$



Rys. 17

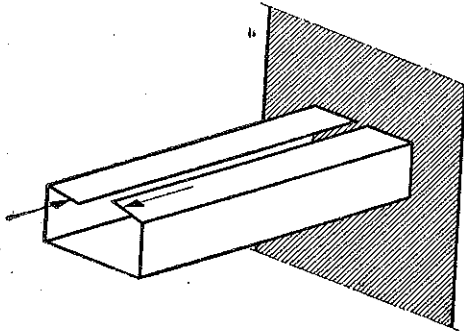
Warunek pierwszy wynika z utwierdzenia przekroju. Warunek drugi wynika z równania

$$0 = -\frac{k}{G I_s \eta} B_0 \sinh kz - \frac{M_{s_0}}{G I_s \eta} (\cosh kz - 1).$$

Z równania tego znajdziemy

$$B_0 = -\frac{M_s \eta}{k} \frac{\cosh kl - 1}{\sinh kl}$$

Podstawiając wartość B_0 do równania (1.2.35) otrzymamy



Rys. 18

$$B = -\frac{M_s \eta}{k} \frac{\cosh kl - 1}{\sinh kl} \times \\ \times \cosh kz + \frac{M_s \eta}{k} \sinh kz$$

lub

$$(1.2.36) \quad B = \frac{M_s \eta}{k} \times \\ \times \left(\frac{1 - \cosh kl}{\sinh kl} \cosh kz + \sinh kz \right)$$

Ze wzoru (1.2.36) widać, iż dla $z = 0$ i $z = l$ wartości bezwzględne bimomentów są równe odpowiednio

$$B_0 = -\frac{M_s \eta}{k} \frac{\cosh kl - 1}{\sinh kl} = \frac{M_s \eta}{k} \frac{1 - \cosh kl}{\sinh kl}$$

$$B_l = -\frac{M_s \eta}{k} \frac{1 - \cosh kl}{\sinh kl} = \frac{M_s \eta}{k} \frac{\cosh kl - 1}{\sinh kl}$$

Równanie (1.2.34) po zastąpieniu B_0 przez znalezione wyżej na tę wielkość wyrażenie będzie się przedstawiało następująco:

$$\varphi' = \frac{M_s \eta}{GI_s} \left(-\frac{1 - \cosh kl}{\sinh kl} \sinh kz + 1 - \cosh kz \right)$$

Wartość bimomentu dla przekroju środkowego ($z = l/2$) wynosi

$$B_{1/2} = \frac{M_s \eta}{k} \left(\frac{1 - \cosh kl}{\sinh kl} \cosh \frac{kl}{2} + \sinh \frac{kl}{2} \right) = \\ = \frac{M_s \eta}{k} \cosh \frac{kl}{2} \left(2 - 2 \cosh^2 \frac{kl}{2} + 2 \sinh^2 \frac{kl}{2} \right) = 0$$

Otrzymane wzory są podobne do wzorów dla otwartych profili; różnica polega na zastąpieniu M przez M_s , oraz GI_s przez GI_s^* .

Możemy więc powiedzieć, że pręt będzie się zachowywał jak pręt o profilu otwartym skręcany momentem M_s , i posiadający sztywność zastępczą GI_s^* , można go przeto potraktować jako pręt zastępczy o otwartym profilu.

2. SKRĘCANIE KADŁUBA OKRĘTU NA FALI SKOŚNEJ

2.1. Uwagi o cienkościennych przekrojach złożonych kadłuba okrętowego

Teoria cienkościennych przekrojów złożonych znajduje duże zastosowanie przy obliczeniach kadłuba okrętu pracującego na skręcanie, kadłub statku bowiem z powodu specyficznych właściwości konstrukcyjnych można rozpatrywać jako powłokę cienkościenną, tj. jako ustrój konstrukcyjny, którego grubość jest znacznie mniejsza od wymiaru obrysu. Stosowanie w tym przypadku metod obliczeń dla konstrukcji cienkościennych prowadzi do dokładniejszych wyników niż stosowanie metod opartych na elementarnej teorii wytrzymałości.

Pierwsze przybliżenie obliczeń uzyskuje się rozpatrując samą powłokę niezbiezną, bez żeber usztywniających i przegród poprzecznych. Przy tych założeniach przekroje okrętowe dadzą się porównać z przekrojami typowymi rozpatrzonymi w p. 1, dla których wyznaczono środki zginania oraz powierzchnie wycinkowe. Wzory (1.2.29)-(1.2.32) pozwalają wyznaczyć odkształcenia i naprężenia tylko dla profilu otwarto-zamkniętego. Jednakże można przewidzieć, że dla pozostałych przekrojów typowych struktura wzorów (1.2.29)-(1.2.32) będzie podobna do struktury wzorów uprzednio wyprowadzonych, a różnice będą dotyczyły jedynie parametrów charakteryzujących przekrój geometrycznie.

Te parametry obliczymy dla najprostszego przykładu przekroju wielospójnego w celu zobrazowania toku postępowania w przypadku przekrojów bardziej złożonych.

2.2. Równanie skręcania przekroju dwuspójnego

Strumienie naprężeń w poszczególnych częściach przekroju są następujące:

w przekroju K - K

$$(2.2.1.1) \quad q_1 = q_{01} - q_{02} + \int_{BK} \frac{\partial \sigma_{\omega}^{\wedge}}{\partial z} \delta ds,$$

w przekroju L - L

$$(2.2.1.2) \quad q_2 = q_{01} - q_{02} + \int_{BL} \frac{\partial \sigma_{\omega}^{\wedge}}{\partial z} \delta ds = q_{01} + \int_{c_{51}} \frac{\partial \sigma_{\omega}^{\wedge}}{\partial z} \delta ds + \int_{BL} \frac{\partial \sigma_{\omega}^{\wedge}}{\partial z} \delta ds,$$

w przekroju M - M

$$(2.2.1.3) \quad q_3 = q_{02} + \int_{cM} \frac{\partial \sigma_{\omega}^{\wedge}}{\partial z} \delta ds.$$

Wprowadzając oznaczenia jak dla przekroju otwarto-zamkniętego otrzymamy

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} q_1 = q_{01} - q_{02} + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{BK} \hat{\omega} dA, \\ q_2 = q_{01} + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{C5} \hat{\omega} dA + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{BL} \hat{\omega} dA, \\ q_3 = q_{02} + \int_{CM} \hat{\omega} dA. \end{cases}$$

Moment skręcający wynosi

$$\begin{aligned} M_{skr} = & \int_{14} \rho ds q_1 + \int_{1234} \rho ds q_2 + \int_{4651} \rho ds q_3 = \int_{14} \rho ds \left(q_{01} - q_{02} + \right. \\ & \left. + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{BK} \hat{\omega} dA \right) + \int_{1234} \rho ds \left(q_{01} + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{C51} \hat{\omega} dA + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{BL} \hat{\omega} dA \right) + \\ & + \int_{4651} \rho ds \left(q_{02} + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{CM} \hat{\omega} dA \right) = \int_{14} \rho ds q_{01} - \int_{14} \rho ds q_{02} + \\ & + \int_{14} \rho ds \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{BK} \hat{\omega} dA + \int_{1234} \rho ds q_{01} + \int_{1234} \rho ds \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{C51} \hat{\omega} dA + \\ & + \int_{1234} \rho ds \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{BL} \hat{\omega} dA + \int_{4651} \rho ds q_{02} + \int_{4651} \rho ds \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{CM} \hat{\omega} dA. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy wzór

$$(2.2.3) \quad M_{skr} = \Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02} + \frac{d\sigma_0}{dz} \left(\int_{14} \rho ds \int_{BK} \hat{\omega} dA + \int_{1234} \rho ds \int_{C51} \hat{\omega} dA + \right. \\ \left. + \int_{1234} \rho ds \int_{BL} \hat{\omega} dA + \int_{4651} \rho ds \int_{CM} \hat{\omega} dA \right).$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\Phi = \int_{14} \rho ds \int_{BK} \hat{\omega} dA + \int_{1234} \rho ds \int_{BL} \hat{\omega} dA + \int_{4651} \rho ds \int_{CM} \hat{\omega} dA$$

znajdziemy

$$(2.2.4) \quad \Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02} = M_{skr} - \frac{d\sigma_0}{dz} \Phi.$$

W celu wyznaczenia q_{01} i q_{02} potrzebny jest jeszcze drugi warunek. Skorzystamy z tego, że suma przemieszczeń na obwodzie zamkniętym jest równa zero; dzięki temu dla konturu pierwszego można napisać

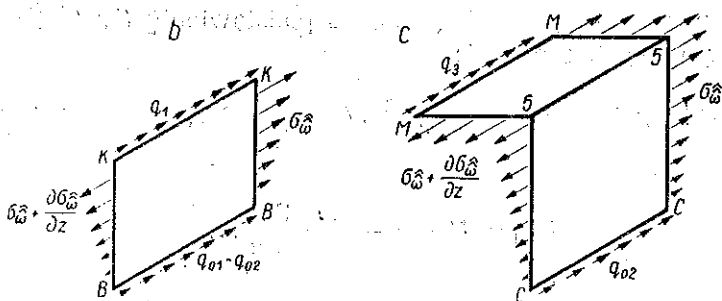
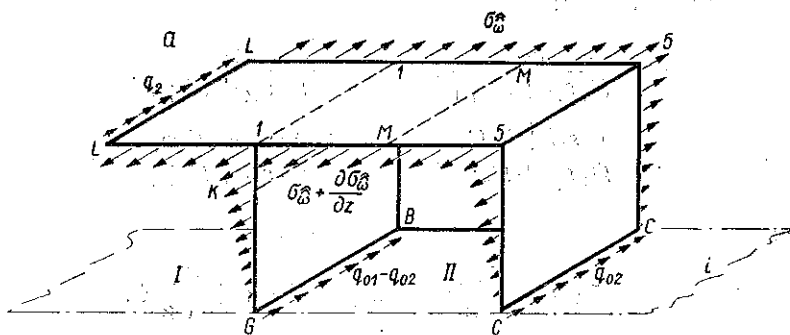
$$(2.2.5) \quad \int_{14} \frac{q_1 ds}{G \delta} + \int_{1234} \frac{q_2 ds}{G \delta} = 0.$$

Ponieważ

$$q_1 = q_{01} - q_{02} + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{BK} \hat{\omega} dA, \quad q_2 = q_{01} + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{C51} \hat{\omega} dA + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{BL} \hat{\omega} dA,$$

to otrzymamy

$$(2.2.6) \quad \oint_I q_{01} \frac{ds}{\delta} - \int_{14} q_{02} \frac{ds}{\delta} + \frac{d\sigma_0}{dz} \left(\int_{1234} \frac{ds}{\delta} \int_{C51} \hat{\omega} dA + \int_I \frac{ds}{\delta} \int_{BL} \hat{\omega} dA \right) = 0.$$



Rys. 19

Oznaczamy wyrażenie w nawiasie w równaniu (2.2.6) przez Ψ oraz

$$p_1 = \oint_I \frac{ds}{\delta}, \quad s_{14} = \int_{14} \frac{ds}{\delta}.$$

Wówczas

$$(2.2.7) \quad p_1 p_{01} - s_{14} q_{02} = -\frac{d\sigma_0}{dz} \Psi.$$

Równania (2.2.4) i (2.2.7) tworzą układ

$$(2.2.8) \quad \begin{cases} \Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02} = M_{skr} - \frac{d\sigma_0}{dz} \Phi, \\ p_1 q_{01} - s_{14} q_{02} = -\frac{d\sigma_0}{dz} \Psi, \end{cases}$$

którego rozwiązaniami są

$$q_{01} = \frac{M_{skr} s_{14} - \frac{d\sigma_0}{dz} (\Phi s_{14} + \Psi \Omega_2)}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}, \quad q_{02} = \frac{M_{skr} p_1 + \frac{d\sigma_0}{dz} (\Omega_1 \Psi - p_1 \Phi)}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{s_{14}}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}, & \nu &= \frac{p_1}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}, \\ \chi &= \frac{\Phi s_{14} + \Psi \Omega_2}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}, & \vartheta &= \frac{\Psi \Omega_1 - \Phi p_1}{\Omega_1 s_{14} + \Omega_2 p_1}. \end{aligned}$$

Wówczas

$$(2.2.9) \quad q_{01} = M_{skr} \mu - \frac{d\sigma_0}{dz} \chi, \quad q_{02} = M_{skr} \nu + \frac{d\sigma_0}{dz} \vartheta.$$

Strumienie naprężeń stycznych (2.2.2) po podstawieniu (2.2.9) i wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$$\pi = \chi + \vartheta - \int_{BK} \hat{\omega} dA, \quad \Theta = \chi - \int_{C51} \hat{\omega} dA - \int_{BL} \hat{\omega} dA, \quad \Xi = \vartheta + \int_{CM} \hat{\omega} dA,$$

są

$$(2.2.10) \quad \begin{cases} q_1 = M_{skr} (\mu - \nu) - \frac{d\sigma_0}{dz} \pi, \\ q_2 = M_{skr} \mu - \frac{d\sigma_0}{dz} \Theta, \\ q_3 = M_{skr} \nu + \frac{d\sigma_0}{dz} \Xi. \end{cases}$$

Obliczmy całkowitą energię potencjalną profilu

$$U = U_0 + U_p.$$

Energia naprężeń normalnych wyrazi się wzorem

$$U_0 dz = \int_A \frac{\sigma_0^2 dA}{2E} dz = \frac{\sigma_0^2}{2E} \left(\int_A \sigma_0^2 dA \right) dz = \frac{\sigma_0^2}{2E} I_{\hat{\omega}} dz,$$

a energia naprężeń stycznych wzorem

$$\begin{aligned} U_p dz &= \int_{14} \frac{q_1^2 ds}{2G\delta} dz + \int_{1234} \frac{q_2^2 ds}{2G\delta} dz + \int_{4651} \frac{q_3^2 ds}{2G\delta} dz = \\ &= \frac{1}{2G} \left\{ \int_{14} \left[M_{skr} (\mu - \nu) - \frac{d\sigma_0}{dz} \pi \right]^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \left(M_{skr} \mu - \frac{d\sigma_0}{dz} \Theta \right)^2 \frac{ds}{\delta} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{4651} \left(M_{skr} \nu + \frac{d\sigma_0}{dz} \Xi \right)^2 \frac{ds}{\delta} \right\} dz = \\ &= \frac{1}{2G} \left\{ \int_{14} \left[M_{skr}^2 (\mu - \nu)^2 - 2 \frac{d\sigma_0}{dz} M_{skr} (\mu - \nu) \pi + \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)^2 \pi^2 \right] \frac{ds}{\delta} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{1234} \left[M_{skr}^2 \mu^2 - 2 \frac{d\sigma_0}{dz} M_{skr} \mu \Theta + \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)^2 \Theta^2 \right] \frac{ds}{\delta} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{4651} \left[M_{skr}^2 \nu^2 + 2 \frac{d\sigma_0}{dz} M_{skr} \nu \Xi + \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)^2 \Xi^2 \right] \frac{ds}{\delta} \right\} dz. \end{aligned}$$

Równanie Eulera w postaci

$$(2.2.11) \quad \frac{\partial (U_0 + U_p)}{\partial \sigma_0} = \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial (U_0 + U_p)}{\partial \left(\frac{d\sigma_0}{dz} \right)} \right]$$

dla funkcji U będzie następujące:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_0}{E} I_{\hat{\omega}} &= \frac{1}{G} \left\{ \int_{14} \left[-m_{skr} (\mu - \nu) \pi + \frac{d^2 \sigma_0}{dz^2} \pi^2 \right] \frac{ds}{\delta} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{1234} \left[-m_{skr} \mu \Theta + \left(\frac{d^2 \sigma_0}{dz^2} \right) \Theta^2 \right] \frac{ds}{\delta} - \int_{4651} \left(m_{skr} \nu \Xi + \frac{d^2 \sigma_0}{dz^2} \Xi^2 \right) \frac{ds}{\delta} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$m_{skr} = \frac{dM_{skr}}{dz}.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy

$$(2.2.12) \quad \frac{d^2 \sigma_0}{dz^2} \frac{1}{G} \left(\int_{14} \pi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \Theta^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \Xi^2 \frac{ds}{\delta} \right) - \frac{\sigma_0 I_{\hat{\omega}}}{E} - \frac{1}{G} m_{skr} \left[\int_{14} (\mu - \nu) \pi \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \mu \Theta \frac{ds}{\delta} - \int_{4651} \nu \Xi \frac{ds}{\delta} \right] = 0$$

lub

$$(2.2.13) \quad \frac{d^2 \sigma_0}{dz^2} - \sigma_0 \frac{G}{E} \frac{I_{\hat{\omega}}}{\int_{14} \pi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \Theta^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \Xi^2 \frac{ds}{\delta}} = \frac{m_{skr} \left[\int_{14} (\mu - \nu) \pi \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \mu \Theta \frac{ds}{\delta} - \int_{4651} \nu \Xi \frac{ds}{\delta} \right]}{\int_{14} \pi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \Theta^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \Xi^2 \frac{ds}{\delta}}$$

Wykonując podstawienie $\sigma_0 = -E\varphi''$ otrzymamy równanie różniczkowe skręcania

$$(2.2.14) \quad \varphi^{IV} - \varphi'' \frac{G}{E} \frac{I_{\hat{\omega}}}{\int_{14} \pi^2 \frac{ds}{\sigma} + \int_{1234} \Theta^2 \frac{ds}{\varepsilon} + \int_{4651} \Xi^2 \frac{ds}{\delta}} = \frac{m_{skr} \left[\int_{14} (\mu - \nu) \pi \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \mu \Theta \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \nu \Xi \frac{ds}{\delta} \right]}{E \left(\int_{14} \pi^2 \frac{ds}{\varepsilon} + \int_{1234} \Theta^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \Xi^2 \frac{ds}{\delta} \right)}$$

Porównując je z następującym równaniem różniczkowym skręcania pręta otwartego lub otwarc-zamkniętego

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \frac{\xi}{E} m_{skr} \quad \left(k^2 = \frac{G}{E} \frac{I_s}{I_{\omega}} \right),$$

określamy parametry k i ξ :

$$(2.2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} k^2 = \frac{G}{E} \frac{I_{\hat{\omega}}}{\int_{14} \pi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \Theta^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \Xi^2 \frac{ds}{\delta}} \\ \xi = \frac{\int_{14} (\mu - \nu) \pi \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \mu \Theta \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \nu \Xi \frac{ds}{\delta}}{\int_{14} \pi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \Theta^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \Xi^2 \frac{ds}{\delta}} \end{array} \right.$$

Stąd zastępcza sztywność skręcania Saint-Venanta i wycinkowa podana jest wzorami

$$(2.2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{I}_s = \frac{I_0^{\wedge}}{\int_{14} (\mu - \nu) \pi \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} M \Theta \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \nu \Xi \frac{ds}{\delta}} \\ \hat{I}_{0s} = \frac{\int_{14} \pi^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \Theta^2 \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \Xi^2 \frac{ds}{\delta}}{\int_{14} (\mu - \nu) \pi \frac{ds}{\delta} + \int_{1234} \mu \Theta \frac{ds}{\delta} + \int_{4651} \nu \Xi \frac{ds}{\delta}} \end{array} \right.$$

2.3. Obciążenie i warunki brzegowe dla statku o przekroju nieciągłe zmiennym

Określenie parametrów I_s i I_{0s} przekroju złożonego pozwala wyznaczyć stan naprężenia i odkształcenia cienkościennego pręta skręcane go o dowolnym przekroju poprzecznym stałym. W celu uzyskania dostatecznego przybliżenia dla kadłuba barki lub statku należałoby uwzględnić nieciągłości przekroju spowodowane otworami w pokładzie, nadbudówkami itp.

Dla elementu o przekroju stałym wzór wyjściowy dla kąta skręcania jest następujący:

$$(2.3.1) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_0' z + \frac{\varphi_0''}{k^2} (\cosh kz - 1) + \frac{\varphi_0'''}{k^3} (\sinh kz - kz) + \frac{1}{kGI_s} \int_0^z [\sinh k(z-t) - k(z-t)] m_{skr}(t) dt;$$

przedstawia on całkę znanego równania różniczkowego

$$(2.3.2) \quad \varphi^{IV} - k^2 \varphi'' \xi = m_{skr}.$$

Przyjmujemy rozkład sinusoidalny momentu skręcającego

$$m_{skr}(t) = m_0 \sin \frac{2\pi}{L} t.$$

Wówczas równanie kąta skręcania będzie

$$(2.3.3) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_0' z + \frac{\varphi_0''}{k^2} (\cosh kz - 1) + \frac{\varphi_0'''}{k^3} (\sinh kz - kz) + \frac{m_0}{k\xi} \left[\frac{\frac{2\pi}{Lk^2} \sinh kz - \frac{1}{k} \sin \frac{2\pi}{L} z}{1 + \left(\frac{2\pi}{Lk}\right)^2} - \frac{kL}{2\pi} z + k \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \sin \frac{2\pi}{L} z \right],$$

gdzie $\xi = GI_s$.

Pochodne kąta skrećania wynoszą odpowiednio

$$(2.3.4) \quad \varphi' = \varphi_0' + \frac{\varphi_0''}{k} \sinh kz + \frac{\varphi_0'''}{k^2} (\cosh kz - 1) + \frac{m_0}{k\xi} \times \\ \times \left[\frac{\frac{2\pi}{Lk} \cosh kz - \frac{2\pi}{Lk} \cos \frac{2\pi}{L} z}{1 + \left(\frac{2\pi}{Lk}\right)^2} - \frac{kL}{2\pi} + \frac{kL}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{L} z \right],$$

$$(2.3.5) \quad \varphi'' = \varphi_0'' \cosh kz + \frac{\varphi_0'''}{k} \sinh kz + \frac{m_0}{k\xi} \times \\ \times \left[\frac{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{1}{k} \sin \frac{2\pi}{L} z + \frac{2\pi}{L} \sinh kz}{1 + \left(\frac{2\pi}{Lk}\right)^2} - k \sin \frac{2\pi}{L} z \right],$$

$$(2.3.6) \quad \varphi''' = \varphi_0''' k \sinh kz + \varphi_0'''' \cosh kz + \frac{m_0}{k\xi} \times \\ \times \left[\frac{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \frac{1}{k} \cos \frac{2\pi}{L} z + \frac{2\pi}{L} k \cosh kz}{1 + \left(\frac{2\pi}{Lk}\right)^2} - \frac{2\pi}{L} k \cos \frac{2\pi}{L} z \right].$$

Wzory powyższe pozwolą określić bimoment i moment giętno-skrecający za pomocą zależności

$$(2.3.7) \quad B = -EI_\omega \varphi'', \quad M_\omega = -EI_\omega \varphi''''.$$

Dwie niewiadome stałe φ_0'' i φ_0''' występujące w równaniach (2.3.5) i (2.3.6) muszą być tak dobrane, aby był spełniony warunek ciągłości naprężeń normalnych i stycznych w przekrojach granicznych; np. między profilami A i B:

$$(2.3.8) \quad [\sigma_A]_{z=z_1} = [\sigma_B]_{z=z_1}, \quad [\tau_A]_{z=z_1} = [\tau_B]_{z=z_1}.$$

2.4. Ciągłość naprężeń w miejscach zetknięcia się dwóch różnych profili

Rozpatrując zagadnienie ciągłości naprężeń w miejscach zetknięcia się dwóch różnych typów profili należy zwrócić uwagę na dwa zjawiska:

(1) przekroje graniczne (lewy, prawy) posiadają różne powierzchnie wycinkowe i wobec tego w przekroju tym nastąpić może skok naprężeń;

(2) także podobna nieciągłość występuje na powierzchni swobodnej jednego z przekrojów.

Stąd wniosek, że w przekroju granicznym musi być przyłożony zrównoważony układ obciążeń, który zniweluje skok naprężeń w elementach wspólnych obu profili oraz sprowadzi do zera naprężenia w swobodnych częściach przekroju (tj. w częściach nie stykających się z przekrojem sąsiednim).

Zamiast układu naprężeń wprowadzamy fikcyjny przekrój posiadający powierzchnię wycinkową spełniającą powyższe postulaty. Ten fikcyjny przekrój powinien spełniać warunki

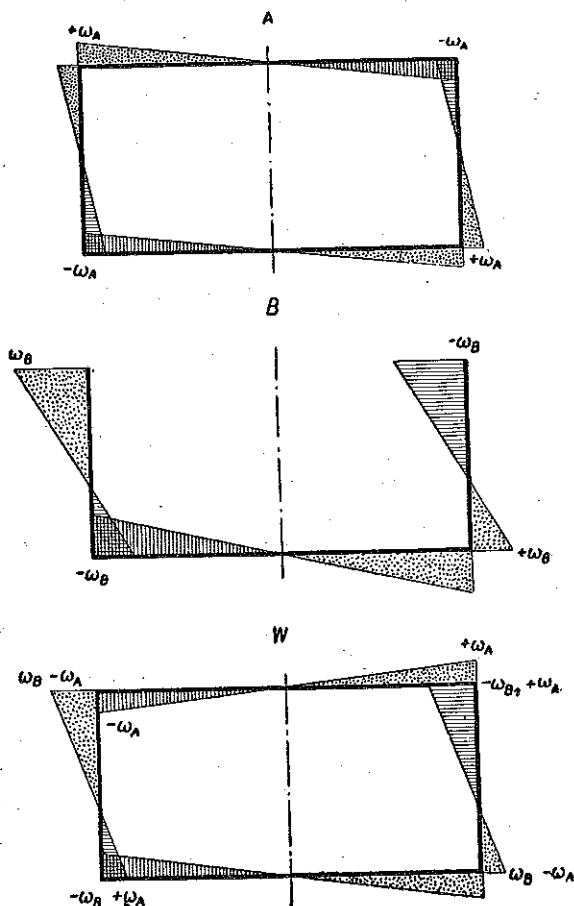
$$(2.4.1) \quad \begin{cases} \int_A \omega dA = 0, \\ \int_A \omega y dA = 0, \\ \int_A \omega x dA = 0. \end{cases}$$

Można go traktować jako przekrój redukujący różnicę powierzchni wycinkowych obu sąsiednich przekrojów A i B , dla których mają być spełnione przytoczone warunki. Wzory (2.4.1) można także zapisać w postaci następującej:

$$(2.4.2) \quad \begin{cases} \int_A (\omega_B - \omega_A) dA = 0, \\ \int_A (\omega_B - \omega_A) \eta dA = 0, \\ \int_A (\omega_B - \omega_A) x dA = 0. \end{cases}$$

Rozpatrzmy styk przekroju zamkniętego A i otwartego B (rys. 20). W celu uzyskania ciągłości naprężeń zgodnie ze wzorem (2.3.8) stwórzmy przekrój zastępczy W , którego powierzchnia wycinkowa stanowić będzie różnicę powierzchni wycinkowych obu profili sąsiednich. Jest rzeczą oczywistą, że z zależności

$$(2.4.3) \quad \omega_W = \omega_B - \omega_A$$



Rys. 20

wyływa nowy związek

$$(2.4.4) \quad S_{\omega W} = S_{\omega B} - S_{\omega A}$$

Wówczas dla dowolnego elementu swobodnego np. w przekroju A możemy napisać

$$(2.4.5) \quad \begin{cases} \sigma_A + \sigma_W = \frac{B_A \omega_A}{I_{\omega A}} + \frac{B_W \omega_W}{I_{\omega W}} = \frac{B_A \omega_A}{I_{\omega A}} - \frac{B_W \omega_A}{I_{\omega W}} = 0, \\ \tau_A + \tau_W = \frac{M_{\omega A} S_{\omega A}}{I_{\omega A} \delta} + \frac{M_{\omega W} S_{\omega W}}{I_{\omega W} \delta} = \frac{M_{\omega A} S_{\omega A}}{I_{\omega A} \delta} - \frac{M_{\omega W} S_{\omega A}}{I_{\omega W} \delta}, \end{cases}$$

przy spełnieniu warunku

$$(2.4.6.1) \quad \frac{B_A}{I_{\omega A}} = \frac{B_W}{I_{\omega W}}, \quad \frac{M_{\omega A}}{I_{\omega A}} = \frac{M_{\omega W}}{I_{\omega W}}$$

Stąd wypływają zależności

$$(2.4.6.2) \quad \varphi_A'' = \varphi_W'', \quad \varphi_A''' = \varphi_W'''$$

Podobny wynik otrzymamy dla elementu wspólnego obu przekrojom A i B:

$$(2.4.7) \quad \sigma_A + \sigma_W = \sigma_B, \quad \tau_A + \tau_W = \tau_B$$

Podstawiając wartości naprężeń oraz korzystając z zależności (2.4.3) i (2.4.4) otrzymamy:

$$(2.4.8.1) \quad \begin{cases} \frac{B_A \omega_A}{I_{\omega A}} + \frac{B_W \omega_W}{I_{\omega W}} = \frac{B_B \omega_B}{I_{\omega B}}, \\ \frac{M_{\omega A} S_{\omega A}}{I_{\omega A} \delta} + \frac{M_{\omega W} S_{\omega W}}{I_{\omega W} \delta} = \frac{M_{\omega B} \omega_B}{I_{\omega B} \delta}, \end{cases}$$

lub

$$(2.4.8.2) \quad \begin{cases} \frac{B_A \omega_A}{I_{\omega A}} + \frac{B_W}{I_{\omega W}} (\omega_B - \omega_B) = \frac{B_B}{I_{\omega B}}, \\ \frac{M_{\omega A} S_{\omega A}}{I_{\omega A} \delta} + \frac{M_{\omega W}}{I_{\omega W}} \frac{S_{\omega A} - S_{\omega A}}{\delta} = \frac{M_{\omega B}}{I_{\omega B}} \frac{S_{\omega B}}{\delta}. \end{cases}$$

Równości (2.4.8) będą spełnione, gdy

$$(2.4.9.1) \quad \frac{B_A}{I_{\omega A}} = \frac{B_W}{I_{\omega W}} = \frac{B_B}{I_{\omega B}}, \quad \frac{M_{\omega A}}{I_{\omega A}} = \frac{M_{\omega W}}{I_{\omega W}} = \frac{M_{\omega B}}{I_{\omega B}}$$

Stąd wypływają zależności podobne do (2.4.6.2)

$$(2.4.9.2) \quad \varphi_A'' = \varphi_B'', \quad \varphi_A''' = \varphi_B'''$$

Wynika stąd wnioszek, że przy przejściu od jednego przekroju do drugiego skok bimomentu i momentu giętno-skręcającego jest proporcjonalny do wzrostu wycinkowego momentu bezwładności.

2.5. Rozkład naprężeń stycznych w przekrojach złożonych

Dla przekrojów zamkniętych i otwarto-zamkniętych podanie wycinkowego momentu statycznego S_ω nie jest jednoznaczne z określeniem rozkładu naprężeń stycznych pochodzących od momentu giętno-skręcającego M_ω . Mianowicie na skutek rozcięcia profilu zamkniętego powstanie dodatkowy strumień q zależny wyłącznie od wyboru miejsca rozcięcia, a przez to samo od wyboru początku liczenia S_ω . Dlatego w dalszych rozważaniach posłużymy się sprowadzonym wycinkowym momentem statycznym S_ω , składającym się z momentu S_ω , utworzonego jak dla profilu otwartego, oraz ze stałej wartości S_{ω_0} , charakteryzującej strumień napięć zamykających.

Wycinkowy moment statyczny dla danego przekroju przykładowo wyznaczmy dla elementu dwuspójnego rozpatrzonego już w p. 2.2. Rozcięcie tego przekroju w punktach B i C leżących na głównym promieniu powoduje powstanie napięć zamykających q_{01} i q_{02} .

W celu określenia tych napięć ułożmy drugie równanie typu (2.2.5)

$$\int_{4651} \frac{q_3 ds}{G \delta} + \int_{14} \frac{q_1 ds}{G \delta} = \int_{4651} q_{02} \frac{ds}{\delta} + \frac{d \delta_0}{dz} \int_{4651} \frac{ds}{\delta} \int_{CM} \hat{\omega} dA - \int_{14} q_{01} \frac{ds}{\delta} + \int_{14} q_{02} \frac{ds}{\delta} - \frac{d \sigma_0}{dz} \int_{14} \frac{ds}{\delta} \int_{BK} \hat{\omega} dA = 0$$

i rozwiążmy układ równań

$$(2.5.1) \quad p_1 q_{01} - s_{14} q_{02} = -\frac{d \sigma_0}{dz} \varphi, \quad -s_{14} q_{01} + p_2 q_{02} = -\frac{d \sigma_0}{dz} \varphi,$$

gdzie

$$\varphi = \int_{4651} \frac{ds}{\delta} \int_{CM} \hat{\omega} dA - \int_{14} \frac{ds}{\delta} \int_{BK} \hat{\omega} dA.$$

Stąd

$$(2.5.2) \quad q_{01} = -\frac{d \sigma_0}{dz} \frac{\varphi p_2 + \varphi s_{14}}{p_1 p_2 - s_{14}^2}, \quad q_{02} = -\frac{d \sigma_0}{dz} \frac{\varphi p_1 + \varphi s_{14}}{p_1 p_2 - s_{14}^2}.$$

Ponieważ

$$(2.5.3) \quad \frac{d \sigma_0}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{B \omega}{I_\omega} \right]_{\omega=1} = \frac{M_\omega}{I_\omega},$$

to wzory (2.5.2) można zapisać w postaci

$$(2.5.4) \quad q_{01} = \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} S_{\omega_{01}}, \quad q_{02} = \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} S_{\omega_{02}},$$

gdzie

$$(2.5.5) \quad S_{\omega_{01}} = -\frac{\psi p_2 + \varphi s_{14}}{p_1 p_2 - s_{14}^2}, \quad S_{\omega_{02}} = -\frac{\varphi p_1 + \psi s_{14}}{p_1 p_2 - s_{14}^2}.$$

Podobny rezultat otrzymamy dla profilu otwarto-zamkniętego:

$$q_1 = q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^s \tilde{\omega} dA, \quad q_2 = q_0 + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_0^s \tilde{\omega} dA + \frac{d\sigma_0}{dz} \int_{51} \tilde{\omega} dA.$$

Warunek analogiczny do (2.2.5) dla części zamkniętej przekroju ma postać

$$\int_{14} \frac{q_1 ds}{G\delta} + \int_{1234} \frac{q_2 ds}{G\delta} = 0.$$

Stąd znajdziemy

$$(2.5.6) \quad q_0 = -\frac{d\sigma_0}{dz} \frac{\oint \frac{ds}{\delta} \int_0^s \tilde{\omega} dA + \int_{1234} \frac{ds}{\delta} \int_{51} \tilde{\omega} dA}{\oint \frac{ds}{\delta}},$$

a dla profilu prostokątnego bez «wypustek»

$$(2.5.7) \quad q_0 = -\frac{d\sigma_0}{dz} \frac{\oint \frac{ds}{\delta} \int_0^s \tilde{\omega} dA}{\oint \frac{ds}{\delta}}.$$

2.6. Przykład liczbowy

Opierając się na wynikach zawartych w pięciu poprzednich punktach obliczymy naprężenia σ_{ω} i τ_{ω} w barce o szerokości 12 m i długości 100 m.

Całe obliczenie można podzielić na pięć następujących etapów:

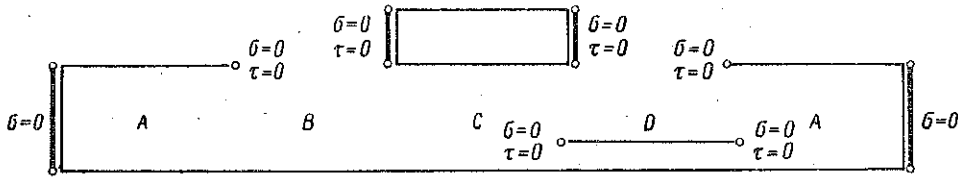
(1) obliczenie środków zginania i powierzchni wycinkowych wszystkich przekrojów barki oraz ustalenie obciążenia zewnętrznego;

(2) określenie parametrów I_{ω} , I_s , I_{ω_s} i k dla każdego przekroju i podstawienie ich do równań (2.3.5) i (2.3.6);

(3) wyznaczenie dla otrzymanych w ten sposób 10 równań 10 stałych całkowania φ_0'' i φ_0''' z ustalonych warunków brzegowych (rys. 21);

(4) rozwiązanie otrzymanego układu równań i określenie bimomentu i momentu giętno-skręcającego, pochodzących od obciążenia w dowolnym przekroju kadłuba;

(5) uzyskanie ciągłości naprężeń w przekrojach granicznych przez przyłożenie wtórnych układów samozrównoważonych na podstawie wzorów (2.4.6.1) i (2.4.9.1).



Rys. 21

Stosując ten tok postępowania podamy uzyskane rezultaty.

Linia środków zginania podana jest na rys. 22b. Powierzchnie wycinkowe wszystkich przekrojów podane są na rys. 22c, a na rys. 22d wycinkowe momenty statyczne S_{ω} i $S_{\omega'}$. Założono, że rozkład momentu skręcającego jest sinusoidalny o amplitudzie $m_s = 42,5$ tm/m, co odpowiada skośnemu ustawieniu barki na fali o długości $\lambda = L$.

Tablica 2

	I_{ω} (m ⁶)	I_s (m ⁴)	I_{ω_s} (m ⁶)	k (m ⁻¹)
Przekrój A	4,32	5,75		0,211
Przekrój B	22,68	$9,10 \cdot 10^{-6}$		0,000389
Przekrój C	2,856	8,185	58,148	0,242
Przekrój D	23,43	0,236		0,0508

Obliczone parametry I_{ω} , I_s , I_{ω_s} i k podano w tablicy 2, przy czym parametry charakteryzujące przekrój C wyznaczone na podstawie wzorów (2.2.15), przekrój D na podstawie wzorów dla profilu otwarcio-zamkniętego części poprzedniej niniejszej pracy.

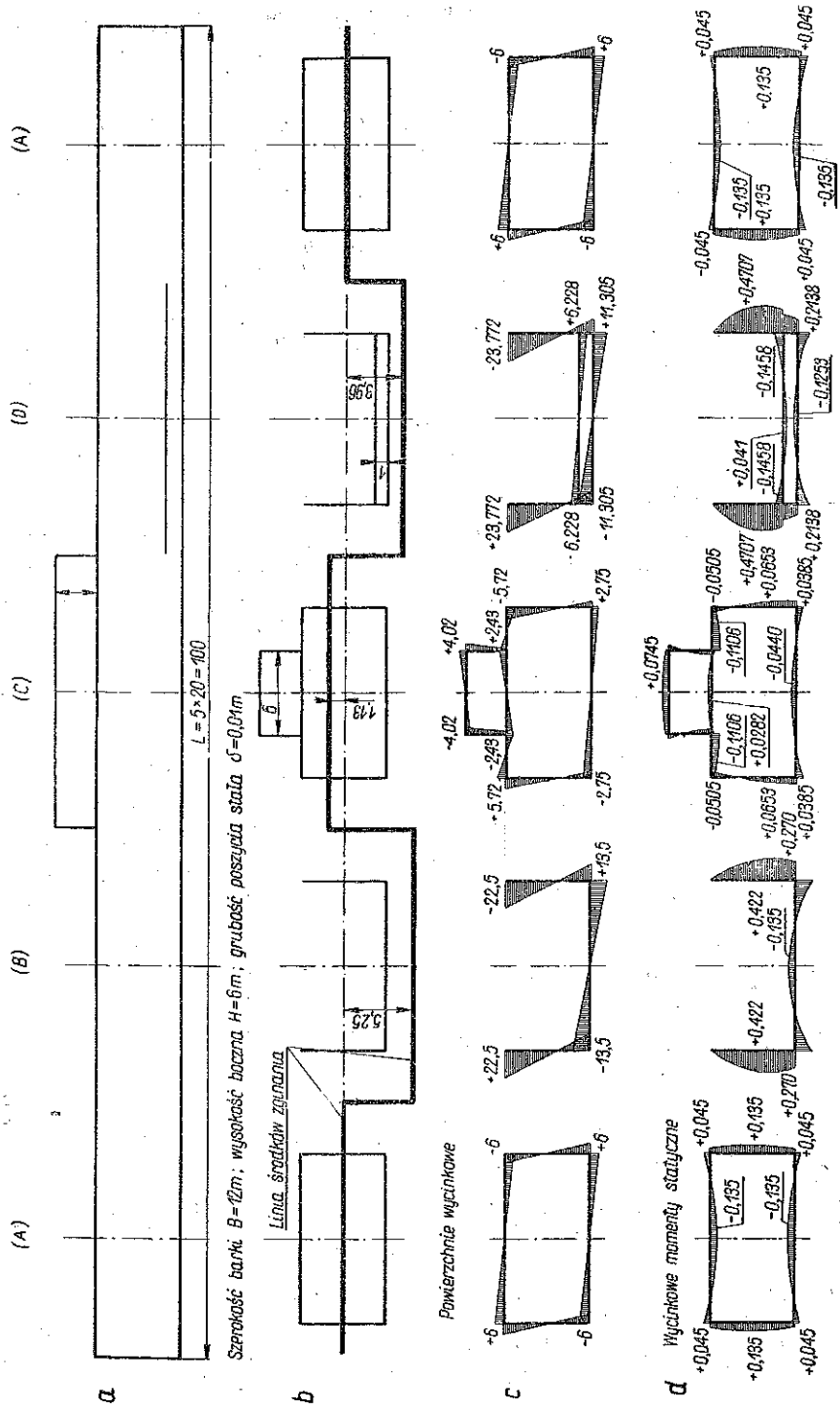
Po wstawieniu parametrów do wzorów (2.3.5) i (2.3.6) otrzymamy następujący układ równań:

$$(2.6.1) \quad \varphi''_{A_1} = \varphi''_{0A_1} \cosh 0,211 z + \frac{\varphi'''_{0A_1}}{0,211} \sinh 0,211 z + 0,9223 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0,00394786 \sin 0,062832 z + 0,0132575 \sinh 0,221 z}{0,048469} - \sin 0,062832 z \right),$$

$$\varphi'''_{A_1} = \varphi'''_{0A_1} \cdot 0,211 \sinh 0,211 z + \varphi''_{0A_1} \cosh 0,211 z + 0,05795 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0,00394786 \cos 0,062832 z + 0,211^2 \cosh 0,211 z}{0,048469} - \cos 0,062832 z \right),$$



Rys. 22

$$\varphi_B'' = \varphi_{0B}'' \cosh 0,000389 z + \frac{\varphi_{0B}'''}{0,000389} \sinh 0,000389 z + 0,59027 \times$$

$$\times \left(\frac{0,00394786 \sin 0,062832 z + 0,00002442 \sinh 0,000389 z}{0,00394801} - \sin 0,062832 z \right),$$

$$\varphi_B''' = \varphi_{0B}'' 0,000389 \sinh 0,000389 z + \varphi_{0B}''' \cosh 0,000389 z + 0,037088 \times$$

$$\times \left(\frac{0,00394786 \cos 0,062832 z + 0,000389^2 \cosh 0,000389 z}{0,00394801} - \cos 0,062832 z \right),$$

$$\varphi_C'' = \varphi_{0C}'' \cosh 0,242 z + \frac{\varphi_{0C}'''}{0,242} \sinh 0,242 z + 0,649 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0,00394786 \sin 0,062832 z + 0,0152053 \sinh 0,242 z}{0,0625118} - \sin 0,062832 z \right),$$

$$\varphi_C''' = \varphi_{0C}'' 0,242 \sinh 0,242 z + \varphi_{0C}''' \cosh 0,242 z + 0,040778 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0,00394786 \cos 0,062832 z + 0,242^2 \cosh 0,242 z}{0,0625118} - \cos 0,062832 z \right),$$

$$\varphi_D'' = \varphi_{0D}'' \cosh 0,0508 z + \frac{\varphi_{0D}'''}{0,0508} \sinh 0,0508 z + 22,501 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0,00394786 \sin 0,062832 z + 0,00319186 \sinh 0,0508 z}{0,0065313} - \sin 0,062832 z \right),$$

$$\varphi_D''' = \varphi_{0D}'' 0,0508 \sinh 0,0508 z + \varphi_{0D}''' \cosh 0,0508 z + 1,43783 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0,00394786 \cos 0,062832 z + 0,0508^2 \cosh 0,0508 z}{0,0065313} - \cos 0,062832 z \right),$$

$$\varphi_{A_1}'' = \varphi_{0A_1}'' \cosh 0,211 z + \frac{\varphi_{0A_1}'''}{0,211} \sinh 0,211 z + 0,9223 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0,00394786 \sin 0,062832 z + 0,0132575 \sinh 0,211 z}{0,048469} - \sin 0,062832 z \right),$$

$$\varphi_{A_1}''' = \varphi_{0A_1}'' 0,211 \sinh 0,211 z + \varphi_{0A_1}''' \cosh 0,211 z + 0,05795 \cdot 10^{-6} \times$$

$$\times \left(\frac{0,00394786 \cos 0,062832 z + 0,211^2 \cosh 0,211 z}{0,048469} - \cos 0,062832 z \right).$$

Wzory (2.4.6.2) i (2.4.9.2) określają osiem warunków dla przekrojów przejściowych, które razem z warunkami uzyskanymi z przyrównania do

zera bimomentu na końcach statku stworzą następujący układ równań pozwalający wyznaczyć stałe φ_0'' i φ_0''' :

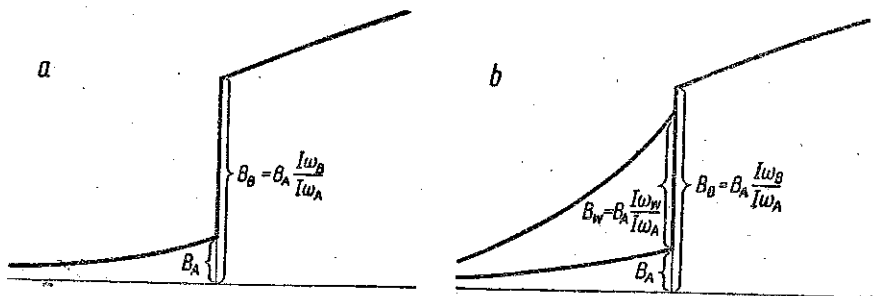
$$(2.6.2) \quad \begin{cases} \varphi_{A_1=-50}'' = 0, & \varphi_{A_2=+50}'' = 0, \\ \varphi_{A_1=-30}'' = \varphi_{B=-30}'' , & \varphi_{A_1=-30}''' = \varphi_{B=-30}''' , \\ \varphi_{B=-10}'' = \varphi_{C=-10}'' , & \varphi_{B=-10}''' = \varphi_{C=-10}''' , \\ \varphi_{C=+10}'' = \varphi_{D=+10}'' , & \varphi_{C=+10}''' = \varphi_{D=+10}''' , \\ \varphi_{D=+30}'' = \varphi_{A_2=+30}'' , & \varphi_{D=+30}''' = \varphi_{A_2=+30}''' . \end{cases}$$

Wstawiając otrzymane wartości φ_0'' i φ_0''' do równań (2.6.1) oraz stosując wzory $B = -EI_\omega \varphi''$, $M_\omega = -EI_\omega \varphi'''$ określimy bimoment i moment giętno-skrętny oraz funkcję φ'' i φ''' w dowolnym przekroju kadłuba. Następnie z prostych wzorów

$$(2.6.3) \quad \sigma = \frac{B \omega}{I_\omega}, \quad \tau = \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega \delta}.$$

otrzymamy wartości naprężeń.

Bimoment i momenty giętno-skrętne otrzymane na podstawie wzorów (2.6.1) i (2.6.2) określają tzw. obciążenie pierwotne, nie dające ciągłości naprężeń w przekrojach granicznych (rys. 23a). Konieczne jest w tym przypadku przyłożenie bimomentów i momentów giętno-skrętnych wtórnych w każdym przekroju nieciągłości dla spełnienia zależności (2.4.5) i (2.4.7), (rys. 23b).



Rys. 23

Wzory (2.4.6) i (2.6.2) prowadzą do zależności

$$(2.6.4) \quad \varphi_A'' = \varphi_W'' = \varphi_B'', \quad \varphi_A''' = \varphi_W''' = \varphi_B'''.$$

Wzory (2.6.4) są jednocześnie jednostronnymi warunkami brzegowymi dla obciążeń wtórnych.

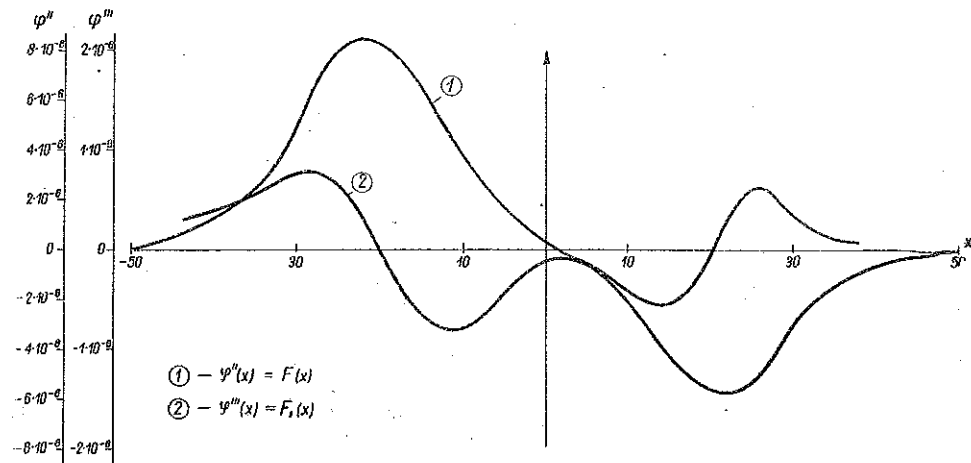
Dla obliczenia rozkładu naprężeń wtórnych można by, jak się wydaje, zastosować teorię układów zerowych (samozrównoważonych) J. Nowińskiego.

W tym przypadku całkowite naprężenia można zapisać w postaci następującej:

$$(2.6.5) \quad \begin{cases} \sigma = \sigma^0 + \Sigma \sigma^i, \\ \tau = \tau^0 + \Sigma \tau^i, \end{cases}$$

gdzie σ^0 i τ^0 odpowiadają wyżej obliczonym naprężeniom pierwotnym, zaś σ^i i τ^i są to naprężenia tworzące w ogólnym przypadku nieskończony zbiór układów zerowych.

Dopiero układy określone wzorami (2.6.5) dadzą całkowity obraz naprężeń w kadłubie skręcanym barki.



Rys. 24

Pomimo że obliczone wartości ze wzorów (2.6.3) nie dają dokładnego przebiegu naprężeń we wszystkich przekrojach barki, to jednakże można się nimi posłużyć w celu oszacowania naprężeń maksymalnych. Jak widać z rys. 24, największe wartości naprężeń (szczególnie normalnych) występują w pewnej odległości od przekrojów granicznych w miejscach, gdzie można się spodziewać raczej niewielkiego wpływu obciążeń wtórnych; np. naprężenia maksymalne w przekroju B równe $\sigma_{\omega} = 395 \text{ kG/cm}^2$, $\tau_{\omega} = 105 \text{ kG/cm}^2$ należałoby uważać za dość dokładne.

Przyjmując istnienie przegród poprzecznych w miejscach zmiany profilu rezygnujemy tym samym z ciągłości naprężeń stycznych na poszyciu barki w przekrojach granicznych. Wówczas warunki będą następujące:

$$(2.6.6) \left\{ \begin{array}{ll} \varphi''_{A_1=-50} = 0, & \varphi''_{A_2=+50} = 0, \\ \varphi''_{A_1=-30} = \varphi''_{B=-30}, & [\tau_{A_1} \delta_1 + \tau_{A_1 B} = \tau_B \delta_B]_{z=-30}, \\ & \left[\int \tau_{A_1 B} \delta_{AB} \rho ds \right]_{z=30} = 0, \\ \varphi''_{B=-10} = \varphi''_{C=-10}, & [\tau_B \delta_B + \tau_{BC} \delta_{BC} = \tau_C \delta_C]_{z=-10}, \\ & \left[\int \tau_{BC} \delta_{BC} \rho ds \right]_{z=-10} = 0, \\ \varphi''_{C=+10} = \varphi''_{D=+10}, & [\tau_C \delta_C + \tau_{CD} \delta_{CD} = \tau_D \delta_D]_{z=+10}, \\ & \left[\int \tau_{CD} \delta_{CD} \rho ds \right]_{z=+10} = 0, \\ \varphi''_{D=+30} = \varphi''_{A_2=+30}, & [\tau_D \delta_D + \tau_{DA_2} \delta_{DA_2} = \tau_{A_2} \delta_{A_2}]_{z=+30}, \\ & \left[\int \tau_{DA_2} \delta_{DA_2} \rho ds \right]_{z=+30} = 0, \end{array} \right.$$

gdzie $\tau_{A_1 B}$, τ_{BC} , τ_{CD} , τ_{DA_2} , δ_{AB} , δ_{BC} , δ_{CD} , δ_{DA_2} są to naprężenia styczne oraz grubości blach przegród w odpowiednich przekrojach. Jak widać, w tym przypadku nieciągłości naprężeń stycznych na poszyciu wyrównują naprężenia styczne panujące na obwodzie przegrody.

Na zakończenie przeprowadzimy krótkie rozważania dotyczące dokładniejszego określenia przebiegu naprężeń w pobliżu przekrojów granicznych. Mianowicie, aby uzyskać funkcję ciągłą określającą naprężenia, dodamy jeden wyraz układu wtórnego, zawierający dostateczną ilość stałych do wyznaczenia warunków brzegowych oraz równowagi (2.4.5).

2.7. Układy wyrównujące naprężenia w przekrojach granicznych

Przyjmijmy pierwszy wyraz układu wtórnego w następującej postaci:

$$(2.7.1) \quad \varphi'' = \varphi''_{01} \cosh kz + \frac{\varphi'''_{01}}{k} \sinh kz + \varphi''_{02} \cos \frac{\pi}{l} z + \varphi'''_{02} \sin \frac{\pi}{l} z + \\ + \varphi''_{03} \cos \frac{2\pi}{l} z + \varphi'''_{03} \sin \frac{2\pi}{l} z.$$

Pochodną tej funkcji jest

$$(2.7.2) \quad \varphi''' = \varphi_{01}'' k \sin kz + \varphi_{01}''' \cosh kz - \varphi_{02}'' \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi}{l} z + \\ + \varphi_{02}''' \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} z - \varphi_{03}'' \frac{2\pi}{l} \sin \frac{2\pi}{l} z + \varphi_{03}''' \frac{2\pi}{l} \cos \frac{2\pi}{l} z.$$

Początek układu umieszczamy w przekroju granicznym.

Uwzględniając wpływ naprężeń Saint-Venant'a musimy znaleźć pierwszą pochodną kąta skręcenia:

$$(2.7.3) \quad \varphi' = \varphi_{01}'' \frac{1}{k} \sinh kz + \varphi_{01}''' \frac{1}{k^2} \cosh kz + \varphi_{02}'' \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l} z - \\ - \varphi_{02}''' \frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi}{l} z + \varphi_{03}'' \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{l} z - \varphi_{03}''' \frac{l}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{l} z + C.$$

W funkcji powyższej występuje siedem stałych dowolnych:

$$\varphi_{01}'', \quad \varphi_{01}''', \quad \varphi_{02}'', \quad \varphi_{02}''', \quad \varphi_{03}'', \quad \varphi_{03}''', \quad C.$$

Możemy jednakże podać sześć warunków brzegowych, z których następujące cztery odnoszą się do bimomentu giętno-skręcającego na końcach przedziału:

$$(2.7.4) \quad \begin{cases} z = 0, & \varphi_W'' = -\frac{B_W}{E I_\omega}, & \varphi_W''' = -\frac{M_\omega}{E I_\omega}, \\ z = l, & B_W = \varphi_W'' = 0, & M_\omega = \varphi_W''' = 0. \end{cases}$$

Pozostałe dwa warunki otrzymamy zakładając, że dla układów wtórnych nie istnieje obciążenie zewnętrzne w każdym przekroju rozpatrywanego przedziału, czyli że

$$(2.7.5.1) \quad \begin{cases} z = 0, & M_\omega + M_V = M_{skr} = 0, \\ z = l, & M_\omega + M_V = M_{skr} = 0. \end{cases}$$

Wobec tego mamy

$$(2.7.5.2) \quad \begin{cases} z = 0, & k^2 \varphi' - \varphi''' = 0, \\ z = l, & k^2 \varphi' - \varphi''' = 0. \end{cases}$$

Podstawiając do tych równań odpowiednie wartości ze wzorów (2.7.1)-(2.7.3) do (2.7.4) i (2.7.5.2) otrzymamy układ równań

$$(2.7.6) \quad \begin{cases} \varphi_{02}''' \left(\frac{k^2 l}{\pi} + \frac{\pi}{l} \right) + \varphi_{03}''' \left(\frac{k^2 l}{2\pi} + \frac{2\pi}{l} \right) - k^2 C = 0, \\ \varphi_{02}''' \left(\frac{k^2 l}{\pi} + \frac{\pi}{l} \right) - \varphi_{03}''' \left(\frac{k^2 l}{2\pi} + \frac{2\pi}{l} \right) + k^2 C = 0, \\ \varphi_W'' = \varphi_{01}'' + \varphi_{02}'' + \varphi_{03}'', \\ \varphi_W^{IV} = \varphi_{01}''' + \varphi_{02}''' \frac{\pi}{l} + \varphi_{03}''' \frac{2\pi}{l}, \\ \varphi_{01}'' \cosh kl + \varphi_{01}''' \frac{1}{k} \sinh kl - \varphi_{02}'' + \varphi_{03}'' = 0, \\ \varphi_{01}'' k \sinh kl + \varphi_{01}''' \cosh kl - \varphi_{02}''' \frac{\pi}{l} + \varphi_{03}''' \frac{2\pi}{l} = 0. \end{cases}$$

Oberzmy stałą C za parametr niezależny i pozostałe stałe okreśmy jako funkcje C . Znajdziemy wtedy

$$(2.7.7) \quad \begin{cases} \varphi_{01}'' = \frac{C}{\chi} \frac{\cosh kl - 1}{k \sinh kl} - \varphi_W''' \frac{\cosh kl}{k \sinh kl}, \\ \varphi_{02}'' = \frac{1}{2} \varphi_W'' + \frac{1}{2} \frac{\varphi_W'''}{k \sinh kl} (\cosh kl - 1) - \frac{C}{\chi} \frac{\cosh kl - 1}{k \sinh kl}, \\ \varphi_{03}'' = \frac{1}{2} \varphi_W'' + \frac{1}{2} \frac{\varphi_W'''}{k \sinh kl} (\cosh kl + 1), \\ \varphi_{01}''' = \varphi_W''' - \frac{C}{\chi}, \quad \varphi_{02}''' = 0, \quad \varphi_{03}''' = \frac{C}{\chi} \frac{l}{2\pi}, \end{cases}$$

gdzie

$$\chi = \frac{1}{l^2 + \frac{1}{k^2}}.$$

Brakujące siódme równanie otrzymamy z warunku minimum energii potencjalnej.

Energia całkowita obliczona dla jednego przedziału jest

$$(2.7.8) \quad W = \int_0^l \left(\int_A \frac{\sigma^2 dA}{2E} + \int_A \frac{q^2 dA}{2G\delta} + \frac{M_p^2}{2GI_s} \right) dz.$$

Zastępując naprężenia odkształceniami otrzymamy

$$(2.7.9) \quad W = \frac{EI_\omega}{2} \int_0^l (\varphi'')^2 dz + \frac{E^2 \int_A S_\omega^2 dA}{2G\delta} \int_0^l (\varphi''')^2 dz + \frac{GI_s}{2} \int_0^l (\varphi')^2 dz.$$

Podstawmy wartości stałych (2.7.7) do wzorów (2.7.1)-(2.7.3) i wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{1}{\chi} \frac{\cosh kl - 1}{k \sinh kl} \cosh kz - \frac{1}{\chi} \frac{\sinh kz}{k} - \frac{1}{\chi} \frac{\cosh kl - 1}{k \sinh kl} \cos \frac{\pi}{l} z + \\
 &\quad + \frac{l}{2\pi\chi} \sin \frac{2\pi}{l} z, \\
 \nu &= -\varphi_W''' \frac{\cosh kl}{k \sinh kl} \cosh kz + \varphi_W''' \frac{\sinh kz}{k} + \frac{1}{2} \varphi_W'' \times \\
 &\quad \times \left(\cos \frac{\pi}{l} z + \cos \frac{2\pi}{l} z \right) + \frac{1}{2} \frac{\varphi_W'''}{k \sinh kl} \cosh kl \left(\cos \frac{\pi}{l} z + \cos \frac{2\pi}{l} z \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\varphi_W'''}{k \sinh kl} \left(\cos \frac{2\pi}{l} z - \cos \frac{\pi}{l} z \right), \\
 \vartheta &= \frac{1}{\chi} \frac{\cosh kl - 1}{\sinh kl} \sinh kz - \frac{1}{\chi} \cosh kz + \\
 &\quad + \frac{1}{\chi} \frac{\cosh kl - 1}{k \sinh kl} \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi}{l} z + \frac{1}{\chi} \cos \frac{2\pi}{l} z, \\
 \Phi &= -\varphi_W''' \frac{\cosh kl}{\sinh kl} \sinh kz + \varphi_W''' \cosh kz - \frac{1}{2} \varphi_W'' \frac{\pi}{l} \times \\
 &\quad \times \left(\sin \frac{\pi}{l} z + 2 \sin \frac{2\pi}{l} z \right) + \frac{1}{2} \frac{\varphi_W'''}{k \sinh kl} \frac{\pi}{l} \times \\
 &\quad \times \left[(\cosh kl - 1) \sin \frac{\pi}{l} z + 2(\cosh kl + 1) \sin \frac{2\pi}{l} z \right], \\
 \kappa &= \frac{1}{\chi} \frac{1}{k^2} \frac{\cosh kl - 1}{\sinh kl} \sinh kz - \frac{1}{\chi} \frac{1}{k^2} \cosh kz - \\
 &\quad - \frac{1}{\chi} \frac{\cosh kl - 1}{k \sinh kl} \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l} z - \frac{1}{\chi} \frac{l^2}{4\pi^2} \cos \frac{2\pi}{l} z + 1, \\
 \lambda &= -\varphi_W''' \frac{\cosh kl}{k^2 \sinh kl} \sinh kz + \varphi_W''' \frac{1}{k^2} \cosh kz + \frac{1}{2} \varphi_W'' \frac{l}{\pi} \times \\
 &\quad \times \left(\sin \frac{\pi}{l} z + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{l} z \right) - \frac{1}{2} \frac{\varphi_W'''}{k \sinh kl} \frac{l}{\pi} \times \\
 &\quad \times \left[(\cosh kl - 1) \sin \frac{\pi}{l} z - \frac{1}{2} (\cosh kl + 1) \sin \frac{2\pi}{l} z \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.7.10}$$

W wyrażeniach na pochodne kąta skrzywienia wyróżnijmy składniki zawierające C i składniki nie zawierające tej stałej. Znajdziemy wzory

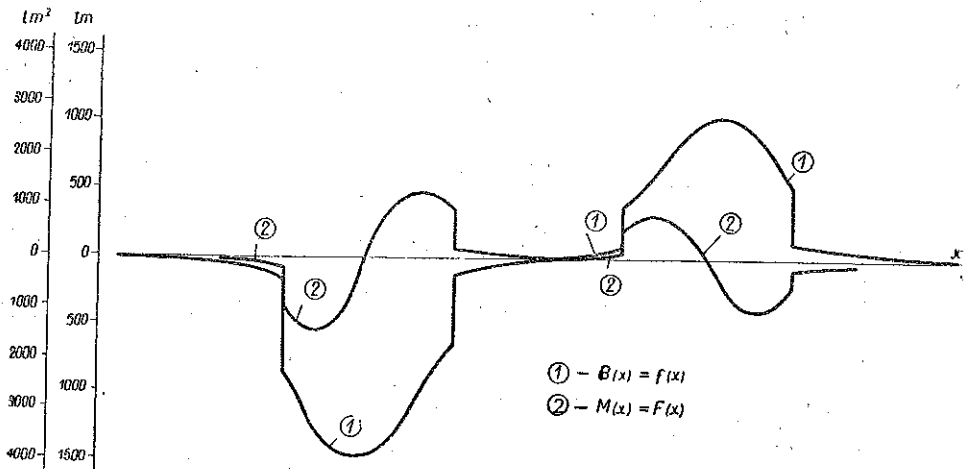
$$\tag{2.7.11} \quad \varphi'' = C\mu + \nu, \quad \varphi''' = C\vartheta + \Phi, \quad \varphi' = C\kappa + \lambda.$$

W wyrażeniu na energię (2.7.9) wprowadzimy jeszcze dodatkowe oznaczenia:

$$\alpha = EI_{\omega}, \quad \beta = \frac{E^2}{G\delta} \int_A S_{\omega}^2 dA, \quad \gamma = GI_s,$$

a następnie wzór (2.7.9) zróżniczkujemy i otrzymane wyrażenie przyrównamy do zera:

$$(2.7.12) \quad \frac{dW}{dC} = \alpha \left(C \int_0^l \mu^2 dz + \int_0^l \mu v dz \right) + \beta \left(C \int_0^l \vartheta^2 dz + \int_0^l \vartheta \Phi dz \right) + \\ + \gamma \left(C \int_0^l \kappa^2 dz + \int_0^l \kappa \lambda dz \right) = 0.$$



Rys. 25

W ten sposób otrzymaliśmy równanie do wyznaczenia siódmej stałej:

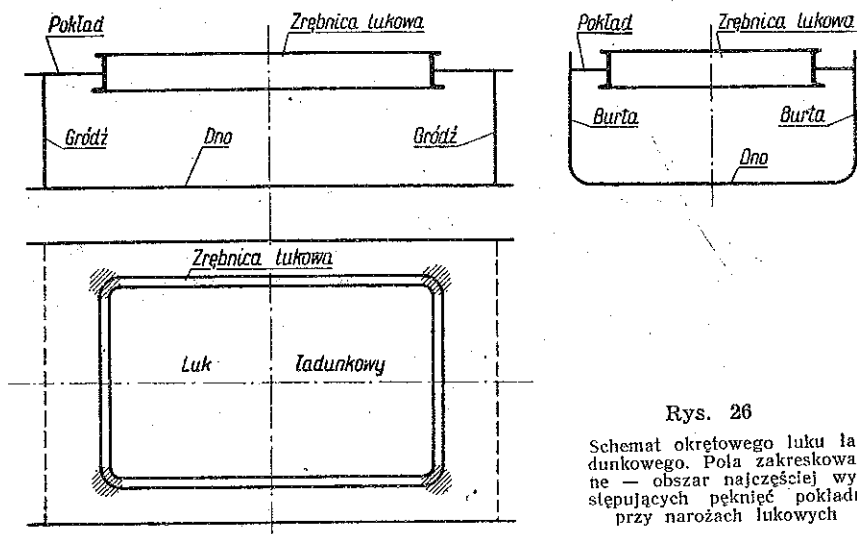
$$(2.7.13) \quad C = - \frac{\alpha \int_0^l \mu v dz + \beta \int_0^l \vartheta \Phi dz + \gamma \int_0^l \kappa \lambda dz}{\alpha \int_0^l \mu^2 dz + \beta \int_0^l \vartheta^2 dz + \gamma \int_0^l \kappa^2 dz}$$

Obliczenie wpływu zbieżności poszycia statku na dziobie i rufie zawiera dalsza część niniejszej pracy.

3. OBLICZENIE KADŁUBA OKRĘTOWEGO JAKO KRATOWNICY PRZESTRZENNEJ

Zagadnienie skręcania kadłuba okrętowego, mimo swej doniosłości dla ogólnej teorii wytrzymałości kadłuba, znajduje w literaturze stosunkowo nisko odzwierciedlenie. Przyczyn tego należy szukać w trudnościach zagadnienia i w skomplikowanych obliczeniach, które powinny uwzględniać zarówno zmienny przekrój kadłuba okrętowego, jak i zmienny rozkład momentu skręcającego wzdłuż długości statku. Jednocześnie obliczenia, aby przedstawiały faktyczny stan rzeczy, nie mogą opierać się na hipotezie płaskich przekrojów, lecz muszą uwzględniać występujące w rzeczywistości paczenie się przekrojów. Wreszcie obliczenia powinny uwzględniać współpracę poszczególnych wiązań okrętowych przy pracy kadłuba jako całości.

Jeśli jednak zwrócimy uwagę, że jedną z najczęściej występujących awarii okrętowych jest pęknięcie naroży lukowych (rys. 26), którego to zjawiska nie można przypisać działaniu momentu gnącego kadłub na fali, to dojdziemy do wniosku, że doniosłość teoretycznego opracowania zagadnienia o skręcaniu okrętu nie budzi wątpliwości.

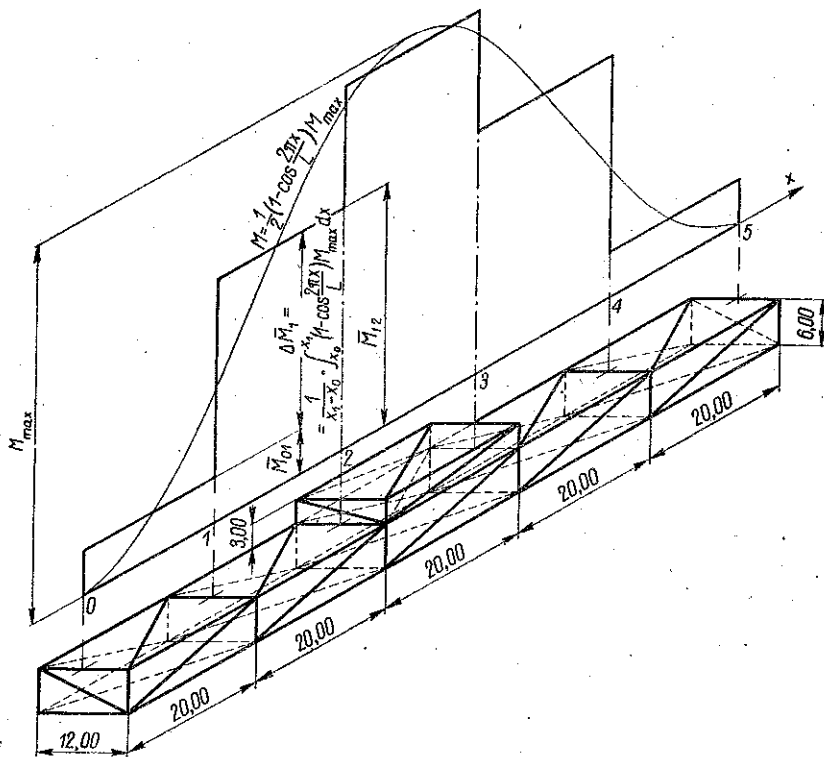


Rys. 26

Schemat okrętowego luku ładunkowego. Pola zakreślowane — obszar najczęściej występujących pęknięć pokładu przy narożach lukowych

Praca niniejsza zasadniczo zajmuje się metodą wyznaczania sił działających w narożach lukowych. W tym celu kadłub jest rozpatrywany jako kratownica przestrzenna, przedstawiona na rys. 27. Jak wynika z rysunku, przyjęto uproszczony kształt kadłuba o stałym przekroju prostokątnym. Założenie to niczym nie wpływa na zasadniczy tok rozumowania, a znacznie upraszcza obliczenia. Jednocześnie pozwala na porównanie otrzymana-

nych wyników z wynikami rozważań nad kadłubem okrętowym traktowanym jako skręcana powłoka cienkościenna, dla której wpływ zmiennego przekroju kadłuba znacznie bardziej komplikuje obliczenia, niż ma to miejsce przy kratownicy przestrzennej. Z tego powodu ograniczono się do kratownicy statycznie wyznaczalnej, tj. do kraty posiadającej przekątnie tylko w skrajnych grodziach (0 i 5) i ścianach zewnętrznych. Grodzie wewnętrzne (1, 2, 3, 4) są pozbawione przekątni, a więc zakładamy, że grodzie te nie mogą przenosić naprężeń stycznych, jak to zdarza się w rzeczywistości przy niedostatecznie usztywnionych tzw. grodziach falistych.



Rys. 27

W odróżnieniu od terminologii stosowanej przy kratownicach lotniczych będziemy stosowali terminy okrętowe: gródź oznaczać będzie płaszczyznę przechodzącą przez węzły kratownicy i prostopadłą do osi kadłuba (w lotnictwie — przegroda); przedział — odcinek kratownicy przestrzennej zawarty między dwiema sąsiednimi grodziąmi (w lotnictwie — gródź).

Pokład w przedziałach 1-2 i 3-4 posiada tzw. luki ładunkowe, tj. otwory obramowane ramą. Jeśli więc potrafimy obliczyć siły działające w gór-

nych przekątniach 1-2 i 3-4 i siły te potraktujemy jako obciążenia zewnętrzne wspomnianych ram, to obliczenie momentów narożnikowych w ramach daje, łącznie ze znajomością sił w otaczających pokład podłużnicach i poprzecznicach, realne podstawy do obliczenia naprężeń w narożnikach lukowych. Przedział 2-3 posiada nadbudówkę nad całym pokładem. Obciążeniem zewnętrznym dla nadbudówki będzie część siły działającej w górnej przekątnej pokładu w przedziale 2-3.

Wartości sił w prętach naszej kratownicy przestrzennej obliczamy jako funkcję maksymalnego momentu skręcającego. Rozkład momentu skręcającego wzdłuż statku nie wpływa na tok rozumowania. Dla naszego przypadku przyjęto na podstawie bardzo nielicznych danych w literaturze rozkład momentu skręcającego w postaci

$$(3.1) \quad M = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) M_{max}.$$

Dla konkretnego kadłuba okrętowego można M_{max} wyliczyć ściśle lub też stosować podany przez Siwierciewa, [17], przybliżony wzór na maksymalny moment skręcający na owręzu

$$(3.2) \quad M_{max} = k \gamma r B^3 L,$$

gdzie k oznacza współczynnik będący funkcją stosunku długości kadłuba i długości fali L/λ , długości kadłuba do jego szerokości L/B oraz współczynnika pełnotliwości wodnicy a , γ oznacza ciężar właściwy wody, r połowę wysokości fali (w praktyce $r = L/40$), B szerokość kadłuba i L długość kadłuba.

W naszym przypadku przyjęto początkowo $M_{max} = 1$ oraz uwzględniając, że pręty kratownicy mogą przenosić tylko siły osiowe (a więc obciążenie zewnętrzne może działać tylko na węzły kratownicy), zastąpiono krzywoliniowy rozkład momentu skręcającego łamaną linią schodkową ze skokami na grodziach. Wielkości skoków na kolejnych przegrodach i , k określono z zależności

$$(3.3) \quad \bar{M}_{ik} = \frac{1}{x_k - x_i} \int_{x_i}^{x_k} M dx = \sqrt{\frac{1}{2(x_k - x_i)}} \int_{x_i}^{x_k} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) dx.$$

Obliczenie momentu skręcającego poszczególne przedziały zawiera tabela 3.

Rozwiążemy zagadnienie kratownicy przestrzennej metodą niewiadomych sił deplanujących, opartą na rozważaniach Wagnera, [18], a rozpowszechnioną w piśmiennictwie polskim przez Grzędzielskiego,

[19]. Należy zwrócić uwagę, że dzięki płaskości wszystkich czterech ścian kratownicy podstawowej (jako kratownicę podstawową traktujemy sam kadłub bez nadbudówki) można metodę Grzędzielskiego stosować bez zastrzeżeń. W przypadku istnienia załamanych ścian bocznych

Tablica 3

$$M_{ik} = \frac{1}{x_k - x_i} \int_{x_i}^{x_k} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{2a} \left[a - \frac{L}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi}{L} x_k - \sin \frac{2\pi}{L} x_i \right) \right] =$$

$$= 0,5 - 0,397888 \left(\sin \frac{2\pi}{L} x_k - \sin \frac{2\pi}{L} x_i \right).$$

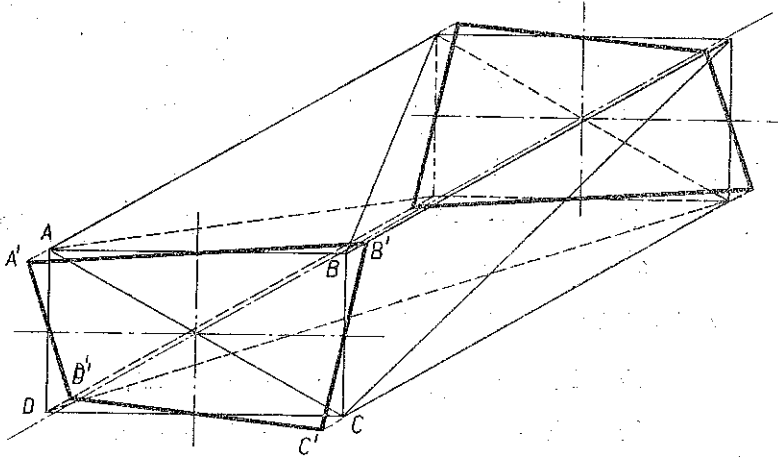
k	0	1	2	3	4	5
$x_k = 20k$	0,00	20,00	40,00	60,00	80,00	100,00
$2\pi \frac{x_k}{L} = \frac{2\pi}{100} x_k$	0,0000	1,256638	2,153272	3,769908	5,026544	6,28318
$\sin 2\pi \frac{x_k}{L}$	0,000000	0,95106	0,58779	-0,58779	-0,95106	0,0000
$\sin 2\pi \frac{x_k}{L} - \sin 2\pi \frac{x_i}{L}$	0,00000	0,95106	-0,36327	-1,17558	-0,36327	0,95106
$0,397888 \left(\sin 2\pi \frac{x_k}{L} - \sin 2\pi \frac{x_i}{L} \right)$	0,00000	0,378415	-0,144541	-0,467749	-0,144541	0,378415
M_{ik}	0,000000	0,121585	0,644541	0,967749	0,644541	0,121585

kadłuba metoda Grzędzielskiego nie daje dokładnych wyników, gdyż pomija występujące w tym przypadku dodatkowe siły w narożnikach grodzi. Siły te mogą znacznie wpłynąć na całkowitą wartość sił w przętach grodzi. Na fakt ten zwrócił uwagę w swej nieopublikowanej jeszcze pracy Mierzejewski, [20]. Prawidłową metodę rozwiązywania zagadnienia kratownic przestrzennych w przypadku załamanych ścian bocznych podaje Ebner, [21]. Metoda jego oparta jest również na rozważaniach Wagnera.

Zasady zastosowanej metody są następujące.

Pojedynczy przedział sześciościenny ograniczony grodziami i , k kratownicy przestrzennej, poddany działaniu przyłożonego na grodziach i i k momentu skręcającego M_{ik} , ulegnie odkształceniu, w szczególności ulegną deplanacji płaskie początkowo grodzie skrajne (rys. 28). Deplanacja ta powstaje pod wpływem działania bimomentu sił A , sił deplanujących wywołanych momentem skręcającym. Jeśli teraz złączymy nasz przedział ik z następnym przedziałem kl (w naszym przypadku oba przedziały są

identyczne pod względem kształtu i wymiarów, co jednak nie jest warunkiem koniecznym), również obciążonym na grodziach k i l momentem $M_{kl} \neq M_{ik}$, to gródź k ulegnie również deplanacji na ogół odmiennie do do wielkości i kierunku od deplanacji wywołanej momentem M_{ik} . Warunek nierozdzielności wymaga jednak jednoznacznie określonego wspólnego dla przedziałów ik i kl odkształcenia grodzi k .



Rys. 28

Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy w stosunku do dalszych przedziałów (na ogół o dowolnych kształtach i wymiarach) lm , mn , ..., obciążonych momentami skręcającymi M_{lm} , M_{mn} , ...

Uwzględniając warunek nierozdzielności oraz warunki równowagi najpierw poszczególnych grodzi, następnie poszczególnych prętów w grodzi, dochodzimy do równania trzech bimomentów

$$(3.4) \quad \varepsilon_k^i A_l + \varepsilon_k^k A_k + \varepsilon_k^l A_l = N_k,$$

gdzie ε_k^i , ε_k^k i ε_k^l są funkcjami parametrów określających wyłącznie geometryczne kształty kratownicy, zaś wyraz wolny N_k jest funkcją obciążenia zewnętrznego sąsiadujących przedziałów ik oraz kl . Wielkość N_k określona jest wzorem

$$(3.5) \quad N_k = \mu_k^l M_{kl} - \mu_k^i M_{ik},$$

przy czym współczynniki μ_k^i i μ_k^l są również zależne wyłącznie od wielkości określających geometryczne kształty kratownicy.

Oznaczmy przez b_i , b_k , ... szerokość kadłuba na odpowiednich grodziach i , k , ...; przez c_i , c_k , ... wysokości kadłuba na odpowiednich grodziach, przez a_{ik} , a_{kl} , ... kolejne odległości sąsiednich grodzi.

Wprowadźmy poza tym oznaczenia

$$(3.6) \quad F_i = b_i c_i, \quad K_{ki} = b_i c_k + b_k c_i.$$

Wówczas możemy wyrazić współczynniki występujące w równaniach (3.4) i (3.5) przez wymienione wyżej wielkości w sposób następujący:

$$(3.7) \quad \begin{cases} \varepsilon_k^i = \frac{F_i}{K_{ki} a_{ki}}, & \varepsilon_k^k = - \left[\left(1 - \frac{F_i}{K_{ki}} \right) \frac{1}{a_{ki}} + \left(1 - \frac{F_l}{K_{lk}} \right) \frac{1}{a_{lk}} \right], \\ \varepsilon_k^l = \frac{F_l}{K_{lk} a_{lk}}, & \mu_k^i = \frac{b_i}{K_{ki} b_k}, \quad \mu_k^k = \frac{b_l}{K_{lk} b_k}. \end{cases}$$

Uwzględniając, że w naszym przykładzie

$$b_i = b_k = \dots = b = 12 \text{ m}, \quad c_i = c_k = \dots = c = 6 \text{ m}, \\ a_{ik} = a_{ki} = \dots = a = 20 \text{ m},$$

otrzymamy również równość wyrażeń

$$F_i = F_k = \dots = F = b c = 12 \cdot 6 = 72 \text{ m}^2, \\ K_{ki} = K_{lk} = \dots = K = 2 F = 2 \cdot 72 = 144 \text{ m}^2, \\ \mu_i^k = \mu_k^l = \dots = \mu = \frac{1}{K} = \frac{1}{144} = 0,006944 \frac{1}{\text{m}^2}.$$

Należy zwrócić uwagę, że z samego fizycznego charakteru zjawiska wynika, że grodzie skrajne jako umownie zamocowane przegubowo w narożnikach mogą deplanować się swobodnie, skąd bezpośrednio wynika, że siły deplanujące w grodziach skrajnych są równe zero, tj. w naszym przypadku mamy $A_0 = A_5 = 0$.

Po wstawieniu wartości liczbowych do wyrażeń na współczynniki w równaniach trzech bimomentów otrzymamy układ czterech równań z czterema niewiadomymi:

$$\begin{aligned} -0,5 A_1 + 0,025 A_2 &= -0,003632, \\ 0,025 A_1 - 0,05 A_2 + 0,025 A_3 &= -0,002244, \\ 0,025 A_2 - 0,05 A_3 + 0,025 A_4 &= 0,002244, \\ 0,025 A_3 - 0,05 A_4 &= 0,003632. \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu równań daje siły deplanujące $A_0 = 0$, $A_1 = -0,105122$, $A_2 = -0,064958$, $A_3 = 0,064958$, $A_4 = 0,105122$, $A_5 = 0$.

Siły te wyrażone są w takich samych jednostkach, w jakich była wyrażona siła wchodząca do wielkości momentu skręcającego, i obliczone są

dla $M_{max} = 1$. Siły we wszystkich prętach kratownicy możemy teraz określić jako funkcje znalezionych sił deplanujących. Nie będziemy jednak od razu wyznaczać całkowitych sił w prętach, lecz siły jednostkowe, tj. siły w prętach odniesione do długości pręta,

$$(3.8) \quad s_i = \frac{S_i}{l_i}.$$

Uzasadnienie takiego postępowania można znaleźć w ogólnych rozważaniach teoretycznych. Korzyści stąd wynikające są widoczne, zwłaszcza przy obliczaniu sił w podłużnicach i ukośnicach ścian bocznych kratownicy.

Jednostkowe siły w prętach grodzi pośrednich obliczamy z zależności

$$(3.9.1) \quad \frac{B_k}{b_k} = -\frac{M_{ki}}{K_{ki}} \frac{b_i}{b_k} + \frac{A_k}{a_{ki}} - \frac{F_i}{K_{ki} a_{ki}} (A_i + A_k)$$

lub

$$(3.9.2) \quad \frac{B_i}{b_i} = -\frac{M_{ki}}{K_{ki}} \frac{b_k}{b_i} - \frac{A_i}{a_{ki}} + \frac{F_k}{K_{ki} a_{ki}} (A_i + A_k),$$

$$(3.10.1) \quad \frac{C_k}{c_k} = -\frac{M_{ki}}{K_{ki}} \frac{c_i}{c_k} - \frac{A_k}{a_{ki}} + \frac{F_i}{K_{ki} a_{ki}} (A_i + A_k)$$

lub

$$(3.10.2) \quad \frac{C_i}{c_i} = -\frac{M_{ki}}{K_{ki}} \frac{c_k}{c_i} + \frac{A_i}{a_{ki}} - \frac{F_k}{K_{ki} a_{ki}} (A_i + A_k).$$

Siły B_k , B_i , C_k i C_i oznaczają całkowite siły w odpowiednich poprzecznicach i słupach grodzi. Wzory (3.9) i (3.10) są słuszne, jeśli na grodzi nie działa obciążenie zewnętrzne. Jeżeli grodzie są obciążone parą sił poziomych, to różnica sił obliczonych np. dla grodzi k ze wzorów (3.9.1) i (3.9.2) musi być równa przyrostowi zewnętrznego momentu skręcającego na grodzi k , tj.

$$(3.11) \quad \left[\frac{B_k}{b_k} \right]_k - \left[\frac{B_i}{b_i} \right]_k = \frac{M_{ki}}{F_k} - \frac{M_{ik}}{F_k} = \frac{\Delta M_k}{F_k}.$$

Analogicznie, jeśli obciążenie zewnętrzne w postaci pary sił pionowych działa na gródź, jak ma to miejsce w naszym przypadku, to

$$(3.12) \quad \left[\frac{C_k}{c_k} \right]_k - \left[\frac{C_i}{c_i} \right]_k = \frac{\Delta M_k}{F_k}.$$

Dla obliczenia sił jednostkowych w prętach podłużnic i przekątni wprowadzamy pomocnicze funkcje parametrów określających geometryczne kształty kratownicy:

$$(3.13) \quad W_k^{hi} = \frac{F_k}{K_{hi} a_{ki}} \frac{b_i}{b_h},$$

$$(3.14) \quad G_h^{ki} = \frac{F_k}{K_{hi} a_{ki}} \frac{c_i}{c_h},$$

$$(3.15) \quad W_i^{ik} = \frac{F_i}{K_{hi} a_{ki}} \frac{b_h}{b_i},$$

$$(3.16) \quad G_i^{kh} = \frac{F_i}{K_{hi} a_{ki}} \frac{c_h}{c_i}.$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku naszego kadłuba zachodzi równość

$$W_k^{hi} = G_h^{ki} = W_i^{ik} = G_i^{kh} = \frac{F}{Ka} = 0,025 \frac{1}{m}.$$

W ogólnym przypadku jednostkowe siły w prętach podłużnic i przekątni, np. dla przedziału ik , obliczamy według niżej podanego schematu:

$$(3.17) \quad \left(\frac{S}{l}\right)_{hi} = \left\{ \begin{array}{l} \pm W_i^{ik} A_i \rightarrow \pm W_h^{ki} A_k \\ \pm G_i^{kh} A_i \rightarrow \pm G_h^{ki} A_k \end{array} \right\} \pm \frac{M_{ki}}{K_{hi}}.$$

Podłużnice obliczamy według schematu $W + G$ albo $G + W$, przekątnie według schematu $W + W$ lub $G + G$. O zastosowaniu tego lub innego schematu decyduje przynależność podłużnicy do ściany górnej lub bocznej, przy czym kierujemy się umową, że podłużnica należy do tej ściany, w której leży przekątnia, schodząca się z tą podłużnicą w grodzi nieobciążonej.

Obliczenie sił jednostkowych i całkowitych w prętach naszej kratownicy podstawowej dla $M_{max} = 1$ podaje tablica 4, odpowiednie zaś wykresy przedstawione są na rysunkach 29 i 30. Obliczenia te jednak nie uwzględniają istnienia nadbudówki, która obciążona jest częścią reakcji górnej ukośnicy U_{23}^{gd} .

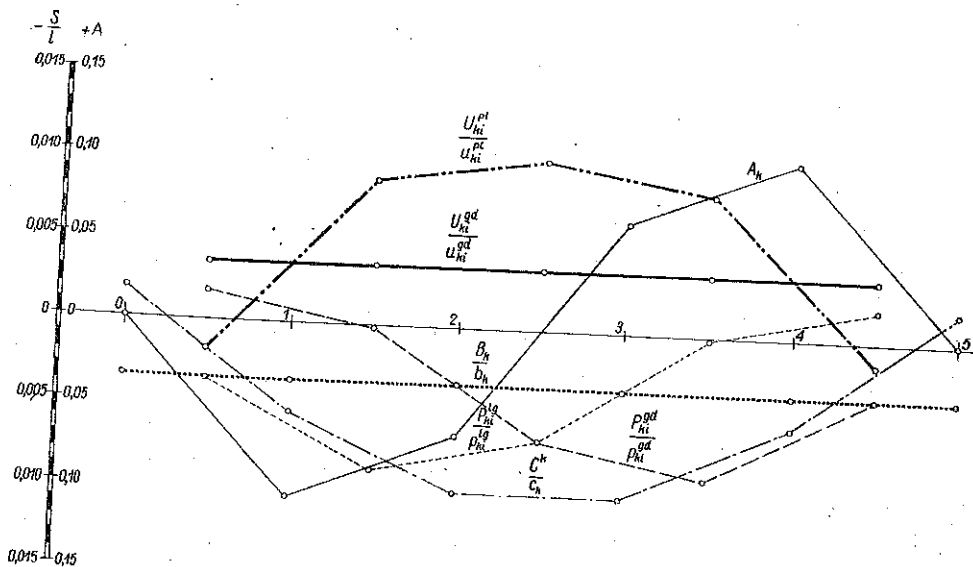
Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę, że na ogół w obrębie nadbudówki istnieją w pokładzie kadłuba podstawowego otwory, jak szyb maszynowy, szyb kotłowy itp., oraz że otwory te są stosunkowo słabo obramowane (w każdym razie bez porównania słabiej niż luki ładunkowe), to możemy przyjąć, że partia pokładu w przedziale 2 - 3 nie może przenosić na-

Tablica 4. Obliczenie sił jednostkowych w prętach. Układ statycznie wyznaczalny

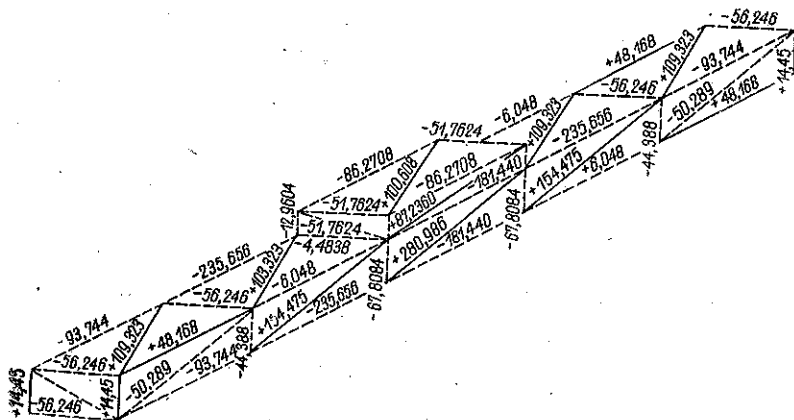
k	1	2	3	4	5
A_k	-0,105122	-0,064958	0,064958	0,105122	0,00000
M_{ik}	0,121585	0,644541	0,967749	0,644541	0,121585
$\frac{M_{ik}}{k}$	0,000844	0,004476	0,006720	0,004476	0,000844
$\frac{F}{K\alpha}(A_i + A_k)$	-0,002628	-0,004252	0,000000	0,004252	0,002628
$\frac{A_k}{a}$	-0,005256	-0,003248	0,003248	0,005256	0,000000
$\frac{C_k}{c_k}$	0,001784	-0,005480	-0,009968	-0,005480	0,001784
$\frac{A_i}{a}$	0,000000	-0,005256	-0,003248	0,003248	0,005256
$\frac{C_i}{c_i}$	0,001784	-0,005480	-0,009968	-0,005480	0,001784
$\frac{B_k}{b}$	-0,003472	-0,003472	-0,003472	-0,003472	-0,003472
$\frac{B_i}{b}$	-0,003472	-0,003472	-0,003472	-0,003472	-0,003472
$W_k^{ki} A_i$	0,000000	-0,002628	-0,001624	0,001624	0,002628
$W_k^{ki} A_k$	-0,002628	-0,001624	0,001624	0,002628	0,000000
$\frac{P_{ki}^{pg}}{p}$	0,001784	-0,000224	-0,006720	-0,008728	-0,003472
$\frac{P_{ki}^{tg}}{p}$	-0,003472	-0,008728	-0,006720	-0,000224	0,001784
$\frac{U_{ki}^{gd}}{u^{gd}}$	0,003472	0,003472	0,003472	0,003472	0,003472
$\frac{U_{ki}^{pl}}{u^{pl}}$	-0,001784	0,005480	0,009968	0,005480	-0,001784

prężeń stycznych. W takim przypadku nadbudówka nad tak określoną partią pokładu jest wiązaniem koniecznym dla zapewnienia całej konstrukcji dostatecznej sztywności. Wówczas nadbudówka spełnia rolę brakującej przekątni, a cały przedział 2 - 3 łącznie z nadbudówką możemy traktować jako kratownicę przestrzenną statycznie wyznaczalną, obciążo-

ną częścią obliczonej uprzednio siły działającej w górnej przekątnej przedziału 2 - 3 (rys. 31).



Rys. 29



Rys. 30

Dla obliczenia sił w prętach nadbudówki posłużymy się metodą Grzędzielskiego i Kostki, [22], opartą również na rozważaniach Wagnera i wykorzystującą znane już zależności (3.9) i (3.10).

Oznaczamy przez U_g część siły w przekątnej U_{23}^{gd} przenoszona przez nadbudówkę, przez U_d część siły przenoszona przez kadłub. Stosując wprowadzone już oznaczenia oraz oznaczając jeszcze wysokość nadbudówki przez h , zaś poszukiwane siły w słupach nadbudówki przez X otrzymamy z zależności (3.9) i (3.10)

$$(3.18) \quad X = \frac{U_{23}^{gd}}{u_{25}^{gd} \left[\frac{1}{2c} + \frac{1}{h} \frac{ab}{bh(a+b)} \right]} = 0,020838.$$

Mając określoną siłę X można obliczyć siły w pozostałych prętach nadbudówki skręcanej momentem

$$(3.19) \quad M = Xb = \\ = 0,020838 \cdot 12 = 0,230056.$$

Przyjmując wartość maksymalnego momentu według podanego przez Siwierciewa wzoru (3.2), gdzie przyjęto średnią wartość współczynnika $k = 0,0375$, otrzymujemy

$$(3.20) \quad M_{max} = k \gamma r B^2 L = 1350 \text{ tm.}$$

Mnożąc wielkości sił jednostkowych w prętach, obliczone w tabelicy 4, przez 1350 otrzymamy wielkości całkowitych sił w prętach wyrażone w tonach.

Wykaz tych sił podaje tablica 5.

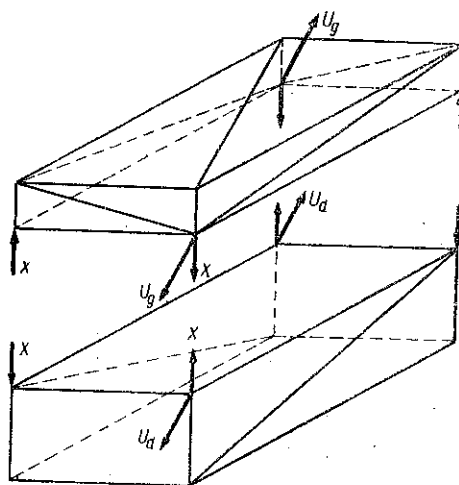
W tabelicy tej uwzględniono długości przekątnej równe odpowiednio

$$u^{gd} = \sqrt{a^2 + b^2} = 23,3238 \text{ m}, \quad u^{pl} = \sqrt{a^2 + c^2} = 20,8806 \text{ m.}$$

Obliczone w powyższy sposób siły w poszczególnych prętach dają pełny obraz obciążenia poszczególnych partii i wiązań kadłuba podczas skręcania. Wyniki obliczeń mogą być wyzyskane do dokładnego obliczenia rozkładu naprężeń metodami ścisłej teorii sprężystości. W przypadkach bardziej skomplikowanych, w których metody ścisłe byłyby zbyt żmudne lub kłopotliwe, mamy konkretne podstawy do przeprowadzenia racjonalnych prób modelowych np. elastooptycznych.

Siły w prętach nadbudówki obciążonej tylko obliczonym uprzednio momentem skręcającym

$$M_N = 0,230056 \cdot M_{max} = 310,574 \text{ tm}$$



Rys. 31

obliczymy z prostej zależności sił jednostkowych we wszystkich prętach nadbudówki

$$(3.21) \quad \left(\frac{S}{l}\right)_N = \pm \frac{M_N}{K_N}$$

Zależność ta wynika ze wzorów (3.9) i (3.10), jeśli zwrócimy uwagę, że dla nadbudówki

$$b_i = b_k = b = 12,00 \text{ m}, \quad c_l = c_k = h = 3,00 \text{ m}$$

oraz że na nadbudówkę oprócz momentu skręcającego nie działają siły deplanujące A .

Stąd

$$K_N = 2bh = 72 \text{ m}^2,$$

zaś jednostkowe siły

$$\left(\frac{S}{l}\right)_N = \pm 4,31353 \text{ t/mb.}$$

Obliczywszy uprzednio jeszcze długość bocznych ukośnic nadbudówki

$$u_N^{pl} = \sqrt{a^2 + h^2} = 20,2238 \text{ m},$$

możemy obliczyć siły całkowite w prętach nadbudówki. Siły te wynoszą

w słupach	$C_N = -4,31353 \cdot 3$	$= -12,9406 \text{ t}$
w poprzecznicach	$B_N = -4,31353 \cdot 12$	$= -51,7624 \text{ t}$
w podłużnicy	$P_A = -4,31353 \cdot 20$	$= -86,2706 \text{ t}$
w ukośnicy bocznej	$U_N^{pl} = +4,31353 \cdot 20,2238$	$= +87,2360 \text{ t}$
w ukośnicy górnej	$U_N^g = +4,31353 \cdot 23,3238$	$= +100,608 \text{ t}$

Oczywiście w prętach należących zarówno do kadłuba podstawowego, jak i do nadbudówki panują sumaryczne siły, równe uprzednio obliczonym w tablicach 4 i 5. Zakładamy, że część sił obliczoną powyżej przenosi nadbudówka.

Jak wynika z tych krótkich rozważań, rozpatrzenie kadłuba okrętowego jako kratownicy przestrzennej może oddać pewne usługi przy określeniu sił powstających przy skręcaniu. Ponieważ w warunkach normalnej pracy statku prawie nigdy nie powstaje samo skręcanie, lecz niemal zawsze połączone jest ono ze zginaniem, więc siły całkowite w prętach będą sumą sił powstających przy skręcaniu i przy zginaniu. Obliczanie kratownicy na zginanie nie przedstawia już specjalnych trudności, gdyż przy zginaniu pracują tylko ściany pionowe, a więc kraty płaskie, które oblicza się elementarnymi metodami.

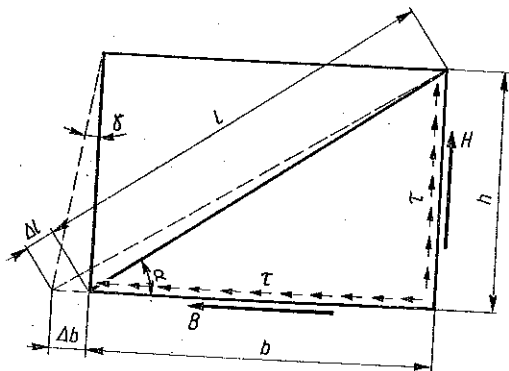
Tablica 5. Obliczenie sił całkowitych w prętach

k	0	1	2	3	4	5
$\left. \begin{array}{l} Słupy \\ C_k (M_{max}) \\ C_k t \end{array} \right\}$	0,010704	— 0,032880	— 0,059814	— 0,059814	— 0,032880	0,010704
	14,450	— 44,388	— 80,749	— 80,749	— 44,388	14,450
$\left. \begin{array}{l} Poprzecznice \\ B_k (M_{max}) \\ B_k t \end{array} \right\}$	— 0,041664	— 0,041664	— 0,041664	— 0,041664	— 0,041664	— 0,041664
	— 56,246	— 56,246	— 56,246	— 56,246	— 56,246	— 56,246
Podłużnice						
prawe górne $\left\{ \begin{array}{l} P_{ik}^{pg} (M_{max}) \\ P_{ik}^{pg} t \end{array} \right.$		0,035680	— 0,004480	— 0,134400	— 0,174560	— 0,069440
i lewe dolne $\left\{ \begin{array}{l} P_{ik}^{pg} \\ P_{ik}^{pg} t \end{array} \right.$		48,168	— 6,048	— 181,440	— 235,656	— 93,744
prawe dolne $\left\{ \begin{array}{l} P_{ik}^{lg} (M_{max}) \\ P_{ik}^{lg} t \end{array} \right.$		— 0,069440	— 0,174560	— 0,134400	— 0,004480	0,035680
i lewe górne $\left\{ \begin{array}{l} P_{ik}^{lg} \\ P_{ik}^{lg} t \end{array} \right.$		— 93,744	— 235,656	— 181,440	— 6,048	48,168
Ukośnice						
górne i dolne $\left\{ \begin{array}{l} U_{ik}^{gd} (M_{max}) \\ U_{ik}^{gd} t \end{array} \right.$		0,080980	0,080980	0,080980	0,080980	0,080980
prawe i lewe $\left\{ \begin{array}{l} U_{ik}^{pl} (M_{max}) \\ U_{ik}^{pl} t \end{array} \right.$		109,323	109,323	109,323	109,323	109,323
		— 0,037251	0,114426	0,208138	0,114426	— 0,037251
		— 50,289	154,475	280,386	154,475	— 50,289

Należy jeszcze raz podkreślić, że w przykładzie powyższym rozpatrywaliśmy kratownicę statycznie wyznaczalną, w której siły powstające w prętach są zależne tylko od obciążenia zewnętrznego i kształtów kratownicy, nie zależą zaś od sztywności poszczególnych prętów w odróżnieniu od kratownicy statycznie niewyznaczalnej (np. w przypadku gdy grodzie mogą przenosić naprężenia tnące), dla której sztywność prętów odgrywa istotną rolę.

Powyższy przykład obrazuje więc jeden przypadek skrajny odpowiadający kadłubowi o bardzo wiotkich grodziach, nie przenoszących żadnych sił ścinających.

Zajmiemy się obecnie drugim skrajnym przypadkiem odpowiadającym kadłubowi, w którym grodzie mogą przenosić siły ścinające. Istotnym zagad-



Rys. 32

nieniem w tym przypadku będzie przejście od modelu cienkościennego do kratowego. W rozważaniach niniejszych zastępcze sztywności ukośnic dobierzemy w ten sposób, aby wydłużenie przekątnej blachy, znajdując się rzeczywiście pod wpływem działających na nią sił tnących, równe było wydłużeniu pręta zastępczego pod wpływem siły osiowej.

Stosując oznaczenia podane na rys. 32 założenie powyższe możemy wyrazić wzorem

$$(3.22) \quad \Delta l = \Delta b \cos \alpha.$$

Ze znanych zależności $\gamma = \tau/G$, $\Delta l = Pl/EF$ oraz przyjmując, że siły tnące na krawędziach blachy wyrażają się wzorami $B = b \delta \tau$, $H = h \delta \tau$, możemy wyznaczyć siłę $P = \sqrt{B^2 + H^2} = l \delta \tau$ oraz przekrój pręta zastępczego

$$(3.23) \quad F_n = \frac{Gl^3 \delta}{Ehb} = \frac{l^3 \delta}{2(1+\nu)hb}.$$

Przyjmując stałą grubość blachy $\delta = 10 \text{ mm} = 0,01 \text{ m}$ oraz liczbę Poissona $\nu = 0,3$ otrzymujemy

$$(3.24) \quad F_n = 0,003846 \frac{l^3}{hb}.$$

Dla podłużnic przekroje prętów zastępczych dobieramy w ten sposób, że przekrój przenoszący siły osiowe obejmie po $1/4$ szerokości pokładu i wysokości burt dla każdej podłużnicy, a więc przekrój jednej podłużnicy wyniesie

$$F_p = \left(\frac{b}{4} + \frac{c}{4} \right) \delta = 0,045 \text{ m}^2.$$

Wymiary przekrojów zastępczych ukośnic i podłużnic podaje tablica 6.

Tablica 6. Funkcje charakterystyk sztywności prętów układu statycznie niewyznaczalnego

Podłużnice	$l = 20,00 \text{ m}$, $F = 0,045 \text{ m}^2$, $\bar{\omega} = 0,084656$		
Ukośnice pokładu i dna	$l = 23,32 \text{ m}$, $F = 0,2032 \text{ m}^2$, $\hat{\omega} = 0,029716$		
Ukośnice burtowe	$l = 20,88 \text{ m}$, $F = 0,2918 \text{ m}^2$, $\hat{\omega} = 0,014858$		
$\Sigma \bar{\omega}$	0,338624	$G^2 \Sigma \omega_g$	0,000124
$\Sigma \hat{\omega}$	0,089148	$\delta_{k,k}$	0,0005348
$\Sigma \omega_W$	0,228744	$\delta_{i,k}$	0,0001559
$\Sigma \omega_g$	0,199028	$W \Sigma \omega_W$	0,005719
$\Sigma \bar{\omega} - \Sigma \hat{\omega}$	0,249440	$G \Sigma \omega_g$	0,004976
$W^2 \Sigma \omega_W$	0,000143	$\frac{1}{K} (W \Sigma \omega_W - G \Sigma \omega_g)$	0,0,5159

Siła w przecie układu statycznie niewyznaczalnego s_p jest równa sumie siły w układzie statycznie wyznaczalnym s_{op} oraz sił s_{ps} , powstałych pod wpływem działania sił X_s wzdłuż krawędzi przegród s , będących składowymi sił w ukośnicach grodzi X . Przechodząc do sił jednostkowych, odniesionych do długości pręta, możemy to przedstawić jako

$$(3.25) \quad s_p = s_{op} + \sum_{s=1}^n s_{ps} X_s.$$

Energia potencjalna wszystkich prętów kratownicy wynosi

$$(3.26) \quad U = \frac{1}{2} \sum \omega_p s_p,$$

gdzie $\omega = l_p^3 / E_p F_p$ jest charakterystyką sztywności pręta, a litera p numerem kolejnym pręta.

Zgodnie z zasadą minimum energii w położeniu równowagi musi być

$$(3.27) \quad \frac{\partial U}{\partial X_p} = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Można dowieść, że siły deplanujące są liniowo zależne od sił w prętach nadliczbowych:

$$(3.28) \quad \sum_i \varepsilon_k^i A_i = X_k.$$

Uwzględniając tę własność i wykorzystując metody z teorii równań liniowych i rachunku wyznaczników po pewnych przekształceniach dochodzimy do wyrażenia równania

$$(3.29) \quad \sum_p \sum_i \omega_p s_{pi} s_{pk} A_i + \sum \omega_p s_{0p} s_{pk} = 0.$$

We wzorze tym s_{pi} i s_{pk} oznaczają siły jednostkowe w pręcie p powstające pod wpływem siły deplanującej A_i lub A_k .

Jeśli rozpatrzmy tutaj przypadek całkowitej sztywności grodzi (a więc biegunowo przeciwny do rozpatrzonego układu statycznie wyznaczalnego), to możemy z dokładnością wystarczającą dla celów praktycznych pominać wyrazy, dla których $|i-k| > 1$. Otrzymujemy wówczas n równań z n niewiadomymi, a żadne z równań nie będzie zawierało więcej niż trzy niewiadome.

Wprowadźmy oznaczenia

$$(3.30) \quad \sum_p \omega_p s_{0p} s_{pk} = \delta_{0,k},$$

$$(3.31) \quad \sum_p \omega_p s_{pi} s_{pk} = \delta_{i,k},$$

$$(3.32) \quad \sum_p \omega_p (s_{pk})^2 = \delta_{k,k}.$$

Układ równań będzie więc przedstawiał wyrażenia typu

$$(3.33) \quad \delta_{k,i} A_i + \delta_{k,k} A_k + \delta_{k,l} A_l = -\delta_{0,k}.$$

Współczynniki δ obliczamy z zależności (3.13) - (3.17), skąd po licznych przekształceniach otrzymujemy

$$(3.34) \quad \delta_{i,k} = \frac{F_i F_k}{K_{ki}^2 a_{ki}^2} (\sum \bar{\omega} - \sum \hat{\omega})_{ki},$$

$$(3.35) \quad \delta_{0,k} = [W_k^{hl} (\sum \omega_w)_{kl} - G_k^{hl} (\sum \omega_g)_{kl}] \frac{M_{lk}}{K_{lk}} - [W_k^{hi} (\sum \omega_w)_{ki} - G_k^{hi} (\sum \omega_g)_{ki}] \frac{M_{ki}}{K_{ki}}$$

We wzorach (3.34) i (3.35) $\sum \bar{\omega}$ oznacza sumę charakterystyk sztywności ukośnic, $\sum \hat{\omega}$ sumę charakterystyk sztywności podłużnic, $\sum \omega_w$ sumę charakterystyk sztywności prętów zastępczych dna i pokładu, $\sum \omega_g$ sumę charakterystyk sztywności prętów zastępczych burt.

Jeśli wziąć pod uwagę, że wyraz zawierający siły jednostkowe w układzie statycznie wyznaczalnym jest równy

$$(3.36) \quad s_{0p} = s_{pi} A'_i + s_{pk} A'_k + s_{pl} A'_l,$$

to równanie (3.33) przybierze postać

$$(3.37) \quad \delta_{k,i} (A_i + A'_i) + \delta_{k,h} (A_h + A'_h) + \delta_{k,l} (A_l + A'_l) = -\delta_{0,k}.$$

Siły A'_i , A'_k i A'_l są siłami deplanującymi dla układu statycznie wyznaczalnego.

Dalszy tok postępowania jest identyczny jak dla kadłuba statycznie wyznaczalnego: obliczamy siły deplanujące (w naszym przypadku za niewiadome przyjmujemy sumy $A_i + A'_i$), a następnie z zależności i wzorów (3.9), (3.10) i (3.17) wyznaczamy siły w prętach kratownicy. Obliczenia te zawiera tablica 7.

Nadbudówkę w przypadku kadłuba statycznie niewyznaczalnego obliczamy wychodząc również ze wzoru (3.18) lub też, jeśli nadbudówka przedstawia ustrój statycznie niewyznaczalny, stosując omówioną wyżej metodę energetyczną.

Jeśli przejdziemy teraz do naszej kratownicy, to na podstawie stałego przekroju prostokątnego łatwo stwierdzimy, że współczynniki

$$\delta_{i,k} = \frac{F^2}{K^2 \alpha^3} (\sum \bar{\omega} - \sum \hat{\omega}) = 0,0001559,$$

$$\delta_{k,k} = 2(W^2 \sum \omega_w - G^2 \sum \omega_g) = 0,0005348,$$

zaś różne wyrazy wolne $\delta_{0,k}$ będą

$$\delta_{0,k} = m(-M_{ki} + M_{kl}),$$

gdzie

$$m = \frac{1}{K} (W \sum \omega_w - G \sum \omega_g) = 0,051519.$$

Ze względu na symetrię kratownicy i obciążenia jest

$$\delta_{0,1} = -\delta_{0,4} = 0,0427,$$

$$\delta_{0,2} = -\delta_{0,3} = 0,0417.$$

Otrzymujemy więc układ czterech równań z czterema niewiadomymi:

$$\begin{aligned}
 0,0005348 A_1 + 0,0001559 A_2 &= -0,0000027, \\
 0,0001559 A_1 + 0,0005348 A_2 + 0,0001559 A_3 &= -0,0000017, \\
 0,0001559 A_2 + 0,0005348 A_3 + 0,0001559 A_4 &= 0,0000017, \\
 0,0001559 A_3 + 0,0005348 A_4 &= 0,0000027,
 \end{aligned}$$

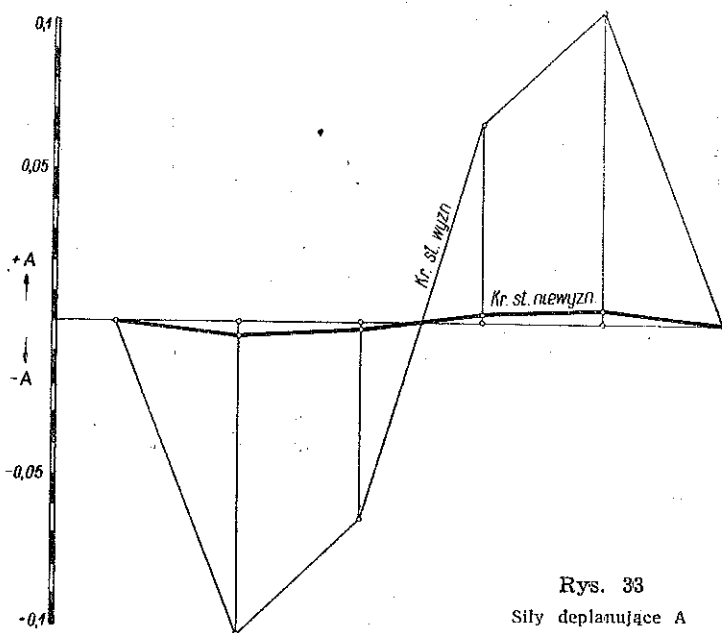
Tablica 7. Obliczenie sił jednostkowych w prętach układu statycznie niewyznaczalnego

k	1	2	3	4	5
A_k	-0,004251	-0,002737	0,002737	0,004251	0,0000
M_{ik}	0,121585	0,644541	0,967749	0,644541	0,121585
$\frac{M_{ik}}{K}$	0,000844	0,004476	0,006720	0,004476	0,000844
$\frac{F}{Ka}(A_i + A_k)$	-0,000106	-0,000175	0,0000	0,000175	0,000106
$\frac{A_k}{a}$	-0,000213	-0,000137	0,000137	0,000213	0,00000
$\frac{C_k}{c}$	-0,000737	-0,004514	-0,006857	-0,004514	-0,000737
$\frac{A_i}{a}$	0,00000	-0,000213	-0,000137	0,000137	0,000213
$\frac{C_i}{c}$	-0,000737	-0,004514	-0,006857	-0,004514	-0,00737
$\frac{B_k}{b}$	-0,000950	-0,004438	-0,006583	-0,004438	-0,000950
$\frac{B_i}{b}$	-0,000950	-0,004438	-0,006583	-0,004438	-0,000950
$W_k^{ki} A_i$	0,00000	-0,000106	-0,000068	0,000068	0,000106
$W_k^{hi} A_k$	-0,000106	-0,000068	0,000068	0,000106	0,000000
$\frac{P_{ki}^{pg}}{p}$	-0,000738	-0,004302	-0,006720	-0,004650	-0,000950
$\frac{P_{ki}^{lg}}{p}$	-0,000950	-0,004650	-0,006720	-0,004302	-0,000738
$\frac{U_{ki}^{gd}}{ugd}$	0,000950	0,004438	0,006584	0,004438	0,000950
$\frac{U_{ki}^{pl}}{u_{pl}}$	0,000738	0,004514	0,006856	0,004514	0,000738

Rozwiązanie tego układu równań daje siły deplanujące układu statycznie niewyznaczalnego: $A_1 = -0,004251$, $A_2 = -0,002737$, $A_3 = 0,002737$, $A_4 = 0,004251$.

Warto zwrócić uwagę, że przyjęcie grodzi całkowicie sztywnych spowodowało około 25 - krotne zmniejszenie się sił deplanujących w porównaniu z układem statycznie wyznaczalnym o grodziach zupełnie wiotkich.

Siły jednostkowe w prętach kratownicy statycznie niewyznaczalnej, obliczone w tabelicy 7, wskazują na znaczne wyrównanie sił w tym przypadku. Pręty słabo obciążone w układzie statycznie wyznaczalnym są silniej obciążone w układzie statycznie niewyznaczalnym, natomiast zauważyć można spadek obciążenia w prętach uprzednio najsilniej obciążonych.



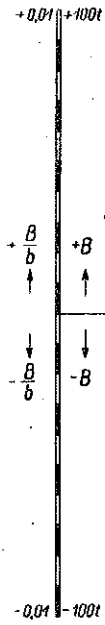
Rys. 33
Siły deplanujące A

Tabela 8 zawiera obliczenie sił w prętach płaszcza kratownicy statycznie niewyznaczalnej, zaś rysunki 33-38 przedstawiają porównanie rozkładu sił w prętach poszczególnych typów dla obu rodzajów kratownic.

Porównując wyniki dla modelu kadłuba statycznie wyznaczalnego z wynikami dla modelu kadłuba statycznie niewyznaczalnego nie należy się nimi sugerować, a tym bardziej je uogólniać. Tak np. w rozpatrywanym modelu ze sztywnymi grodziami otrzymaliśmy w ukośnicy pokładu w przedziale 2-3 niemal dwukrotnie większą siłę niż dla modelu bez gro-

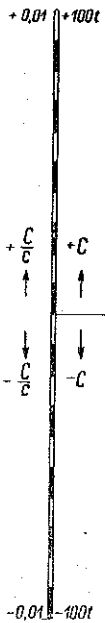
Tablica 8. Obliczenie sił całkowitych w układzie statycznie niewyznaczalnym

k	0	1	2	3	4	5
$\left\{ \begin{array}{l} C_k (M_{max}) \\ C_k t \end{array} \right\}$ Słupy	— 0,004422	— 0,027084	— 0,041142	— 0,041142	— 0,027084	— 0,004422
	— 5,970	— 36,563	— 55,542	— 55,542	— 36,563	— 5,970
$\left\{ \begin{array}{l} B_k (M_{max}) \\ B_k t_{max} \end{array} \right\}$ Poprzecznice	— 0,011400	— 0,053256	— 0,078996	— 0,078996	— 0,053256	— 0,011400
	— 15,390	— 71,896	— 106,645	— 106,645	— 71,896	— 15,390
Podłużnice						
$\left\{ \begin{array}{l} P_{ki}^{pg} (M_{max}) \\ P_{ki}^{pg} t \end{array} \right\}$ prawa górna i lewa dolna	— 0,014760	— 0,086040	— 0,134400	— 0,134400	— 0,086040	— 0,019000
	— 19,926	— 116,154	— 181,440	— 181,440	— 125,550	— 25,650
$\left\{ \begin{array}{l} P_{ki}^{lg} (M_{max}) \\ P_{ki}^{lg} t \end{array} \right\}$ lewa górna i prawa dolna	— 0,019000	— 0,093000	— 0,134400	— 0,134400	— 0,086040	— 0,014760
	— 25,650	— 125,550	— 181,440	— 181,440	— 116,154	— 19,926
Ukośnice						
$\left\{ \begin{array}{l} U_{ki}^{gd} (M_{max}) \\ U_{ki}^{gd} t \end{array} \right\}$ górne i dolne	0,022158	0,103511	0,153564	0,153564	0,103511	0,022158
	29,913	139,740	207,311	207,311	139,740	29,913
$\left\{ \begin{array}{l} U_{ki}^{pl} (M_{max}) \\ U_{ki}^{pl} t \end{array} \right\}$ prawe i lewe	0,015410	0,094255	0,143157	0,143157	0,094255	0,015410
	20,804	127,244	193,262	193,262	127,244	20,804



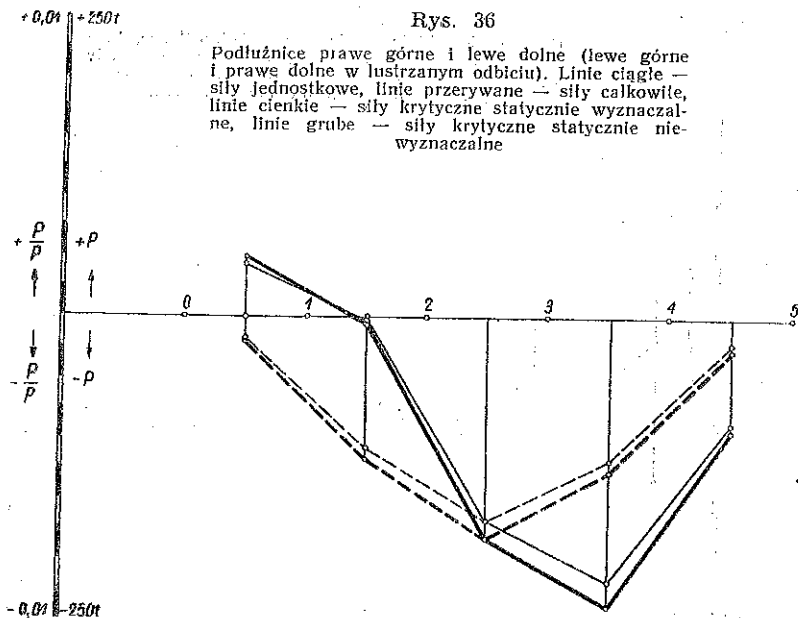
Rys. 34

Poprzecznice. Linie ciągłe — siły jednostkowe, linie przerywane — siły całkowite, linie cienkie — siły krytyczne statycznie wyznaczalne, linie grube — siły krytyczne statycznie niewyznaczalne



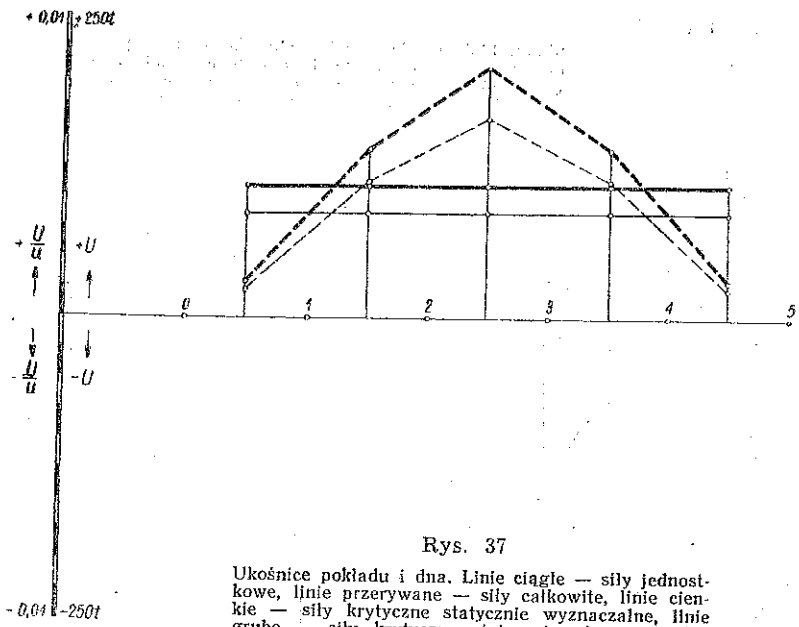
Rys. 35

Słupy. Linie ciągłe — siły jednostkowe, linie przerywane — siły całkowite, linie cienkie — siły krytyczne statycznie wyznaczalne, linie grube — siły krytyczne statycznie niewyznaczalne



Rys. 36

Podłużnice prawe górne i lewe dolne (lewe górne i prawe dolne w lustrzanym odbiciu). Linie ciągłe — siły jednostkowe, linie przerywane — siły całkowite, linie cienkie — siły krytyczne statycznie wyznaczalne, linie grube — siły krytyczne statycznie niewyznaczalne

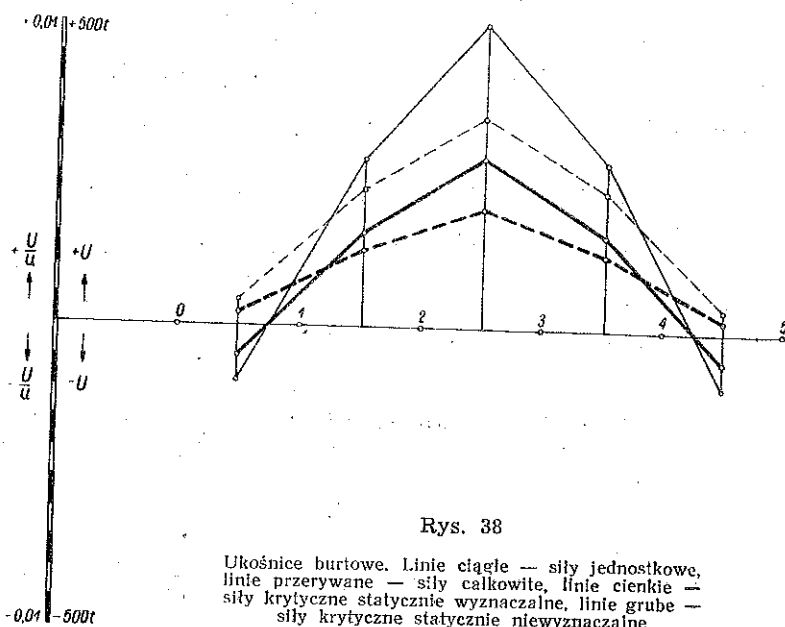


Rys. 37

Ukośnice pokładu i dna. Linie ciągłe — siły jednostkowe, linie przerywane — siły całkowite, linie cienkie — siły krytyczne statycznie wyznaczalne, linie grube — siły krytyczne statycznie niewyznaczalne

dzi. Zjawisko to nie zawsze występować będzie w analogiczny sposób w każdym kadłubie o zwiększonej sztywności grodzi.

Nie należy zapominać, że siły w prętach kratownicy przestrzennej statycznie niewyznaczalnej zależą od jej kształtów, rozkładu obciążenia oraz od sztywności prętów, a więc dla rzeczywistego kadłuba — od jego konstrukcji. Dlatego też przenoszenie otrzymanych wyników na dowolny kadłub jest niesłuszne.



Rys. 38

Ukośnice burtowe. Linie ciągłe — siły jednostkowe,
linie przerywane — siły całkowite, linie cienkie —
siły krytyczne statycznie wyznaczalne, linie grube —
siły krytyczne statycznie niewyznaczalne

Jednakże zastosowana w tej pracy metoda, użyta do kadłuba, pozwala na określenie w stosunkowo prosty sposób obciążeń działających na ramy utworzone z obramowań dużych otworów w kadłubie okrętowym.

Literatura cytowana w tekście

- [1] M. M. Fiłonienko, Borodicz i inni, *Kurs soprotiwlenija materialow*, t. 2, Moskwa-Leningrad 1950.
- [2] W. Z. Własow, *Tonkostiennyje uprugije strierzni*, Moskwa 1940.
- [3] W. Z. Własow, *Obszczaja teorija obotoczek*.
- [4] J. Nowiński, *Teoria dźwigarów cienkościennych zbieżnych*, Prace Główn. Inst. Lotn. 1951.
- [5] J. Nowiński, *Z teorii dźwigarów cienkościennych o przekroju otwartym, obciążonych równomiernie*, Rozpr. Matem. 1 (1952).
- [6] J. Rutecki, *Teoria skręcania cienkościennych profili*, Poznań-Gdańsk 1954.

- [7] J. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Warszawa 1951.
- [8] J. Naleszkiewicz, *Wytrzymałość konstrukcji lotniczych*, PZWS, 1950.
- [9] S. P. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, New-York i Londyn 1940.
- [10] H. N. Biezuchow, *Teorja uprugosti i plasticznosti*, Moskwa 1953.
- [11] N. M. Bielajew, *Kurs sorprotiwlenja materialow*, Moskwa-Leningrad 1951.
- [12] R. Kappus, *Drillknicken von Stäben mit offenem Profil*, Jahrb. 1937 deutsch. Luftfahrt, t. 14, Berlin.
- [13] J. Rutecki, *Niestateczność pręta cienkościennego o otwartym profilu z uwzględnieniem odkształcenia profilu*, Arch. Mech. Stos. 3-4 (1951).
- [14] H. Wagner, *Verdrehung und Knickung von offenen Profilen*, Gdańsk 1929.
- [15] S. N. Kani i J. G. Panowko, *Elementy stroitielnoj miechaniki tonkostiennych konstrukcij*, 1952.
- [16] B. Gorbunow i A. J. Strielbicka, *Teorja ram. iz tonkostiennych stierżniej*.
- [17] I. N. Siwierciew, *Rasczot i projektowanie korpusow sudow unutriennowo plawanja*, Rieczizdat, 1949.
- [18] H. Wagner, *Über räumliche Flugzeugfachwerke, Die Längsstabmethode*, Zeitschr. Flugt. Motorluftsch. 15 (1928).
- [19] A. Grzędzielski, *Obliczanie kadłubów kratowych*, Sprawozd. IBTL 3 (1934).
- [20] J. Mierzejewski, *Obliczanie przestrzennych kratownic dźwigowych*, praca niepubl., refer. na IV Sesji nauk. Politechn. Gd., czerwiec 1954.
- [21] H. Ebner, *Zur Berechnung räumlicher Fachwerke im Flugzeugbau*, DVL Jahrb. 1929.
- [22] A. Grzędzielski i E. Kosko, *Przykłady zastąpienia przekątni zespołem prętów w kratownicy kadłuba*, Sprawozd. IBTL 2 (1935).

Резюме

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КРУЧЕНИЯ КОРПУСА КОРАБЛЯ ПРИ КУРСЕ СКУЛОЙ К ВОЛНЕ

Рассматривается стесненное кручение стержня упрощенного сечения, обладающего однако теми же основными свойствами связности, как и корпуса существующих судов. Такие сечения приведены на рис. 1 - 14. Для упрощенных сечений приводятся величины, характеризующие сечение в отношении к «инженерной теории» стесненного кручения. Выводится уравнение стесненного кручения согласно той же теории. Получается уравнение, вид которого напоминает уравнение кручения балки открытого профиля.

В следующей главе рассматривается кручение корпуса баржи цилиндрической формы, обладающей пятью разными сечениями: двусвязным (закрытым), открытым, односвязным (с отверстием люка), в середине закрытым трехсвязным (с надстройкой), закрыто-открытым двусвязным (с отверстием люка и двойным дном) и закрытым трехсвязным (с двойным дном). Пример характеризуется отсутствием переборок. Формулы для кручения отрезков баржи легко выводятся

на основании результатов, полученных в предыдущей главе; здесь, однако, возникает новое затруднение, состоящее в таком подборе граничных условий в концевых сечениях, для которых была бы соблюдена непрерывность деформаций в этих сечениях. Чтобы преодолеть это затруднение, вводятся самоуравновешенные системы в каждом отрезке корпуса. В заключение главы составлены формулы для параметров таких самоуравновешенных систем.

В последней главе — для расчета корпуса судна — применяется метод вспомогательных пространственных ферм. Это позволяет приближенно определить напряжения в обшивке и углах отверстий люка. Рассматриваются два крайних случая: когда переборки можно считать идеально гибкими в их плоскостях, а также когда можно их считать идеально жесткими. В первом случае корпус становится статически определимой фермой, во втором — статически неопределимой, но наиболее простой в смысле производства расчета из всех статически неопределимых ферм. Оба случая представляют собой ограничения значений всех напряжений в корпусе, что является интересным дополнением расчетов предыдущей главы.

В работе приводятся элементарные методы приближенного расчета цилиндрических судов на кручение, проявляющееся при положении судна скулой к волне. Таким образом они являются основанием для дальнейших работ по приближенным, но более точным методам расчета судовых корпусов.

Числовой пример, примененный ко всем приближенным методам, является наглядной иллюстрацией методов, использованных в работе

Summary

PRELIMINARY INVESTIGATION OF TORSION OF A HULL OF A SHIP CAUSED BY AN OBLIQUE WAVE

To begin with, the problem of torsion with axial constraints of a bar of simplified cross-section is considered, the principal characteristics concerning the connectivity of cross-section being the same as for the hull of the real ship. These simplified cross-sections are shown in Figs. 1 to 14. Quantities characterizing these cross-sections for torsion with axial constraints and obtained on the basis of the «engineer's» theory are represented. Next, the equation of torsion with axial constraints is derived according to the same theory. The form of the equation obtained is similar to that of the equation of torsion of a beam with open cross-section.

In the next section the torsion of a cylindrical hull of a bark, composed of 5 segments of different cross-sections: closed doubly connected, open, simply connected (due to a hatchway), closed triply connected (the bridge-

house being in the middle portion of the hull), closed-open doubly connected (with hatchway and double bottom) and finally, closed triply connected (with a double bottom). The example is characterized by the lack of diaphragms. The formulas of torsion of different portions of the hull are simple to derive on the basis of the results of the foregoing section, but a new difficulty is encountered in the necessity of choosing the boundary conditions in such a way that the deformations be continuous in the planes where the cross-section changes. To overcome this difficulty equalizing self-equilibrating stress systems are introduced in each segment of the hull. Finally, equations for the parameters of the self-equilibrating systems are derived.

In the last section the method of substitute space lattices is used for the determination of approximate values of stresses in the skin and the corners of the hatchways. Two extreme cases are considered: (1) the diaphragms may be considered to be perfectly flexible in their planes, (2) they are assumed absolutely rigid. In the first case the hull becomes a statically determinate lattice, in the second — a statically indeterminate lattice of a special type (i. e. the most simple from the point of view of computation). The values obtained for these cases determine the limits of all stresses in the hull which is an interesting complement of the computations of the preceding section.

Some elementary methods of approximate strength computations of cylindrical vessels for torsion caused by an oblique wave are explained. These may constitute starting points for further improvements of approximate methods of strength computation in hulls of ships.

Each of the discussed approximate methods is applied to the same numerical example thus illustrating the features of each method.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 grudnia 1954 r.