

WITOLD WIERZBICKI

ANALIZA SCHEMATÓW STATYCZNYCH
KONSTRUKCJI DREWNIANYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE

XXXIII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Istota zagadnienia	389
2. Słupy stożkowe	390
3. Dźwigary wielokrotne	396
4. Układy zastrzałowe	405

1. Istota zagadnienia

Niejednorodność, a zwłaszcza anizotropia drewna jako materiału budowlanego, bądź wywołuje potrzebę stosowania przy obliczaniu naprężeń w konstrukcjach wzorów specjalnie ustawianych dla drewna, bądź też wymaga wprowadzenia przy ustalaniu naprężeń dopuszczalnych pewnych współczynników wziętych z doświadczenia. Gdy zaś chodzi o wyznaczenie wielkości statycznie niewyznaczalnych lub o wyznaczenie sił krytycznych przy wyboczeniu słupów drewnianych, rozpatrujemy drewno jako materiał podlegający prawu Hooke'a licząc się jednak wówczas ze specjalnymi warunkami pracy konstrukcji drewnianych.

Ze względu na rzeczywiste własności fizyczne i technologiczne drewna typ konstrukcji z tego materiału, a również typ wykonanych z niego elementów budowlanych, różni się od konstrukcji wykonanych z materiałów jednorodnych i izotropowych. Z tego powodu mamy tu do czynienia ze schematami statycznymi odmiennymi od występujących w tamtych wypadkach. Typowymi w tym sensie dla konstrukcji drewnianych schematami statycznymi są słupy o kształcie stożków, belki klinowane i układy zastrzałowo-rozporowe.

Analiza tych schematów obliczanych na podstawie prawa Hooke'a, lecz pod kątem widzenia rzeczywistych warunków pracy konstrukcji drewnianych, stanowi główną treść niniejszej rozprawy.

Obliczenia omówionych wyżej schematów muszą, z jednej strony, czynić zadość wymaganiom ostrożności ze względu na niedoskonałość danych materiałowych i na mniejszą zwykle niż w innych wypadkach kompetencję projektantów — z drugiej jednak dopuszczają śmiało koncepcje techniczne ze względu na stosunkową taniość materiału i krótki okres pracy konstrukcji. Te okoliczności odróżniają omawiane tu obliczenia od obliczeń konstrukcji z innych materiałów i dają podstawę do zalecanych dalej uproszczeń w obliczeniach statycznych konstrukcji z drewna.

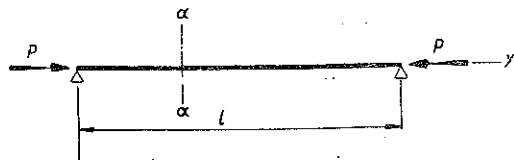
Przy opracowaniu tej rozprawy autor korzystał z następujących swoich dawniejszych publikacji:

- (1) *Wielokrotne dźwigary drewniane jako układy hiperstatyczne*, Warszawa 1931,

- (2) *Sprawa wymiarowania drewnianych mostów zastrzałowych*, Warszawa 1933,
- (3) *Sposób momentów wtórnych w zastosowaniu do wyznaczenia siły krytycznej*, Łódź 1946,
- (4) *Wyboczenie niesprężyste prętów podpartych w sposób statycznie wyznaczalny*, Warszawa 1947.

2. Słupy stożkowate

Najczęstszym przypadkiem działania sił podłużnych na elementy konstrukcyjne z drewna jest przypadek osiowego ściskania słupów stożkowatych. Dopóki siła krytyczna działająca na słupek drewniany nie wywołuje

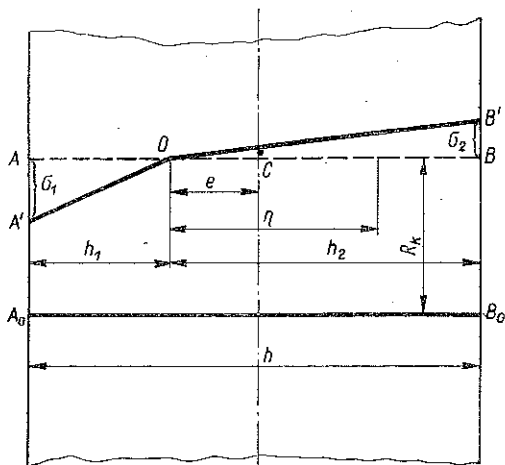


Rys. 1

w nim naprężeń krytycznych przekraczających granicę sprężystości drewna, dopóty wyboczenie słupów stożkowatych jest wyboczeniem sprężystym, do którego oceny służą wzory typu Eulerowskiego. Dopiero po przekroczeniu przez naprężenia

krytyczne granicy sprężystości drewna na ściskanie powstaje trudność rozwiązania zagadnienia siły krytycznej w słupie drewnianym. Do rozwiązania tego pomocna jest teoria K á r m á n a dotycząca wyboczenia niesprężystego, która była wprawdzie kwestionowana w szczegółach, nie wzbudza jednak istotnych zastrzeżeń i jest przejrzysta w ujęciu. Podstawy tej teorii są następujące.

Bierzemy pod uwagę pręt przyrzątkowy w dwóch punktach swobodnie podparty, ściskany siłami podłużnymi P (rys. 1). W chwili wyboczenia, kiedy oś pręta wybaczanego dopiero zaczyna się zakrzywiać, rzędne jej są tak małe, że rozkład naprężeń w poszczególnych



Rys. 2

przekrojach pręta, niezależnie od położenia w stosunku do podpór, odpowiada typowi wykresu przedstawionemu na rys 2, przy czym położenie punktu O jest we wszystkich przekrojach pręta w stosunku do krawędzi to samo.

Przyjmujemy, że w rozpatrywanym przypadku założenie płaskich przekrojów moc swoją zachowuje i oznaczamy odpowiednio przez C_1 i C_2 współczynniki proporcjonalności między odkształceniami i naprężeniami w dwóch częściach przekroju rozdzielonych punktem O . Wobec tego naprężenia spowodowane zginaniem wynoszą w poszczególnych przekrojach w odległości η od punktu O odpowiednio

$$(2.1) \quad \sigma = C_1 \frac{\eta}{\rho}$$

od strony wypukłej wygiętego pręta (między A i O) i

$$(2.2) \quad \sigma = C_2 \frac{\eta}{\rho}$$

od strony wklęsłej (między O i B).

Tu ρ oznacza promień krzywizny osi pręta przy wyboczeniu, przy czym przyjmujemy dalej, że

$$(2.3) \quad \frac{1}{\rho} = - \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Z warunków równowagi $\Sigma X = 0$ i $\Sigma M = 0$ części pręta zawartej między jedną z podpór a przekrojem aa wynika, że

$$(2.4) \quad \int_A \left(R_k + C_1 \frac{\eta}{\rho} \right) dA + \int_B \left(R_k + C_2 \frac{\eta}{\rho} \right) dA = P,$$

$$(2.5) \quad \int_A \left(R_k + C_1 \frac{\eta}{\rho} \right) \eta dA + \int_B \left(R_k + C_2 \frac{\eta}{\rho} \right) \eta dA = P(y + e),$$

skąd

$$(2.6) \quad C_1 S_A + C_2 S_B = 0$$

oraz

$$(2.7) \quad (C_1 J_A + C_2 J_B) \frac{d^2 y}{dx^2} = - P y,$$

gdzie S_A i S_B oznaczają momenty statyczne pól części przekroju, położonych na rysunku na lewo i na prawo od punktu O względem osi przechodzącej przez ten punkt prostopadle do płaszczyzny rysunku, J_A i J_B są momentami bezwładności tych samych pól, R_k naprężeniem krytycznym, e odległością punktu O od osi.

O ile wielkości C_1 i C_2 są znane, z równania (2.6) możemy wyznaczyć położenie punktu O , po czym wyznaczamy J_A i J_B oraz J , moment bezwładności pola całego przekroju poprzecznego pręta względem osi środkowej.

Wprowadzając oznaczenie

$$(2.8) \quad N = \frac{C_1 J_A + C_2 J_B}{J}$$

możemy równaniu (2.7) nadać postać

$$(2.9) \quad NJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py.$$

Ponieważ równanie (2.9) z matematycznego punktu widzenia nie różni się od równania

$$(2.10) \quad EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py,$$

z którego może być wyprowadzony wzór E u l e r a na siłę krytyczną przy wyboczeniu sprężystym pręta przedstawionego na rys. 1, tj. wzór

$$(2.11) \quad P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

musi ono doprowadzić do wzoru na siłę krytyczną

$$(2.12) \quad P_k = \frac{\pi^2 NJ}{l^2},$$

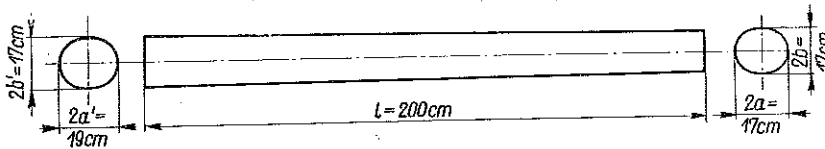
który różni się od wzoru (2.11) tylko tym, że tu wielkość N zastępuje współczynnik sprężystości E .

Spośród słupów drewnianych narażonych na wyboczenie niesprężyste najczęściej mamy do czynienia ze słupami służącymi do obudowy korytarzy w kopalniach. Słupy o takim przeznaczeniu posiadają zwykle długość zawartą w granicach od 1,8 m do 2,8 m i średnicę wahającą się w granicach od 15 cm do 30 cm. Wobec trudności wyznaczenia w sposób ogólny siły krytycznej dla słupów tego rodzaju dalsze rozważania opieramy na obliczeniu przypadku szczególnego, możliwie najbardziej miarodajnego. Za taki uważamy przypadek słupa o długości 2 m mającego kształt stożka o podstawach eliptycznych przy średnicach elipsy równych 15 cm i 17 cm w cieńszym końcu słupa i o średnicach odpowiednio równych 17 cm i 19 cm w jego grubszym końcu. Przyjmujemy, że średnice elipsy zmieniają się wzdłuż pręta w sposób liniowy (rys. 3). Końce słupów uważamy za podparte w sposób przegubowy.

Aczkolwiek dla przyjętych w ten sposób wymiarów słupa wyboczenie jest niesprężyste, wyznaczmy tu przede wszystkim siłę krytyczną w założeniu, że mamy do czynienia z wyboczeniem sprężystym. Poszukujemy więc wzoru dla siły krytycznej P_k w postaci wzoru Eulera

$$(2.13) \quad P_k = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2},$$

gdzie μ oznacza współczynnik długości.

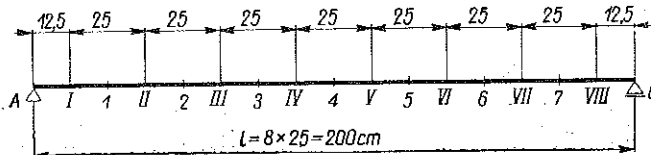


Rys. 3

W tym celu dzielimy wyżej omówiony pręt na odcinki po 25 cm (punkty podziału 1, 2, 3, ...) i obliczamy w środkach tych odcinków (punkty I, II, III, ...) najmniejsze momenty bezwładności poszczególnych elips przekroju poprzecznego (rys. 4) oraz stosunki

$$(2.14) \quad \frac{J}{J_c} = k,$$

gdzie J jest to najmniejszy moment bezwładności przekroju poprzecznego oddalonego o x od cienkiego końca pręta, a $J_c = 2820 \text{ cm}^4$ najmniejszy moment bezwładności na cienkim końcu B.

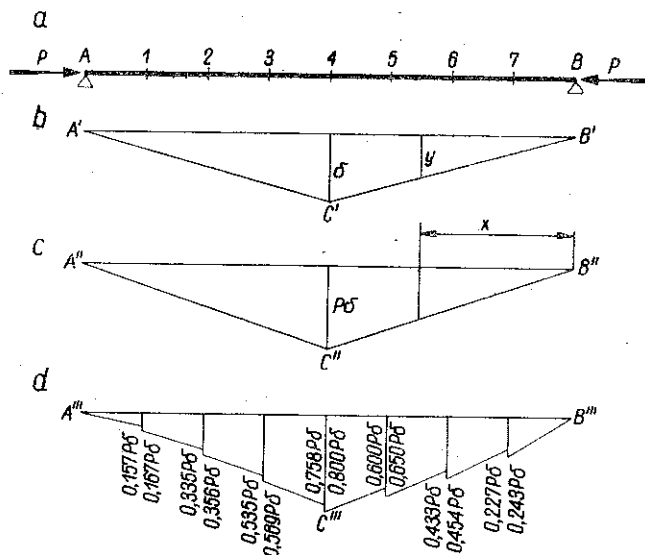


Rys. 4

Przyjmujemy jako pierwszą przybliżoną postać osi odkształconej pręta po wyboczeniu linię łamaną $A'B'C'$ (rys. 5b) o największej nieznannej rzędnej δ i sporządzamy odpowiedni wykres momentów zginających M (rys. 5c). Rzędne wykresu na rys. 5c zmieniamy w punktach 1, 2, 3, ... w stosunku 1 : k (rys. 5d) i przyjmujemy otrzymany w ten sposób wykres za wykres jednostkowego obciążenia wtórnego pręta $q = M : k$. Dla ob-

ciężenia q znajdujemy moment zginający w środku pręta (moment wtórny M_{sr}) i dochodzimy w ten sposób do nowego wyrażenia na ugięcie pręta w środku po wyboczeniu

$$(2.15) \quad y_{sr} = \frac{M_{sr}}{E J_c}.$$



Rys. 5

Przyjmujemy dalej jako drugą postać odkształconej osi pręta po wyboczeniu sinusoidę o największej rzędnej y_{sr}

$$(2.16) \quad y = y_{sr} \sin \frac{\pi k}{l}.$$

Przyrównując do siebie średnią rzędną osi odkształconej pierwszego przybliżenia do średniej rzędnej osi drugiego przybliżenia, czyli przyrównując do siebie pole $A'B'C'$ i pole ograniczone krzywą (2.16), dochodzimy do następującego wzoru na siłę krytyczną rozpatrywanego pręta:

$$(2.17) \quad P_k = \frac{\pi^2 E J_c}{(0,92 l)^2}.$$

Przechodząc do niesprężystego wyboczenia słupów drewnianych opieramy się na wzorze doświadczalnym Tetmajera-Jasińskiego, który dla drewna wszelkich gatunków przybiera postać

$$(2.18) \quad P_k = A(293 - 1,94 \lambda),$$

gdzie A oznacza pole przekroju poprzecznego ściskanego słupa pryzmatycznego, a λ jego smukłość.

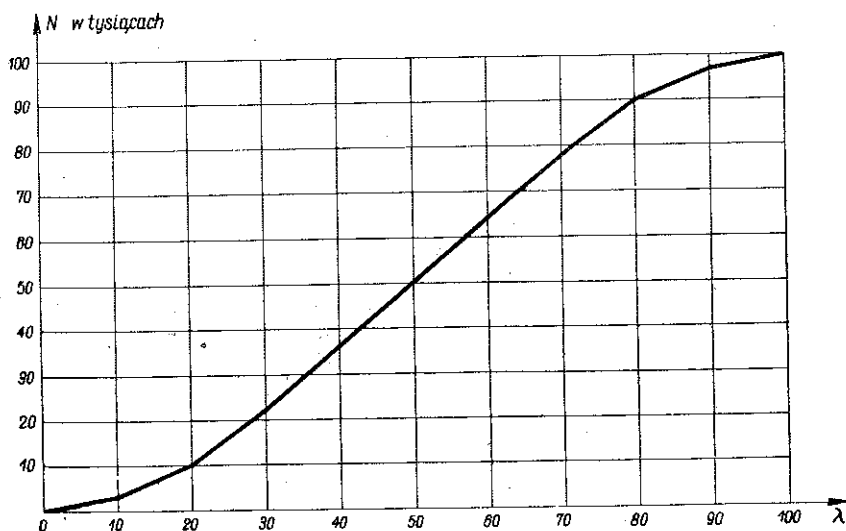
Aby wyzyskać materiał doświadczalny, zawarty we wzorze (2.18) do obliczenia siły krytycznej ze wzorów typu (2.12), ustalamy wartości współczynnika N drogą przyrównania do siebie sił krytycznych obliczonych ze wzorów (2.12), a więc z równania

$$(2.19) \quad A(a - b\lambda) = \frac{\pi^2 NJ}{l^2},$$

skąd

$$(2.20) \quad N = \frac{\lambda^2}{\pi^2} (a - b\lambda).$$

Wyniki obliczeń przedstawione są na wykresie rys. 6 i w tabelicy 1, gdzie wielkości N wyrażone są w kilogramach na cm^2 .



Rys. 6

Wracając do wyznaczenia siły krytycznej w przypadku niesprężystego wyboczenia słupa drewnianego stożkowatego ustalamy, że według wzorów (2.11) i (2.17) stosunek siły krytycznej pręta stożkowatego o podstawie eliptycznej i słupa walcowatego o tej samej podstawie wynosi

$$(2.21) \quad \frac{P_k}{P_k^w} = \frac{1}{0,84}.$$

Ze względu na słabą zmienność przekrojów słupów drewnianych możemy stosować tu bez zastrzeżeń zarówno równanie (2.10) jak i równanie (2.9), a ze względu na matematyczną identyczność tych równań możemy uważać zależność (2.21) za słuszną nie tylko dla słupów sprężystych, lecz i dla niesprężystych.

Tablica 1

λ	N	λ	N
10	2 772	60	64 413
20	10 301	70	78 042
30	21 410	80	89 353
40	34 917	90	97 167
50	49 645	100	100 303

Ponieważ smukłość omawianego słupa walcowatego o podstawie eliptycznej wynosi w danym wypadku

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{J:A}} = 53,3,$$

znajdujemy z tablicy lub z wykresu odpowiednią wartość $N = 54 515$.

Stosując wzór (2.12) na siłę krytyczną dla wyboczenia niesprężystego słupa walcowatego o podstawie eliptycznej znajdziemy

$$(2.22) \quad P_k = \frac{\pi^2 N J}{l^2} = \frac{\pi^2 54 515 \cdot 2820}{200^2} = 38 \text{ t,}$$

skąd dla słupa stożkowatego na podstawie wzoru (2.21) znajdujemy

$$(2.23) \quad P_k = \frac{38}{0,84} = 45,2 \text{ t.}$$

Możemy obliczyć siłę krytyczną w tym ostatnim wypadku również bezpośrednio ze wzoru (2.17) wstawiając N zamiast E :

$$(2.24) \quad P_k = \frac{\pi^2 54 515 \cdot 2820}{(0,92 \cdot 200)^2} = 45,2 \text{ t.}$$

Sposób użyty przy wyprowadzeniu wzoru (2.17) może być zastosowany dla dowolnych wymiarów słupa ściskanego, a więc może być wyzyskany i w przypadku słupów podlegających wyboczeniu sprężystemu.

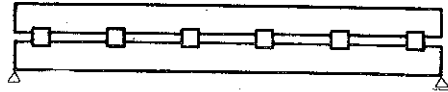
3. Dźwigary wielokrotne

Typowym dla konstrukcji drewnianych schematem belki zginanej jest dźwigar wielokrotny. Powstaje on w drodze nakładania na siebie szeregu belek z drewna kantowego lub okrągłego. Poszczególne belki dźwigara wielokrotnego bądź położone są bezpośrednio jedna na drugiej, bądź też za pośrednictwem klinów.

Kliny łączące poszczególne belki dźwigara wielokrotnego mają dwójakie znaczenie: służą one, mianowicie, albo do uniemożliwienia przesuwania

nia się po sobie poszczególnych belek dźwigara i do wytworzenia z nich w ten sposób dźwigara, który by można, z pewnymi zresztą zastrzeżeniami, uważać za dźwigar jednolity, albo też do wytworzenia wolnej przestrzeni między poszczególnymi belkami dźwigara dla zabezpieczenia im potrzebnego przewiewu i zapobieżenia w ten sposób gniciu drewna (rys. 7).

Kliny wykonane w ten sposób, iż mogą zabezpieczyć dźwigarowi złożonemu niezmiennosc płaskiego przekroju poprzecznego, powodują znaczne koszty i wymagają stałej konserwacji. Niewielkie nawet niedokładności w działaniu takich klinów, wywołane niepoprawnym wykonaniem lub zużyciem, powodują przesuwanie się po sobie poszczególnych belek dźwi-



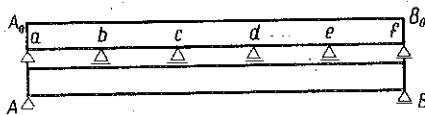
Rys. 7

gara i nie pozwalają go już uważać za jednolity. Poza tym w dźwigarach silnie obciążonych już samo rozmieszczenie klinów natrafia na trudności z powodu powstających w nich wielkich sił ścinających.

W ten sposób celowość zastosowania dźwigarów wielokrotnych, pracujących jako jednolite, staje się w wielu wypadkach wątpliwa i dlatego w budowlach bardziej odpowiedzialnych właściwsze jest rozpatrywać belki dźwigara jako pracujące samodzielnie, a kliny uważać jedynie za urządzenia zabezpieczające przed szkodliwym ze względu na trwałość konstrukcji drewnianej bezpośrednim stykaniem się poszczególnych belek na całej ich długości. Kliny mające takie przeznaczenie mogą dopuszczać wzajemne przesuwanie się belek, a rozstaw ich jest przeważnie równomierny.

Podstawowym schematem statycznym dźwigara wielokrotnego, np. podwójnego o klinach mogących się przesuwać, jest więc belka ciągła na podporach a, b, c itd. spoczywających na drugiej belce sprężystej w dwóch punktach swobodnie podpartej (rys. 8).

W utartych obliczeniach dźwigarów wielokrotnych niejednorodnych przyjmujemy zwykle, że moment zginający rozkłada się między poszczególne belki proporcjonalnie do wskaźników wytrzymałości przekrojów poprzecznych poszczególnych belek, a więc przy tych samych przekrojach belek przypada w jednakowych częściach na każdą z nich. Dalej wykaże-



Rys. 8

my, że rozkład momentu zginającego pomiędzy poszczególne belki dźwigara jest inny i że wobec tego naprężenia w belkach dźwigara mogą być znacznie większe, niżby to wynikało z powyższego układu.

Punktem wyjścia do rozważań nad rozkładem momentów zginających między poszczególne belki dźwigara wielokrotnego o klinach przesu-

nych lub bez klinów są doświadczenia, które miały zresztą za cel raczej ustalenie jakościowej niż ilościowej strony zjawiska. Chodziło mianowicie o przekonanie się, czy w przypadku podwójnego dźwigara drewnianego nieklinowanego poszczególne belki jego nie znajdują się jednak w warunkach pod względem wytrzymałościowym korzystniejszych niż dwie belki obok siebie położone. Jako przyczynę oczekiwanego faktu brano pod uwagę tarcie między poszczególnymi belkami dźwigara, pewnego rodzaju wgniatanie się ich jedna w drugą itd.

Doświadczenie wykonano w sposób następujący.

Beleczki o długości wynoszącej w świetle między podporami cylindrycznymi 600 mm obciążano w środku naczyniem z wodą przy temperaturze 4°. Przekrój poprzeczny beleczek drewnianych miał kształt kwadratu o wymiarach 15 mm × 15 mm. Beleczki były wykonane z drewna skrupulatnie dobranego, bez sęków.

Złamano przede wszystkim 3 beleczki pojedyncze, przy czym średnia siła łamiąca wynosiła 19,5 kG (kilogramów), następnie łamano po dwie beleczki położone obok siebie, co dawało średnią siłę łamiącą 38,9 kG.

Wreszcie przystąpiono do łamania beleczek ułożonych jedna na drugiej po dwie, przy czym w dwóch wypadkach układano beleczki bezpośrednio jedna na drugiej, w trzech zaś układano je za pośrednictwem kawałków grubego drutu, mających za zadanie usunięcie bezpośredniego stykania się beleczek na całej ich długości, odgrywających więc w ten sposób rolę przesuwnych klinów.

Siła łamiąca wyniosła w pierwszych dwóch wypadkach 39,1 kG oraz 39,3 kG, w trzech zaś następnych odpowiednio 38,1 kG, 38,3 kG i 38,8 kG, przy czym w tych ostatnich wypadkach zawsze jako pierwsza pękała beleczka górna.

Opisane doświadczenia, aczkolwiek wykonywane niezbyt dokładnie oraz w małej liczbie, nasuwają jednak pewne wnioski, które narzucają się w sposób dość wyraźny.

Przede wszystkim więc wytrzymałość dwóch beleczek położonych bezpośrednio jedna na drugiej mało różni się od wytrzymałości takich samych beleczek położonych obok siebie, co należy zapewne wytłumaczyć faktem, że tarcie między beleczkami było małe zarówno ze względu na ich staranne wyheblowanie, jak i wskutek zwilżenia ich wodą.

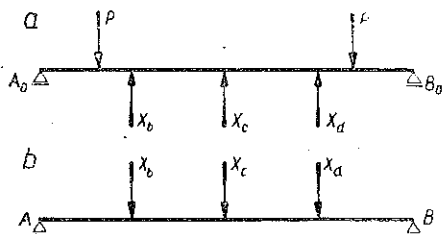
Następnie wytrzymałość dwóch beleczek położonych jedna na drugiej za pośrednictwem podpórek (drutów) jest na ogół cokolwiek mniejsza od wytrzymałości beleczek położonych obok siebie, co można wytłumaczyć tym, że moment zginający nie rozkłada się równomiernie między obie beleczki i że ta z nich, na którą przypada więcej niż połowa momentu, łamie się prędzej i wywołuje w ten sposób zniszczenie dźwigara mniejszą

siłą niż przy bardziej równomiernym rozkładzie momentu zginającego na beleczki położone obok siebie.

Dalsze obliczenia oparte są na wskazówkach ustalonych na podstawie doświadczenia. Dotyczą one dźwigarów wielokrotnych o klinach przesuwnych.

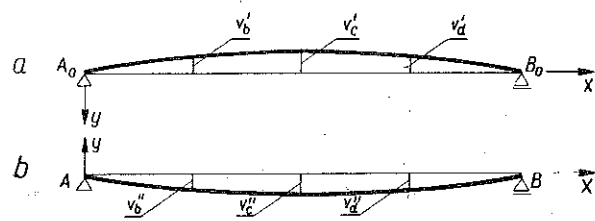
Statycznie wyznaczalny schemat zastępczy dźwigara wielokrotnego przyjmujemy w sposób następujący.

Odrzucamy podpory pośrednie b, c, d, \dots (rys. 8) i zastępujemy działanie ich na dolną i górną belkę dźwigara przez siły wzajemnego oddziaływania na siebie tych belek X_b, X_c, X_d, \dots (rys. 9). Uważamy, że belki są nieściśliwe w kierunku działania sił zewnętrznych i że wobec tego osie ich można uważać za równoległe do krzywizny również i po ich odkształceniu. Przesunięcia pionowe punktów b, c, d, \dots zarówno górnej AB , jak i dolnej $A_0 B_0$ belki dźwigara oznaczone są na rys. 10 literami v .



Rys. 9

Ponieważ w rzeczywistości w punktach podpór b, c, d, \dots odległości pionowe osi obydwóch belek (tzn. prostopadłe do osi belki) nie mogą wskutek przyjętych założeń i wobec nieodkształcalności klinów ulec zmianie, dochodzimy więc do równań



Rys. 10

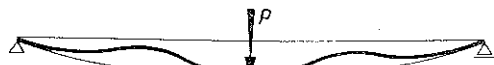
przyjętych założeń i wobec nieodkształcalności klinów ulec zmianie, dochodzimy więc do równań

$$(3.1) \begin{cases} v'_b + v''_b = 0, \\ v'_c + v''_c = 0, \\ v'_d + v''_d = 0, \dots \end{cases}$$

gdzie przesunięcia (ugięcia) pionowe belek AB i $A_0 B_0$ wyobrażamy sobie jako funkcje sił $X_b, X_c, X_d \dots$ i oznaczamy odpowiednio przez v' i v'' .

W przypadku przylegania górnej belki do dolnej na całej jej długości liczba równań (3.1) staje się nieskończonością. Całkowite przyleganie obu belek byłoby jednak możliwe tylko w tym wypadku, gdyby były one ze sobą połączone w ten sposób, żeby nie mogły się oddzielać.

Ponieważ jednak śruby dźwigara wielokrotnego takiego połączenia nie zabezpieczają, powstają więc w belce górnej odcinki oddzielające się od belki dolnej (rys. 11). Obliczenie długości tych odcinków natrafia na duże trudności.



Rys. 11

W dźwigarach klinowanych nie natrafiamy na podobne trudności, gdyż w tym wypadku łatwo możemy doprowadzić do tego, aby poszczególne belki dźwigara, dotykające się wzajemnie tylko w miejscach klinów, były zabezpieczone przed oddzieleniem się od siebie. Ograniczymy się do zbadania rozkładu momentów zginających między belki dźwigara wielokrotnego tylko w tych warunkach.

Wyznaczenie sił X w dźwigarze wielokrotnym klinowanym odbywa się na podstawie równań (3.1), w których przesunięcia v są funkcjami sił X . Przedstawienie przesunięć v w postaci funkcji X stanowi główną trudność rachunkową zadania, którą przewyżczamy stosując przybliżoną metodę wariacyjną R i t z a i T i m o s z e n k i.

Przesunięciom v'' dolnej belki AB dźwigara (rys. 10) w punktach pod klinami b, c, d, \dots nadajemy postać

$$(3.2) \quad \begin{cases} v''_b = -X_b \delta_b^b - X_c \delta_b^c - X_d \delta_b^d \dots, \\ v''_c = -X_b \delta_c^b - X_c \delta_c^c - X_d \delta_c^d \dots, \\ v''_d = -X_b \delta_d^b - X_c \delta_d^c - X_d \delta_d^d \dots, \\ \dots \end{cases}$$

gdzie symbol δ_b^c oznacza np. ugięcie spowodowane w punkcie b przez siłę 1 zaczepioną w punkcie c .

Jeżeli oznaczymy przez v_b, v_c, v_d, \dots ugięcia górnej belki A_0B_0 dźwigara pod działaniem sił zewnętrznych bezpośrednio zaczepionych P , wówczas dla całkowitych przesunięć pionowych tej belki w miejscach klinów znajdziemy wzory

$$(3.3) \quad \begin{cases} v'_b = v_b - X_b \delta_b^b - X_c \delta_b^c - X_d \delta_b^d \dots, \\ v'_c = v_c - X_b \delta_c^b - X_c \delta_c^c - X_d \delta_c^d \dots, \\ v'_d = v_d - X_b \delta_d^b - X_c \delta_d^c - X_d \delta_d^d \dots \end{cases}$$

W związku z wyrażeniami (3.2) i (3.3) równania (3.1) przybierają postać kanoniczną

$$(3.4) \quad \begin{cases} X_b \delta_b^b + X_c \delta_b^c + X_d \delta_b^d \dots = \frac{v_b}{2}, \\ X_b \delta_c^b + X_c \delta_c^c + X_d \delta_c^d \dots = \frac{v_c}{2}, \\ X_b \delta_d^b + X_c \delta_d^c + X_d \delta_d^d \dots = \frac{v_d}{2}, \\ \dots \end{cases}$$

Stosując dalej sposób Ritz'a i Timoszenki będziemy poszukiwali odkształconej górnej belki A_0B_0 pod postacią sumy sinusoid

$$(3.5) \quad y = \sum_1^n A_i \sin \frac{i\pi x}{l},$$

odkształconej zaś dolnej belki AB pod postacią

$$(3.6) \quad y = \sum_1^n A'_i \sin \frac{i\pi x}{l},$$

gdzie n oznacza liczbę przyjętych w obliczeniu sinusoid i przedstawia liczbę tym większą, im większa jest wymagana dokładność obliczenia. W razie symetrycznego obciążenia belki odkształcona jej będzie również symetryczna względem środka, wobec czego przyjmujemy dla i tylko liczby nieparzyste 1, 3, 5, ... Odległości x odmierzamy od lewej podpory dźwigara.

Do obliczenia energii sprężystej belek korzystamy z równania

$$(3.7) \quad V = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ} = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx,$$

gdzie M_x oznacza moment zginający w danym przekroju belki, a y'' drugą pochodną ugięcia y . Stąd otrzymujemy dla energii sprężystej górnej i dolnej belki dźwigara odpowiednio

$$(3.8) \quad V' = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_1^n i^4 A_i^2,$$

$$(3.9) \quad V'' = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_1^n i^4 A_i'^2.$$

Dla pracy sił X , które możemy uważać za zewnętrzne w stosunku do belek A_0B_0 i AB , znajdujemy odpowiednio wyrażenia

$$(3.10) \quad T' = \sum_1^m P_j \sum_1^n A_i \sin \frac{i\pi x_j}{l} - \sum_1^s X_g \sum_1^n A_i \sin \frac{i\pi a_g}{l},$$

$$(3.11) \quad T'' = - \sum_1^s X_g \sum_1^n A_i \sin \frac{i\pi a_g}{l},$$

w których P_j oznacza jedną z sił zaczepionych w liczbie m do dźwigara wielokrotnego, x_j odległość tej siły od lewej podpory dźwigara, X_g jedną z sił wzajemnego oddziaływania na siebie belek dźwigara, α_g odległość punktów zaczepienia tych sił od lewej podpory dźwigara i s liczbę klinów.

Znajdujemy dalej różnicę między energią sprężystą V a pracą sił zewnętrżnych

$$(3.12) \quad U = V - T$$

i przyrównując do zera pochodne funkcji U względem parametrów A , czyli ustawiając równania typu

$$(3.13) \quad \frac{\partial U}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial A_2} = 0, \quad \dots,$$

obliczamy z nich wszystkie potrzebne wielkości A'_i i A''_i :

$$(3.14) \quad A'_i = \frac{2l^3}{EJ\pi^4 i^4} \left(\sum_1^m P_j \sin \frac{i\pi x_j}{l} - \sum_1^s X_g \sin \frac{i\pi \alpha_g}{l} \right),$$

$$(3.15) \quad A''_i = - \frac{2l^3}{EJ\pi^4 i^4} \sum_1^s X_g \sin \frac{i\pi \alpha_g}{l}.$$

Wstawiamy wyrażenia (3.14) i (3.15) w równania (3.5) i (3.6):

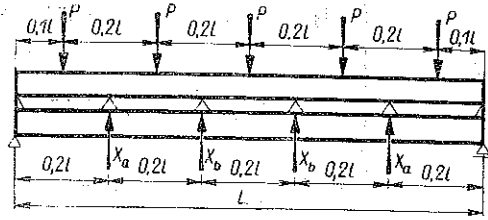
$$(3.16) \quad y = \sum_1^n \left[\frac{2l^3}{EJ\pi^4 i^4} \left(\sum_1^m P_j \sin \frac{i\pi x_j}{l} - \sum_1^s X_g \sin \frac{i\pi \alpha_g}{l} \right) \right] \sin \frac{i\pi x}{l},$$

$$(3.17) \quad y = - \sum_1^n \left(\frac{2l^3}{EJ\pi^4 i^4} \sum_1^s X_g \sin \frac{i\pi \alpha_g}{l} \right) \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Aby otrzymać stąd przesunięcia v'_b i v''_b , należy np. wstawić we wzory (3.16) i (3.17) $x = a_b$, gdzie a_b oznacza odległość klina b od lewej podpory dźwigara; w podobny sposób dochodzimy do wyrażeń dla v'_c, v''_c, v'_d, v''_d itd. W związku z tym równania układu (3.1) przybierają postać

$$(3.18) \quad \begin{cases} \sum_1^n \left(\sum_1^m P_j \sin \frac{i\pi x_j}{l} - 2 \sum_1^s X_g \sin \frac{i\pi \alpha_g}{l} \right) \sin \frac{i\pi a_b}{l} = 0, \\ \sum_1^n \left(\sum_1^m P_j \sin \frac{i\pi x_j}{l} - 2 \sum_1^s X_g \sin \frac{i\pi \alpha_g}{l} \right) \sin \frac{i\pi a_c}{l} = 0, \\ \sum_1^n \left(\sum_1^m P_j \sin \frac{i\pi x_j}{l} - 2 \sum_1^s X_g \sin \frac{i\pi \alpha_g}{l} \right) \sin \frac{i\pi a_d}{l} = 0, \\ \dots \end{cases}$$

Bierzemy jako przykład obliczenie dźwigara przedstawionego na rys. 12. Dźwigar ten jest obciążony symetrycznie siłami zaczepionymi w odległości $0,2l$ jedna od drugiej, przy czym kliny dźwigara rozstawione są również w odległości $0,2l$ od siebie. Sztywność belki EJ jest taka sama dla obydwóch belek dźwigara.



Rys. 12

Przyjmujemy dla osi odkształconej górnej belki dźwigara postać

$$(3.19) \quad y = A'_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A'_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + A'_5 \sin \frac{5\pi x}{l} + A'_7 \sin \frac{7\pi x}{l},$$

dla dolnej zaś postać

$$(3.20) \quad y = A''_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A''_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + A''_5 \sin \frac{5\pi x}{l} + A''_7 \sin \frac{7\pi x}{l}.$$

Energia sprężysta nagromadzona w obydwóch belkach dźwigara wyraża się w tych warunkach wzorami:

$$(3.21) \quad V' = \frac{EJ \pi^4}{4 l^3} (A'^2_1 + 3^4 A'^2_3 + 5^4 A'^2_5 + 7^4 A'^2_7),$$

$$(3.22) \quad V'' = \frac{EJ \pi^4}{4 l^3} (A''^2_1 + 3^4 A''^2_3 + 5^4 A''^2_5 + 7^4 A''^2_7).$$

Dla pracy sił P i X zaczepionych do górnej belki i dla pracy sił X zaczepionych do dolnej belki znajdujemy odpowiednio wyrażenia:

$$(3.23) \quad T' = 2P(A'_1 \sin 0,1\pi + A'_3 \sin 0,3\pi + A'_5 \sin 0,5\pi + A'_7 \sin 0,7\pi) + \\ + 2P(A'_1 \sin 0,3\pi + A'_3 \sin 0,9\pi + A'_5 \sin 1,5\pi + A'_7 \sin 2,1\pi) + \\ + P(A'_1 \sin 0,5\pi + A'_3 \sin 1,5\pi + A'_5 \sin 2,5\pi + A'_7 \sin 3,5\pi) - \\ - X_1(A'_1 \sin 0,2\pi + A'_3 \sin 0,6\pi + A'_5 \sin 1,0\pi + A'_7 \sin 1,4\pi) - \\ - X_2(A'_1 \sin 0,4\pi + A'_3 \sin 1,2\pi + A'_5 \sin 2,0\pi + A'_7 \sin 2,8\pi),$$

$$(3.24) \quad T'' = -X_1(A'_1 \sin 0,2\pi + A'_3 \sin 0,6\pi + A'_5 \sin 1,0\pi + A'_7 \sin 1,4\pi) - \\ - X_2(A'_1 \sin 0,4\pi + A'_3 \sin 1,2\pi + A'_5 \sin 2,0\pi + A'_7 \sin 2,8\pi).$$

Ze wzorów (3.14) i (3.15) obliczamy współczynniki A :

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{aligned} A'_1 &= \frac{2l^3}{EJ\pi^4} (1,61804 P - 0,58779 X_a - 0,95106 X_b), \\ A'_3 &= \frac{2l^3}{81 EJ\pi^4} (0,61804 P - 0,95106 X_a - 0,58779 X_b), \\ A'_5 &= \frac{2l^3}{625 EJ\pi^4} 0,5 P, \\ A'_7 &= \frac{2l^3}{2401 EJ\pi^4} (0,61804 P + 0,95106 X_a - 0,58779 X_b), \\ A''_1 &= \frac{2l^3}{EJ\pi^4} (-0,58779 X_a - 0,95106 X_b), \\ A''_3 &= \frac{2l^3}{81 EJ\pi^4} (-0,95106 X_a + 0,58779 X_b), \\ A''_5 &= 0, \\ A''_7 &= \frac{2l^3}{2401 EJ\pi^4} (0,95106 X_a - 0,58779 X_b). \end{aligned} \right.$$

Zakładając kolejno $\alpha_g = 0,2 l$ i $\alpha_g = 0,4 l$ oraz biorąc pod uwagę, że x_j przybiera tu wartości $0,1 l$, $0,3 l$ i $0,5 l$ ustawiamy równania typu (3.18):

$$(3.26) \quad (1,61804 P - 2 \cdot 0,58779 X_a - 2 \cdot 0,95106 X_b) \sin 36^\circ + \\ + (0,61804 P - 2 \cdot 0,95106 X_a + 2 \cdot 0,58779 X_b) \frac{\sin 72^\circ}{81} + \\ + (-0,61804 P - 2 \cdot 0,95106 X_a + 2 \cdot 0,58779 X_b) \frac{\sin 72^\circ}{2401} = 0,$$

$$(3.27) \quad (1,61804 P - 2 \cdot 0,58779 X_a - 2 \cdot 0,95106 X_b) \sin 72^\circ - \\ - (0,61804 P - 2 \cdot 0,95106 X_a + 2 \cdot 0,58779 X_b) \frac{\sin 36^\circ}{81} + \\ + (-0,61804 P - 2 \cdot 0,95106 X_a + 2 \cdot 0,58779 X_b) \frac{\sin 72^\circ}{2401} = 0,$$

czyli równania:

$$(3.28) \quad 0,71331 X_a + 1,10378 X_b - 0,95808 P = 0,$$

$$(3.29) \quad 1,10378 X_a + 1,81786 X_b - 1,53451 P = 0.$$

Z równań tych znajdujemy następujące wartości sił X wzajemnego oddziaływania na siebie górnej i dolnej belki dźwigara wielokrotnego:

$$(3.30) \quad X_a = 0,610 P, \quad X_b = 0,473 P.$$

Reakcja na podporze A górnej belki dźwigara równa się wobec tego

$$(3.31) \quad R_A^g = \frac{5P}{2} - 0,610 P - 0,473 P = 1,42 P,$$

dolnej zaś

$$(3.32) \quad R_A^d = 0,610 P + 0,473 P = 1,08 P.$$

Moment zginający w środku całego dźwigara i odpowiednie momenty zginające w górnej i dolnej belce wynoszą w tych warunkach:

$$(3.33) \quad M_{sr} = \frac{5P}{2} \cdot 0,5 l - P \cdot 0,4 l - P \cdot 0,2 l = 0,65 Pl,$$

$$(3.34) \quad M_{sr}^g = 1,42 P \cdot 0,5 l - P \cdot 0,4 l + 0,61 P \cdot 0,3 l - \\ - P \cdot 0,2 l + 0,47 P \cdot 0,1 l = 0,34 Pl,$$

$$(3.35) \quad M_{sr}^d = 1,08 P \cdot 0,5 l - 0,61 P \cdot 0,3 l - 0,47 P \cdot 0,1 l = 0,31 Pl,$$

skąd wynika, że moment M_{sr}^g większy jest od momentu M_{sr}^d o 10%. Dla innych przekrojów dźwigara różnica między momentem zginającym w górnej i dolnej belce dochodzi do 30%.

W ten sposób wynik obliczeń statycznych potwierdza spostrzeżenia zdobyte drogą doświadczeń.

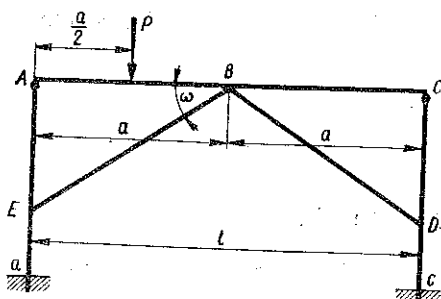
Fakt, że w dźwigarze wielokrotnym naprężenia zginające wypadają w górnej belce większe niż w dolnej w tym samym przekroju poprzecznym obydwóch belek, wskazuje na celowość umieszczenia gorszych pod względem gatunku drewna belek w dolnym piętrze dźwigara wielokrotnego, a lepszych w górnym.

4. Układy zastrzałowe

Konstrukcje rozporowe, a więc konstrukcje podlegające w zasadzie jednoczesnemu zginaniu i ściskaniu, są reprezentowane wśród konstrukcji z drewna przez układy zastrzałowe. Spośród układów zastrzałowych mają najczęstsze zastosowanie w budownictwie układy jednozastrzałowe, czyli trójkątno-zastrzałowe. Bardziej skomplikowane układy zastrzałowe znajdują zastosowanie tylko w przypadkach, gdy mamy zapewniony bardzo dobry materiał drzewny i dobrą robociznę.

Aby móc mówić o możliwych uproszczeniach w obliczeniu konstrukcji zastrzałowych, należy się zastanowić nad schematem ścisłego obliczenia układu zastrzałowego.

Na rysunku 13 proste aA i cC oznaczają słupy układu zastrzałowego, AC belkę główną, a EB i BD zastrzały.



Rys. 13

Przyjmujemy, że zastrzały podtrzymujące belkę główną układu w punkcie B są rozmieszczone względem tego punktu w sposób symetryczny. Ze względu na właściwości połączeń drewnianych nie możemy uważać połączeń w punktach B , E i D za sztywne, wobec czego zakładamy tu istnienie przegubów.

O ile belka główna ma położenie poziome, to pionowe obciążenie jej wywołuje w obu zastrzałach siły równe

$$(4.1) \quad S = \frac{R_B}{2 \sin \omega},$$

gdzie R_B oznacza reakcję belki głównej w punkcie zbiegania się zastrzałów.

Siły S działające w zastrzałach powodują ich skróty równe

$$(4.2) \quad \Delta s = \frac{R_B s}{2 E A \sin \omega},$$

gdzie s oznacza długość zastrzału, A pole jego przekroju poprzecznego, E zaś współczynnik sprężystości drewna przy ściskaniu.

W związku ze skrótem (4.2) punkt B doznaje pionowego przesunięcia

$$(4.3) \quad v_B = \frac{\Delta s}{\sin \omega} = \frac{R_B s}{2 E A \sin^2 \omega}.$$

Belkę główną układu AC możemy rozpatrywać jako belkę swobodnie podpartą w punktach A i C i obciążoną poza ciężarami znajdującymi się na belce AC jeszcze siłą R_B , zaczepioną w jej środku i skierowaną ku górze. Ugięcie w punkcie B tej belki wyniesie

$$(4.4) \quad y_B = y_0 - \frac{R_B l^3}{48 E J},$$

gdzie y_0 oznacza ugięcie, jakiego doznałaby w punkcie B belka swobodnie podparta w dwóch punktach A i C , gdyby na nią działały tylko

ciężary znajdujące się na belce, drugi zaś dodajnik prawej części równania (4.4) dotyczy zginania belki AC siłą R_B .

Również i po odkształceniu układu między zastrzałami a belką główną przerwy być nie może, wobec czego pionowe przesunięcie się punktu przecięcia zastrzałów musi być równe ugięciu w środku belki, skąd mamy zależność

$$(4.5) \quad v_B = y_B,$$

która doprowadza do wyrażenia

$$(4.6) \quad R_B = \frac{y_0}{\frac{s}{2AE \sin^2 \omega} + \frac{l^3}{48EJ}}$$

Wyrażenie to uwzględnia wpływ sprężysty skrótu zastrzałów na wielkość R_B i wobec tego traci sens dla zastrzałów nie ulegających skrótowni, gdyż wówczas mamy do czynienia z belką ciągłą na podporach sztywnych. Wyrażenie to nie uwzględnia, jak widać, niesprężystego przesunięcia pionowego punktu B .

Mówiąc o obliczaniu belek konstrukcji zastrzałowych przyjmujemy, że skrajne punkty układu A i C podparte słupami nie ulegają pionowym przesunięciom ani sprężystym, ani też trwałym. Założenie to nie jest na ogół dalekie od rzeczywistości; gdybyśmy jednak pionowe przesunięcie punktów A i C chcieli w obliczeniu uwzględnić, to otrzymalibyśmy, jak tego dowodzą obliczenia, różnicę w reakcji R_B dochodzącą do 13%.

Po wyznaczeniu reakcji R_B ze wzoru (4.6) dalsze sprawdzenie wymiarów głównej belki układu odbywa się na podstawie momentu zginającego, obliczonego ze wzoru

$$(4.7) \quad M_x = M_{0,x} - \frac{R_B}{2} x,$$

gdzie x oznacza odległość pewnego przekroju belki AC od podpory A , $M_{0,x}$ zaś moment zginający, który by w tym przekroju miał miejsce, gdyby belka była swobodnie podparta w punktach A i C .

Wpływ sprężystego skrótu zastrzałów EB i BD na wielkość reakcji R_B jest niewielki, nie dochodzi zwykle do 20%. Wpływ ten może być śmiało pominięty przy korzystaniu z tego rodzaju materiału budowlanego jak drewno, którego właściwości sprężyste nie są jednorodne.

Pominięcie sprężystości zastrzałów sprowadza schemat statyczny belki głównej układu przedstawionego na rys. 13 do schematu belki ciągłej dwuprzęsłowej na trzech podporach niesprężystych A , B , C .

Moment zginający M_B nad podporą B może być wyznaczony z równania trzech momentów, które w danym wypadku przybiera postać

$$(4.8) \quad 4 M_B a = -6 (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2),$$

gdzie \mathfrak{R}_1 i \mathfrak{R}_2 wyrażają odpowiednio reakcje wtórne podpory B belek AB i BC .

Zachodzi tu pytanie, czy nie można by zastąpić obliczenia belki AC według równania (4.8) przez obliczenie jej jako belki rozciętej w punkcie B .

Obliczanie belek układu zastrzałowego jako ciągłych zmniejsza wprawdzie momenty zginające i pozwala na stosowanie poprzecznych wymiarów belki mniejszych niż przy obliczaniu jej jako rozciętej w punkcie B , nasuwa jednak wątpliwość, czy punkt B może być uważany, pomimo założenia niesprężystości zastrzałów, za nieprzesuwny w kierunku pionowym, co jest warunkiem koniecznym, aby belkę AC można było uważać za belkę ciągłą na podporach sztywnych.

Zestawmy na przykładzie mającym ogólniejsze znaczenie wyniki obydwóch sposobów obliczenia.

Weźmy więc pod uwagę układ przedstawiony na rys. 13 i wyobraźmy sobie, że przeszło AB belki głównej AC obciążone jest w środku siłą skupioną P (rys. 14) i że ciężar własny belki może być w porównaniu z tą siłą pominięty.

Gdybyśmy uważali, że belka AB jest rozcięta nad podporą B , wówczas moment zginający w środku tej belki wyniósłby

$$(4.9) \quad M_1 = \frac{Pa}{4} = 0,250 Pa,$$

reakcja zaś podpory B

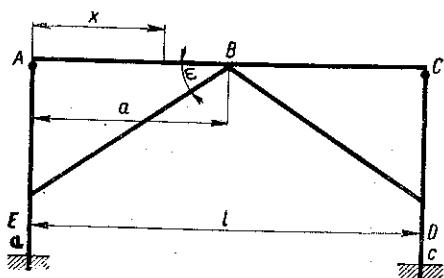
$$(4.10) \quad R_B = \frac{P}{2}.$$

Gdyby belka AC była belką ciągłą na podporach sztywnych, nad podporą B działałby moment zginający, obliczony ze wzoru (4.9) i równy

$$(4.11) \quad M_B = 0,094 Pa,$$

a wówczas w przeszle AB działałby największy moment

$$(4.12) \quad M'_1 = 0,203 Pa,$$



Rys. 14

a w przęśle BC moment

$$(4.13) \quad M'_2 = 0,047 Pa,$$

który miałby tendencję do wyginania tego przęsła ku górze.

Odpowiednio reakcja podpory B wyniosłaby w danym razie

$$(4.14) \quad R'_B = \frac{P}{2} + 2 \frac{M_B}{a} = 0,688 P.$$

Z porównania momentów zginających, podanych we wzorach (4.9), (4.11), (4.12) i (4.13) widać, że moment zginający w środku przęsła AB , obliczanego jako belka swobodnie podparta w punktach A i B , jest większy od największego z momentów powstających w tym samym przęśle rozpatrywanym jako przęsło belki ciągłej AC . Stąd wynika, że obliczenie momentów zginających w belce głównej dźwigara trójkątno-jednozastrzałowego, jako w belce rozciętej w punkcie zbiegania się zastrzałów, daje pewien zapas bezpieczeństwa pociągając za sobą jednocześnie dodatkowy nakład materiału.

Rzecz ma się inaczej, gdy chodzi o wyznaczenie wartości reakcji R_B w punkcie B zbiegania się zastrzałów. Jak widać z porównania wzorów (4.10) i (4.14), większą wartość tej reakcji otrzymamy przy obliczeniu głównej belki dźwigara jako ciągłej.

Ponieważ siły w zastrzałach dźwigara trójkątno-jednozastrzałowego, jak to wynika ze wzoru (4.1), są proporcjonalne do reakcji R_B , większy więc zapas bezpieczeństwa w zastrzałach otrzymamy obliczając reakcję tę w założeniu, że belka AC nie jest w punkcie B rozcięta.

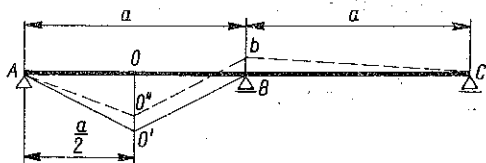
Zdawać by się mogło, że stoimy jedynie przed kwestią, czy warto jest poświęcić pewną ilość materiału dla uzyskania uproszczeń w obliczeniu statycznym konstrukcji zastrzałowej. Kwestia ta przestaje być jednak kwestią czysto ekonomiczną i staje się kwestią bezpieczeństwa, jeżeli weźmiemy pod uwagę okoliczność, że punkt B na rys. 13 może ulec przesunięciu w kierunku pionowym i że wówczas stosowanie równania trzech momentów do obliczenia momentów zginających w belkach głównych układów zastrzałowych staje się już ryzykowne.

Jeżeli przesunięcia pionowe punktów B wywołane przez sprężyste skróty zastrzałów mogą być pominięte, pozostają jednak przesunięcia niesprężyste. Przesunięcia te powstają wskutek wysychania drewna, wskutek nieściśności roboty ciesielskiej itp. Zastanówmy się nad ich wpływem na wielkość momentów zginających i reakcyj belki głównej mostu zastrzałowego.

Przypuśćmy, że w układzie przedstawionym na rys. 14 rozpiętość AB belki głównej wynosi $a = 2$ m, ciężar $P = 5000$ kG, moment bezwładności

belki $J = 25\,000\text{ cm}^4$. Współczynnik sprężystości przy ściskaniu drewna przyjmujemy za równy $E = 100\,000\text{ kG/cm}^2$.

Przy obliczeniu belki AB jako swobodnie podpartej w punktach A i B wykres momentów zginających miałby kształt przedstawiony na rys. 15



Rys. 15

linią pełną. Tu rzędna wykresu w środku odcinka AB belki głównej wynosi w myśl wzoru (4.9) $00' = 0,250 Pa$. Przy obliczeniu belki głównej jako belki ciągłej otrzymaliśmy wykres przedstawiony na rys. 15 linią przerywaną, przy czym środkowa

rzędna wykresu wyniosłaby w myśl wzoru (4.12) $00'' = 0,203 Pa$, rzędna zaś nad podporą B w myśl wzoru (4.11) $Bb = 0,094 Pa$.

Skoro podpora B osiadzie, belka główna dozna dodatkowego ugięcia ku dołowi, które zmniejszy wygięcie belki wypukłością do góry.

Równanie trzech momentów dla belki ciągłej na podporach sprężystych przybiera w danym razie postać

$$(4.15) \quad 4M_B a = -6 \frac{Pa}{4} \frac{a}{4} + 6EJf \frac{2}{a},$$

gdzie f oznacza osiadanie belki w punkcie B .

Ze wzoru (4.15) możemy obliczyć tę wartość f , przy której moment M_B nad podporą B równy jest zeru. W danym razie $f = 0,5\text{ cm}$.

Zmniejszenie momentu podporowego powoduje jednocześnie zwiększenie momentu zginającego w środku przęsła AB , zmniejsza więc bezpieczeństwo głównej belki dźwigara zastrzałowego obliczonej jako belka ciągła.

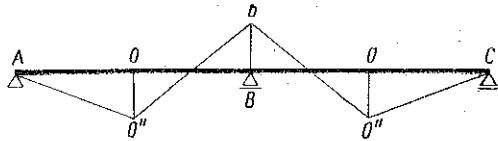
Jak widać ze wzoru (4.14), zmniejszenie momentu zginającego M_B wpływa na zmniejszenie reakcji R_B .

Osiadanie f belki głównej w punkcie B , otrzymane w rozwiązany poprzednio przykładzie, nie jest dla belki o przyjętych wyżej wymiarach bynajmniej niemożliwe, z wykresu zaś przedstawionego na rys. 15 oraz ze wzoru (4.15) wynika, że również osiadanie mniejsze od $0,5\text{ cm}$ powoduje zwiększenie momentu zginającego w środku przęsła AB belki głównej oraz zmniejszenie reakcji R . Zwiększenie osiadania belki ponad wartość f otrzymaną z równania (4.15) jest zazwyczaj łatwe już do zauważenia i musi być usuwane drogą wprowadzenia podkładki między zbiegające się w punkcie B zastrzały i belkę.

Z powyższego wynika, że reakcja R_B będzie większa wówczas, gdy belka główna osiadać nie będzie, moment zaś zginający w środku AB przęsła, przeciwnie, będzie większy w razie osiadania belki. Należy więc uwa-

żyć za bezpieczniejsze, lecz zgoła nie za przesadnie bezpieczne, obliczanie momentów zginających w środku belki jak dla belki swobodnie podpartej w punktach A i B, a reakcji R_B jak dla belki ciągłej AC nierozciętej w punkcie B.

Ponieważ wielkość R_B jest głównie potrzebna do wymiarowania zastrzałów, które podlegają ścisłaniu, a więc mogą się znaleźć w niebezpieczeństwie wybooczenia, pewien zapas bezpieczeństwa jest tu pożyteczny. Na podstawie przytoczonych przykładów można ustalić liczbę 40% jako wielkość, o którą należy przy wymiarowaniu zastrzałów powiększyć reakcję R_B w stosunku do reakcji belki AB podpartej swobodnie w punktach A i B.



Rys. 16

Gdybyśmy układ jednozastrzałowy obciążyli symetrycznie z dwóch stron punktu B, otrzymalibyśmy zamiast wykresu na rys. 15 wykres przedstawiony na rys. 16, wzory zaś (4.9)-(4.14) dałyby wartości następujące:

$$(4.16) \quad \begin{cases} M_1 = 0,250 Pa, & M_2 = 0,156 Pa, \\ M_B = 0,188 Pa, & R_B = P, \\ M_1' = 0,156 Pa, & R_B' = 1,376 P. \end{cases}$$

Przesunięcie pionowe punktu B, przy którym moment M_B obliczony dla belki ciągłej o jednej podporze obniżonej równa się zero, otrzymamy z równania trzech momentów dla belki na podporach sprężystych:

$$(4.17) \quad -6 \left(\frac{Pa}{4} \frac{a}{4} + \frac{Pa}{4} \frac{a}{4} \right) + 6 EJf \frac{2}{a} = 0,$$

skąd znajdziemy $f = 0,25 \text{ cm}$.

Jeżeli ciężary P zaczepione w środku przęseł AB i BC belki głównej

rozłożymy w sposób równomierny na całym przęśle, wówczas otrzymamy wykres momentów zginających przedstawiony na rys. 17.

Zamiast wartości (4.9) - (4.14) otrzymamy wówczas wartości:

$$(4.18) \quad \begin{cases} M_1 = 0,125 qa^2, & M_1' = 0,070 qa^2, \\ M_B = 0,125 qa^2, & M_2' = 0,070 qa^2, \\ R_B = 1,000 qa, & R_B' = 1,250 qa, \end{cases}$$

a odpowiednie równanie trzech momentów przybiera postać

$$(4.19) \quad -6 \left(\frac{q a^3}{24} + \frac{q a^3}{24} \right) + E J f \frac{2}{a} = 0,$$

skąd wyznaczmy tę wartość osiadania f , dla której moment $M = 0$; wynosi ona 0,12 cm.

Jak widzimy, obliczenia porównawcze doprowadzają do wniosku, że wyznaczenie momentów zginających w poszczególnych przęsłach belki głównej układu zastrzałowego powinno być wykonywane w założeniu, że przęsła te są belkami w dwóch punktach swobodnie podpartymi, wyznaczenie zaś reakcji belki głównej w punkcie przecinania się zastrzałów w założeniu, że mamy do czynienia z belką na podporach stałych.

Резюме

АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКИХ СХЕМ ДЕРЕВЯННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Определение статически неопределимых величин в деревянных конструкциях и определение критических сил в деревянных стойках хотя и требует обоснования на законе Гук а, но, одновременно, требует учитывать специальные условия работы деревянных конструкций, а также неоднородность и анизотропию древесины. Поэтому статические схемы деревянных конструкций разнятся от схем других конструкций. Работа посвящена анализу трех, самых характерных для древесины, конструктивных элементов: непризматических стоек, составных балок и раскосных систем. Анализ приводит к установлению ряда конструктивных свойств упомянутых систем, а в частности:

в главе II — приводится вычисление деревянных конусообразных стоек, между прочим и крепежного леса;

в главе III — обосновывается, что верхние балки составных балок должны быть изготовлены из лучшей древесины, чем нижние;

в главе IV — объясняется, при какой, именно, точности вычисленные балки раскосных систем можно трактовать как разрезные — при определении изгибающих моментов, и как неразрезные балки — при определении реакции.

Summary

AN ANALYSIS OF STATICAL COMPUTATION METHODS OF TIMBER STRUCTURES

The computation of redundant quantities in timber structures and the determination of critical forces in timber struts are based on Hooke's law. It is necessary, however, to take into consideration, at the same

time, the special conditions for timber structures, as well as the heterogeneity and the anisotropy of wood. The methods of statical computation of timber structures differ therefore from those for other materials. This paper is concerned with the analysis of the three most typical elements for timber structures. These are: nonprismatic struts, built-up girders and brace structures. The analysis results in the determination of a number of structural properties of those systems.

Sec. II contains a description of a calculation method of conical timber struts, in particular pit-props.

In Sec. III a conclusion is reached that upper beams of built-up girders should be made of better material than the lower ones.

In Sec. IV the degree of exactness is determined, for which the beams of brace systems can be treated as composed of segments, for the determination of bending moments, and as continuous beams, for the determination of the reactions.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 grudnia 1954 r.
