MACIEJ BIENIEK

METODY TEORII STATECZNOŚCI RUCHU

ROZPRAWY

INŻYNIERSKIE

XXXI

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Zagadnienia stateczności ruchu występują w licznych dziedzinach fizyki i techniki. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie podstawowych twierdzeń teorii stateczności ruchu. Wydaje się bowiem, że mimo znajomości przez ogół fizyków i inżynierów metod badania stateczności w pewnych szczególnych przypadkach, ogólne matematyczne podstawy tej teorii (obejmującej także i stateczność równowagi) są mniej znane i w naszej literaturze prawie nie poruszane.

Ograniczono się tu głównie do rozważenia stateczności w sensie Lapunowa oraz do podania zarysów jego teorii jako najbardziej podstawowej i najlepiej opracowanej pod względem matematycznym.

I. PODSTAWOWE POJĘCIA I DEFINICJE

1. Określenie stateczności ruchu

Zagadnienia stateczności ruchu można w sposób poglądowy scharakteryzować następująco. Dana jest na przykład pewna postać ruchu układu materialnego. Ruch ten może być określony równaniami dynamiki przy danych siłach działających na układ oraz ustalonych warunkach początkowych układu. Chodzi o zbadanie, jaki wpływ na daną postać ruchu wywierają małe siły oraz małe zmiany warunków początkowych, nie uwzględniane przy określaniu ruchu i często nieznane. Jeżeli pod wpływem małych sił postać ruchu niewiele różni się od postaci pierwotnej — ruch nazywamy statecznym. Jeżeli małe siły wywołują duże zmiany postaci ruchu — ruch nazywamy niestatecznym.

Teoria stateczności ruchu zajmuje się badaniem ruchu pod względem jego stateczności lub niestateczności. Z powyższego sformułowania wynika doniosłość praktyczna zagadnień stateczności ruchu. Pisząc bowiem równania ruchu najczęściej uwzględnia się tylko siły duże, pomija natomiast małe z powodu ich nieznajomości lub dla uproszczenia obliczeń. Ocena więc, jaki wpływ na ruch mają pominięte czynniki, jest ważna, gdyż decyduje o zgodności rozwiązania z rzeczywistym przebiegiem zjawiska.

Zajmiemy się teraz ścisłym sformułowaniem pojęcia stateczności ruchu.

Przyjmujemy, że ruch układu materialnego jest określony za pomocą n równań różniczkowych rzędu pierwszego, które zapiszemy w postaci

$$\frac{dz_k}{dt} = Z_k(z_1, z_2, \dots, z_n, t) \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{1.1}$$

Funkcje $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_n$ zmiennej t (czasu) są parametrami określającymi stan układu, jak na przykład współrzędne, prędkości itp. Rozpatrzmy pewne rozwiązania szczególne układu równań (1.1)

$$z_1 = f_1(t), \quad z_2 = f_2(t), \dots, \quad z_n = f_n(t), \tag{1.2}$$

spełniające warunki początkowe: dla $t = 0$

$$z_{10} = f_1(0), \quad z_{20} = f_2(0), \dots, \quad z_{n0} = f_n(0). \tag{1.3}$$

Ruch określony rozwiązaniami (1.2) nazywać będziemy ruchem niezakłóconym układu materialnego. Inną postać ruchu odpowiadającą równaniu (1.1) i warunkom brzegowym, różniącym się od warunków (1.3) o pewne wielkości x_{k0}, tj. warunkom: dla $t = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} z'_{10} = z_{10} + x_{10} = f_1(0) + x_{10}, \\ z'_{20} = z_{20} + x_{20} = f_2(0) + x_{20}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ z'_{n0} = z_{n0} + x_{n0} = f_n(0) + x_{n0}, \end{array}\right. \tag{1.4}$$

nazywać będziemy ruchem zakłóconym. Funkcje określające ruch zakłócony można napisać w postaci

$$\left\{\begin{array}{l} z'_1 = f_1(t) + x_1(t), \\ z'_2 = f_2(t) + x_2(t), \\ \dots\dots\dots \\ z'_n = f_n(t) + x_n(t). \end{array}\right. \tag{1.5}$$

Funkcje $x_k(t)$ określają zakłócenia ruchu, a wielkości x_{k0} zmiany warunków początkowych.

Ponieważ (1.5) i (1.2) są rozwiązaniami równania (1.1), to możemy napisać

$$\frac{dx_k}{dt} + \frac{df_k}{dt} = Z_k(x_1 + f_1, x_2 + f_2, \dots, x_n + f_n, t) \tag{1.6}$$

oraz

$$\frac{df_k}{dt} = Z_k(f_1, f_2, \ldots, f_n, t), \tag{1.7}$$

gdzie $k = 1, 2, \ldots, n$.

Odejmując (1.7) od (1.6) otrzymamy

$$\frac{dx_k}{dt} = Z_k(x_1 + f_1, x_2 + f_2, \ldots, x_n + f_n, t) - Z_k(f_1, f_2, \ldots, f_n, t). \tag{1.8}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \equiv Z_k(x_1 + f_1, x_2 + f_2, \ldots, x_n + f_n, t) - Z_k(f_1, f_2, \ldots, f_n, t) \tag{1.9}$$

możemy równania (1.8) napisać

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.10}$$

Układ równań typu (1.10) służy do wyznaczenia funkcji $x_k(t)$, tj. do określenia zakłóceń ruchu. Funkcje x_k spełniają warunki początkowe dla

$$t = 0, \qquad x_k = x_{k0}. \tag{1.11}$$

Równania (1.10) nazywać będziemy w dalszym ciągu równaniami ruchu zakłóconego, mimo że, ściśle rzecz biorąc, określają one zakłócenia ruchu, natomiast ruch zakłócony określają równania (1.5).

Możemy teraz podać następującą definicję, [1]: ruch niezakłócony, określony równaniami (1.2), jest stateczny, jeżeli dla każdej dodatniej liczby ε dowolnie małej można tak dobrać dodatnią liczbę η, że przy wszelkich x_{k0}, określających zakłócenia początkowe i spełniających nierówności

$$|x_{k0}| \leqq \eta \tag{1.12}$$

przy dowolnym $t > 0$, spełniona jest nierówność

$$|z_k(t) - z'_k(t)| < \varepsilon, \tag{1.13}$$

czyli

$$|x_k(t)| < \varepsilon. \tag{1.14}$$

Ruchy nie spełniające powyższych warunków są niestateczne. Jeżeli oprócz nierówności (1.14) mamy również

$$\lim_{t \to \infty} x_k(t) = 0, \tag{1.15}$$

to ruch niezakłócony (1.2) nazywać będziemy asymptotycznie statecznym. Powyższe definicje określają stateczność ruchu w sensie Lapunowa.

Jak widać, określenie Lapunowa odnosi się tylko do zakłóceń początkowych. Istnieje uogólnienie tego określenia także dla zakłóceń ciągłych w czasie trwania ruchu. Jak się jednak okaże, przynajmniej w praktycznie ważnych przypadkach, stateczność w sensie Lapunowa określa ruch stateczny dla wszystkich rodzajów zakłóceń.

Pojęcie stateczności w sensie Lapunowa nie jest jedynie możliwym pojęciem stateczności. Na przykład doniosłą rolę odgrywa również pojęcie stateczności orbitalnej (Poincarégo). Mianowicie ruch ciała nazywamy orbitalnie statecznym, jeżeli parametry określające zakłócenia s_{k0} i spełniające warunek

$$|s_{k0}| \leqq \eta$$

wywołują wychylenia s_k (od toru niezakłóconego), spełniające dla dowolnego t warunek

$$|s_k| < \varepsilon.$$

Przy stateczności w sensie Lapunowa warunek drugi powinny spełniać nie tylko wychylenia od toru, lecz w ogóle różnice współrzędnych między ruchem niezakłóconym i ruchem zakłóconym.

Wyróżnić można jeszcze tzw. stateczność warunkową. W tym przypadku dla małych zakłóceń początkowych ($|x_{k0}| < \eta < \eta_{gr}$) ruch jest stateczny, natomiast dla zakłóceń dużych ($|x_{k0}| < \eta, |x_{k0}| > \eta_{gr}$) ruch jest niestateczny. Pojęcie stateczności bezwarunkowej jest przy tym oczywiste.

Podane w tym paragrafie sformułowania dotyczyły, jak widać, stateczności bezwarunkowej.

2. Metody badania stateczności ruchu. Przykłady

Jak wspomniano, pierwsza kompletna teoria stateczności ruchu pochodzi od A. M. Lapunowa. Sposoby rozwiązywania zagadnień stateczności dzieli Lapunow na dwie grupy. Do pierwszej grupy należą sposoby polegające na bezpośrednim badaniu ruchów zakłóconych, tzn. wymagających rozwiązania układu równań (1.10). Sposoby te noszą nazwę pierwszej metody Lapunowa. Do drugiej grupy należą sposoby, które nie wymagają poszukiwania całek szczególnych lub ogólnych równań (1.10), lecz polegają na badaniu własności pewnych funkcji $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, (tzw. funkcji Lapunowa). Sposób ten jest podstawowy w teorii stateczności ruchu i nosi nazwę drugiej metody Lapunowa.

Zagadnienia stateczności nie nastręczają trudności, jeżeli równania ruchu są liniowe, tzn. mają postać

$$\frac{dz_k}{dt} = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n. \tag{2.1}$$

W tym przypadku również równania ruchu zakłóconego są liniowe:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \tag{2.2}$$

i dają się rozwiązać.

W rzeczywistości równania liniowe występują bardzo rzadko; regułą są równania nieliniowe. Jednak dla zagadnień nieliniowych można ustalić pewne równania przybliżone, liniowe, z których własności można wysnuć wnioski co do stateczności ruchu (metody linearyzacji). Te sposoby badania stateczności w pierwszym przybliżeniu były stosowane przez Thomsona, Taita, Routha, Żukowskiego. Ścisłą podbudowę znalazły w twierdzeniach Lapunowa.

Dla lepszego wyjaśnienia definicji podanych w p. 1 rozpatrzmy następujący przykład, [3].

Ruch określony jest układem równań

$$\begin{cases} A\dfrac{dz_1}{dt} + (C-B) z_2 z_3 = 0, \\ B\dfrac{dz_2}{dt} + (A-C) z_1 z_3 = 0, \\ C\dfrac{dz_3}{dt} + (B-A) z_1 z_2 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Jest to ruch ciała sztywnego dookoła punktu, przy czym z_1, z_2, z_3 oznaczają składowe wektora prędkości kątowej wzdłuż ruchomych osi układu współrzędnych, pokrywających się z głównymi osiami bezwładności ciała, a A, B, C są to momenty bezwładności względem tychże osi.

Równania (2.3) mają następujące rozwiązanie:

$$\begin{cases} z_1 = f_1(t) = \omega = \text{const}, \\ z_2 = f_2(t) = 0, \\ z_3 = f_3(t) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Dla zbadania stateczności tego ruchu należy napisać równania ruchu zakłóconego (1.10).

Oznaczając funkcje określające zakłócenia ruchu przez x_1, x_2, x_3 na podstawie (1.8) otrzymamy

$$\text{(2.5)} \quad \begin{cases} A\dfrac{dx_1}{dt}+(C-B)x_2x_3=0\,, \\ B\dfrac{dx_2}{dt}+(A-C)(x_1+\omega)x_3=0\,, \\ C\dfrac{dx_3}{dt}+(B-A)(x_1+\omega)x_2=0\,. \end{cases}$$

W wielu przypadkach równania ruchu zakłóconego można napisać bezpośrednio, badając zachowanie się układu przy wychyleniach od ruchu, który uważamy za ruch niezakłócony.

II. TWIERDZENIA LAPUNOWA

3. Założenia i definicje pomocnicze

Ruch zakłócony nazywamy ustalonym, jeżeli równania (1.10) ruchu zakłóconego mają postać

$$\text{(3.1)} \quad \frac{dx_k}{dt}=X_k(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (k=1, 2, ..., n),$$

tzn. funkcje X_k nie zależą od czasu t. Przyjmujemy, że spełnione są pewne warunki w obszarze $|x_k|\leqq H$ (H jest stałą), przy których równania (3.1) posiadają w tym obszarze jednoznaczne i ciągłe rozwiązania.

Ruch zakłócony nazywamy nieustalonym, jeżeli jego równania mają postać

$$\text{(3.2)} \quad \frac{dx_k}{dt}=X_k(t, x_1, x_2, ..., x_n)\,,$$

czyli że funkcje X_k zależą także od czasu t.

Wprowadzamy pewną funkcję $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ określoną w otoczeniu początku współrzędnych. Przyjmijmy, że funkcja jest jednoznaczna, dla $x_1=x_2=...=x_n=0$ jest równa zeru oraz posiada ciągłe pochodne cząstkowe. Funkcję $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ nazywać będziemy na pół oznaczoną dodatnio (na pół oznaczoną ujemnie), jeżeli w obszarze $0<|x_k|\leqq h$, gdzie h jest dostatecznie małą liczbą dodatnią, przyjmuje tylko wartości dodatnie lub równe zeru (ujemne lub równe zeru). Funkcję $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ nazywać będziemy nieoznaczoną, jeżeli w obszarze $0<|x_k|\leqq h$ dla dowolnych małych h przyjmuje wartości dodatnie i ujemne. Funkcję $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ nazywać będziemy oznaczoną dodatnio (ujemnie), jeżeli w obszarze $0 < |x_k| \leqq h$ dla dostatecznie małych h przyjmuje wartości tylko dodatnie (tylko ujemne). Zauważmy jeszcze, że pochodną zupełną funkcji $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ po uwzględnieniu równań (3.1) możemy wyrazić w sposób następujący:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k = W(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{3.3}$$

Nosi ona nazwę pochodnej funkcji V ze względu na równania ruchu zakłóconego. Dla badania ruchów nieustalonych wprowadza się czasem funkcję $V(t, x_1, x_2, ..., x_n)$. Podobnie nazywamy ją na pół oznaczoną, jeżeli w obszarze $|x_k| < h$ przyjmuje tylko wartości jednego znaku lub równa się zeru dla dowolnego t. Nazywamy ją oznaczoną dodatnio lub ujemnie, jeżeli w obszarze $|x_k| < h$ spełnia warunek

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) \geqq W \tag{3.4}$$

lub

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leqq -W(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{3.4.1}$$

gdzie $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest funkcją oznaczoną dodatnio i nie zależy od czasu.

Pochodna zupełna funkcji $V(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ ze względu na równania ruchu zakłóconego ma postać

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k. \tag{3.5}$$

4. Twierdzenia Lapunowa dla ruchów ustalonych

Twierdzenie 1. Jeżeli dla równań różniczkowych ruchu zakłóconego można znaleźć funkcję oznaczoną dodatnio (ujemnie) $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, której pochodna dV/dt ze względu na równania ruchu zakłóconego jest funkcją na pół oznaczoną ujemnie (dodatnio), to ruch niezakłócony jest stateczny.

D o w ó d. Przyjmijmy bez ograniczenia ogólności, że funkcja $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest funkcją oznaczoną dodatnio we wszystkich punktach obszaru

$$|x_k| \leqq h \leqq H \tag{4.1}$$

z wyjątkiem początku układu.

Stosownie do założeń twierdzenia musi być w tym obszarze

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k \leqq 0. \tag{4.2}$$

Oznaczamy przez ε dowolnie małą liczbę dodatnią. Dolny kres funkcji V dla wartości $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$ takich, że największa z nich jest równa ε, oznaczamy przez l.

Możemy to zapisać tak

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq l, \tag{4.3}$$

jeśli

$$\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \varepsilon. \tag{4.4}$$

Rozpatrzmy teraz dowolną funkcję $x_k(t)$, dla której wartość początkowa x_{k0} spełnia warunek

$$|x_{k0}| \leqq \eta, \tag{4.5}$$

przy czym liczba η spełnia nierówność $\eta < \varepsilon$ oraz jest tak mała, że $V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) < l$. Liczbę taką można dobrać, gdyż V jest funkcją ciągłą i $V(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Ponieważ na podstawie (4.2) funkcja V nie rośnie z upływem czasu, więc w dowolnej chwili t jest

$$V[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] \leqq V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) < l. \tag{4.6}$$

Stąd wynika, że dla dowolnego $t > t_0$ jest spełniony warunek

$$|x_k| < \varepsilon. \tag{4.7}$$

Gdyby bowiem powyższy warunek nie był spełniony, to w pewnej chwili $t = T$, w której $|x_k|$ osiągnęłoby wartość ε, musiałyby być równocześnie spełnione warunki (4.3) oraz (4.6), co jest niemożliwe.

Spełnianie warunku (4.7) przy założeniu (4.5) dowodzi stateczności ruchu przy przyjętych założeniach co do V i dV/dt.

Twierdzenie 2. Jeżeli dla równań różniczkowych ruchu zakłóconego można znaleźć funkcję oznaczoną dodatnio (ujemnie) $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, której pochodna dV/dt ze względu na równania ruchu zakłóconego jest funkcją oznaczoną ujemnie (dodatnio), to ruch niezakłócony jest asymptotycznie stateczny.

D o w ó d. Nie ograniczając ogólności dowodu zakładamy, że V jest funkcją oznaczoną dodatnio, natomiast dV/dt — oznaczoną ujemnie w obszarze (4.1). W obszarze tym są spełnione warunki

$$V \geqq 0, \qquad \frac{dV}{dt} \leqq 0, \tag{4.7}$$

przy czym znak równości jest możliwy tylko w punkcie $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Na podstawie twierdzenia 1 wiemy, że przy tych założeniach ruch musi być stateczny, tzn. że jeżeli $|x_{k0}| < \eta(\varepsilon)$, to $|x_k(t)| < \varepsilon$, przy czym ε jest dodatnią liczbą mniejszą od h, a η jest liczbą dodatnią zależną od ε.

Przy założeniach twierdzenia 2, które są silniejsze od założeń twierdzenia 1, udowodnimy ponadto, że jest

$$\lim_{t \to \infty} x_k(t) = 0, \tag{4.8}$$

tzn. że ruch jest asymptotycznie stateczny.

Ponieważ przy warunkach początkowych $|x_{k0}| \neq 0$ rozwiązania $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nie mogą być wszystkie równe zeru, zatem funkcja dV/dt jest w każdej chwili ujemna. Wynika stąd, że funkcja V jest monotonicznie malejąca i przy $t \to \infty$ dąży do pewnej granicy α będąc jednak zawsze większa od α, tj.

$$\lim_{t \to \infty} V = \alpha, \qquad V[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] > \alpha.$$

Otóż musi być $\alpha = 0$, zatem

$$\lim_{t \to \infty} V = 0.$$

Wynika stąd, że musi być również

$$\lim_{t \to \infty} x_k(t) = 0.$$

Gdyby bowiem $x_k(t)$ nie dążyło do zera, byłoby dV/dt stale ujemne także dla $t \to \infty$.

A więc byłoby $dV/dt \leqq -b$, gdzie b jest liczbą dodatnią. Zatem dla $t > t_0$

$$V[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] = V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) + \\ + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\,dt \leqq V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) - b(t - t_0),$$

czyli przyjmowałoby wartości ujemne dla dużych t V, co jest sprzeczne z założeniem twierdzenia.

Twierdzenie 3. Jeżeli dla równań różniczkowych ruchu zakłóconego można znaleźć funkcję $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, której pochodna dV/dt ze względu na równania ruchu zakłóconego jest funkcją oznaczoną dodatnio (ujemnie), a sama funkcja V nie jest na pół oznaczona ujemnie (dodatnio), to ruch niezakłócony jest niestateczny.

D o w ó d. Przyjmujemy, że funkcja dV/dt jest oznaczona dodatnio w obszarze

$$0 < |x_k| \leqq h \leqq H. \tag{4.9}$$

Wykażemy, że nawet przy dowolnie małych liczbach η można znaleźć zbiór wartości początkowych x_{k0} spełniających warunki

$$|x_{k0}| \leqq \eta, \tag{4.10}$$

przy których rozwiązania $x_k(t)$ w pewnej chwili przekroczą obszar (4.9); tym samym zostanie wykazana niestateczność ruchu. Wartości x_{k0} dobieramy tak, aby spełniony był warunek (4.10) oraz aby

$$V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) > 0,$$

co jest możliwe, gdyż funkcja V według założeń twierdzenia nie jest na pół oznaczona ujemnie i w otoczeniu początku układu współrzędnych może przyjmować wartości dodatnie. Gdyby $x_k(t)$ nie przekroczyło granic obszaru (4.9), to pochodna dV/dt byłaby zawsze dodatnia, czyli byłaby $dV/dt \geqq l$, gdzie l jest stałą większą od zera. Zatem w chwili $t > t_0$

$$V[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] = V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt} dt \geqq V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) + l(t - t_0),$$

skąd wynika, że V rośnie nieograniczenie, co jest niemożliwe, gdyż w obszarze domkniętym (4.9) funkcja V jest ciągła, a zatem ograniczona.

Twierdzenie 4. Jeżeli istnieje funkcja V, której pochodna dV/dt ze względu na równania ruchu zakłóconego posiada w obszarze (4.9) postać

$$\frac{dV}{dt} = \gamma V + \overline{V}, \tag{4.11}$$

gdzie γ jest liczbą dodatnią, a $\overline{V}$ jest stale równa zeru lub jest funkcją na pół oznaczoną, i jeśli przy $\overline{V}$ na pół oznaczonej V nie jest na pół oznaczoną o znaku przeciwnym niż $\overline{V}$, to ruch niezakłócony jest niestateczny.

Dowód. Przyjmujemy, że funkcja V jest nieujemna. Zatem z (4.11) wynika

$$\frac{dV}{dt} \geqq \gamma V.$$

Podobnie jak w poprzednim dowodzie wykażemy, że dla pewnych wartości x_{k0}, spełniających warunki

$$|x_{k0}| < \eta, \qquad V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) > 0$$

dla dowolnie małych η, wartości $x_k(t)$ przekraczają obszar (4.9), co jest dowodem niestateczności ruchu. Gdyby bowiem $x_k(t)$ nie przekraczało obszaru (4.9), byłaby funkcja V rosnąca i zachodziłaby nierówność

$$\frac{dV}{dt} \geqq \gamma V[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] \geqq \gamma V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}),$$

czyli

$$\frac{dV}{dt} \geqq \gamma V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}),$$

skąd

$$V \geqq \gamma V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})(t - t_0).$$

Zatem funkcja V rosłaby nieograniczenie, co jest sprzeczne z założeniem ciągłości funkcji w obszarze domkniętym (4.9).

5. Twierdzenia Lapunowa dla ruchów nieustalonych

Twierdzenie 5. Jeżeli dla równań różniczkowych ruchu zakłóconego (3.2) można znaleźć oznaczoną dodatnio (ujemnie) funkcję $V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dla której pochodna ze względu na równania ruchu zakłóconego jest na pół oznaczona ujemnie (dodatnio), to ruch niezakłócony jest stateczny.

Dowód. Nie ograniczając ogólności rozważań możemy przyjąć, że V jest funkcją oznaczoną dodatnio. Zatem dla dostatecznie wielkich t oraz dostatecznie małych h $(h \leqq H)$ w obszarze

(5.1) $$t \geqq t_0, \qquad |x_k| \leqq h$$

jest spełniona nierówność

(5.2) $$V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq W(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

gdzie W jest funkcją oznaczoną dodatnio i niezależną od czasu. Weźmy pod uwagę liczbę ε dowolnie małą dodatnią mniejszą od h. Oznaczamy przez l dolny kres funkcji W dla wartości x_k spełniających warunek

$$\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \varepsilon.$$

Na podstawie (5.2) jest dla tych wartości

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) \geqq l.$$

Jeżeli wartości początkowe x_{k0} spełniają warunek

$$|x_{k0}| \leqq \eta, \tag{5.3}$$

przy czym η jest tak małe, że

$$V(t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) < l \tag{5.4}$$

oraz $\eta < \varepsilon$, to jest rzeczą oczywistą, że dla t dostatecznie mało przewyższającego t_0 jest spełniony warunek

$$|x_k| < \varepsilon. \tag{5 5}$$

Należy teraz udowodnić, że warunek (5.5) jest spełniony dla t dowolnego.

Przyjmijmy, że w pewnej chwili t_1 nierówność (5.5) nie jest spełniona, lecz jest

$$\max\{|x_1(t_1)|, |x_2(t_1)|, ..., |x_n(t_1)|\} = \varepsilon.$$

Wtedy przy $t = t_1$ musiałoby być

$$V(t_1, x_1, x_2, ..., x_n) \geqq l,$$

skąd na podstawie (5.4) wynika

$$V(t_1, x_1, x_2, ..., x_n) > V(t_0, x_1, x_2, ..., x_n),$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $dV/dt \leqq 0$.

Twierdzenie 6. Jeżeli dla równań ruchu zakłóconego (3.2) można znaleźć oznaczoną dodatnio (ujemnie) funkcję $V(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, dla której pochodna ze względu na równania ruchu zakłóconego jest oznaczona ujemnie (dodatnio), oraz funkcja V posiada własność, że dla dowolnej liczby dodatniej λ można dobrać taką liczbę μ, że przy

$$t \geqq t_0, \qquad |x_k| \leqq \mu \tag{5.6}$$

jest spełniona nierówność

$$|V(t, x_1, x_2, ..., x_n)| \leqq \lambda, \tag{5.7}$$

to ruch niezakłócony jest asymptotycznie stateczny.

D o w ó d. Przyjmujemy, że V jest oznaczona dodatnio, a zatem dV/dt jest oznaczona ujemnie.

W obszarze (5.1) spełniona jest nierówność (5.2) oraz nierówność

$$\frac{dV}{dt} \leqq -W_1(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{5.8}$$

gdzie W_1 jest funkcją oznaczoną dodatnio.

Jeżeli funkcja V jest oznaczona dodatnio, a przy tym monotonicznie malejąca (co wynika z $dV/dt < 0$), to dla $t \to \infty$ dąży do pewnej granicy. Granica ta jest równa zeru. Gdyby bowiem granica ta (oznaczamy ją przez a) była różna od zera, to byłoby dla $t > t_0$

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) > a. \tag{5.9}$$

Ponieważ założyliśmy, że V posiada własność (5.7) dla warunków (5.6), to (5.9) pociąga za sobą

$$\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} \geqq \gamma, \tag{5.10}$$

gdzie γ oznacza dostatecznie małą liczbę dodatnią.

Z (5.8) wynika, że

$$\frac{dV}{dt} \leqq -l_1, \tag{5.11}$$

przy czym l_1 jest liczbą dodatnią, równą dolnej granicy funkcji W_1 dla wartości x_k spełniających warunek (5.10). Całkując nierówność (5.11) otrzymujemy dla $t > t_0$

$$V(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leqq V(t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) - l_1(t - t_0),$$

co jest sprzeczne z założeniem (5.9). Zatem granicą funkcji V dla $t \to \infty$ może być tylko zero, a tym samym również funkcja $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ dąży do zera dla $t \to \infty$. Wynika stąd, że

$$\lim_{t=\infty} x_k = 0,$$

co dowodzi słuszności twierdzenia.

Twierdzenie 7. Jeżeli istnieje funkcja $V(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ posiadająca tę własność, że dla dowolnej liczby dodatniej λ można dobrać taką liczbę μ, iż przy

$$t > t_0, \qquad |x_k| \leqq \mu$$

jest spełniona nierówność

$$|V(t, x_1, x_2, ..., x_n)| \leqq \lambda$$

oraz pochodna dV/dt ze względu na równania ruchu zakłóconego jest funkcją oznaczoną, natomiast sama funkcja V przy dowolnie małych x_k i dowolnie dużym t może przyjmować wartości tego samego znaku co pochodna dV/dt, to ruch niezakłócony jest niestateczny.

D o w ó d. Przyjmujemy, że dV/dt jest funkcją oznaczoną dodatnio, czyli w obszarze

$$t \geqq t_0 > 0, \qquad |x_k| \leqq h \tag{5.12}$$

spełniona jest nierówność

$$\frac{dV}{dt} \geqq W(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{5.13}$$

gdzie $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest funkcją oznaczoną dodatnio niezależną od czasu. Wartości początkowe x_{k0} dobieramy tak, aby spełnione były warunki

$$|x_{k0}| \leqq \eta, \qquad V(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) > 0,$$

przy czym η jest dowolnie małą liczbą dodatnią. Dobór wielkości x_{k0} spełniających te warunki jest możliwy, o ile V spełnia założenia twierdzenia.

Wykażemy, że rozwiązania $x_k(t)$ odpowiadające tym wartościom początkowym nie należą do obszaru (5.12), co świadczy o niestateczności ruchu. Gdyby bowiem było stale $|x_k| \leqq h$, to, ponieważ dV/dt jest stale dodatnią, musiałoby być

$$V(t_1, x_1, x_2, \dots, x_n) > V(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}).$$

Z własności (5.6) i (5.7) wynika, że

$$\max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \geqq \gamma, \tag{5.14}$$

gdzie γ jest dostatecznie małą liczbą dodatnią. Zatem na podstawie (5.13)

$$\frac{dV}{dt} \geqq l, \tag{5.15}$$

przy czym l jest liczbą dodatnią, równą dolnemu kresowi funkcji W przy wartościach x_k spełniających warunek (5.14). Całkując (5.15) otrzymujemy

$$V(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geqq V(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + l(t - t_0).$$

Z ostatniej nierówności wynika, że dla $t \to \infty$ funkcja V rośnie nieograniczenie, co jest sprzeczne z założeniami twierdzenia.

6. Przykłady

Rozpatrzmy dwa przykłady stosowania twierdzeń L a p u n o w a. Dla pewnego równania ruchu niezakłóconego znaleziono równania ruchu zakłóconego w postaci

$$
(6.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2 + ax_1^3, \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2^3. \end{cases}
$$

Należy zbadać stateczność ruchu niezakłóconego.

Funkcję V przyjmujemy w postaci

$$
(6.2) \qquad V = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).
$$

Wyznaczamy pochodną zupełną tej funkcji ze względu na równania (6.1)

$$
(6.3) \qquad \frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k = x_1(-x_2 + ax_1^3) + x_2(x_1 + ax_2^3) = a(x_1^4 + x_2^4).
$$

Możliwe są tutaj trzy przypadki.

(1) Przy $a > 0$ ruch na podstawie twierdzenia 3 jest niestateczny (bo $V \geqq 0$ oraz $dV/dt \geqq 0$).

(2) Przy $a < 0$ ruch na podstawie twierdzenia 2 jest stateczny asymptotycznie (bo $V \geqq 0$, natomiast $dV/dt \leqq 0$, przy czym znak równości możliwy jest tylko w punkcie $x_1 = x_2 = 0$).

(3) Przy $a = 0$ ruch na podstawie twierdzenia 1 jest stateczny (bo $V \geqq 0$, natomiast $dV/dt \equiv 0$).

Należy zwrócić uwagę na fakt, że o stateczności ruchu decydują nie wyrazy liniowe równań (6.1), lecz wyrazy wyższych stopni.

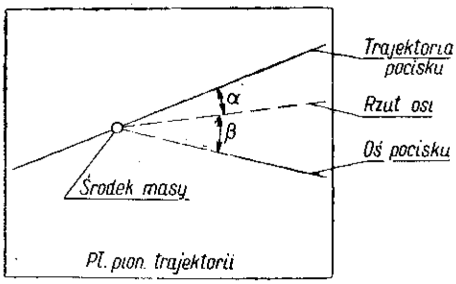
Przy zastosowaniach praktycznych ważną rolę odgrywa zagadnienie wyboru funkcji $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ogólnych reguł pozwalających wyznaczyć tę funkcję w każdym przypadku nie ma.

Przejdźmy teraz do następnego przykładu.

Rozpatrzmy ruch pocisku obracającego się wokół własnej osi po trajektorii zbliżonej do linii prostej.

Dla rozważenia zagadnienia stateczności możemy przyjąć, że ruch środka masy pocisku jest jednostajny i prostoliniowy. Ponadto przyjmujemy, że niektóre siły można pominąć (np. siły aerodynamiczne — unoszącą i M a g n u s a).

Wprowadzimy następujące oznaczenia: β jest kątem pomiędzy osią pocisku a jej rzutem na płaszczyznę pionową trajektorii (rys. 1), α kątem pomiędzy trajektorią a rzutem osi pocisku na płaszczyznę trajektorii, C osiowym momentem bezwładności pocisku, A momentem bezwładności względem osi poprzecznej przechodzącej przez środek ciężkości, n miarą rzutu prędkości kątowej obrotu pocisku na jego oś, R wypadkową siłą oporu ośrodka, e odległością środka masy pocisku od punktu zaczepienia wypadkowej oporu ośrodka, przy czym środek leży za punktem zaczepienia siły oporu.



Rys. 1

Przy tych oznaczeniach równanie ruchu ma postać [1])

$$
(6.4)\qquad \begin{cases} A\ddot{\beta} + A\dot{\alpha}^2 \sin\beta\cos\beta - Cn\dot{\alpha}\cos\beta = eR\sin\beta\cos\alpha\,, \\ A\ddot{\alpha}\cos\beta - 2\,A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta + Cn\dot{\beta} = eR\sin\alpha\,. \end{cases}
$$

Równania powyższe można sprowadzić do czterech równań rzędu pierwszego

$$
(6.5)\qquad \begin{cases} \dot{\beta} = \beta_1\,, \quad \dot{\alpha} = \alpha_1\,, \\ A\dot{\beta}_1 = -A\alpha_1^2\sin\beta\cos\beta + Cn\alpha_1\cos\beta + eR\sin\beta\cos\alpha\,, \\ A\dot{\alpha}_1\cos\beta = 2\,A\alpha_1\beta_1\sin\beta - Cn\beta_1 + eR\sin\alpha\,. \end{cases}
$$

Jeżeli chcemy zbadać stateczność ruchu, przy którym oś pokrywa się z kierunkiem trajektorii, to uważamy, że wielkości $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$, czyli $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ określają ruchy zakłócone, a równania (6.5) są równaniami ruchu zakłóconego.

Znajdziemy warunek, jaki muszą spełniać parametry pocisku, aby ruch był stateczny. Uczynimy to za pomocą twierdzeń Lapunowa. Jako funkcje Lapunowa przyjmujemy

$$
(6.6)\qquad V = F_1 - \mu F_2\,,
$$

przy czym F_1 jest energią układu:

$$
(6.7)\qquad F_1 = \tfrac{1}{2}\,A\,(\beta_1^2 + \alpha_1^2\cos^2\beta) + eR\,(\cos\alpha\cos\beta - 1)\,,
$$

natomiast F_2 jest momentem ilości ruchu układu względem osi pocisku:

$$
(6.8)\qquad F_2 = A\,(\beta_1\sin\alpha - \alpha_1\cos\beta\sin\beta\cos\alpha) + Cn\,(\cos\alpha\cos\beta - 1)\,.
$$

[1]) Por. [11], t. 2, str. 387.

Pochodna funkcji $V(\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1)$ ze względu na równania (6.5) jest, jak łatwo sprawdzić, równa zeru:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dF_1}{dt} - \mu \frac{dF_2}{dt} \equiv 0. \tag{6.9}$$

Wykażemy teraz, że można tak dobrać liczbę μ, iż funkcja V będzie funkcją oznaczoną. W tym celu rozwiniemy funkcję V na szereg Taylora, przy czym zachowamy tylko wyrazy pierwszego i drugiego stopnia:

$$\begin{aligned} V = & \tfrac{1}{2}\{A\alpha_1^2 + (Cn\mu - eR)\beta^2 + 2A\mu\alpha_1\beta\} + \\ & + \tfrac{1}{2}\{A\beta_1^2 + (Cn\mu - eR)\alpha^2 - 2A\mu\beta_1\alpha\} + \dots . \end{aligned} \tag{6.10}$$

Jeżeli obie formy kwadratowe w wyrażeniu (6.10) będą oznaczone dodatnio, to funkcja V będzie również oznaczona dodatnio. Jak wiadomo, warunkiem aby obie postacie były oznaczone dodatnio jest to, aby wyróżniki tych form spełniały nierówność

$$A(Cn\mu - eR) - A^2\mu^2 > 0, \tag{6.11}$$

gdyż formę typu $c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2$ można doprowadzić (przy założeniu $c_{11} > 0$ i $c_{22} > 0$) do postaci $b^2\overline{x}^2 + a^2\overline{y}^2$, jeżeli $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$.

Aby warunek (6.11) był spełniony, równanie kwadratowe na μ

$$-A^2\mu^2 + A(Cn\mu - eR) = 0 \tag{6.12}$$

musi posiadać dwa różne pierwiastki. Musi być zatem

$$A^2C^2n^2 - 4A^3eR > 0,$$

czyli

$$C^2n^2 > 4AeR. \tag{6.13}$$

Jeżeli spełniony jest warunek (6.13), można dobrać takie μ, że funkcja V jest oznaczona dodatnio, a jej pochodna ze względu na dany układ równań ruchu zakłóconego jest tożsamościowo równa zeru [por. (6.9)]. Zatem na podstawie twierdzenia 1 z p. 4 ruch jest stateczny.

Warunek (6.13) określa minimalną prędkość ruchu obrotowego pocisku potrzebną do tego, aby jego oś «trzymała się» w sposób stateczny trajektorii.

Przypominamy, że rozwiązanie powyższe dotyczy tylko trajektorii mało różniących się od prostej, jeżeli bowiem chcemy, aby w przypadku trajektorii silnie zakrzywionych oś pocisku pokrywała się ze styczną do trajektorii, należy ustalić warunek ograniczający prędkość obrotu pocisku.

7. Równania pierwszego przybliżenia dla ruchów ustalonych

Równania ruchu zakłóconego (3.1) w przypadku ruchu ustalonego możemy napisać w postaci

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + p_{k2}x_2 + \ldots + p_{kn}x_n + \overline{X}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{7.1}$$

Uważając prawą stronę równania (7.1) za rozwinięcie funkcji $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ z równań (3.1) na szereg potęgowy otrzymamy

$$p_{ki} = \left[\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right]_{x_i=0}. \tag{7.2}$$

Rozwinięcie funkcji $\overline{X}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na szereg potęgowy nie zawiera wyrazów stopnia niższego niż pierwszy, tj. nie zawiera wyrazów stałych, gdyż, jak wynika z tożsamości (1.9), jest

$$[X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)]_{x_1=\ldots=x_n=0} = 0. \tag{7.3}$$

Równania

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + p_{k2}x_2 + \ldots + p_{kn}x_n \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{7.4}$$

nazywać będziemy równaniami pierwszego przybliżenia. Są to równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego.

Równanie stopnia n-tego

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7.5}$$

nazywa się równaniem charakterystycznym, a wyznacznik $D(\lambda)$ — wyznacznikiem charakterystycznym.

Jeżeli λ_i jest dowolnym pierwiastkiem tego równania, to wyrażenie

$$x_k = A_k e^{\lambda_i t} \tag{7.6}$$

jest całką szczególną układu (7.4). Stałe A_k wyznacza się z układu równań liniowych

$$p_{k1}A_1 + p_{k2}A_2 + \ldots + (p_{kk} - \lambda_i)A_k + \ldots + p_{kn}A_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.7}$$

posiadających rozwiązania nie wszystkie równe zeru ze względu na (7.5) [2]. Jeżeli równanie charakterystyczne (7.5) posiada wszystkie pierwiastki pojedyncze, to podstawiając w wyrażenie (7.6) $i = 1, 2, \ldots, n$ otrzymamy n rozwiązań na każdą funkcję x_k, czyli n rozwiązań niezależnych układu równań (7.4). Jeżeli równanie charakterystyczne posiada pierwiastki wielokrotne i takim pierwiastkiem wielokrotnym jest λ_i, to oprócz rozwiązania (7.6) temu pierwiastkowi odpowiadają jeszcze inne rozwiązania typu

$$x_k = f_k(t)\, e^{\lambda_i t}, \tag{7.8}$$

gdzie $f_k(t)$ jest pewnym wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej o 1 niższego niż krotność pierwiastka λ_i, przy tym wielomiany te są różne dla różnych k.

W przypadku jeżeli pierwiastek λ_i jest zespolony, tj.

$$\lambda_i = \mu + i\nu,$$

to w rozwiązaniach (7.6) i (7.8) stałe A_k oraz funkcje f_k są także zespolone:

$$A_k = P_k + iQ_k, \qquad f_k = \varphi_k + i\psi_k.$$

Biorąc z rozwiązań (7.6) i (7.8) tylko części rzeczywiste otrzymamy dla pierwiastka $\mu + i\nu$ dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} x_k = (P_k \cos\nu t - Q_k \sin\nu t)\, e^{\mu t}, \\ x_k = (P_k \sin\nu t + Q_k \cos\nu t)\, e^{\mu t} \end{cases} \tag{7.9}$$

lub

$$\begin{cases} x_k = (\varphi_k \cos\nu t - \psi_k \sin\nu t)\, e^{\mu t}, \\ x_k = (\varphi_k \sin\nu t + \psi_k \cos\nu t)\, e^{\mu t}. \end{cases} \tag{7.10}$$

Te same rozwiązania odpowiadają pierwiastkowi $\mu - i\nu$.

---

[2]) Przy założeniu, że nie wszystkie podwyznaczniki rzędu $n-1$ wyznacznika $D(\lambda_i)$ są zerami, możemy stałe A_k wyrazić w postaci $A_k = l\,D_{jk}$, gdzie l jest dowolnym parametrem, zaś D_{jk} jest podwyznacznikiem elementu p_{jk} w wyznaczniku $D(\lambda)$ określonym równością (7.5), gdzie j jest stałe.

Całkę ogólną układu równań (7.4) wyrażamy za pomocą całek szczególnych typu (7.6) lub (7.8). Oznaczając całki szczególne przez $x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn}$, otrzymamy całkę ogólną

(7.11) $$x_k = C_1 x_{k1} + C_2 x_{k2} + ... + C_n x_{kn}.$$

Stałe $C_1, C_2, ..., C_n$ wyznaczamy z warunków początkowych. Dyskusja stateczności w przypadku równań liniowych, tj. w przypadku gdy równania pierwszego przybliżenia są zarazem równaniami ścisłymi ruchu, jest bardzo prosta. Wynika to stąd, że w całkach szczególnych występuje wyraz

$$e^{\lambda_i t} \quad \text{lub} \quad e^{\mu t}.$$

Otóż jasne jest, co następuje.

Jeżeli rzeczywiste części pierwiastków równania charakterystycznego są wszystkie ujemne, to ruch niezakłócony jest stateczny i to asymptotycznie (gdyż wtedy $x_k(t) \to 0$ przy $t \to \infty$). Jeżeli wśród pierwiastków równania charakterystycznego znajdują się pierwiastki z zerowymi częściami rzeczywistymi i jeżeli tym pierwiastkom odpowiadają rozwiązania typu tylko (7.6) lub (7.9) (A_k, P_k, Q_k są stałymi), to ruch jest stateczny, lecz nie asymptotycznie; natomiast jeżeli tym pierwiastkom odpowiadają rozwiązania typu (7.8) lub (7.10), to ruch jest niestateczny. Zagadnienie stateczności dla przypadków, gdy równania ruchu są nieliniowe [czyli funkcja X_k z równania (7.1) nie jest tożsamościowo równa zeru], rozwiązać można za pomocą twierdzeń Lapunowa podanych w następnym punkcie.

8. Twierdzenia Lapunowa o stateczności w pierwszym przybliżeniu

Twierdzenie 8. Jeżeli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego układu równań pierwszego przybliżenia (7.4) mają ujemne części rzeczywiste, to ruch niezakłócony jest asymptotycznie stateczny dla dowolnych wyrazów wyższych rzędów równania ruchu zakłóconego (7.1).

Dowód. Jako funkcję Lapunowa przyjmujemy funkcję $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ określoną równaniem

(8.1) $$\sum_{k=1}^{n} (p_{k1} x_1 + ... + p_{kn} x_n) \frac{\partial V}{\partial x_k} = U,$$

przy czym U oznacza jednorodną formę kwadratową względem $x_1 ... x_n$:

(8.2) $$U = -(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2).$$

Przy założeniach twierdzenia równanie różniczkowe (8.1) o pochodnych cząstkowych liniowe niejednorodne posiada jednoznacznie określone rozwiązanie, spełniające warunek

$$[V]_{x_i=0} = 0. \tag{8.3}$$

Wykażemy, że dla dowolnych wartości $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$, nierównych równocześnie zeru funkcja V przyjmuje tylko wartości dodatnie, czyli jest oznaczona dodatnio. Mianowicie wartości $x_{10}, \dots, x_{n0}$ możemy uważać za wartości początkowe funkcji $x_k(t)$ określonych równaniami

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1} x_1 + p_{k2} x_2 + \dots + p_{kn} x_n \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{8.4}$$

Na podstawie (3.5) wyznaczamy pochodną zupełną funkcji V względem czasu:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} (p_{k1} x_1 + \dots + p_{kn} x_n),$$

czyli

$$\frac{dV}{dt} = U. \tag{8.5}$$

Funkcja V nie może przyjmować wartości ujemnych, gdyż na podstawie twierdzenia 3 z p. 4 ruch niezakłócony odpowiadający równaniom (8.4) byłby niestateczny, co jest sprzeczne z założeniem, że równanie charakterystyczne układu (8.4) posiada pierwiastki tylko z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Ponieważ, jak wynika z (8.5) i (8.2), funkcja V jest monotonicznie malejąca, to nie może być równą zeru, gdyż pociągałoby to istnienie wartości ujemnych. Zatem funkcja V jest oznaczona dodatnio dla wszystkich wartości $x_k(t)$. Z ciągłości funkcji V wynika, że również w dowolnym punkcie $x_{10}, \dots, x_{n0}$ jest ona dodatnia.

Zbadamy teraz znak pochodnej zupełnej dV/dt dla wartości $x_k(t)$ określonych równaniami ruchu zakłóconego

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1} x_1 + \dots + p_{kn} x_n + \overline{X}_k. \tag{8.6}$$

Na podstawie (3.5) i (8.6) jest

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} (p_{k1} x_1 + \dots + p_{kn} x_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k,$$

czyli

$$\frac{dV}{dt} = U + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k. \tag{8.7}$$

Funkcja U jest według (8.2) oznaczona ujemnie. Rozwinięcie wyrażenia

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k$$

na szereg Taylora nie zawiera wyrazów rzędu niższego niż trzeci. Zatem w obszarze $|x_k| < h$ przy dostatecznie małym h jest spełnioną nierówność

$$|U| > \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k \right|.$$

Wynika stąd, że jeżeli U jest funkcją oznaczoną ujemnie, to również

$$U + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k = \frac{dV}{dt}$$

jest funkcją oznaczoną ujemnie. Jak widać, funkcja V spełnia założenia twierdzenia 2 z p. 4, w konsekwencji czego ruch niezakłócony jest asymptotycznie stateczny.

Twierdzenie 9. Jeżeli wśród pierwiastków równania charakterystycznego układu równań pierwszego przybliżenia (7.4) przynajmniej jeden ma dodatnią część rzeczywistą, to ruch niezakłócony jest niestateczny dla dowolnych wyrazów wyższych rzędów równania ruchu zakłóconego (7.1).

Dowód. Przyjmujemy funkcję Lapunowa $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ określoną równaniem

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{k1} x_1 + ... + p_{kn} x_n) \frac{\partial V}{\partial x_k} = U, \tag{8.8}$$

gdzie

$$U = -(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2). \tag{8.9}$$

Pochodna ze względu na układ równań

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1} x_1 + p_{k2} x_2 + ... + p_{kn} x_n \tag{8.10}$$

wyraża się wzorem

$$\frac{dV}{dt} = U. \tag{8.11}$$

Funkcja V jest zatem monotonicznie malejąca.

Wykażemy, że istnieją wartości $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, dla których funkcja V przyjmuje wartość ujemną. Gdyby bowiem funkcja V była oznaczona dodatnio, to na podstawie twierdzenia 2 ruch niezakłócony odpowiadający równaniom (8.10) byłby asymptotycznie stateczny, co jest sprzeczne z założeniami.

Funkcja V przyjmuje zatem wartości zerowe, a ponieważ jest monotoniczna, przyjmuje również wartości ujemne. Pochodna funkcji V ze względu na układ równań

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1} x_1 + \ldots + p_{kn} x_n + \overline{X}_k \tag{8.12}$$

jest

$$\frac{dV}{dt} = U + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k, \tag{8.13}$$

czyli, podobnie jak w poprzednim twierdzeniu, jest oznaczona ujemnie dla $|x_k| < h$ przy dostatecznie małym h.

Jak widać, funkcja V spełnia założenia twierdzenia 3, co w konsekwencji pociąga za sobą to, że ruch jest niestateczny.

Dowód powyższy wymaga pewnego uzupełnienia. Mianowicie, jeżeli wśród pierwiastków równania charakterystycznego znajduje się jeden pierwiastek zerowy, to równanie (8.8) może nie mieć jednoznacznie określonego rozwiązania. W tym przypadku funkcję L a p u n o w a przyjmujemy jako funkcję określoną równaniem

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{k1} x_1 + \ldots + p_{kn} x_n) \frac{\partial V}{\partial x_k} = \gamma V + U, \tag{8.14}$$

gdzie

$$U = -(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \tag{8.15}$$

oraz γ jest liczbą dodatnią. Łatwo wykazać, że V przyjmuje również wartości ujemne. Pochodną funkcji V ze względu na równania (8.12) jest

$$\frac{dV}{dt} = \gamma V + U + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k \tag{8.16}$$

i jest, przy dostatecznie małym γ i h, funkcją oznaczoną ujemnie. Zatem i w tym przypadku na podstawie twierdzenia 4 ruch jest niestateczny.

Funkcja $\overline{V}$ w (4.11) jest tutaj równa

$$\overline{V} = U + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \overline{X}_k .$$

Twierdzenie 10. Jeśli równanie charakterystyczne układu równań pierwszego przybliżenia nie posiada pierwiastków z rzeczywistymi częściami dodatnimi, natomiast posiada pierwiastki z częściami rzeczywistymi równymi zeru, to wyrazy wyższych rzędów równania ruchu zakłóconego (7.1) można tak dobrać, aby otrzymać ruch stateczny albo niestateczny. Przykładem może być tutaj zadanie rozwiązane w p. 6 [równania ruchu zakłóconego (6.4)].

9. Kryterium Routha-Hurwitza

Z poprzedniego p. wynika, że dla badania zagadnień stateczności konieczna jest znajomość znaków rzeczywistych części pierwiastków równań algebraicznych. W szczególności ważne są warunki, przy których pierwiastki mają części rzeczywiste ujemne. Zagadnieniem tym zajmowali się Routh i Hurwitz. Ustalili oni warunki konieczne i wystarczające, przy których wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego mają rzeczywiste części ujemne. Warunki te znane są pod nazwą kryterium Routha-Hurwitza. Podamy je tutaj bez dowodu w formie przedstawionej przez Hurwitza.

Twierdzenie 11. Dane jest równanie n-tego stopnia

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 . \tag{9.1}$$

Ze współczynników ustawiamy wyznaczniki

$$D_1 = a_1, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{vmatrix} = a_n D_{n-1},$$

przy czym $a_i = 0$, jeśli $i > n$.

Wszystkie pierwiastki równania (9.1) mają części rzeczywiste ujemne, jeżeli wszystkie wyznaczniki są dodatnie, czyli jeśli

$$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ \ldots,\ D_{n-1} > 0,\ D_n > 0$$

(lub prościej

$$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ \ldots,\ D_{n-1} > 0\,,\ a_n > 0).$$

Warunek ten jest konieczny i wystarczający.

W przypadku równania stopnia trzeciego

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

otrzymamy warunki

$$(9.2) \qquad a_1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0\,, \qquad a_3 > 0\,.$$

Dla równania stopnia czwartego

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

otrzymamy warunki następujące:

$$a_1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0\,, \qquad a_4 > 0\,,$$

czyli

$$a_1 > 0\,, \qquad a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0\,,$$

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0\,, \qquad a_4 > 0\,.$$

Na podstawie warunku czwartego wynika z warunku trzeciego

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) > a_4 a_1^2 > 0\,.$$

Zatem drugi warunek może być zastąpiony warunkiem $a_3 > 0$. Ostatecznie dla równania stopnia czwartego mamy warunki

$$(9.3) \qquad a_1 > 0\,, \qquad a_3 > 0\,, \qquad a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0, \qquad a_4 > 0.$$

10. Inne kryteria

W związku z badaniem pewnych układów elektrycznych N y q u i s t, [13], wyprowadził kryterium stateczności w pierwszym przybliżeniu nie wymagające obliczania wyznaczników H u r w i t z a. Kryterium to zostało uzupełnione i rozszerzone na układy automatycznej regulacji maszyn przez M i c h a j ł o w a. Podamy je tutaj w formie różniącej się nieznacznie od formy spotykanej w literaturze.

Rozpatrzmy funkcję

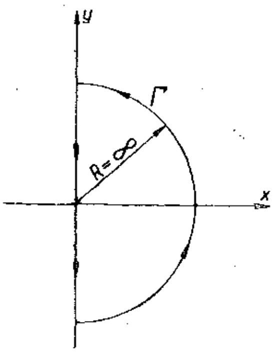
$$K(\lambda) = \frac{1}{a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n}, \tag{10.1}$$

przy czym

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

jest lewą stroną równania charakterystycznego pierwszego przybliżenia (7.5). Funkcję $K(\lambda)$ będziemy uważali za pewną funkcję $w(z)$ zmiennej zespolonej $z = x + iy$

$$w(z) = \frac{1}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}. \tag{10.2}$$



Rys. 2

Jak wiemy, koniecznym warunkiem stateczności układu są ujemne części rzeczywiste pierwiastków równania

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0. \tag{10.3}$$

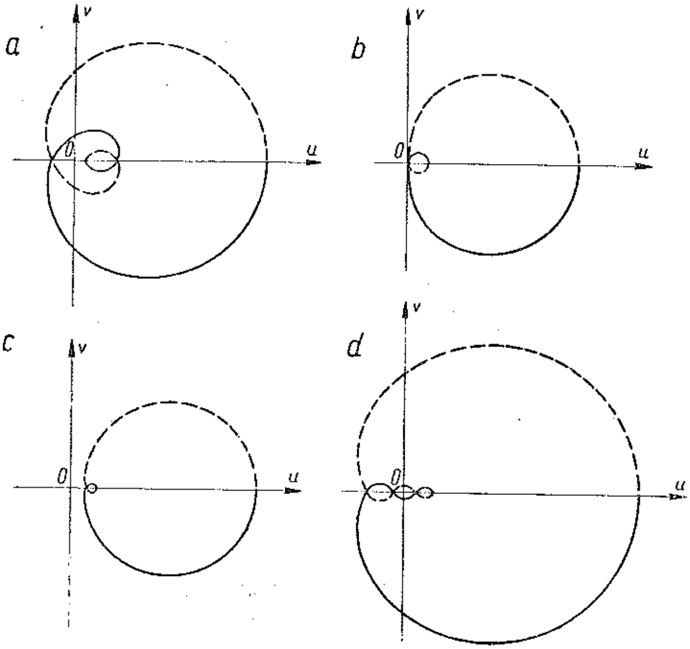
Wynika z tego bezpośredni wniosek, że funkcja $w(z)$ w przypadku układu statecznego nie posiada biegunów w prawej półpłaszczyźnie xy. A zatem jeżeli weźmiemy pod uwagę kontur Γ na płaszczyźnie xy (rys. 2), to przy przejściu wzdłuż tego konturu argument zmiennej w nie zmienia się.

Odwzorowanie konturu Γ na płaszczyznę $w = u + iv$ otrzymamy w formie krzywej S określonej równaniem

$$w(iy) = \frac{1}{a_0(iy)^n + a_1(iy)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}iy + a_n}. \tag{10.4}$$

Ponieważ przyrost argumentu w wzdłuż krzywej S musi być równy zeru, warunkiem stateczności jest położenie punktu $w = 0$ poza obszarem ograniczonym konturem S.

Na rysunku 3*a* przedstawiona jest krzywa *S* dla układu niestatecznego, na rys. 3*b* — krzywa *S* dla układu w stanie krytycznym; rys. 3*a* i 3*b* przedstawiają krzywe *S* dla układów statecznych. Linie ciągłe odpowiadają wartościom $y > 0$, linie przerywane odpowiadające $y < 0$ są do nich symetryczne.



Rys. 3

Niezależnie od powyższego w r. 1938 Michajłow wyprowadził inaczej sformułowane kryterium w zastosowaniu do układów automatycznej regulacji. Znaleźć je można nie tylko w wymienionej pracy Michajłowa, lecz również na przykład w podręczniku [12].

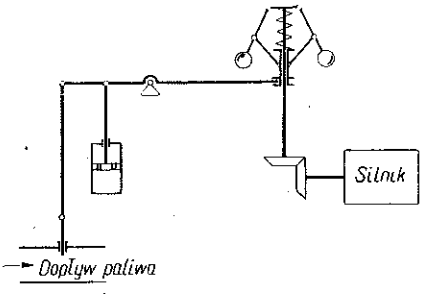
11. Przykłady

Rozpatrzmy najpierw najprostszy typ regulatora przedstawiony schematycznie na rys. 4.

Oznaczając przez φ odchylenie prędkości kątowej wału silnika od stanu ustalonego oraz przez η odchylenie tachometru możemy napisać równania ruchu zakłóconego w postaci

$$(11.1) \qquad T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \delta \eta = \varphi, \qquad T_a \dot{\varphi} + \Theta \varphi = -\eta,$$

przy czym parametry T_r^2, T_k, δ charakteryzują dynamiczne własności tachometru, natomiast T_a, Θ własności silnika.



Rys. 4

Równanie charakterystyczne ma postać

$$T_r^2 T_a \lambda^3 + (T_a T_k + T_r^2 \Theta)\lambda^2 + + (\delta T_a + \Theta T_k)\lambda + \delta\Theta + 1 = 0 . \tag{11.2}$$

Warunki Routha-Hurwitza są następujące (por. p. 9):

$$\begin{cases} T_r^2 T_a > 0, & (T_a T_k + T_r^2 \Theta) > 0, \\ (\delta T_a + \Theta T_k) > 0, & \delta\Theta > 0 \end{cases} \tag{11.3}$$

oraz

$$T_a^2 T_k \delta + T_a T_k^2 \Theta + \Theta^2 T_r^2 T_k - T_r^2 T_a > 0 . \tag{11.4}$$

Nierówności (11.3) są spełnione zawsze. Z nierówności (11.4) otrzymamy następujące określenie granicy stateczności:

$$\frac{T_a T_k \delta}{T_r^2} + \frac{T_k^2 \Theta}{T_r^2} + \frac{\Theta^2 T_k}{T_a} = 1 . \tag{11.5}$$

Wynika z niego, że należytą stateczność układu można uzyskać przez dobór dużych wartości δ i T_k (to znaczy zmniejszenie czułości regulatora i zwiększenie tłumienia) oraz małych T_r^2 (tzn. małej bezwładności tachometru). Zbadamy jeszcze, jaki wpływ na stateczność ma parametr T_a («czas rozbiegu» silnika). Traktując lewą stronę równania (11.5) jako funkcję T_a znajdziemy przez różniczkowanie, że osiąga ona minimum przy

$$T_a^2 = \frac{\Theta^2 T_r^2}{\delta} . \tag{11.6}$$

W celu zwiększenia stateczności należy wielkość T_a dobrać tak, aby możliwie dużo różniła się od wartości (11.6).

Rozpatrzmy teraz układ z siłownikiem regulacyjnym bez odwodzenia (rys. 5).

Równania ruchu zakłóconego mają postać

$$T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \delta\eta = \varphi, \qquad T_s \dot{\mu} = \eta, \qquad T_a \dot{\varphi} + \Theta\varphi = -\mu. \tag{11.7}$$

Oznaczenia przyjęto takie same, jak w przykładzie poprzednim, a ponadto T_s i μ oznaczają parametr i argument siłownika.

Równanie charakterystyczne jest

$$T_a T_s T_r^2 \lambda^4 + T_s(\Theta T_r^2 + T_a T_k)\lambda^3 + T_s(\delta T_a + \Theta T_k)\lambda^2 + \delta\Theta T_s \lambda + 1 = 0. \tag{11.8}$$

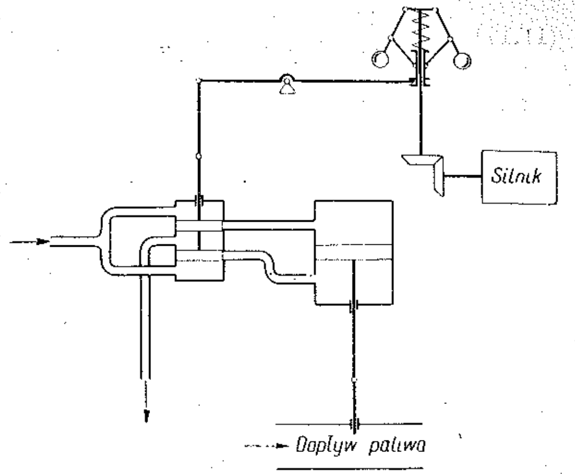
Warunki Routha-Hurwitza będą spełnione, jeżeli spełniona będzie nierówność

(11.9) $$(\Theta T_r^2 + T_a T_k) \times [\delta \Theta T_s (\delta T_a + \Theta T_k) - (\Theta T_r^2 + T_a T_k)] - \delta^2 \Theta^2 T_s T_a T_r^2 > 0.$$

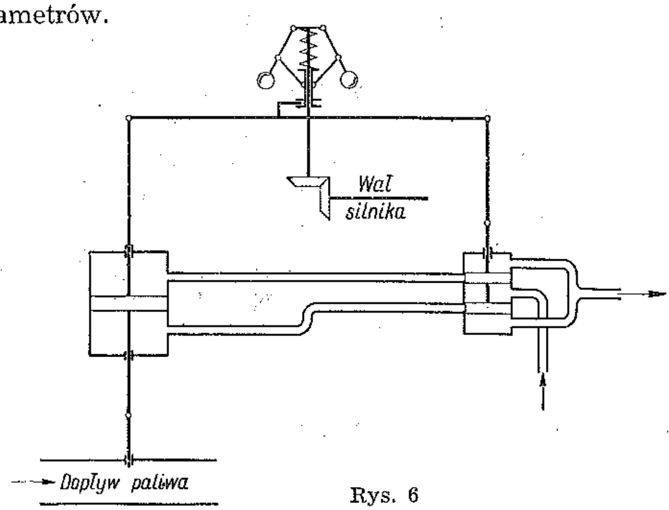
Wynikają z niej dwa wnioski:

(a) aby układ był stateczny, musi być koniecznie $T_k \neq 0$ i możliwie duże,

(b) w przypadku gdy $\Theta = 0$, co oznacza, że silnik nie posiada zdolności samoczynnego wyrównania prędkości kątowej ruchu, układ regulacyjny jest niestateczny przy dowolnych wartościach innych parametrów.



Rys. 5



Rys. 6

Przy silnikach, dla których $\Theta = 0$, jedynie statecznym typem regulatora jest układ z odwodzeniem (rys. 6).

Z równań ruchu zakłóconego

(11.10) $$\begin{cases} T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \delta \eta = \varphi, \\ T_s \dot{\mu} + \mu = \eta, \\ T_a \dot{\varphi} = -\mu \end{cases}$$

można wyprowadzić równanie charakterystyczne

$$\lambda^4+\left(\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}+\frac{T_k}{T_s\,\delta}\right)\lambda^3+\frac{T_k}{\delta T_r^2}\left(1+\frac{T_k}{\delta T_s}\right)\lambda^2+\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}\frac{T_k}{\delta T_s}\lambda+\frac{T_k}{\delta T_s}\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}\frac{T_k}{\delta T_a}=0 \tag{11.11}$$

oraz warunek stateczności

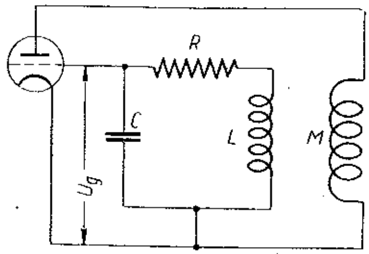
$$\left(\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}+\frac{T_k}{\delta T_s}\right)\left[\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}\left(1+\frac{T_k}{\delta T_s}\right)\right]\frac{T_k^2}{\delta^2 T_r^2 T_s}-\left(\frac{T_k^2}{\delta T_r^2}+\frac{T_k}{\delta T_s}\right)\frac{T_k^4}{\delta^4 T_s T_r T_a}-\frac{T_k^6}{\delta^4 T_r^4 T_s^2}>0. \tag{11.12}$$

Jak widać, koniecznym warunkiem stateczności jest istnienie tłumienia T_k.

Wszystkie powyższe rozważania dotyczące stateczności układów mechanicznych oraz wyprowadzone kryteria mogą być rozszerzone na układy elektryczne. Rozpatrzmy tu najprostszy przykład generatora triodowego o sprzężeniu zwrotnym. Schemat generatora przedstawiony jest na rys. 7. Układ rezonansowy włączony jest w obwód siatki.

Charakterystykę lampy przyjmujemy w postaci

$$i_a=Su_g+f(u_g), \tag{11.13}$$



Rys. 7

przy czym $f(u_g)$ nie zawiera w swoim rozwinięciu wyrazów stopnia niższego niż drugi. Zatem przy rozpatrywaniu zagadnienia w pierwszym przybliżeniu $f(u_g)$ może być pominięte. Potencjał siatki u_g wyrażamy przez ładunek kondensatora q

$$u_g=\frac{q}{C}. \tag{11.14}$$

Zmiana natężenia prądu anodowego i_a powoduje w obwodzie rezonansowym siłę elektromotoryczną o wielkości

$$-M\frac{di_a}{dt}. \tag{11.15}$$

Zatem równanie drgań w obwodzie rezonansowym ma postać

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}=-M\frac{di_a}{dt}. \tag{11.16}$$

Wykorzystując liniową część równania (11.13) oraz zależność (11.14) otrzymamy

$$L\ddot{q}+\left(R+\frac{MS}{C}\right)\dot{q}+\frac{1}{C}q=0. \tag{11.17}$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$L\lambda^2 + \left(R + \frac{MS}{C}\right)\lambda + \frac{1}{C} = 0. \tag{11.18}$$

Kryteria stateczności stanu $q \equiv 0$ są więc

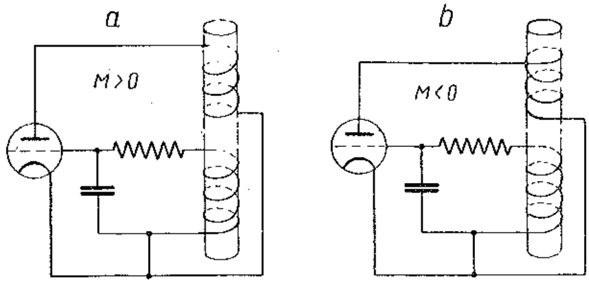
$$R + \frac{MS}{C} > 0, \quad CL > 0. \tag{11.19}$$

Drugi z tych warunków jest zawsze spełniony. Zatem, aby układ był generatorem drgań, musi być

$$RC + MS < 0. \tag{11.20}$$

Stąd wniosek, że musi być $M < 0$ oraz musi być MS dostatecznie duże co do bezwzględnej wartości

$$|MS| > RC. \tag{11.21}$$



Rys. 8

Warunek ilustruje rys. 8*a* i 8*b*. Układ na rys. 8*a* nie jest generatorem, gdyż $M > 0$; natomiast układ na rys. 8*b* może być generatorem, gdyż $M < 0$.

Literatura cytowana w tekście

[1] A. M. Lapunow, *Obszczaja zadacza ob ustojcziwosti dwiżenja*, 1892, nast. wyd. 1935, 1950.

[2] N. G. Czetajew, *Ustojcziwost' dwiżenja*, 1946.

[3] I. G. Małkin, *Tieorja ustojcziwosti dwiżenja*, 1952.

[4] G. N. Duboszin, *Osnowy tieorji ustojcziwosti dwiżenja*, 1952.

[5] E. J. Routh, *On the Stability of a Given State of Motion*, 1877.

[6] A. Hurwitz, *Über die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, Math. Ann. 46, 1896.

[7] W. W. Stiepanow, *Kurs diffierienojalnych urawnienij*, 1950.

[8] W. W. Niemycki i W. W. Stiepanow, *Kaczestwiennaja tieorja diffierienojalnych urawnienij*, 1949.

[9] I. G. Pietrowski, *Lekcji po tieorji obyknowiennych diffieriencjalnych urawnienij,* 1949.

[10] E. Kamke, *Differentialgleichungen,* t. 1 i 2, 1944.

[11] L. G. Łojcjański i A. I. Łurie, *Kurs tieorieticzeskoje miechaniki,* 1948.

[12] Z. Sz. Błoch, *Dinamika liniejnych sistiem awtomaticzeskowo riegulirowanja maszin,* 1952.

[13] H. Nyquist, *Regeneration Theory,* Bell. System, Techn. Journ. 11 (1932).

Резюме

МЕТОДЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

В работе приводятся основные теоремы и методы теории устойчивости движения, ограничиваясь при этом устойчивостью в смысле Ляпунова и приведением очерка его теории.

В отдельных главах работы рассматриваются следующие вопросы:

(1) основные понятия и дефиниции, а также общая характеристика методов исследования устойчивости;

(2) теоремы Ляпунова для установившихся и неустановившихся движений. Эти теоремы приводятся в некотором сокращении, основываясь на фундаментальном труде Ляпунова с 1892 г.;

(3) теоремы об устойчивости в первом приближении, критерии Рауса и Гурвица и критерий Никвиста; приводится несколько примеров исследования устойчивости в первом приближении и при помощи общих теорем Ляпунова.

Summary

METHODS OF THE THEORY OF STABILITY OF MOTION

Basic theorems and methods of the theory of stability of motion are discussed. The considerations are confined chiefly to stability as presented by Lyapunov and to the principles of this theory.

The following problems are treated in the successive sections.

(1) Basic notions, definitions and general characteristics of investigation methods of stability.

(2) Lyapunov's theorems for steady and unsteady motion. These are treated somewhat briefly, on the basis of the fundamental work of Lyapunov (1892).

(3) The stability theorems in the first approximation, the criteria of Routh and Hurwitz and the criterion of Nyquist are discussed. Also some examples are given of stability investigations in the first approximation and by means Lyapunov's general theorems.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 maja 1954 r.