

ALEKSANDER KORNECKI

CIENKOŚCIENNA POWŁOKA TOROIDALNA
OBCIĄŻONA RÓWNOMIERNYM CIŚNIENIEM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XLIII

rozwiązanie równania niejednorodnego podali wspomniani autorzy w postaci szeregu trygonometrycznego, co obniża praktyczną wartość rozwiązania. Zauważmy przy tym, że zbieżność szeregu jest tym lepsza, im grubsze są ścianki powłoki, gdy tymczasem dokładność asymptotycznego rozwiązania równania jednorodnego maleje przy wzroście grubości ścianek.

W pracy niniejszej usunięto wspomniany brak rozwiązania W. W. Nowożyłowa wyznaczając całkę szczególną równania niejednorodnego również metodą asymptotyczną i uzyskując w ten sposób łącznie z całką ogólną W. W. Nowożyłowa dla równania jednorodnego pełne rozwiązanie w postaci funkcyjnej. Przy tym dokładność rozwiązania jest tym większa, im cieńsza jest powłoka. Dla rozwiązania wykorzystano wywody R. Clarka i E. Reissnera, zawarte w pracy [1], omawiającej zginanie krzywych rur cienkościennych (zadanie Kármána). Dlatego też tę metodę obliczania torusa można nazwać metodą Nowożyłowa-Reissnera.

Przedstawiona metoda jest wystarczająco dokładna przy dostatecznie cienkich ściankach powłoki. Dzięki uzyskaniu rozwiązania w postaci funkcyjnej może ta metoda znaleźć szerokie zastosowanie w praktyce inżynierskiej.

W celu możliwie wszechstronnego naświetlenia osobliwości powłoki toroidalnej omówiono szczegółowo stan napięcia i odkształcenia torusa według teorii błonowej.

Wyprowadzenie zasadniczego równania różniczkowego teorii zgięciowej znane jest z klasycznej pracy E. Meissnera, [6]. W pracy niniejszej wyprowadzono to równanie mniej znaną metodą «napięć zespolonych» W. W. Nowożyłowa, [7], która, jak wykazano, prowadzi do identycznych rezultatów z dokładnością do dających się pominąć składników.

W zakończeniu pracy zilustrowaliśmy metodę konkretnymi przykładami liczbowymi.

1. Równania podstawowe

Punktem wyjścia wywodów zawartych w pracy jest teoria powłok cienkościennych, opracowana przez A. E. H. Love'a, [5], na podstawie znanej hipotezy G. Kirchhoffa. Dla jasności przytaczamy poniżej podstawowe równania wzmiankowanej teorii.

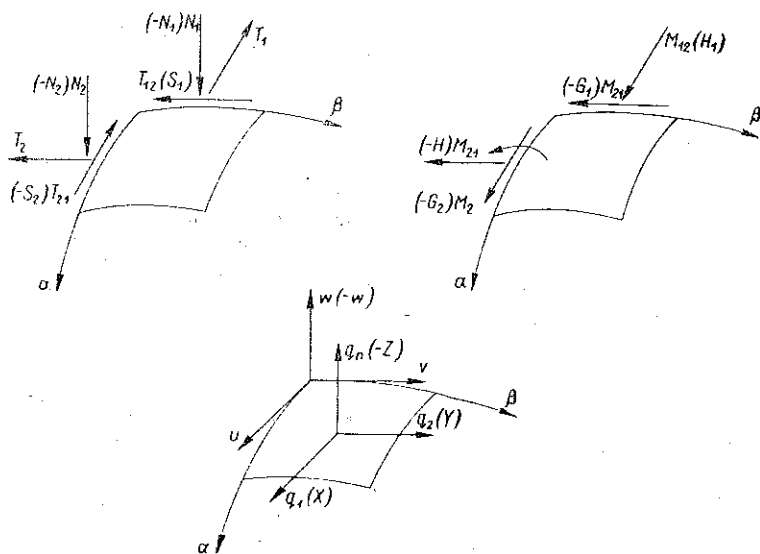
(1) Równania równowagi ([5], s. 566 i 542)¹⁾:

¹⁾ Cytat według tłumaczenia rosyjskiego z 1935 roku.

$$(1.1) \begin{cases} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BT_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AT_{21})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} T_{12} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 \right] + \frac{N_1}{R_1} + q_1 = 0, \\ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BT_{12})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AT_2)}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_{21} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 \right] + \frac{N_2}{R_2} + q_2 = 0, \\ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BN_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_2)}{\partial \beta} \right] - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + q_n = 0; \end{cases}$$

$$(1.2) \begin{cases} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BM_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{21})}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 \right] - N_1 = 0, \\ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BM_{12})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_2)}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{21} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 \right] - N_2 = 0, \\ T_{12} - T_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0. \end{cases}$$

W równaniach tych symbole $T_1, T_2, T_{12}, T_{21}, N_1$ i N_2 oznaczają napiecia, a M_1, M_2, M_{12} i M_{21} momenty przypadające na jednostkę długości przekroju powłoki (dodatnie kierunki napieć i momentów przedstawiono na rys. 2); α i β są to linie głównej krzywizny środkowej powierzchni



Rys. 2

powłoki, tworzące na tej powierzchni układ współrzędnych krzywoliniowych, A i B współczynniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni, R_1 i R_2 promienie główne krzywizny środkowej powierzchni powłoki,

q_1 , q_2 i q_n składowe obciążenia (powierzchniowego) przypadające na jednostkę pola środkowej powierzchni powłoki (rys. 2).

Należy zauważyć, że w przytoczonych wyżej równaniach użyto nieco innych oznaczeń niż podane w cytowanej książce. Na rys. 2 podane zostały w nawiasach oznaczenia L o v e' a.

W przypadku zagadnienia kołowo symetrycznego (tj. gdy żadna wielkość nie zależy od współrzędnej β) i przy działaniu na powłokę wyłącznie ciśnienia p , tj. gdy

$$(1.3) \quad q_1 = q_2 = 0, \quad q_n = p,$$

równania (1.1) i (1.2) znacznie się upraszczają przyjmując następującą postać:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BT_1)}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a} T_2 \right] + \frac{N_1}{R_1} = 0, \\ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BN_1)}{\partial a} \right] - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + p = 0, \\ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BM_1)}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a} M_2 \right] - N_1 = 0. \end{cases}$$

Pozostałe trzy równania równowagi spełnione są tożsamościowo.

(2) Związki między składowymi stanu napięcia i składowymi stanu odkształcenia ([5], s. 557)²:

$$(1.5) \quad \begin{cases} T_1 = \frac{E \delta}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), & T_2 = \frac{E \delta}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \\ M_1 = \frac{E \delta^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_1 + \nu \kappa_2), & M_2 = \frac{E \delta^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_2 + \nu \kappa_1). \end{cases}$$

Jeśli wyrazić odkształcenia w zależności od napięć, to równania (1.5) przyjmą postać:

$$(1.6) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E \delta} (T_1 - \nu T_2), & \varepsilon_2 = \frac{1}{E \delta} (T_2 - \nu T_1), \\ \kappa_1 = \frac{12}{E \delta^3} (M_1 - \nu M_2), & \kappa_2 = \frac{12}{E \delta^3} (M_2 - \nu M_1). \end{cases}$$

Symbole ε_1 i ε_2 oznaczają odpowiednio jednostkowe wydłużenia linii a i β ; κ_1 i κ_2 zmiany krzywizn głównych $1/R_1$ i $1/R_2$ w wyniku odkształcenia

² Wszystkie dalsze zależności przytoczone w tym p. odnoszą się do zagadnień kołowo symetrycznych.

powłoki; E i ν moduł sprężystości podłużnej i liczbę Poissona; δ grubość ścianek powłoki, którą przyjęto za stałą:

$$(1.7) \quad \delta = \text{const.}$$

(3) Zależności między odkształceniami i przemieszczeniami:

$$(1.8) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{du}{da} - \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_2 = \frac{u}{AB} \frac{dB}{da} - \frac{w}{R_2}, \\ \kappa_1 = \frac{1}{A} \frac{d\vartheta}{da}, & \kappa_2 = \frac{1}{AB} \frac{dB}{da} \vartheta. \end{cases}$$

W równaniach tych u i w oznaczają składowe przesunięcia (rys. 2) punktów środkowej powierzchni w wyniku odkształcenia powłoki, ϑ kąt obrotu normalnej do powierzchni około równoleżnika, wynoszący

$$(1.9) \quad \vartheta = -\frac{1}{A} \frac{dw}{da} + \frac{u}{R_1}.$$

(4) Dla zrozumienia dalszych wywodów niezbędna jest znajomość kilku zależności z zakresu teorii powierzchni³⁾.

Pomiędzy współczynnikami A, B, R_1 i R_2 charakteryzującymi powierzchnię zachodzą następujące związki zwane warunkami Codaz z i'ego - Gaussa:

$$(1.10) \quad \frac{d}{da} \left(\frac{B}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{dB}{da}, \quad \frac{d}{da} \left(\frac{1}{A} \frac{dB}{da} \right) = -\frac{AB}{R_1 R_2}.$$

W przypadku powierzchni obrotowej mamy

$$(1.11) \quad A = R_1, \quad B = R_2 \sin \alpha$$

i równania (1.10) sprowadzają się do jednej zależności

$$(1.12) \quad \frac{d}{da} (R_2 \sin \alpha) = R_1 \cos \alpha.$$

2. Teoria błonowa

Jeśli w powłoce obrotowej panuje błonowy stan napięcia, wówczas równania równowagi (1.1) i (1.2) przy uwzględnieniu zależności (1.11) i (1.12) sprowadzają się do układu trzech równań⁴⁾:

³⁾ Por. np. [16].

⁴⁾ Wielkości odnoszące się do błonowego stanu napięcia oznaczono u góry gwiazdką.

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1^*}{\partial \alpha} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_2} (T_1^* - T_2^*) + \frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial S^*}{\partial \beta} + q_1 = 0, \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial S^*}{\partial \alpha} + 2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_2} S^* + \frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial T_2^*}{\partial \beta} + q_2 = 0, \\ \frac{T_1^*}{R_1} + \frac{T_2^*}{R_2} = q_n, \end{cases}$$

gdzie $S^* = T_{12}^* = T_{21}^*$.

Eliminując niewiadomą T_2^* z układu równań (2.1) i wprowadzając do otrzymanych zależności funkcje pomocnicze

$$(2.2) \quad U^* = T_1^* R_2 \sin^2 \alpha, \quad V^* = S^* R_2^2 \sin^2 \alpha,$$

otrzymujemy po szeregu przekształceń następujące równanie różniczkowe dla wyznaczenia funkcji U^* :

$$(2.3) \quad K \frac{\partial^2 U^*}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{(R_2 \sin \alpha)^2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R_2^2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{R_2^2 \sin \alpha}{R_1} \right) \frac{\partial U^*}{\partial \alpha} = \frac{R_1}{(R_2)^2} f(\alpha, \beta),$$

gdzie

$$(2.4) \quad f(\alpha, \beta) = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} [(q_n \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) R_2^2 \sin^2 \alpha] + \\ + R_2 \left(\frac{\partial^2 q_n}{\partial \beta^2} + \frac{\partial q_n}{\partial \beta} \sin \alpha \right),$$

$$(2.5) \quad K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Współczynnik K nazywa się krzywizną Gaussa na powierzchni albo krótko krzywizną powierzchni.

Obliczenie (dowolnej) powłoki obrotowej sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego (2.3). Charakterystyki⁵⁾ równania jednorodnego odpowiadającego równaniu (2.3) są krzywymi całkowymi równania

$$(2.6) \quad K (d\alpha)^2 + \frac{1}{(R_2 \sin \alpha)^2} (d\beta)^2 = 0.$$

Typ równania różniczkowego (2.3) określony jest przez znak wyznacznika Δ równania charakterystyk (2.6):

$$(2.7) \quad \Delta = -K \frac{1}{(R_2 \sin \alpha)^2}.$$

⁵⁾ Potrzebne wiadomości z równań różniczkowych cząstkowych znajdzie czytelnik np. w [17].

Stwierdzamy więc, że podstawowe równanie różniczkowe (2.3) teorii błonowej powłok obrotowych jest eliptyczne, gdy $K > 0$, paraboliczne, gdy $K = 0$ i hiperboliczne, gdy $K < 0$.

W przypadku powierzchni toroidalnej o przekroju kołowym (rys. 1)

$$(2.8) \quad R_1 = \varrho,$$

$$(2.9) \quad R_2 = \frac{R + \varrho \sin \alpha}{\sin \alpha},$$

a więc

$$(2.10) \quad K = \frac{\sin \alpha}{\varrho (R + \varrho \sin \alpha)}.$$

Z równości (2.10) wynika, że równoleżniki $\alpha = 0$ i $\alpha = \pi$ dzielą środkową powierzchnię torusa na obszary, w których równanie (2.3) jest odpowiednio typu eliptycznego lub hiperbolicznego. Wzdłuż wymienionych równoleżników równanie (2.3) jest paraboliczne.

Cechą wyróżniającą powłokę toroidalną spośród innych powłok obrotowych jest zmienność znaku krzywizny Gaussa. Linie $\alpha = 0$ i $\alpha = \pi$ będziemy nazywali liniami osobliwymi torusa.

Przechodząc do omawianego w pracy zagadnienia rozpatrzmy część powłoki toroidalnej (rys. 1), obciążoną równomiernym ciśnieniem i zamocowaną w taki sposób, że odpowiednie warunki brzegowe nie zależą od współrzędnej β . Wówczas ze względu na symetrię kołową spełnione jest równanie $\partial T_2^* / \partial \beta = S^* = 0$.

Z równań równowagi (2.1) przy uwzględnieniu zależności (2.8) i (2.9) i po wykonaniu prostych działań otrzymujemy

$$(2.11) \quad T_1^* = \frac{p \varrho}{2} \frac{2 + \lambda \sin \alpha}{1 + \lambda \sin \alpha} \frac{\lambda C_1}{(1 + \lambda \sin \alpha) \sin \alpha}, \quad T_2^* = \frac{p \varrho}{2} + \frac{C_1}{\sin^2 \alpha},$$

gdzie

$$(2.12) \quad \lambda = \frac{\varrho}{R},$$

a C_1 jest stałą całkowania.

Stałą C_1 wyznacza się z warunków brzegowych i w ogólnym przypadku nie jest ona równa zero. Ze wzorów (2.11) wynika wobec tego, że wzdłuż linii osobliwych napięcia są nieskończenie duże, a zatem wzory te nie dają nawet przybliżonych wartości napięć w powłoce, a szczególnie w tych częściach powłoki, które przylegają do linii osobliwych.

Stwierdzamy więc, że warunkiem koniecznym istnienia błonowego stanu napięcia jest obciążenie jednej z krawędzi tak dobranymi siłami, aby

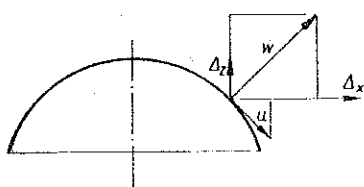
$$(2.13) \quad C_1 = 0.$$

Warunek ten jest konieczny, ale bynajmniej nie wystarczający dla istnienia błonowego stanu napięcia.

Istotnie, rozpatrzmy przesunięcia punktów powłoki. Zgodnie ze wzorami (1.8), (1.11), (2.8) i (2.9) mamy

$$(2.14) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{du}{da} + w \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R(1 + \lambda \sin a)} (u \cos a + w \sin a).$$

Jeśli zamiast składowych przemieszczenia w układzie prostokątnym u i w wprowadzimy składowe Δ_z i Δ_x odpowiednio w kierunku osi i promienia (rys. 3), wynoszące



Rys. 3

$$(2.15) \quad \begin{cases} \Delta_z = w \cos a - u \sin a, \\ \Delta_x = u \cos a + w \sin a, \end{cases}$$

wówczas z drugiej zależności (2.14) przy uwzględnieniu (1.6) wynika

$$(2.16) \quad \Delta_x = \frac{R(1 + \lambda \sin a)}{E \delta} (T_2 - \nu T_1)$$

i wobec wzorów (2.11) przy wypełnieniu warunku (2.13) mamy

$$(2.17) \quad \Delta_x^* = \frac{p \rho}{2E \delta} [(1 - 2\nu)R + (1 - \nu)\rho \sin a].$$

Różniczkując obustronnie równości (2.15) względem a znajdziemy

$$(2.18) \quad \frac{d \Delta_z}{d a} \sin a = \frac{d \Delta_x}{d a} \cos a - \rho \varepsilon_1,$$

a po scałkowaniu i uwzględnieniu zależności (1.6) i (2.17) otrzymamy dla $a \geq 0$

$$(2.19.1) \quad \Delta_z^* = \frac{p \rho^2}{2E \delta} \left[(1 - \nu) \cos a - \ln \operatorname{tg} \frac{a}{2} + \lambda \int \frac{d a}{1 + \lambda \sin a} \right],$$

a dla $a \leq 0$

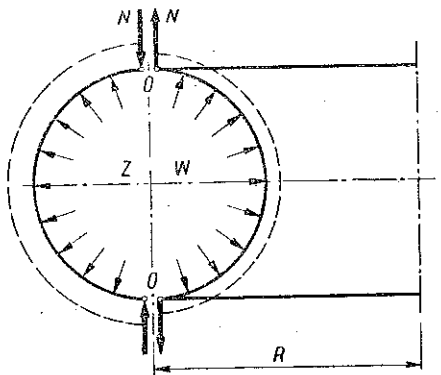
$$(2.19.2) \quad \Delta_z^* = \frac{p \rho^2}{2E \delta} \left[(1 - \nu) \cos a - \ln \operatorname{tg} \left(-\frac{a}{2} \right) - \lambda \int \frac{d a}{1 + \lambda \sin a} \right].$$

Z wyprowadzonych wzorów (2.19.1) i (2.19.2) wynika, że według teorii błonowej przesunięcia Δ_z^* punktów leżących na liniach osobliwych są nieskończenie duże, co jest oczywiście fizycznie niemożliwe. A zatem nawet przy wypełnianiu warunku (2.13) niemożliwy jest błonowy stan napięcia w powłoce toroidalnej zawierającej linie osobliwe.

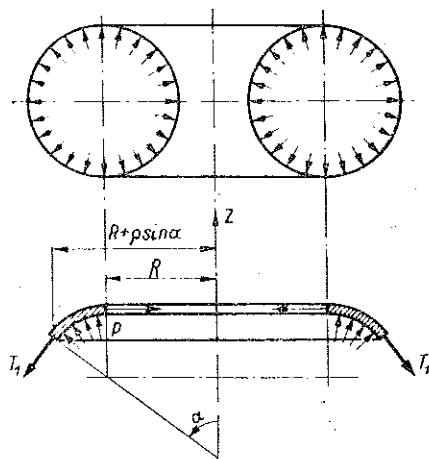
Wyżej naświetlono istotę osobliwości torusa z punktu widzenia matematycznego, wykazując że wzdłuż linii osobliwych zmienia się znak

krzywizny G a u s s a, a tym samym ulega zmianie typ zasadniczego równania teorii błonowej (2.3).

Dla objaśnienia fizykalnej strony zjawiska rozetniemy torus na części zewnętrzną Z i wewnętrzną W za pomocą walca o promieniu R , jak pokazano na rys. 4. Część powłoki Z jako posiadająca większe pole poddana jest działaniu większej siły aniżeli część W . Wskutek tego przesunięcie osiowe punktu O (rys. 4) jako leżącego na części Z jest większe niż przesunięcie tego punktu jako leżącego na części W . Dla spójności obydwu części należy przyłożyć siły poprzeczne N , które wywołują powstanie momentów gnących.



Rys. 4



Rys. 5

W literaturze (por. np. [2] i [10]) często można spotkać się z twierdzeniem, że w przypadku powłoki toroidalnej zamkniętej (rys. 5) mają zastosowanie wzory (2.11) i (2.13), tj. że stała C_1 znika. Przy tym podane jest następujące uzasadnienie, [2].

Rozetniemy zamkniętą powłokę w sposób przedstawiony na rys. 5 i rzutujemy wszystkie siły zewnętrzne i wewnętrzne na oś obrotu z ; wówczas otrzymamy

$$T_1^*(\alpha) 2\pi(R + \rho \sin \alpha) \sin \alpha = 2\pi \int_0^\alpha p \cos \alpha (R + \rho \sin \alpha) \rho d\alpha,$$

a stąd

$$(2.20) \quad T_1^* = \frac{p\rho}{2} \frac{2 + \lambda \sin \alpha}{1 + \lambda \sin \alpha}.$$

Z trzeciego równania równowagi (2.1) mamy wobec (2.20)

$$(2.21) \quad T_2^* = \frac{p\rho}{2},$$

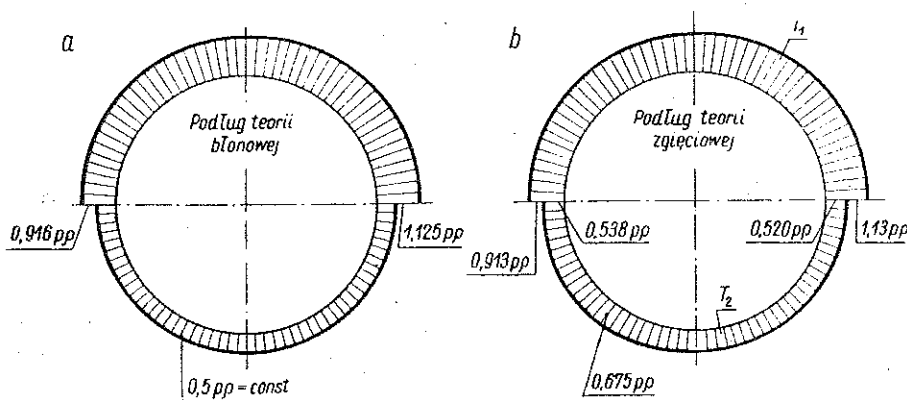
a zatem z porównania ze wzorami (2.11) wynika, że istotnie stała C_1 w tym wypadku równa jest zero. Jednakże rozumowanie to jest nieściśle, albowiem na rys. 5 pominięto siły poprzeczne N występujące z powodów wyżej wyjaśnionych wzdłuż przekroju $a = 0$.

Założenie

$$(2.22) \quad N_1(0) = 0,$$

jest więc nieściśle. W powłoce zamkniętej stała C_1 nie równa się zero, a wzory (2.20) i (2.21) są wzorami przybliżonymi.

Zaznaczyć należy, że powyższe zastrzeżenia co do wartości stałej C_1 w powłokach zamkniętych mają charakter teoretyczny. Obliczenia wykazują, że wielkości naprężeń występujących w powłokach zamkniętych można z wystarczającą dla praktyki dokładnością obliczyć według wzorów (2.20) i (2.21) teorii błonowej, natomiast posługiwanie się wzorami (2.19.1) i (2.19.2) dla wyznaczania przesunięć prowadzi do dużych błędów.



Rys. 6

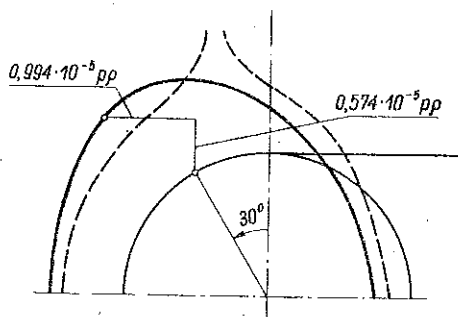
Powyżej zamieszczamy wykresy⁶⁾ naprężeń obliczonych według wzorów (2.20) (rys. 6a) i według ściślejszej teorii zgięciowej (rys. 6b) dla zamkniętej powłoki toroidalnej o wymiarach $\lambda = 0,2$, $\delta/\rho = 0,1$, przy czym $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,3$. Rysunek 7 przedstawia kontur przekroju poprzecznego środkowej powierzchni torusa po odkształceniu, wyznaczony na podstawie wzorów (2.19.1) i (2.19.2) (linie przerywane) oraz według teorii zgięciowej (linie ciągłe).

⁶⁾ Rysunki 6 i 7 zaczerpnięto z pracy [4].

Rysunki 6 i 7 potwierdzają całkowicie sformułowane wyżej uwagi o przydatności wzorów teorii błonowej⁷⁾.

Wreszcie zauważmy, że w miarę zwiększania się promienia zakrzywienia R , tj. gdy parametr λ dąży do zera, torus zamknięty «prostuje się» przechodząc w powłokę walcową o dużej długości, $L = 2R$, a wzory (2.20) i (2.21) przechodzą w odpowiednie wyrażenia dla długiej rury o przekroju kołowym, zaopatrzonej na końcach w denka:

$$(2.23) \quad \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (T_1^*)_{\text{torusa}} = p\varrho = (T_1^*)_{\text{walca}}, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} (T_2^*)_{\text{torusa}} = \frac{p\varrho}{2} = (T_2^*)_{\text{walca}}. \end{cases}$$



Rys. 7

Jeśli jednak chodzi o wzór (2.19.1) określający przesunięcia osiowe Δ_z^* , to daje on wartości nieograniczone dla punktów leżących na liniach osiobliwych nawet przy przejściu do granicy $\lambda = 0$, a zatem

$$(2.24) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\Delta_z^*)_{\text{torusa}} \neq (\Delta_z^*)_{\text{walca}}.$$

3. Wyprowadzenie zasadniczego równania teorii zgięciowej metodą «napięcie zespolonych» W. W. Nowożiłowa⁸⁾

Niech A, B, R_1 i R_2 oraz A', B', R'_1 i R'_2 oznaczają współczynniki charakteryzujące środkową powierzchnię powłoki pod względem geometrycznym odpowiednio przed i po odkształceniu.

Z określenia wydłużeń jednostkowych ε_1 i ε_2 wynika

$$(3.1) \quad A' = A(1 + \varepsilon_1), \quad B' = B(1 + \varepsilon_2).$$

Jeśli chodzi o zmiany krzywizn κ_1 oraz κ_2 , to powinno być

$$\kappa_i = \frac{1}{R'_i} - \frac{1}{R_i} \quad (i = 1, 2),$$

jednakże w teorii powłok cienkościennych $L o v e'$ a, na której się opieramy, nie uwzględnia się w odkształceniu κ_i zmiany krzywizny spo-

⁷⁾ Rysunek 6b przedstawia wykres naprężeń występujących we włóknach powierzchni środkowej. We włóknach nie leżących na powierzchni obojętnej należałoby uwzględnić wpływ momentów gnących, który jednak okazuje się znikomo mały, [4].

⁸⁾ W tym p. ograniczamy się do zagadnień kołowo symetrycznych.

wodowanej wydłużeniem, tj. przyjmuje się, że

$$\kappa_i = \frac{1}{R'_i} - \frac{1 - \varepsilon_i}{R_i} \quad (i = 1, 2),$$

czyli że

$$(3.2) \quad \frac{1}{R'_1} = \frac{1}{R_1} - \frac{\varepsilon_1}{R_1} + \kappa_1, \quad \frac{1}{R'_2} = \frac{1}{R_2} - \frac{\varepsilon_2}{R_2} + \kappa_2.$$

Współczynniki A' , B' , R'_1 i R'_2 powinny spełniać równania typu C o d a z z i' e g o - G a u s s a, tj. powinno być

$$(3.3) \quad \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{B'}{R'_2} \right) = \frac{1}{R'_1} \frac{dB'}{d\alpha}, \quad \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{A'} \frac{dB'}{d\alpha} \right) = - \frac{A'B'}{R'_1 R'_2},$$

ponieważ równania te stanowią warunek (geometryczny) nierozdzielności powłoki odkształconej.

Podstawiając zależności (3.1) i (3.2) do równań (3.3) otrzymuje się przy uwzględnieniu warunków (1.10) następujące związki:

$$(3.4) \quad \begin{cases} B \frac{d\kappa_2}{d\alpha} + \frac{dB}{d\alpha} (\kappa_2 - \kappa_1) - \frac{1}{R_1} \left[B \frac{d\varepsilon_2}{d\alpha} + \frac{dB}{d\alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] = 0, \\ \frac{\kappa_1}{R_1} + \frac{\kappa_2}{R_2} + \frac{1}{AB} \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{A} \left[B \frac{d\varepsilon_2}{d\alpha} + \frac{dB}{d\alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] = 0. \end{cases}$$

Zależności typu (3.4) wyprowadził (dla ogólniejszego przypadku) tą drogą A. L. G o l d i e n w i e j z i e r, [3]. Można je nazwać równaniami nierozdzielności powłok jako odpowiedniki znanych w teorii sprężystości warunków nierozdzielności S a i n t - V e n a n t a.

Podstawiając wzory (1.6) do równań (3.4) otrzymuje się warunki nierozdzielności wyrażone za pomocą składowych stanu napięcia:

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{dB(M_2 - \nu M_1)}{d\alpha} - \frac{dB}{d\alpha} (M_1 - \nu M_2) - \frac{\delta^2}{12 R_1} \left[\frac{dB(T_2 - \nu T_1)}{d\alpha} - \frac{dB}{d\alpha} (T_1 - \nu T_2) \right] = 0, \\ \frac{M_2 - \nu M_1}{R_1} + \frac{M_1 - \nu M_2}{R_2} + \frac{\delta^2}{12 AB} \left\{ \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{A} \left[\frac{dB(T_2 - \nu T_1)}{d\alpha} - \frac{dB}{d\alpha} (T_1 - \nu T_2) \right] \right\} = 0. \end{cases}$$

Przekształcając związki (3.5) przy wykorzystaniu równań równowagi (1.4) znajdujemy

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{aligned} (1+\nu) N_1 &= \frac{1}{A} \frac{dM}{da} \left[1 - \frac{\left(\frac{\delta}{R_1}\right)^2}{12 + \left(\frac{\delta}{R_1}\right)^2} \right] - \frac{\delta^2}{R_1 A \left[12 + \left(\frac{\delta}{R_1}\right)^2 \right]} \frac{dT}{da}, \\ \frac{M_1 - \nu M_2}{R_2} + \frac{M_2 - \nu M_1}{R_1} + \frac{\delta^2}{12 AB} \left[\frac{d}{da} \left(\frac{B}{A} \frac{dT}{da} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu) \frac{d}{da} \left(\frac{B}{R_1} N_1 \right) \right] = 0, \end{aligned} \right.$$

gdzie

$$(3.7) \quad T = T_1 + T_2, \quad M = M_1 + M_2.$$

W. W. Nowożyłow, [7], proponuje odrzucić w wyrażeniach (3.6) wyrazy podkreślone jako małe w porównaniu z pozostałymi i przyjęc warunki nierozdzielności w następującej uproszczonej postaci:

$$(3.8) \quad (1+\nu) N_1 \approx \frac{1}{A} \frac{dM}{da} - \frac{\delta^2}{12 R_1 A} \frac{dT}{da},$$

$$(3.9) \quad \frac{M_1 - \nu M_2}{R_2} + \frac{M_2 - \nu M_1}{R_1} + \frac{\delta^2}{12 AB} \frac{d}{da} \left(\frac{B}{A} \frac{dT}{da} \right) \approx 0.$$

Z przykładów liczbowych wynika, że ostatni składnik prawej strony równania (3.8) nie ma istotnego znaczenia i często równanie to można bez uszczerbku dla dokładności obliczeń uprościć jeszcze bardziej przyjmując

$$(3.8.1) \quad (1+\nu) N_1 \approx \frac{1}{A} \frac{dM}{da}.$$

Korzystając z równań nierozdzielności (3.8) [lub (3.8.1)] i (3.9) oraz z równań równowagi (1.4) sprowadza się kołowo symetryczne zagadnienie teorii zgięciowej powłok do następującego układu czterech równań różniczkowych z czterema niewiadomymi:

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{(I)} \quad & \frac{1}{AB} \left[\frac{d(BT_1)}{da} - \frac{dB}{da} T_2 \right] + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{R_1 A} \frac{dM}{da} = 0, \\ \text{(II)} \quad & \frac{1}{AB} \left\{ - \frac{d[B(M_2 - \nu M_1)]}{da} + \frac{dB}{da} (M_1 - \nu M_2) \right\} + \frac{\delta^2}{12 R_1 A} \frac{dT}{da} = 0, \\ \text{(III)} \quad & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{AB} \frac{d}{da} \left(\frac{B}{A} \frac{dM}{da} \right) - p = 0, \\ \text{(IV)} \quad & \frac{M_2 - \nu M_1}{R_1} + \frac{M_1 - \nu M_2}{R_2} + \frac{\delta^2}{12 AB} \frac{d}{da} \left(\frac{B}{A} \frac{dT}{da} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Związki (I) i (III) otrzymaliśmy podstawiając do pierwszych dwóch równań (1.4) zależność (3.8.1); wyrażenie (II) otrzymaliśmy z trzeciego równania równowagi (1.4) i warunku nierozdzielności (3.8); wreszcie wyrażenie (IV) jest drugim równaniem nierozdzielności (3.9).

Układ równań (3.10) posiada daleko idącą symetrię polegającą na tym, że wiadome T_1, T_2 i M występujące w równaniach (I) i (III) zajmują miejsca takie, jak niewiadome $M_2 - \nu M_1, M_1 - \nu M_2$ i T w równaniach (II) i (IV).

Wykorzystując tę symetrię wprowadza się «napięcia zespolone»:

$$(3.11) \quad \begin{cases} \tilde{T}_1 = T_1 - \frac{i}{c} \frac{M_2 - \nu M_1}{1 - \nu^2}, \\ \tilde{T}_2 = T_2 - \frac{i}{c} \frac{M_1 - \nu M_2}{1 - \nu^2}, \\ \tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2, \end{cases}$$

gdzie

$$(3.12) \quad c = \frac{\delta}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}}.$$

Następnie należy w równaniach (3.10) wyrazić napięcia T_1, T_2 za pomocą napięć zespolonych \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 i momentów. Mnożąc związki (II) i (IV) przez stałą i/c i dodając je odpowiednio do równań (I) i (III) otrzymamy zamiast układu czterech równań (3.10) z czterema niewiadomymi rzeczywistymi układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi zespolonymi

$$(3.13) \quad \begin{cases} \frac{1}{AB} \left[\frac{d(B\tilde{T}_1)}{da} - \frac{dB}{da} \tilde{T}_2 \right] + i \frac{c}{R_1 A} \frac{d\tilde{T}}{da} = 0, \\ \frac{\tilde{T}_1}{R_1} + \frac{\tilde{T}_2}{R_2} - ic \frac{1}{AB} \left[\frac{d}{da} \left(\frac{B}{A} \frac{d\tilde{T}}{da} \right) \right] = p. \end{cases}$$

Opisana metoda «napięć zespolonych» dla bardziej ogólnego przypadku została opracowana przez W. W. Nowożiłowa, [7] i [8].

Zauważmy, że jeśli w równaniach (3.13) pominąć składniki zawierające mały czynnik c i odrzucić wężyki nad niewiadomymi, to wówczas otrzyma się równania (2.1) teorii błonowej (dla wypadku symetrii kołowej).

Ostatnia okoliczność nasuwa myśl, że należy wprowadzić pomocniczą funkcję zespoloną \tilde{U} zbudowaną analogicznie do funkcji rzeczywistej U^* , określonej wzorem (2.2). Mianowicie wprowadźmy funkcję

$$(3.14) \quad \tilde{U} = \tilde{T}, R_2 \sin^2 \alpha - ic \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \cos \alpha \frac{d\tilde{T}}{da}.$$

Wówczas równania (3.13) przy uwzględnieniu związków (1.11) i (1.12) przyjmą następującą postać:

$$(3.15) \quad \begin{cases} \frac{1}{R_1 R_2 \sin^2 a} \frac{d\tilde{U}}{da} - \frac{1}{R_1 R_2} \frac{\cos a}{\sin^3 a} \tilde{U} - \frac{\operatorname{ctg} a}{R_2} \tilde{T}_2 + ic \operatorname{ctg} a \Delta(\tilde{T}) - \\ - ic \frac{\operatorname{ctg}^2 a}{R_1^2} \frac{d\tilde{T}}{da} = 0, \\ \frac{\tilde{U}}{R_1 R_2 \sin^2 a} + ic \frac{\operatorname{ctg} a}{R_1^2} \frac{d\tilde{T}}{da} + \frac{\tilde{T}_2}{R_2} - ic \Delta(\tilde{T}) = p. \end{cases}$$

Mnożąc drugie równanie przez $\operatorname{ctg} a$ i dodając je do pierwszego znajdziemy po scałkowaniu

$$(3.16) \quad \tilde{U} = p \int_a^\alpha R_1 R_2 \sin a \cos a da + \tilde{C}.$$

Z drugiej strony wyrażenie (2.3) w przypadku symetrii kołowej oraz gdy $q_1 = q_2 = 0$, $q_n = p$ ma postać następującą:

$$\frac{1}{R_1 R_2} \frac{d^2 U^*}{da^2} + \frac{1}{R_2^3 \sin a} \frac{d}{da} \left(\frac{R_2^2 \sin a}{R_1} \right) \frac{dU^*}{da} = \frac{p}{R_2^3 \sin a} \frac{d}{da} (R_2^3 \sin^3 a \cos a).$$

Stąd po scałkowaniu

$$(3.16.1) \quad U^* = p \int_a^\alpha R_1 R_2 \sin a \cos a da + C.$$

Bardziej szczegółowe rozważania ([8], s. 250) wykazują, że stała całkowania \tilde{C} w równości (3.16) jest liczbą rzeczywistą, a zatem z porównania zależności (3.16) i (3.16.1) przy uwzględnieniu (2.2) wynika

$$(3.17) \quad \tilde{U} = U^* = T_1^* R_2 \sin^2 a.$$

Eliminując niewiadomą \tilde{T}_2 z równań (3.15) i biorąc przy tym pod uwagę wzór (3.17) oraz trzecie równanie równowagi teorii błonowej (2.1), otrzymamy następujące zasadnicze równanie teorii zgięciowej:

$$(3.18) \quad \frac{d^2 \tilde{T}}{da^2} + \left[\left(2 \frac{R_1}{R_2} - 1 \right) \operatorname{ctg} a - \frac{1}{R_1} \frac{dR_1}{da} \right] \frac{d\tilde{T}}{da} + \frac{i}{c} \frac{R_1^2}{R_2} \tilde{T} = \\ = \frac{i}{c} \frac{R_1^2}{R_2} (T_1^* + T_2^*).$$

W rozpatrywanym przypadku powłoki toroidalnej wobec wyrażeń (2.8), (2.9) i (2.11) równanie (3.18) ma następującą postać:

$$(3.19) \quad \frac{1}{1 + \lambda \sin a} \frac{d}{da} \left[\frac{(1 + \lambda \sin a)^2}{\sin a} \frac{d\tilde{T}}{da} \right] + i 2k^2 \tilde{T} = \\ = i 2k^2 \left[\frac{p\ell}{2} \frac{3 + 2\lambda \sin a}{1 + \lambda \sin a} + \frac{C_1}{(1 + \lambda \sin a) \sin^2 a} \right],$$

gdzie

$$(3.20) \quad 2k^2 = \frac{\lambda \ell}{c} = \frac{\ell^2}{R\delta} \sqrt{12(1 - r^2)}.$$

Różniczkując obustronnie równanie (3.19) i wprowadzając nową niewiadomą

$$(3.21) \quad X = \frac{(1 + \lambda \sin a)^2}{\sin a} \frac{d\tilde{T}}{da} + 2k^2 C_1 \operatorname{ctg} a,$$

otrzymamy poszukiwane zasadnicze równanie teorii zgięciowej

$$(3.22) \quad (1 + \lambda \sin a) \frac{d^2 X}{da^2} - \lambda \cos a \frac{dX}{da} + i 2k^2 \sin a X = 2k^2 Q \cos a,$$

gdzie stała Q wynosi

$$(3.23) \quad Q = - \left(2k^2 C_1 + i \lambda \frac{p\ell}{2} \right).$$

Równanie (3.22) można także wyprowadzić posługując się znaną metodą E. M e i s s n e r a, [6]. Zgodnie z wywodami tego autora symetryczne zagadnienie teorii zgięciowej sprowadza się do układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi funkcjami: kątem obrotu ϑ normalnej i iloczynem V napięcia poprzecznego przez promień krzywizny. Są to równania

$$(3.24) \quad \begin{cases} L(V) + rV = E\delta R_1 \vartheta + \Phi(a), \\ L(\vartheta) - r\vartheta = -\frac{R_1}{D} V. \end{cases}$$

W równaniach (3.24) zostały użyte następujące oznaczenia:

$$(3.25) \quad V = -N_1 R_2,$$

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{aligned} L(\dots) &= \frac{R_2}{R_1} \frac{d^2(\dots)}{d\alpha^2} + \left[\frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right] \frac{d(\dots)}{d\alpha} - \frac{R_1^2}{R_2} \operatorname{ctg}^2 \alpha (\dots), \\ \Phi(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} (R_2^2 q_n) + (R_2 + \nu R_1) R_2 q_1 - \\ &\quad - \frac{F(\alpha)}{\sin^2 \alpha} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right], \\ F(\alpha) &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} R_1 R_2 \sin \alpha (q_n \cos \alpha - q_1 \sin \alpha) d\alpha + C = T_1^* R_2 \sin^2 \alpha, \\ D &= \frac{E \delta^3}{12(1-\nu^2)}. \end{aligned} \right.$$

Znając kąt θ oraz napięcie N_1 można bez trudu wyznaczyć wszystkie niewiadome.

Istotnie, zauważmy, że pierwsze dwa równania (1.4) w przypadku powłok obrotowych przyjmują wobec (1.11) następującą postać:

$$(3.27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \frac{d(T_1 R_2 \sin \alpha)}{d\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \frac{T_2}{R_2} + \frac{N_1}{R_1} &= 0, \\ \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \frac{d(N_1 R_2 \sin \alpha)}{d\alpha} - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + p &= 0. \end{aligned} \right.$$

Eliminując napięcie T_2 otrzymujemy stąd

$$\frac{d}{d\alpha} [R_2 \sin \alpha (N_1 \cos \alpha - T_1 \sin \alpha)] = -p R_1 R_2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

a po scałkowaniu i uwzględnieniu zależności (3.16.1) i (3.17) równanie

$$(3.28) \quad T_1 = N_1 \operatorname{ctg} \alpha + T_1^*.$$

Podstawiając w dalszym ciągu otrzymane wyrażenie do drugiego równania (3.27) otrzymujemy

$$(3.29) \quad T_2 = \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\alpha} (N_1 R_2) + p R_2 - T_1^* \frac{R_2}{R_1}.$$

Ponieważ zaś według teorii błonowej mamy

$$\frac{T_1^*}{R_1} + \frac{T_2^*}{R_2} = p,$$

to z równania (3.29) wynika, że

$$(3.30) \quad T_2 = \frac{1}{R_1} \frac{d(N_1 R_2)}{d\alpha} + T_2^*.$$

Co się tyczy momentów, to z równości (1.5) i (1.8) wynikają związki

$$(3.31) \quad M_1 = D \left(\frac{1}{R_1} \frac{d\vartheta}{d\alpha} + \nu \frac{\vartheta}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha \right), \quad M_2 = D \left(\frac{\vartheta}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha + \nu \frac{1}{R_1} \frac{d\vartheta}{d\alpha} \right).$$

Wzory (3.29), (3.30) i (3.31) pozwalają wyznaczyć składowe stanu napięcia, o ile tylko znane są niewiadome N_1 i ϑ , co należało okazać.

W przypadku powłoki toroidalnej operator L jest określony w sposób następujący:

$$(3.32) \quad L(\dots) = \frac{1 + \lambda \sin \alpha}{\lambda \sin \alpha} \frac{d^2(\dots)}{d\alpha^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{d(\dots)}{d\alpha} - \frac{\lambda \cos^2 \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha) \sin \alpha} (\dots)$$

i układ równań (3.24) zapiszemy w takiej postaci:

$$(3.33) \quad \begin{cases} \frac{1 + \lambda \sin \alpha}{\lambda \sin \alpha} \frac{d^2 V}{d\alpha^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{dV}{d\alpha} - \left[\frac{\lambda \cos^2 \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha) \sin \alpha} - \nu \right] V = \\ \hspace{20em} = E \delta \varrho \vartheta + \Phi(\alpha), \\ \frac{1 + \lambda \sin \alpha}{\lambda \sin \alpha} \frac{d^2 \vartheta}{d\alpha^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{d\vartheta}{d\alpha} - \left[\frac{\lambda \cos^2 \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha) \sin \alpha} + \nu \right] \vartheta = - \frac{\varrho}{D} V, \end{cases}$$

gdzie

$$(3.34) \quad \Phi(\alpha) = - \frac{p \varrho^2 \cos \alpha}{2(1 + \lambda \sin \alpha) \sin \alpha} - C_1 R \frac{\cos \alpha}{\sin^4 \alpha} \frac{2 + 3 \lambda \sin \alpha}{1 + \lambda \sin \alpha}.$$

Wprowadzając do równań (3.33) nowe niewiadome

$$(3.35) \quad \begin{cases} V = \frac{1}{1 + \lambda \sin \alpha} \left(\frac{c}{\lambda} X_l - C_1 \varrho \operatorname{ctg} \alpha \right), \\ \vartheta = - \frac{1}{E \delta \lambda} \frac{X_r}{1 + \lambda \sin \alpha}, \end{cases}$$

otrzymamy

$$(3.36) \quad \begin{cases} (1 + \lambda \sin \alpha) \frac{d^2 X_l}{d\alpha^2} - \lambda \cos \alpha \frac{dX_l}{d\alpha} + [\lambda(1 + \nu) X_l + 2k^2 X_r] \sin \alpha = \\ \hspace{15em} = \frac{\lambda^2}{c} \left[C_1 \varrho (1 + \nu) - \frac{p \varrho^2}{2} \right] \cos \alpha, \\ (1 + \lambda \sin \alpha) \frac{d^2 X_r}{d\alpha^2} - \lambda \cos \alpha \frac{dX_r}{d\alpha} + [\lambda(1 - \nu) X_r - 2k^2 X_l] \sin \alpha = \\ \hspace{15em} = - (2k^2)^2 C_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie (3.36) przez i , a następnie dodając je stronami do drugiego, znajdziemy

$$(3.37) \quad (1 + \lambda \sin \alpha) \frac{d^2 X}{d \alpha^2} - \lambda \cos \alpha \frac{d X}{d \alpha} + i 2k^2 \left\{ X_r \left[1 - \frac{ic}{\rho} (1 - \nu) \right] + \right. \\ \left. + i X_i \left[1 - \frac{ic}{\rho} (1 + \nu) \right] \right\} \sin \alpha = -2k^2 \left\{ C_1 2k^2 \left[1 - i \frac{c}{\rho} (1 + \nu) \right] + i \frac{\lambda p \rho}{2} \right\} \cos \alpha,$$

gdzie

$$(3.38) \quad X = X_r + i X_i.$$

Porównując równania (3.37) i (3.22) stwierdzamy, że różnią się one wyłącznie składnikami podkreślonymi w równaniu (3.37). Składniki te można pominąć w porównaniu z jednością ze względu na mały czynnik c/ρ .

Można zatem stwierdzić, że teoria W. W. Nowożiłowa oparta na przybliżonych równaniach nierozdzielności (3.8) i (3.9) prowadzi w danym przypadku do równań praktycznie identycznych z równaniami ścisłej teorii E. Meissnera.

4. Składowe stanu napięcia i odkształcenia określone za pomocą funkcji pomocniczej X

Obliczenie cienkościennej powłoki toroidalnej obciążonej równomiernym ciśnieniem p sprowadza się do wyznaczenia funkcji zespolonej $X(\alpha)$, spełniającej równanie różniczkowe (3.22) i odpowiednie warunki brzegowe wzdłuż krawędzi $\alpha = \alpha_1$ i $\alpha = \alpha_2$, bowiem znając funkcję X można z łatwością wyznaczyć składowe stanu napięcia i odkształcenia powłoki.

Istotnie, z określenia funkcji X [wzory (3.25), (3.35) i (3.38)] wynika, że

$$(4.1) \quad X = X_r + i X_i = -E \delta \lambda (1 + \lambda \sin \alpha) \vartheta - i \left[\frac{\rho}{c \sin \alpha} (1 + \lambda \sin \alpha)^2 N_1 + \right. \\ \left. + 2k^2 C_1 \operatorname{ctg} \alpha \right].$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron wyrażenia (4.1) można znaleźć napięcie N_1 [a tym samym wobec (3.28) i (3.30) napięcia T_1 i T_2] oraz kąt obrotu normalnej ϑ [a więc wobec (3.31) momenty M_1 i M_2] za pomocą funkcji X .

Znając napięcia T_1 i T_2 można obliczyć przesunięcie Δ_x na podstawie wzoru (2.16); przemieszczenie osiowe Δ_x łatwo określić, jeśli się uwzględni, że z zależności (2.18) wobec związków (2.15), (2.14) i (1.9) wynika

$$(4.2) \quad \frac{d\Delta_x}{d\alpha} = -R_1(\varepsilon_1 \sin \alpha + \vartheta \cos \alpha).$$

W rezultacie wykonanych obliczeń otrzymuje się następujące wzory:

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{2k^2} \frac{\lambda \cos \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha)^2} X_i + \frac{p\varrho}{2} \frac{2 + \lambda \sin \alpha}{1 + \lambda \sin \alpha} - \lambda C_1 \frac{\lambda + \sin \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha)^2}, \\ T_2 &= -\frac{1}{2k^2} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{1 + \lambda \sin \alpha} X_i \right) + \frac{p\varrho}{2} + \lambda C_1 \frac{\lambda + \sin \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha)^2}, \\ N_1 &= -\frac{\lambda}{2k^2} \frac{\sin \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha)^2} X_i + \lambda C_1 \frac{\cos \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha)^2}, \\ M_1 &= -\frac{\lambda\varrho}{(2k^2)^2} \left[\nu \frac{\lambda \cos \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha)^2} X_r + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{1 + \lambda \sin \alpha} X_r \right) \right], \end{aligned} \right.$$

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta &= -\frac{1}{E\delta} \frac{1}{\lambda(1 + \lambda \sin \alpha)} X_r, \\ \Delta_x &= -\frac{R(1 + \lambda \sin \alpha)}{E\delta} (T_2 - \nu T_1), \\ \Delta_z &= -\varrho \int_0^{\alpha} (\vartheta \cos \alpha + \varepsilon_1 \sin \alpha) d\alpha + C_2 \approx -\varrho \int_0^{\alpha} \vartheta \cos \alpha d\alpha + C_2^{(9)}. \end{aligned} \right.$$

5. Rozwiązanie zasadniczego równania teorii zgięciowej. Zadanie jednorodne

Równanie (3.22) jest równaniem liniowym, zatem jego całka składa się z całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego:

$$(5.1) \quad X = X_0 + X_s = (X_{0r} + X_{sr}) + i(X_{0i} + X_{si}).$$

Funkcja X_0 spełnia równanie jednorodne

$$(5.2) \quad (1 + \lambda \sin \alpha) \frac{d^2 X_0}{d\alpha^2} - \lambda \cos \alpha \frac{dX_0}{d\alpha} + i2k^2 \sin \alpha X_0 = 0.$$

⁹⁾ Przykłady liczbowe wykazały, że wydłużenie ε_1 można pominąć w porównaniu z kątem obrotu normalnej ϑ .

Jak zaznaczono na wstępie, przyjmuje się rozwiązanie zadania jednorodnego w postaci podanej przez E. F. Zienową i W. W. Nowożiłowa w pracach [14] i [15], toteż nie ma potrzeby przytaczania wywodów wymienionych autorów; wystarczy ograniczyć się do podania wyników końcowych.

Otóż w przedziale

$$(5.3) \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

całką równania (5.2) jest funkcja

$$(5.4) \quad X_0 = (1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{3}{4}} (\tilde{C}_3 X_1 + \tilde{C}_5 X_2),$$

gdzie

$$(5.5) \quad \begin{cases} X_1 = X_{1r} + i X_{1i} \approx i^{\frac{5}{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2i\xi})^{\frac{1}{3}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\sqrt{2i\xi}), \\ X_2 = X_{2r} + i X_{2i} \approx i^{-\frac{5}{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2i\xi})^{\frac{1}{3}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(\sqrt{2i\xi}), \end{cases}$$

$$(5.6) \quad \xi = k \int_0^\alpha \sqrt{\frac{\sin \alpha}{1 + \lambda \sin \alpha}} d\alpha \approx \frac{2}{3} k a^{\frac{3}{2}} [1 - \psi(\lambda, \alpha)],$$

$$(5.7) \quad \psi(\lambda, \alpha) = \frac{1}{28} a^2 - \frac{1}{5280} a^4 + \dots + \frac{3}{10} \lambda a \left(1 - \frac{5}{36} a^2 + \frac{11}{1170} a^4 - \dots \right) - \frac{9}{56} \lambda^2 a^2 \left(1 - \frac{35}{132} a^2 + \frac{91}{2700} a^4 - \dots \right) + \dots$$

Stałe \tilde{C}_3 i \tilde{C}_5 są stałymi całkowania (liczby zespolone), a $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ i $H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$ są funkcjami H a n k e l a rzędu $1/3$ odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju.

W dalszym ciągu ograniczamy zakres zmienności parametru λ do przedziału

$$(5.8) \quad 0 < \lambda < 1,$$

w którym szereg (5.7) jest szybkozbieżny.

Na rysunku 8 przedstawiono wykresy funkcji $\psi(\lambda, \alpha)$ dla niektórych wartości współczynnika λ .

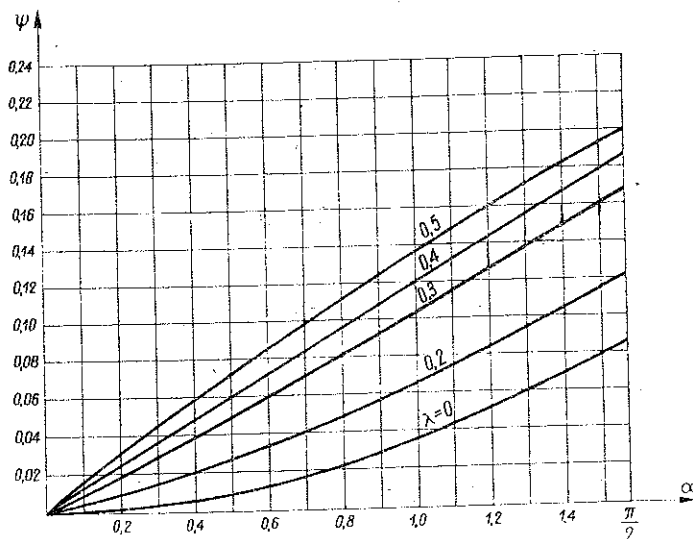
Wprowadzając oznaczenia

$$(5.9) \quad \tilde{C}_3 = C_3 + i C_4, \quad \tilde{C}_5 = C_5 + i C_6,$$

gdzie C_m ($m = 3, 4, 5, 6$) są liczbami rzeczywistymi, i oddzielając w wyrażeniu (5.4) części rzeczywiste od urojonych znajdujemy

$$(5.10) \quad \begin{cases} X_{0r} = (1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{3}{4}} (C_3 X_{1r} - C_4 X_{1i} + C_5 X_{2r} - C_6 X_{2i}), \\ X_{0i} = (1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{3}{4}} (C_3 X_{1i} + C_4 X_{1r} + C_5 X_{2i} + C_6 X_{2r}). \end{cases}$$

Dla potrzeb praktyki jest rzeczą niezbędną, aby korzystając ze znanych związków teorii funkcji B e s s e l a, [12], przedstawić funkcje X_1, X_{21} określone wzorami (5.5) w jawnej postaci.



Rys. 8

Wiadomo, że

$$(5.11.1) \quad H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_\nu(z) - e^{-\nu\pi i} J_\nu(z)}{i \sin \nu\pi}, \quad H_\nu^{(2)}(z) = \frac{-J_{-\nu}(z) + e^{\nu\pi i} J_\nu(z)}{i \sin \nu\pi},$$

$$(5.11.2) \quad \begin{cases} J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}, \\ J_{-\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu+2m}}{m! \Gamma(-\nu+m+1)}, \\ \Gamma(l+m) = (l+1)(l+2)\dots(l+m)\Gamma(l). \end{cases}$$

Podstawiając wyrażenia (5.11.2) do wzorów (5.11.1) i przyjmując $\nu = 1/3$ otrzymujemy

$$(5.11.3) \quad H_{1/3}^{(1)}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \frac{i}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sqrt[3]{\frac{2}{z}} \times \right.$$

$$\times \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{2^{2m} m! \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(m - \frac{1}{3}\right)} \right] -$$

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \sqrt[3]{\frac{z}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{2^{2m} m! \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(m + \frac{1}{3}\right)}$$

W danym przypadku

$$z = \sqrt{2} i \xi = (1 + i) \xi,$$

zatem

$$(5.12) \quad \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{2^{2m} m! \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(m + \frac{1}{3}\right)} = 1 - \frac{i \xi^3}{1! 2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)} - \right.$$

$$\frac{\xi^4}{2! 2^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(2 + \frac{1}{3}\right)} + \frac{i \xi^6}{3! 2^3 \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(2 + \frac{1}{3}\right) \left(3 + \frac{1}{3}\right)} +$$

$$\left. + \cdots = f_r(\xi) - i f_i(\xi), \right.$$

$$\left. 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{2^{2m} m! \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(m - \frac{1}{3}\right)} = 1 - \frac{i \xi^3}{1! 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)} - \right.$$

$$\frac{\xi^4}{2! 2^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(2 - \frac{1}{3}\right)} + \frac{i \xi^6}{3! 2^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(2 - \frac{1}{3}\right) \left(3 - \frac{1}{3}\right)} +$$

$$\left. + \cdots = g_r(\xi) - i g_i(\xi), \right.$$

i, zgodnie z równością (5.11.3), znajdziemy

$$(5.11.4) \quad H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\sqrt{2} i \xi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{i}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{2} i \xi}} (g_r - i g_i) - \right.$$

$$\left. - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2} i \xi}{2}} (f_r - i f_i) \right].$$

Podstawiając wyrażenie (5.11.4) do pierwszego wzoru (5.5) po prostych przekształceniach znajdujemy

$$(5.13) \quad X_{1r} + i X_{1i} \approx i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} e^{i \frac{\pi}{4} \xi^{\frac{2}{3}}} (f_r - i f_i) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt[3]{2}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} e^{i \frac{5}{12} \pi} (g_r - i g_i) \right].$$

Przekształcając w analogiczny sposób całkę X_2 określoną drugim równaniem (5.5) otrzymujemy

$$(5.14) \quad X_{2r} + iX_{2i} \approx -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \left[-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} e^{i\frac{\pi}{12} \xi^{\frac{2}{3}}} (f_r - if_i) - \frac{\sqrt[3]{2}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} e^{-i\frac{5}{12}\pi} (g_r - ig_i) \right].$$

Oddzielając w zależnościach (5.13) i (5.14) części rzeczywiste od urojonych dochodzimy ostatecznie do następujących wzorów:

$$(5.15) \quad \begin{cases} X_{1r} = -a_1 \xi^{\frac{2}{3}} (f_r - f_i) + a_2 g_r - a_3 g_i, \\ X_{1i} = a_1 \xi^{\frac{2}{3}} (f_r + f_i) - a_3 g_r - a_2 g_i, \\ X_{2r} = \xi^{\frac{2}{3}} (a_4 f_r - a_5 f_i) + a_2 g_r + a_3 g_i, \\ X_{2i} = -\xi^{\frac{2}{3}} (a_5 f_r + a_4 f_i) + a_3 g_r - a_2 g_i, \end{cases}$$

gdzie

$$(5.16) \quad \begin{cases} a_1 = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} = 1,1460, \\ a_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{2}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sin 75^\circ = 1,3007, \\ a_3 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{2}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cos 75^\circ = 0,34860, \\ a_4 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \cos 75^\circ = 0,41945, \\ a_5 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \sin 75^\circ = 1,5654, \end{cases}$$

$$(5.16.1) \quad \begin{cases} f_r, g_r = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)! \left(1 \pm \frac{1}{3}\right) \dots \left(2m \pm \frac{1}{3}\right)} \frac{\xi^{4m}}{2^{2m}} \\ f_i, g_i = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)! \left(1 \pm \frac{1}{3}\right) \dots \left(2m+1 \pm \frac{1}{3}\right)} \frac{\xi^{4m+2}}{2^{2m+1}} \end{cases}$$

W mianownikach prawych części zależności (5.16.1) górny znak odnosi się do funkcji f , a dolny do funkcji g .

Szeregi potęgowe (5.16.1) są szybkozbieżne przy małych wartościach zmiennej ξ , a przy wartościach

$$(5.17) \quad \xi > 1$$

można posługiwać się prostymi wzorami asymptotycznymi wyprowadzonymi niżej.

Z teorii funkcji B e s s e l a wiadomo, że przy dużych wartościach zmiennej niezależnej ([12], s. 220)¹⁰⁾ mamy związki:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)} \left[\sum_{m=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^m \Gamma\left(\nu + m + \frac{1}{2}\right)}{m! \Gamma\left(\nu - m + \frac{1}{2}\right)} (2iz)^m + 0(z^{-\rho}) \right]$$

$$(-\pi < \arg z < 2\pi),$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)} \left[\sum_{m=0}^{\nu-1} \frac{\Gamma\left(\nu + m + \frac{1}{2}\right)}{m! \Gamma\left(\nu - m + \frac{1}{2}\right)} (2iz)^m + 0(z^{-\rho}) \right]$$

$$(-2\pi < \arg z < \pi).$$

Pozostawiając pierwszy wyraz szeregu otrzymuje się dla $\nu = \frac{1}{3}$

$$H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{5}{12}\pi)}, \quad H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{5}{12}\pi)},$$

zatem

$$X_1(z) = i^{\frac{5}{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (z)^{\frac{1}{3}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(z) \approx z^{-\frac{1}{6}} e^{iz},$$

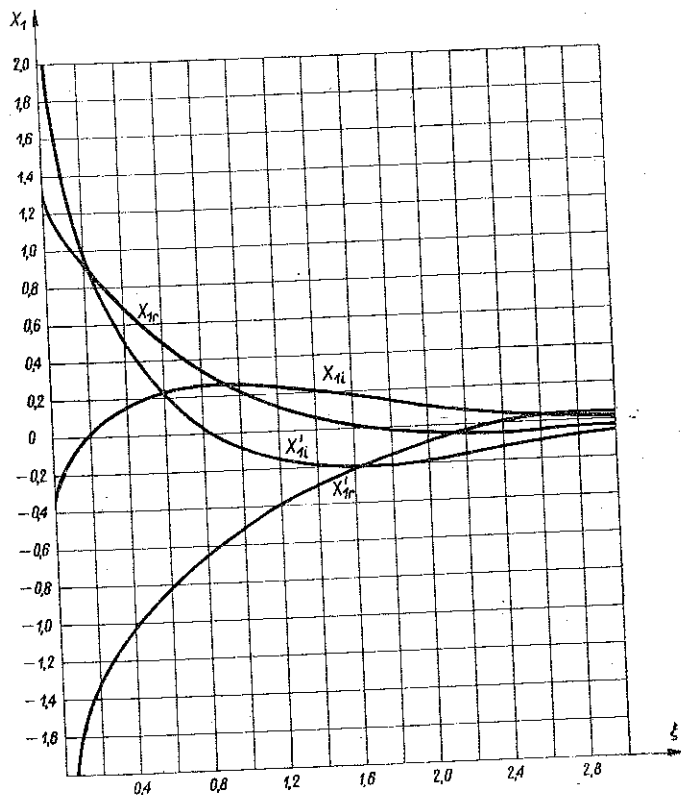
$$X_2(z) = i^{-\frac{5}{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (z)^{\frac{1}{3}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(z) \approx z^{-\frac{1}{6}} e^{-iz}.$$

¹⁰⁾ Cytujemy według tłumaczenia rosyjskiego z 1949 roku.

Przechodząc do zmiennej ξ i oddzielając części rzeczywiste od urojonych dochodzimy po wykonaniu szeregu prostych przekształceń do następujących wzorów asymptotycznych:

$$(5.18) \quad \begin{cases} X_{1r}(\xi) = \frac{0,9439}{\xi^{\frac{1}{6}}} e^{\mp \xi} \cos\left(\xi \mp \frac{\pi}{24}\right), \\ X_{1i}(\xi) = \pm \frac{0,9439}{\xi^{\frac{1}{6}}} e^{\mp \xi} \sin\left(\xi \mp \frac{\pi}{24}\right). \end{cases}$$

We wzorach tych górny znak odnosi się do X_1 , a dolny do X_2 .



Rys. 9

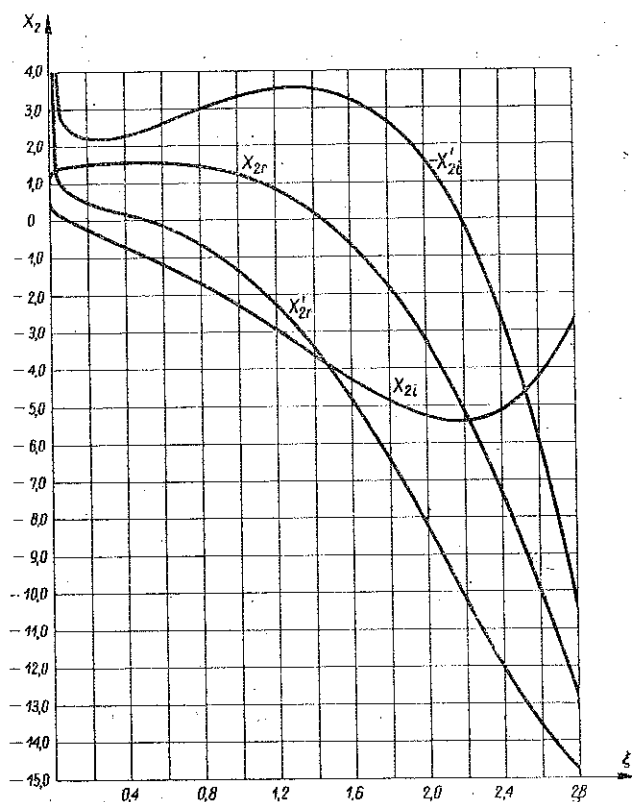
Rysunki 9 i 10 przedstawiają wykresy funkcji $X_1(\xi)$ i $X_2(\xi)$ oraz ich pierwszych pochodnych (względem ξ) w przedziale $0 \leq \xi \leq 3$.

Dla ujemnych wartości kąta α w przedziale

$$(5.19) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0,$$

dogodnie jest wprowadzić nową zmienną $\gamma = -a$, zmieniającą się w przedziale $(0 \leq \gamma \leq \pi/2)$. Oznaczając w równaniu (5.2) niewiadomą funkcję przez \tilde{X}_0 i przyjmując $\mu = -\lambda$ znajdziemy

$$(5.20) \quad (1 + \mu) \frac{d^2 \tilde{X}_0}{d\gamma^2} - \mu \cos \gamma \frac{d\tilde{X}_0}{d\gamma} - i 2k^2 \sin \gamma \tilde{X}_0 = 0.$$



Rys. 10

Równania (5.20) i (5.21) różnią się wyłącznie znakiem przed jednostką urojoną i , zatem ich rozwiązania posiadają również różne znaki przed i , więc całkami równania (5.20) są funkcje zespolone sprzężone z funkcjami X_1 i X_2 :

$$(5.21) \quad \tilde{X}_1 = X_{1r} - i X_{1i}, \quad \tilde{X}_2 = X_{2r} - i X_{2i},$$

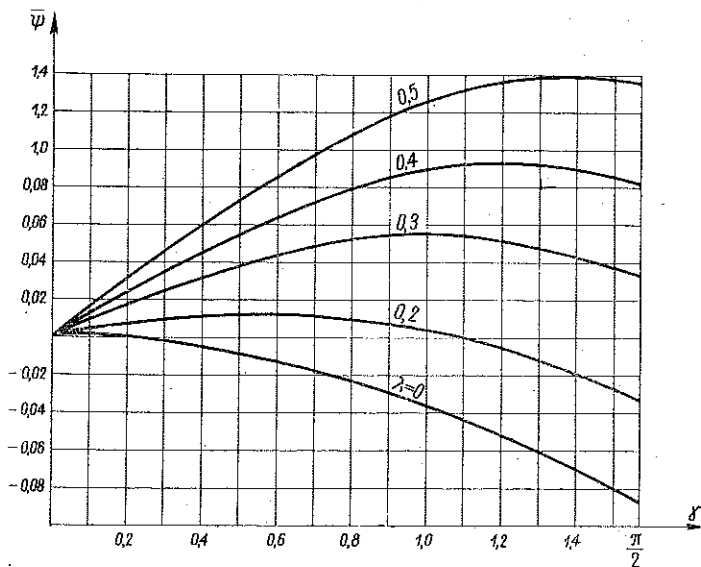
przy czym w funkcjach tych zamiast zmiennej ξ występuje ζ równa

$$(5.22) \quad \zeta = k \int_0^\gamma \sqrt{\frac{\sin \gamma}{1 - \lambda \sin \gamma}} d\gamma \approx \frac{2}{3} k (\gamma)^{\frac{3}{2}} [1 + \bar{\psi}(\lambda, \gamma)],$$

gdzie

$$(5.23) \quad \bar{\psi}(\lambda, \gamma) = -\frac{1}{28}\gamma^2 + \frac{1}{5280}\gamma^4 - \dots + \frac{3}{10}\lambda\gamma\left(1 - \frac{5}{36}\gamma^2 + \frac{11}{1170}\gamma^4 - \dots\right) + \\ + \frac{9}{56}\lambda^2\gamma^2\left(1 - \frac{35}{132}\gamma^2 + \frac{91}{2700}\gamma^4 - \dots\right) + \dots$$

Na rysunku 11 przedstawiono wykresy funkcji $\bar{\psi}(\lambda, \gamma)$ dla niektórych wartości parametru λ .



Rys. 11

Z powyższych rozważań wynika, że analogicznie do wzorów (5.17) i (5.18) jest dla $\zeta > 1$

$$(5.24) \quad \begin{cases} \tilde{X}_{2f} \approx \frac{0,9439}{\zeta^{\frac{1}{6}}} e^{\mp \zeta} \cos\left(\zeta \mp \frac{\pi}{24}\right), \\ \tilde{X}_{2i} \approx \mp \frac{0,9439}{\zeta^{\frac{1}{6}}} e^{\mp \zeta} \sin\left(\zeta \mp \frac{\pi}{24}\right). \end{cases}$$

Posługiwanie się funkcją \tilde{X}_0 w przedziale (5.19) jest często niedogodne, ponieważ w punkcie $\alpha = 0$ znaczenia funkcji \tilde{X}_0 i X_0 oraz ich pochodnych względem α nie pokrywają się; toteż w przypadku, gdy w rozpatrywanej części powłoki kąt α zmienia się w przedziale $(-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2)$, dogodniej

jest zamiast funkcji \tilde{X}_1 i \tilde{X}_2 przyjęc rozwiązanie w postaci ich liniowej kombinacji:

$$(5.25) \quad \bar{X}_1 = e^{\frac{\pi}{6}i} \tilde{X}_1 - e^{\frac{2}{3}\pi i} \tilde{X}_2, \quad \bar{X}_2 = e^{\frac{\pi}{6}i} \tilde{X}_2.$$

Po oddzieleniu w równaniach (5.25) części rzeczywistych od urojonych otrzymuje się przy uwzględnieniu związków (5.21) następujące wyrażenia:

$$(5.26) \quad \begin{cases} \bar{X}_{1r} = \frac{1}{2} [\sqrt{3} (X_{1r} - X_{2i}) + X_{1i} + X_{2r}], \\ \bar{X}_{1i} = \frac{1}{2} [-\sqrt{3} (X_{1i} + X_{2r}) + X_{1r} - X_{2i}], \\ \bar{X}_{2r} = \frac{1}{2} (X_{2r} + \sqrt{3} X_{2i}), \\ \bar{X}_{2i} = \frac{1}{2} (-X_{2i} + \sqrt{3} X_{2r}). \end{cases}$$

Przez bezpośrednie podstawienie można sprawdzić równości

$$(5.27) \quad \bar{X}_m(0) = X_m(0),$$

$$(5.28) \quad \left[\frac{d\bar{X}_m}{da} \right]_{a=0} = \left[\frac{dX_m}{da} \right]_{a=0},$$

gdzie $m = 1, 2$.

Przy sprawdzeniu równości (5.28) należy wziąć pod uwagę następujące zależności:

$$(5.28.1) \quad \left[\frac{d\bar{X}_m}{da} \right]_{a=0} = \left[\frac{dX_m}{d\xi} \frac{d\xi}{da} \right]_{\xi=0} = \sqrt[3]{\frac{3k^2}{2}} \left(\frac{dX_m}{d\xi} \xi^{\frac{1}{3}} \right)_{\xi=0}.$$

Analogicznie znajdziemy

$$\left[\frac{d\bar{X}_m}{d\gamma} \right]_{\gamma=0} = \left[\frac{d\bar{X}_m}{da} \right]_{a=0} = \sqrt[3]{\frac{3k^2}{2}} \left[\frac{d\bar{X}_m}{d\zeta} \zeta^{\frac{1}{3}} \right]_{\zeta=0},$$

a zatem równania (5.23) są równoważne równaniom następującym:

$$(5.29) \quad - \left[\frac{d\bar{X}_m}{d\zeta} \zeta^{\frac{1}{3}} \right]_{\zeta=0} = \left[\frac{dX_m}{d\xi} \xi^{\frac{1}{3}} \right]_{\xi=0} \quad (m = 1, 2).$$

Wzory (5.10) podają rozwiązanie równania jednorodnego, przy czym w przedziale (5.3) zmienneści kąta α funkcje $X_{m,n}$ ($m = 1, 2$; $n = i, r$) są określone wyrażeniami (5.6), (5.15) i (5.18), a dla ujemnych wartości

kąta α , leżących w przedziale (5.19), należy funkcje X_{mn} zastąpić funkcjami \bar{X}_{mn} określonymi równaniami (5.26).

W rezultacie otrzymaliśmy rozwiązanie dla przedziału

$$(5.30) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2},$$

co w zupełności wystarcza, ponieważ dla pozostałych wartości kąta α z przedziału ($\pi/2 \leq \alpha \leq 3\pi/2$) można wprowadzić nową zmienną $\bar{\alpha} = \pi - \alpha$, której wartości należą do przedziału (5.30) i która po podstawieniu do równania (5.2) w niczym nie zmienia jego postaci.

6. Rozwiązanie zasadniczego równania teorii zgięciowej. Zadanie niejednorodne

Zgodnie z oznaczeniami (5.1) należy wyznaczyć całkę szczególną (spełniającą dowolne warunki brzegowe) równania

$$(6.1) \quad (1 + \lambda \sin \alpha) \frac{d^2 X_s}{d\alpha^2} - \lambda \cos \alpha \frac{d X_s}{d\alpha} + i 2k^2 \sin \alpha X_s = 2k^3 Q \cos \alpha.$$

W równaniu tym występuje parametr $2k^2$ znacznie większy od jedności, toteż jest rzeczą wskazaną szukać rozwiązania w postaci szeregu potęgowego względem współczynnika $1/2k^2$:

$$(6.2) \quad X_s(\alpha) = W_0(\alpha) + \frac{W_1(\alpha)}{2k^2} + \frac{W_2(\alpha)}{(2k^2)^2} + \dots$$

Podstawiając szereg (6.2) do równania (6.1) i porównując wyrażenia przy jednakowych potęgach ułamka $1/2k^2$ po lewej i po prawej stronie równania (6.1) można wyznaczyć funkcje $W_m(\alpha)$ ($m = 0, 1, \dots$). Jeśli zadowolimy się tylko pierwszym wyrazem szeregu (6.2), to otrzymamy

$$(6.3) \quad X_s(\alpha) \approx W_0(\alpha) = -iQ \operatorname{ctg} \alpha.$$

Zgodnie z wywodami poprzedniego punktu rozpatrywać będziemy tylko przedział $0 \leq |\alpha| \leq \pi/2$.

Rozwiązanie (6.3) traci sens dla $\alpha = 0$, co można uzasadnić w następujący sposób.

Zachowanie w szeregu (6.2) wyłącznie pierwszego wyrazu odpowiada pominięciu w prawej części równania (6.1) wszystkich składników z wyjątkiem ostatniego $i 2k^2 \sin \alpha X_s$. Takie postępowanie jest uzasadnione tylko dla dużych (co do bezwzględnej wartości) kątów α , ponieważ czynnik $2k^2$ jest znacznie większy od jedności. Jednakże w pobliżu linii osobliwej ($\alpha \approx 0$) wyrażenie $2k^2 \sin \alpha X_s$ jest bliskie zeru i nie wolno już pomijać pozostałych składników. Okoliczność ta pozostaje w ścisłym

związku z osobliwością torusa. Rzecz w tym, że równanie (6.3) określa błonowy stan napięcia. Istotnie, podstawiając wyrażenie (6.3) do pierwszych dwóch wzorów (4.3) i uwzględniając przy tym równość (3.23) otrzymuje się zależności (2.11) teorii błonowej. Przypominając wywody p. 2 stwierdzamy zatem, co następuje. Niemożność przedstawienia całki szczególnej przy małych wartościach kąta α w postaci (6.3), odpowiadającej błonowemu stanowi napięcia, związana jest z nieistnieniem błonowego stanu napięcia w torusie w pobliżu linii osobliwej.

Nadmienić należy, że przy badaniu powłok cienkościennych przyjmuje się zazwyczaj całkę szczególną zasadniczego równania różniczkowego w postaci odpowiadającej błonowemu stanowi napięcia, co w danym przypadku jest, jak się okazuje, niedopuszczalne.

Zgodnie z powyższą analizą całki szczególnej (6.3) można oczekiwać błonowego stanu napięcia wyłącznie z dala od linii osobliwej. Powstaje więc następujące zagadnienie. Należy wyznaczyć przybliżoną wartość całki szczególnej równania (6.1), która

(1) przy małych wartościach kąta α spełniałaby równanie różniczkowe (6.1),

(2) przy dużych wartościach kąta α i bardzo cienkich ściankach powłoki (tj. przy dużych $2k^2$) odpowiadałaby błonowemu stanowi napięcia, tj. była określona wzorem (6.3).

W celu rozwiązania postawionego zagadnienia wprowadźmy nową zmienną

$$(6.4) \quad \eta = -(2k^2)^{\frac{1}{3}} \sin \alpha$$

oraz nową niewiadomą

$$(6.5) \quad Z(\eta) = \frac{X_s}{(2k^2)^{\frac{1}{3}} Q \cos \alpha}$$

Przy małych wartościach kąta α jest w przybliżeniu

$$(6.6) \quad \eta \approx -(2k^2)^{\frac{1}{3}} \alpha, \quad Z(\eta) \approx \frac{X_s}{(2k^2)^{\frac{1}{3}} Q}$$

a równanie różniczkowe (6.1) przybiera postać

$$(1 + \lambda \alpha) \frac{d^2 X_s}{d \alpha^2} - \lambda \frac{d X_s}{d \alpha} + i 2k^2 \alpha X_s \approx 2k^2 Q$$

lub po wprowadzeniu nowych zmiennych określonych wzorami (6.6)

$$(6.7) \quad \left[1 - \frac{\lambda \eta}{(2k^2)^{\frac{1}{3}}} \right] \frac{d^2 Z}{d \eta^2} + \frac{\lambda}{(2k^2)^{\frac{1}{3}}} \frac{d Z}{d \eta} - i \eta Z = 1$$

Postawione warunki (1) i (2), które powinna spełniać całka X_s , można matematycznie ująć w sposób następujący.

Trzeba wyznaczyć funkcję $Z(\eta)$, która by: (1) spełniała równanie różniczkowe (6.7) oraz (2) przy dużych wartościach η dążyła do granicy

$$(6.8) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta Z(\eta) = i.$$

Ostatnia zależność wynika z tego, że równość (6.8) przy uwzględnieniu wzorów (6.4) i (6.5) jest równoważna równości

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(-\frac{\operatorname{tg} a}{Q} X_s \right) = i,$$

czyli

$$\lim_{\substack{2k^2 \rightarrow \infty \\ (\alpha > 0)}} X_s = -iQ \operatorname{ctg} a,$$

co pokrywa się ze wzorem (6.3).

Szukamy całki równania (6.7) w postaci szeregu potęgowego

$$(6.9) \quad Z(\eta) = Z_0(\eta) + \frac{Z_1(\eta)}{(2k^2)^{\frac{1}{3}}} + \frac{Z_2(\eta)}{(2k^2)^{\frac{2}{3}}} + \dots$$

Podstawiając szereg (6.9) do równania (6.7) i porównując wyrazy przy jednakowych potęgach współczynnika $1/(2k^2)^{1/3}$ stwierdzamy, że pierwszy wyraz szeregu (6.9) powinien spełniać równanie

$$(6.10) \quad \frac{d^2 Z_0}{d\eta^2} - i\eta Z_0 = 1.$$

Ograniczając się do pierwszego wyrazu szeregu (6.9) można dla uproszczenia oznaczeń pomijać wskaźnik 0 u dołu.

Równanie (6.10) jest jak wiadomo równaniem typu B e s s e l a. Istotnie, wprowadzając nową niewiadomą

$$(6.11) \quad Y = \frac{Z}{\sqrt{\eta}}$$

oraz nową zmienną

$$(6.12) \quad x = \frac{2}{3}(i\eta)^{\frac{3}{2}},$$

sprowadza się równanie (6.10) do równania B e s s e l a

$$(6.13) \quad x^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} + x \frac{dY}{dx} + Y \left(x^2 - \frac{1}{9} \right) = -\frac{2}{3} \sqrt{i} x.$$

Całką tego równania jest funkcja L o m m e l a ([11], s. 377 i dalsze)

$$(6.14) \quad Y = -\frac{2}{3} \sqrt{i} S_{0, \frac{1}{3}}(x),$$

lub w zmiennych Z i η wobec związków (6.11) i (6.12)

$$(6.15) \quad Z = -\frac{2}{3} \sqrt{i\eta} S_{0, \frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} (i\eta)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Zgodnie z określeniem funkcji L o m m e l a jest

$$S_{\mu, \nu}(x) = s_{\mu, \nu}(x) + \frac{2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sin \nu\pi} \times \\ \times \left[\cos \frac{1}{2}(\mu - \nu)\pi J_{-\nu}(x) - \cos \frac{1}{2}(\mu + \nu)\pi J_{\nu}(x) \right],$$

a zatem

$$(6.16) \quad S_{0, \frac{1}{3}}(x) = s_{0, \frac{1}{3}}(x) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2} [J_{-\frac{1}{3}}(x) - J_{\frac{1}{3}}(x)].$$

Wprowadzając zamiast funkcji B e s s e l a ich liniowe kombinacje — funkcje H a n k e l a — i korzystając ze znanej zależności

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

otrzymuje się

$$(6.17) \quad S_{0, \frac{1}{3}}(x) = s_{0, \frac{1}{3}}(x) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} [(e^{\frac{\pi}{3}i} - 1) H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x) + (e^{-\frac{\pi}{3}i} - 1) H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(x)].$$

Przy przejściu od wyrażenia (6.16) do (6.17) wykorzystaliśmy znane związki

$$J_{\nu}(x) = \frac{H_{\nu}^{(1)}(x) + H_{\nu}^{(2)}(x)}{2}, \quad J_{-\nu}(x) = \frac{e^{i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(x) + e^{-i\nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(x)}{2}.$$

Podstawiając wyrażenie (6.17) do równości (6.15) otrzymuje się po kilku prostych przekształceniach

$$(6.18) \quad Z(\eta) = -\frac{2}{3} \sqrt{i\eta} s_{0, \frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} (i\eta)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} [(1 - i\sqrt{3}) h_1(i\eta) + \\ + (1 + i\sqrt{3}) h_2(i\eta)],$$

gdzie

$$(6.19) \quad \begin{cases} h_1(z) = h_{1r}(z) + ih_{1i}(z) = \left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right), \\ h_2(z) = h_{2r}(z) + ih_{2i}(z) = \left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right). \end{cases}$$

Funkcje $h_1(z)$ i $h_2(z)$ zwane zmodyfikowanymi funkcjami Hankela rzędu $1/3$ oraz ich pierwsze pochodne są stabelaryzowane, [18], a funkcje $s_{0, \frac{1}{3}}(x)$ określa następujący szereg potęgowy, [11],

$$(6.20) \quad s_{0, \frac{1}{3}}(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3} + m + 1\right) \Gamma\left(\frac{2}{3} + m + 1\right)} \left(\frac{1}{2} x\right)^{2m+2}$$

Wprowadzając do szeregu (6.20) zmienną η według równości (6.12) i podstawiając w ten sposób uzyskany szereg do wyrażenia (6.18) — po oddzieleniu części rzeczywistych od urojonych — otrzymuje się ostatecznie:

$$(6.21) \quad \begin{cases} Z_r(\eta) = s_r(\eta) + b [h_{1r}(i\eta) + \sqrt{3} h_{1i}(i\eta) + h_{2r}(i\eta) - \sqrt{3} h_{2i}(i\eta)], \\ Z_i(\eta) = s_i(\eta) + b [-\sqrt{3} h_{1r}(i\eta) - h_{1i}(i\eta) + \sqrt{3} h_{2r}(i\eta) - h_{2i}(i\eta)], \\ Z'_r(\eta) = s'_r(\eta) + b [\sqrt{3} h'_{1r}(i\eta) - h'_{1i}(i\eta) + \sqrt{3} h'_{2r}(i\eta) - h'_{2i}(i\eta)], \\ Z'_i(\eta) = s'_i(\eta) + b [h'_{1r}(i\eta) + \sqrt{3} h'_{1i}(i\eta) + h'_{2r}(i\eta) - \sqrt{3} h'_{2i}(i\eta)], \end{cases}$$

gdzie

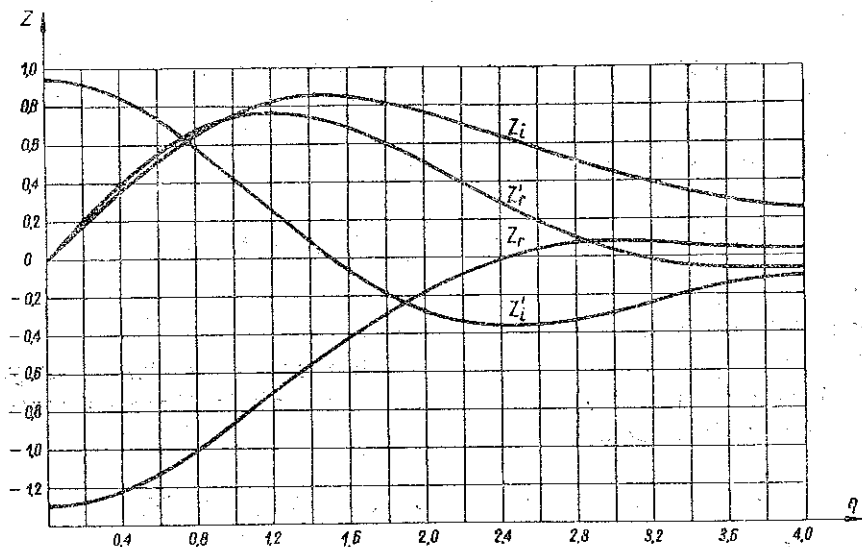
$$(6.22) \quad \begin{cases} b = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,3640, \\ s_r = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{3} + 2n\right) \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + 1\right) \cdots \left(\frac{2}{3} + 2n\right)} \frac{\eta^{6n+2}}{3^{4n+2}}, \\ s_i = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{3} + 2n+1\right) \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + 1\right) \cdots \left(\frac{2}{3} + 2n+1\right)} \times \\ \times \frac{\eta^{6n+5}}{3^{4n+4}}. \end{cases}$$

Rysunek 12 przedstawia wykresy funkcji $Z(\eta)$ i jej pochodnej. Wykresy sporządzono wyłącznie dla dodatnich wartości η . Łatwo sprawdzić

[choćby na podstawie wzorów (6.15) i (6.16)], że $Z_r(\eta)$ jest funkcją parzystą, a $Z_i(\eta)$ nieparzystą, czyli że

$$(6.23) \quad Z_r(-\eta) = Z_r(\eta), \quad Z_i(-\eta) = -Z_i(\eta).$$

Z dotychczasowych rozważań wynika, że rozwiązanie równania (6.7) w postaci (6.15) spełnia (w przybliżeniu) warunek (1) dla funkcji $Z(\eta)$. Udowodnimy, że również warunek (2) jest spełniony.



Rys. 12

Istotnie, przy dużych wartościach zmiennej x funkcje L o m m e l a można przedstawić za pomocą następującego szeregu asymptotycznego ([11], s. 383)

$$S_{\mu, \nu}(x) = x^{\mu-1} \left[1 - \frac{(\mu-1)^2 - \nu^2}{x^2} + \frac{[(\mu-1)^2 - \nu^2][(\mu-3)^2 - \nu^2]}{x^4} - \dots \right] \\ (|\arg x| < \pi),$$

więc

$$S_{0, \frac{1}{3}}(x) = S_{0, \frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} (i\eta)^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{3}{2} \frac{1}{(i\eta)^{\frac{2}{3}}} \left[1 - \frac{1 - \frac{1}{9}}{\frac{4}{9} (i\eta)^3} + \frac{\left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(9 - \frac{1}{9}\right)}{\frac{16}{9 \cdot 9} (i\eta)^6} - \dots \right].$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do wzoru (6.15) otrzymuje się przy dużych wartościach η

$$(6.24) \quad Z \approx \frac{i}{\eta} \left(1 - \frac{2i}{\eta^3} - \frac{40}{\eta^6} + \dots \right).$$

Warunek (6.8) jest zatem spełniony, co należało wykazać.

Powyższe rozwiązania równania (6.1) zostały zaczerpnięte z cytowanej na wstępie pracy R. Clarka i E. Reissnera, [1].

Powracając do niewiadomej X_s związanej z funkcją Z zależnością (6.5) i oddzielając części rzeczywiste od urojonych za pomocą wzoru (3.23) otrzymamy

$$(6.25) \quad \begin{cases} X_{sr} = (2k^2)^{\frac{1}{3}} \left[-2k^2 C_1 Z_r(\eta) + \lambda \frac{p \varrho}{2} Z_i(\eta) \right] \cos a, \\ X_{si} = -(2k^2)^{\frac{1}{3}} \left[2k^2 C_1 Z_i(\eta) + \lambda \frac{p \varrho}{2} Z_r(\eta) \right] \cos a. \end{cases}$$

Dla dużych wartości kąta a mamy związki przybliżone

$$(6.26) \quad X_{sr} \approx -\frac{\lambda}{2} p \varrho \operatorname{ctg} a, \quad X_{si} \approx 2k^2 C_1 \operatorname{ctg} a,$$

co odpowiada błonowemu stanowi napięcia.

Reasumując wywody dwóch ostatnich paragrafów stwierdzamy, że zgodnie ze wzorami (5.1) i (5.10) pomocniczą funkcję X można przedstawić w następującej postaci:

$$(6.27) \quad \begin{cases} X_r = (1 + \lambda \sin a)^{\frac{2}{3}} (C_3 X_{1r} - C_4 X_{1i} + C_5 X_{2r} - C_6 X_{2i}) + \\ + (2k^2)^{\frac{1}{3}} \left(-2k^2 C_1 Z_r + \frac{\lambda p \varrho}{2} Z_i \right) \cos a, \\ X_i = (1 + \lambda \sin a)^{\frac{2}{3}} (C_4 X_{1r} + C_3 X_{1i} + C_6 X_{2r} + C_5 X_{2i}) - \\ - (2k^2)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\lambda p \varrho}{2} Z_r + 2k^2 C_1 Z_i \right) \cos a. \end{cases}$$

Wszystkie funkcje występujące we wzorach (6.27) wyrażają się za pomocą wyczerpująco zbadanych funkcji B e s s e l a, mianowicie X_1 i X_2 określone są wzorami (5.5) i (5.15) [lub (5.26)], a Z wzorami (6.15) i (6.21).

Użyte funkcje B e s s e l a w pobliżu linii osłobkowej ($a \approx 0$) można przedstawić w postaci szeregów potęgowych [wzory (5.16.1) i (6.22)], a w obszarach oddalonych od niej (dla dużych a) — za pomocą prostych wzorów asymptotycznych [(5.18) i (6.26)].

Sześć stałych całkowania C_m ($m = 1, \dots, 6$) wyznacza się korzystając ze wzorów (4.3) i (4.4) w ten sposób, by spełnić po trzy warunki brzegowe wzdłuż krawędzi $a = a_1$ i $a = a_2$ ograniczających powłokę.

7. Przykłady liczbowe

Schemat obliczeń (z uwzględnieniem odpowiednich wzorów) jest następujący:

(1) Obliczenie charakterystycznych współczynników na podstawie danych wymiarów konstrukcji [wzory (2.12) i (3.20)]

$$\lambda = \frac{\rho}{R},$$

$$2k^2 = \lambda \frac{\rho}{\delta} \sqrt{12(1 - \nu^2)}.$$

(2) Zestawienie i szczegółowe omówienie warunków brzegowych.

(3) Wyznaczenie wartości funkcji X_{mn} , Z_n ($m = 1, 2$; $n = r, i$) oraz ich pochodnych w punktach leżących na krawędziach powłoki $a = a_1$ i $a = a_2$.

(3.a) Obliczenie $\xi(a_j)$ lub $\zeta(a_j)$ oraz $\eta(a_j)$ ($j = 1, 2$) za pomocą wzorów (5.6), (5.22) i (6.4):

$$\xi = \frac{2}{3} k a^{\frac{3}{2}} [1 - \psi(\lambda, a)],$$

$$\zeta = \frac{2}{3} k \gamma^{\frac{3}{2}} [1 + \bar{\psi}(\lambda, \gamma)],$$

$$\eta = -(2k^2)^{\frac{1}{2}} \sin a,$$

gdzie

$$\gamma = -a.$$

Wartości funkcji $\psi(\lambda, a)$ i $\bar{\psi}(\lambda, \gamma)$ oblicza się za pomocą wzorów odpowiednio (5.7) i (5.23) lub odczytuje z wykresów (rys. 8 i 11)¹¹⁾.

(3.b) Wyznaczenie wartości $X_{mn}(a_j)$ i $Z_n(a_j)$ oraz ich pochodnych (względem ξ, η) za pomocą wykresów (rys. 9, 10 i 12), wyrażeń (5.15), (6.21) lub wzorów asymptotycznych (5.18) i (6.24):

$$X_{2r} = 0,9439 \xi^{-\frac{1}{6}} e^{\mp \xi} \cos\left(\xi \mp \frac{\pi}{24}\right),$$

$$X_{2i} = \pm 0,9439 \xi^{-\frac{1}{6}} e^{\mp \xi} \sin\left(\xi \mp \frac{\pi}{24}\right),$$

$$Z_r = \frac{2}{\eta^4} \approx 0, \quad Z_i = \frac{1}{\eta}.$$

(4) Zestawienie układu równań (algebraicznych) dla wyznaczenia stałych całkowania.

¹¹⁾ Po oddaniu pracy do druku ukazały się tablice funkcji ψ i $\bar{\psi}$ w książce [20].

Na podstawie wzorów (4.3) i (4.4) oraz wyników obliczeń według poprzednich punktów zestawia się warunki brzegowe w postaci równań algebraicznych, w których niewiadomymi są stałe całkowania C_1, \dots, C_6 . Zauważmy, że stałą C_1 można na ogół wyznaczyć bezpośrednio rozważając równowagę układu w całości [por. przykład liczbowy (1)].

Przy przekształcaniu wzorów (4.3) i (4.4) dogodnie jest wyrażenia (6.27) przyjąć w następującej postaci:

$$(7.1) \quad \begin{cases} X_r = (1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{3}{4}} D_1 - (2k^2)^{\frac{1}{2}} D_2 \cos \alpha, \\ X_i = (1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{3}{4}} D_3 - (2k^2)^{\frac{1}{2}} D_4 \cos \alpha, \end{cases}$$

gdzie

$$(7.2) \quad \begin{cases} D_1 = C_3 X_{1r} - C_4 X_{1i} + C_5 X_{2r} - C_6 X_{2i}, \\ D_3 = C_3 X_{1i} + C_4 X_{1r} + C_5 X_{2i} + C_6 X_{2r}, \\ D_2 = C_1 2k^2 Z_r - \frac{1}{2} \lambda p \varrho Z_i, \\ D_4 = C_1 2k^2 Z_i + \frac{1}{2} \lambda p \varrho Z_r. \end{cases}$$

Korzystając ze wzorów (5.6) i (6.4) można na podstawie zależności (7.1) wyprowadzić następujące związki:

$$(7.3) \quad \begin{cases} \frac{dX_r}{da} = \frac{3\lambda \cos \alpha}{4(1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{1}{4}}} D_1 + (1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{1}{4}} k \sqrt{\sin \alpha} D'_1 + \\ \phantom{\frac{dX_r}{da} =} + (2k^2)^{\frac{1}{2}} D_2 \sin \alpha + (2k^2)^{\frac{2}{3}} D'_2 \cos^2 \alpha, \\ \frac{dX_i}{da} = \frac{3\lambda \cos \alpha}{4(1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{1}{4}}} D_3 + (1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{1}{4}} k \sqrt{\sin \alpha} D'_3 + \\ \phantom{\frac{dX_i}{da} =} + (2k^2)^{\frac{1}{2}} D_4 \sin \alpha + (2k^2)^{\frac{2}{3}} D'_4 \cos^2 \alpha, \end{cases}$$

gdzie operator D'_1 jest określony wzorem

$$(7.4) \quad D'_1 = C_3 X'_{1r} - C_4 X'_{1i} + C_5 X'_{2r} - C_6 X'_{2i},$$

a pozostałe operatory D'_m ($m = 2, 3, 4$) analogicznymi wzorami.

Dla ujemnych wartości kąta α należy we wzorach (7.2) i (7.4) funkcje X_{mn} ($m = 1, 2; n = r, i$) zastąpić funkcjami \bar{X}_{mn} i odpowiednio D_1 i D_3 operatorami \bar{D}_1 i \bar{D}_3 , a we wzorach (7.3) zamienić wyrażenie

$$\sqrt{\sin \alpha} D'_k \quad \text{na} \quad -\sqrt{-\sin \alpha} \bar{D}'_k \quad (k = 1, 3),$$

gdzie

$$(7.5) \quad \bar{D}'_1 = C_3 \bar{X}'_{1r} - C_4 \bar{X}'_{1i} + C_5 \bar{X}'_{2r} - C_6 \bar{X}'_{2i},$$

a operator \bar{D}'_3 jest określony podobnie.

(5) Rozwiązanie otrzymanego układu równań, tzn. wyznaczenie stałych całkowania.

(6) Obliczenie wymaganych w zadaniu wielkości (napięć, momentów, odkształceń).

Przykład 1. Dno kadłuba turbiny parowej z otworem na wał¹²⁾. Schemat układu przedstawiono na rys. 13. Obciążeniem jest równomierne ciśnienie wewnętrzne p . Można uważać, że górny pierścień jest sztywny. Wymiary w mm: $\delta = 16$, $r = 400$, $R = 300$, $r_0 = 150$, $\rho = 100$, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$.

Zadanie polega na wykonaniu wykresów napięć i momentów gnących.

(1) Powłoka składa się z długiego walca kołowego o promieniu r oraz części przejściowej, toroidalnej. Charakterystyczne współczynniki dla torusa są:

$$(7.6.1) \quad \lambda = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{3}, \quad 2k^2 = \sqrt{12 \cdot 0,91} \frac{1}{3} \frac{100}{16} = 6,88;$$

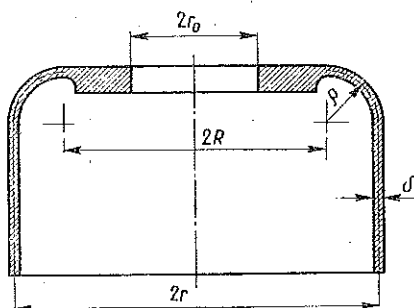
dla walca¹³⁾:

$$(7.6.2) \quad b = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{r}{\delta}} = 6,415.$$

(2) Obliczenie powłoki walcowej nie nastęrcza trudności. Wiadomo, że «napięcie zespolone» \tilde{T}_W w długim walcu kołowym obciążonym równomiernym ciśnieniem oraz siłami i momentami na krawędzi wynosi¹⁴⁾

$$(7.7) \quad \tilde{T}_W = \tilde{A} e^{-b(1-i)z} + T_W^*,$$

gdzie $z = y/r$ oznacza odległość od obciążonej krawędzi, mierzona w jednostkach bezwymiarowych wzdłuż tworzącej (rys. 14), $\tilde{A} = A_1 + i A_2$ jest stałą całkowania (A_1 i A_2 są liczbami rzeczywistymi). Poza tym symbol T_W^* jest określony wzorem $T_W^* = (T_1^*)_W + (T_2^*)_W$, gdzie $(T_1^*)_W$ jest skła-



Rys. 13

¹²⁾ Podobny przykład P. K u r a t o w rozwiązuje inną metodą w pracy [19].

¹³⁾ Przy obliczaniu powłoki walcowej posługujemy się oznaczeniami i metodą W. W. N o w o ż i ł o w a, [8].

¹⁴⁾ Wielkości odnoszące się do walca (lub torusa) oznaczono wskaźnikiem W (lub T) u dołu.

dową osiową, a $(T_2^*)_W$ składową obwodową napięcia; składowe te są wyznaczone według teorii błonowej i wynoszą w danym przypadku

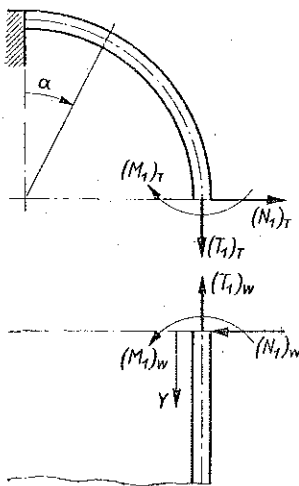
$$(7.8) \quad (T_1^*)_W = p \frac{\pi(r^2 - r_0^2)}{2\pi r}, \quad (T_2^*)_W = pr.$$

Z warunków równowagi układu jako całości wynika (rys. 14), że dla $a = \pi/2$ jest

$$(T_1)_T = (T_1)_W = (T_1^*)_W = \frac{pr}{2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] = 0,430 pr,$$

skąd wobec pierwszego wzoru (4.3) znajdziemy

$$(7.9) \quad C_1 = -0,845 pr.$$



Rys. 14

Wzdłuż krawędzi $a=0$ torus jest przymocowany do sztywnego pierścienia, a więc dla $a=0$ jest $\vartheta = \Delta_x = 0$. Stąd wobec wzorów (4.4) dla $a=0$ znajdziemy

$$(7.10) \quad X_r = 0, \quad T_2 - \nu T_1 = 0.$$

Wzdłuż równoleżnika $a = \pi/2$ ($\chi = 0$) torus jest połączony z walcem, tj. powinno być spełnione równanie (rys. 14):

$$(7.11) \quad \begin{cases} (N_1)_T = (N_1)_W, & (M_1)_T = (M_1)_W, \\ (\Delta_x)_T = (\Delta_x)_W, & \vartheta_T = \vartheta_W. \end{cases}$$

Można udowodnić, że równania (7.11) są równoważne równaniom następującym dla $a = \pi/2$ ($\chi = 0$):

$$(7.12) \quad \tilde{T}_T = \tilde{T}_W, \quad \frac{d\tilde{T}_T}{\varrho da} = \frac{d\tilde{T}_W}{rd\chi}.$$

Istotnie, zgodnie ze wzorami (3.11) mamy

$$\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 = T_1 + T_2 - \frac{i}{c} \frac{M_1 + M_2}{1 + \nu}$$

lub

$$\tilde{T} = T_2 - \nu T_1 + (1 + \nu) T_1 - \frac{i}{c} \frac{M_1 + M_2}{1 + \nu}.$$

Porównując wyrażenia (3.21) i (4.1) stwierdzamy, że dla $a = \pi/2$

$$\frac{d\tilde{T}_T}{\varrho da} = - \frac{E\delta}{(R_2)_T} \vartheta_T - \frac{i}{c} (N_1)_T.$$

Bardziej ogólne rozważania, [8], wykazują, że dla każdej powłoki (a więc również dla walca) spełniony jest warunek

$$(7.13) \quad \frac{d\tilde{T}}{ds} = -\frac{E\delta}{R_2}\vartheta - \frac{i}{c}N_1,$$

gdzie ds oznacza różniczkę łuku południka.

W danym przypadku są spełnione następujące warunki:

- (a) ponieważ κ_1 jest duże w porównaniu z κ_2 , to $M_2 \approx \nu M_1$,
- (b) zgodnie z równaniem równowagi dla $\alpha = \pi/2$ i $\chi = 0$ $(T_1)_R = (T_1)_W$,
- (c) z założenia mamy $\delta_r = \delta_w$, a więc i współczynnik c jest jednakowy dla obydwu powłok,
- (d) jak wynika z rysunku $\left[R_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]_R = (R_2)_W = r$.

Wobec spełnienia powyższych warunków i zgodnie z drugim wzorem (4.4) dwa równania (7.12) (z niewiadomymi zespolonymi) są równoważne czterem równaniom (7.11) (z niewiadomymi rzeczywistymi), co należało wykazać.

Ze wzoru (3.21) otrzymujemy

$$(7.14) \quad \frac{d\tilde{T}_r}{da} = \frac{1}{(1 + \lambda \sin \alpha)^2} (X \sin \alpha - C_1 2k^2 \cos \alpha),$$

a z równania (3.19) przy uwzględnieniu (7.14) znajdujemy

$$(7.15) \quad \tilde{T}_r = \frac{i}{2k^2} \frac{1}{1 + \lambda \sin \alpha} \frac{dX}{da} + \frac{3 + 2\lambda \sin \alpha}{1 + \lambda \sin \alpha} \frac{p\varrho}{2}.$$

Podstawiając obliczone wartości do równań (7.14) i (7.15) oraz korzystając ze wzoru (7.7) sprowadzamy zależności (7.12) do następującej postaci:

$$(7.16) \quad \begin{cases} i \frac{3}{4 \cdot 6,88} \left[\frac{dX}{da} \right]_{\frac{\pi}{2}} + \frac{11}{32} pr = \tilde{A} + 1,430 pr, \\ \frac{9}{4} X \left(\frac{\pi}{2} \right) = -6,415 (1 - i) \tilde{A}. \end{cases}$$

Z równań (7.10) i (7.16) należy wyznaczyć sześć niewiadomych: C_3, C_4, C_5, C_6, A_1 i A_2 .

(3) Zgodnie ze wzorami (5.6) i (6.4) mamy

$$\begin{aligned} \xi(0) &= 0, & \eta(0) &= 0, \\ \xi \left(\frac{\pi}{2} \right) &= \frac{2}{3} \sqrt{3,44} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}} (1 - 0,171) = 2,02, \\ \eta \left(\frac{\pi}{2} \right) &= -\sqrt[3]{6,88} = -1,90. \end{aligned}$$

Z wykresów znajdujemy dla $\alpha = \pi/2$ ($\xi = 2,02$, $\eta = -1,90$) następujące wartości funkcji:

$$\begin{array}{llll} X_{1r} = -0,034, & X_{1i} = 0,106, & X_{2r} = -3,47, & X_{2i} = -5,28, \\ X'_{1r} = -0,081, & X'_{1i} = -0,178, & X'_{2r} = -8,49, & X'_{2i} = -1,37, \\ Z_r = -0,231, & Z_i = -0,801, & Z'_r = -0,555, & Z'_i = -0,242. \end{array}$$

(4) Podstawiając obliczone wielkości do wyrażeń (7.1) i (7.3) oraz uwzględniając równość (7.9) otrzymujemy

$$(7.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_r \left(\frac{\pi}{2} \right) = -0,042 C_3 - 0,131 C_4 - 4,30 C_5 + 6,55 C_6, \\ X_i \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0,131 C_3 - 0,042 C_4 - 6,55 C_5 - 4,30 C_6, \\ \left[\frac{dX_r}{da} \right]_{\frac{\pi}{2}} = -0,162 C_3 + 0,355 C_4 - 16,9 C_5 + 2,73 C_6 + 2,62 pr, \\ \left[\frac{dX_i}{da} \right]_{\frac{\pi}{2}} = -0,355 C_3 - 0,162 C_4 - 2,73 C_5 - 16,9 C_6 + 8,83 pr. \end{array} \right.$$

Analogicznie obliczamy wartości funkcji X i dX/da wzdłuż krawędzi $\alpha = 0$ i otrzymujemy:

$$(7.17.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_r(0) = 1,301 C_3 + 0,350 C_4 + 1,301 C_5 - 0,350 C_6 - 14,2 pr, \\ X_i(0) = -0,350 C_3 + 1,301 C_4 + 0,350 C_5 + 1,301 C_6 + 0,102 pr, \\ \left[\frac{dX_i}{da} \right]_0 = 1,23 C_3 - 0,99 C_4 - 1,72 C_5 + 0,810 C_6 - 19,7 pr. \end{array} \right.$$

Zauważmy, że przy obliczaniu wartości funkcji dX_i/da w punkcie $\alpha = 0$, należy uwzględnić zależność

$$(7.18) \quad [k \sqrt{\sin \alpha} D'_3]_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2} k^2 [(C_3 X'_{1i} + C_4 X'_{1r} + C_5 X'_{2i} + C_6 X'_{2r}) \xi^{\frac{1}{3}}]_0}$$

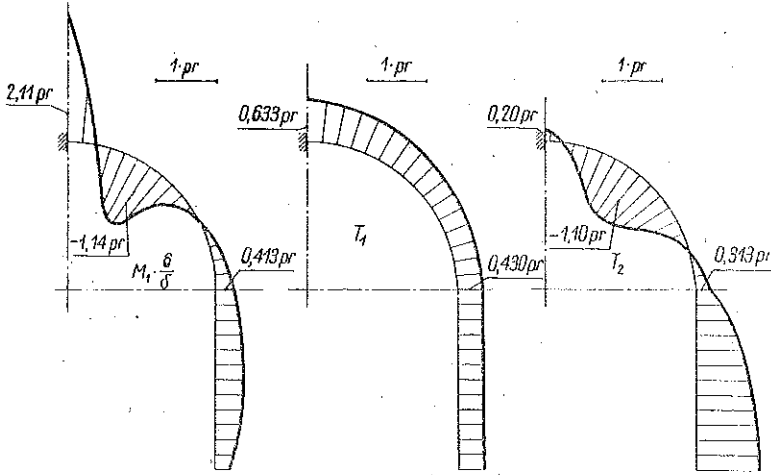
[jak to wynika ze wzoru (5.28.1)].

W rezultacie warunki brzegowe (7.12) i (7.10) sprowadzają się do następującego układu równań ze stałymi całkowania:

$$(7.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} + 1,301 C_3 + 0,350 C_4 + 1,301 C_5 - 0,350 C_6 = 14,2 pr, \\ - 1,38 C_3 + 1,55 C_4 + 1,87 C_5 - 0,246 C_6 = -19,2 pr, \\ + 0,0387 C_3 + 0,0177 C_4 + 0,298 C_5 + 1,84 C_6 - A_1 = 2,05 pr, \\ - 0,0177 C_3 + 0,0387 C_4 - 1,84 C_5 + 0,298 C_6 - A_2 = -0,286 pr, \\ - 0,0945 C_3 - 0,295 C_4 - 9,67 C_5 + 14,7 C_6 + 6,42(A_1 + A_2) = 0, \\ + 0,295 C_3 - 0,0945 C_4 - 14,7 C_5 - 9,67 C_6 - 6,42(A_1 - A_2) = 0, \end{array} \right.$$

(5) Rozwiązując układ równań (7.19) znajdujemy

$$(7.19.1) \quad \begin{cases} C_3 = 11,6 \text{ pr}, & C_4 = -2,16 \text{ pr}, \\ C_5 = 0,155 \text{ pr}, & C_6 = 0,492 \text{ pr}, \\ A_1 = -0,687 \text{ pr}, & A_2 = -0,142 \text{ pr}. \end{cases}$$



Rys. 15

(6) Znając stałe całkowania obliczamy za pomocą wzorów (4.3) napięcia T_1 i T_2 oraz momenty M_1 dla różnych wartości α . Wyniki obliczeń przedstawione zostały w postaci wykresów na rys. 15.

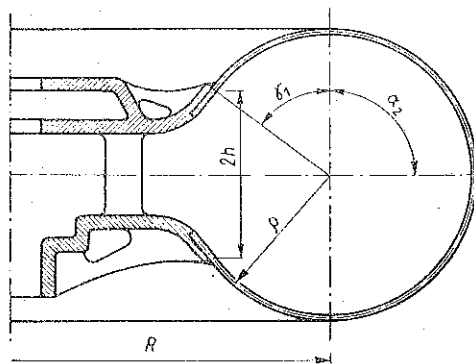
Przykład 2. Kadłub turbiny wodnej. Schematyczny przekrój kadłuba turbiny wodnej przedstawiony jest na rys. 16. Obciążenie stanowi równomierne ciśnienie wewnętrzne p . Wymiary w mm wynoszą: $\delta = 14$, $R = 3180$, $\rho = 1450$, $h = 610$, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$.

Zadanie polega na wyznaczeniu największego naprężenia występującego w ściankach powłoki.

(1) Obliczenie współczynników

$$\lambda = \frac{\rho}{R} = \frac{1450}{3180} = 0,4560;$$

$$2k^2 = \sqrt{12 \cdot 0,91 \cdot 0,4560} \frac{1450}{14} = 155,8.$$



Rys. 16

Krawędzie są rozmieszczone symetrycznie względem równoleżnika $a = \pi/2$, zatem wystarczy rozpatrzyć połowę powłoki, tj. obszar

$$a_1 \leq a \leq \frac{\pi}{2} = a_2.$$

Kąt a_1 jest ujemny (rys. 16) i wynosi $-a_1 = \gamma_1 = \arccos h/\rho = 1,135$ radianów.

(2) Warunki brzegowe. Wzdłuż krawędzi $a = \pi/2$ powinno być ze względu na symetrię

$$(7.20) \quad \vartheta = N_1 = 0.$$

Ze wzorów (4.3) i (4.4) wynika, że warunki (7.20) są równoważne równaniu $X(\pi/2) = 0$, czyli wobec wyrażen (7.1) i (7.2) znajdujemy

$$(7.20.1) \quad \begin{cases} C_3 X_{1r} \left(\frac{\pi}{2} \right) - C_4 X_{1i} \left(\frac{\pi}{2} \right) + C_5 X_{2r} \left(\frac{\pi}{2} \right) - C_6 X_{2i} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0, \\ C_3 X_{1i} \left(\frac{\pi}{2} \right) + C_4 X_{1r} \left(\frac{\pi}{2} \right) + C_5 X_{2i} \left(\frac{\pi}{2} \right) + C_6 X_{2r} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Wartość parametru $\xi(\pi/2)$ wynosi

$$\xi \left(\frac{\pi}{2} \right) = \xi_2 = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{155,8}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{2}{3}} (1 - 0,192) = 9,39.$$

Przy tak dużych (w porównaniu z jednością) wartościach ξ można na podstawie wzorów (5.18) przyjąć $X_1(\xi_2) \approx 0$, wobec czego równania (7.20.1) przechodzą w następujące:

$$(7.20.2) \quad C_5 X_{2r}(\xi_2) - C_6 X_{2i}(\xi_2) = 0, \quad C_5 X_{2i}(\xi_2) + C_6 X_{2r}(\xi_2) = 0.$$

Wyznacznik układu równań (7.20.2) nie równa się zeru, zatem jego pierwiastkami są zera:

$$(7.20.3) \quad C_5 = C_6 = 0.$$

Przechodząc do krawędzi $a = a_1$ przyjmijmy, że pierścień statora jest sztywny, tj. że dla $a = a_1$ mamy

$$(7.21) \quad \vartheta = \Delta_x = \Delta_z = 0.$$

Ze wzorów (4.4) wynika, że pierwsze dwa równania (7.21) są równoważne następującym:

$$(7.21.1) \quad X_r(a_1) = 0, \quad [T_2 - rT_1]_{a=a_1} = 0.$$

Bardziej skomplikowany jest ostatni warunek (7.21). Przyjmując początek rachuby przesunięcia osiowego n krawędzi $a = \pi/2$, tj. zakładając, że $A_z(\pi/2) = 0$, otrzymujemy z równania (4.4)

$$C_2 = \varrho \int_0^{\pi/2} \vartheta \cos a \, da,$$

a więc

$$A_z = -\varrho \int_{\pi/2}^a \vartheta \cos a \, da,$$

i ostatni warunek (7.21) przyjmuje postać

$$(7.21.2) \quad \int_{\pi/2}^a X_r \frac{\cos a}{1 + \lambda \sin a} \, da = 0.$$

Zanim przejdziemy do dalszych obliczeń, przeprowadzimy analizę stanu naprężeń panujących w badanej powłoce i spróbujemy przewidzieć, w których przekrojach należy spodziewać się największych naprężeń.

Ze wzorów (4.3) wynika, że składowe stanu napięcia stanowią sumę czterech wyrazów, mianowicie: (a) całki ogólnej, (b) całki szczególnej (wchodzącej w skład funkcji X), (c) wyrazów wolnych zawierających czynnik $p\varrho$, (d) wyrazów zawierających stałą C_1 i nie wchodzących w skład całki (b).

Jeśli pominąć składnik (a), tj. przyjmując chwilowo, że $C_3 = C_4 = 0$ i wyłączyć z rozważań linię osobliewą wraz z jej najbliższym sąsiedztwem, to wówczas, jak łatwo sprawdzić, posługując się wzorami (4.3) i (6.24), dla $C_3 = C_4 = 0$ i dla η znacznie większych od 1 będziemy mieli

$$(7.22) \quad T_1 \approx T_1^*, \quad T_2 \approx T_2^*, \quad N_1 \approx C, \quad M_1 \approx -\frac{\lambda^3}{(2k^2)^2} \frac{p\varrho^2}{2} \approx 0.$$

Stwierdzamy więc, że składniki (b), (c) i (d) określają błonowy stan napięcia z dala od linii osobliewej.

Składnik (b), tj. całka szczególna «zakłóca» silnie błonowy stan napięcia w pobliżu linii osobliewej, gdyż przy małych wartościach parametru η ($a \approx 0$), funkcje $|Z|$, $|Z'|$ osiągają swoje największe wartości (rys. 12).

W miarę oddalania się od linii osobliewej w kierunku zarówno dodatnich, jak i ujemnych wartości kąta a wpływ tego zakłócenia powoli zanika.

Znaczenie całki szczególnej jest tym większe, im większy jest (w porównaniu z jednością) ułamek $C_1/p\varrho$.

Składnik (a), tj. całka ogólna zakłóca również błonowy stan napięcia w bezpośrednim sąsiedztwie linii osobliewej, jednakże począwszy od sto-

sunkowo nieznacznych dodatnich wartości kąta α ($\xi > 1$) maleje ona bardzo szybko (jak funkcja $e^{-\xi}$) dążąc do zera.

W części wewnętrznej powłoki (tj. w obszarze ujemnych wartości kąta α) można operator D_1 całki ogólnej określony wzorem (7.2) przedstawić w następujący sposób:

$$\tilde{D}_1 = \bar{C}_3 \tilde{X}_{1r} - \bar{C}_4 \tilde{X}_{1i} + \bar{C}_5 \tilde{X}_{2r} - \bar{C}_6 \tilde{X}_{2i},$$

a z dala od linii osobiwej ($\zeta > 1$) zgodnie ze wzorami (5.24):

$$\tilde{D}_1 = 0,9439 \zeta^{-\frac{1}{6}} \left\{ e^{-\zeta} \left[\bar{C}_3 \cos \left(\zeta - \frac{\pi}{24} \right) + \bar{C}_4 \sin \left(\zeta - \frac{\pi}{24} \right) \right] + e^{\zeta} \left[\bar{C}_5 \cos \left(\zeta + \frac{\pi}{24} \right) - \bar{C}_6 \sin \left(\zeta + \frac{\pi}{24} \right) \right] \right\}.$$

Napisane wyrażenie można po kilku przekształceniach i wprowadzeniu nowych stałych doprowadzić do następującej postaci:

$$(7.23) \quad \tilde{D}_1 = 0,9439 \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{6}}} \left\{ e^{-\zeta} \left[\bar{C}_3 \cos \left(\zeta - \frac{\pi}{24} \right) + \bar{C}_4 \sin \left(\zeta - \frac{\pi}{24} \right) \right] + e^{-(\zeta_1 - \zeta)} \left[\bar{C}_5 \cos \left(\zeta + \frac{\pi}{24} \right) + \bar{C}_6 \sin \left(\zeta - \frac{\pi}{24} \right) \right] \right\},$$

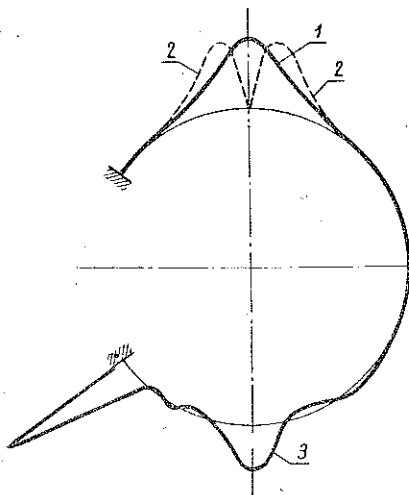
gdzie $\zeta_1 = \zeta(\gamma_1)$, a więc $\zeta_1 - \zeta \geq 0$.

Analogicznie można postąpić z operatorem \tilde{D}_3 .

Stwierdzamy więc, że w części wewnętrznej powłoki całka ogólna dąży szybko do zera, z jednej strony, w miarę oddalania się od linii osobiwej, z drugiej zaś w miarę oddalania się od krawędzi zamocowanej, $a = a_1$.

Rezultaty powyższej analizy można przedstawić schematycznie za pomocą wykresów (rys. 17).

W rozpatrywanej powłoce na błonowy stan napięcia składają się: «zakłócenie» określone funkcjami $|Z|$ i $|Z'|$, osiągające maksimum w pobliżu linii $a = 0$ i malejące powoli w miarę oddalania się od tej linii (krzywe 1 i 2 na rys. 17) oraz «zakłócenie» określone funkcjami X_{1r} oraz X_{1i}



Rys. 17

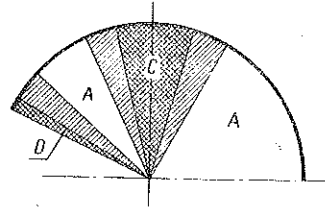
i ich pochodnymi (tj. całką ogólną) osiągające maksima wzdłuż równoleżników $\alpha = 0$ i $\alpha = a_1$ i malejące bardzo szybko w miarę oddalania się od tych linii (krzywa 3 na rys. 17).

Sumując oba «zakłócenia» przewidujemy, że błonowy stan napięcia będzie panował (rys. 18) w niezakreskowanych obszarach A, a największych naprężeń można się spodziewać w obszarach zaciemnionych C i D. Wielkość obszaru C zależy w znacznym stopniu od wartości stałej C_1 .

(3) Dla zestawienia warunków brzegowych należy przede wszystkim obliczyć wartości $\zeta(\gamma_1)$ i $\eta(\gamma_1)$:

$$\begin{aligned} \zeta(\gamma_1) &= \zeta_1 = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{155,8}{2}} (1,135)^{\frac{3}{2}} (1 + 0,115) = 7,94, \end{aligned}$$

$$\eta_1 = -(155,8)^{\frac{1}{2}} \sin(-1,135) = 4,879.$$



Rys. 18

Z równań (7.21) wynika, że wystarczy obliczyć wartości $\bar{X}_1(\gamma_1)$ i $Z(\gamma_1)$ oraz pochodne tych funkcji.

Zgodnie ze wzorami (5.26) mamy

$$\bar{X}_{1r} = 0,8660 (X_{1r} - X_{2i}) + 0,5 (X_{1i} + X_{2r}),$$

$$\bar{X}_{1i} \approx -0,8660 X_{2i} + 0,5 X_{2r},$$

i analogicznie

$$\bar{X}_{1r} \approx -0,8660 X_{2r} - 0,5 X_{2i}.$$

Podstawiając do tych równań wyrażenia asymptotyczne (5.18) otrzymujemy

$$(7.24) \quad \begin{cases} \bar{X}_{1r} = \frac{e^\zeta}{\zeta^{\frac{1}{6}}} \left[0,8174 \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{24}\right) + 0,4720 \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{24}\right) \right], \\ \bar{X}_{1i} = \frac{e^\zeta}{\zeta^{\frac{1}{6}}} \left[0,4720 \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{24}\right) - 0,8174 \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{24}\right) \right]. \end{cases}$$

Stąd obliczamy

$$(7.24.1) \quad \bar{X}_{1r}(\gamma_1) = 1384, \quad \bar{X}_{1i}(\gamma_1) = 1272.$$

Różniczkując równania (7.24) względem ζ otrzymujemy

$$(7.24.2) \quad [\bar{X}'_{1r}]_{\gamma_1} = 82,67, \quad [\bar{X}'_{1i}]_{\gamma_1} = 2629.$$

Wartości funkcji $Z_r(\gamma_1)$ i $Z'_r(\gamma_1)$ obliczamy za pomocą zależności (6.21), a $Z_i(\gamma_1)$ i $Z'_i(\gamma_1)$ za pomocą wzoru asymptotycznego (6.24). W rezultacie znajdujemy

$$(7.24.3) \quad \begin{cases} Z_r(\gamma_1) = 0,0140, & Z'_r(\gamma_1) = -0,0120, \\ Z_i(\gamma_1) = 0,205, & Z'_i(\gamma_1) = -0,0420. \end{cases}$$

(4) Korzystając ze wzorów (7.1) i (7.3) oraz z wyników dotychczasowych obliczeń otrzymujemy

$$(7.25) \quad \bar{X}_r(\gamma_1) = -4,96 C_1 + 927 C_3 - 852 C_4 + 0,106 p e.$$

Podstawiając wyrażenie asymptotyczne (6.24) do wzorów (4.3) znajdziemy (dla η dużych wobec jedności)

$$(7.26) \quad \begin{cases} T_1 = -\frac{1}{2k^2} \frac{\lambda \cos \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{5}{4}}} D_3 + T_1^*, \\ T_2 = -\frac{1}{2k^2} \left[\frac{1}{4} \frac{\lambda \cos \alpha}{(1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{5}{4}}} D_3 + \frac{k \sqrt{\sin \alpha}}{(1 + \lambda \sin \alpha)^{\frac{3}{4}}} D_3' \right] + T_2^*. \end{cases}$$

W danym przypadku obliczenia dają

$$(7.26.1) \quad \begin{cases} T_1(a_1) = 0,858 C_1 - 3,05 C_3 - 3,33 C_4 + 1,352 p e, \\ T_2(a_1) = 1,22 C_1 + 212,6 C_3 + 7,49 C_4 + 0,500 p e. \end{cases}$$

Całkę występującą w lewej części równania (7.21.2) wyznaczamy metodami numerycznymi obliczając wartości funkcji podcałkowej dla szeregu wartości kąta α . W rezultacie otrzymujemy

$$(7.27) \quad \int_{\pi/2}^{-1,135} X_r \frac{\cos \alpha}{1 + 0,456 \sin \alpha} d\alpha = -489 C_1 - 70,0 C_3 - 4,54 C_4 - 0,169 p e$$

Podstawiając wyrażenia (7.25), (7.26.1) i (7.27) do równań (7.21) i (7.21.2) dochodzimy do następującego układu równań:

$$(7.28) \quad \begin{cases} -4,96 C_1 + 927 C_3 - 852 C_4 + 0,106 p e = 0, \\ 0,960 C_1 + 213,5 C_3 + 8,49 C_4 + 0,0944 p e = 0, \\ 489 C_1 + 70,0 C_3 + 4,54 C_4 + 0,169 p e = 0. \end{cases}$$

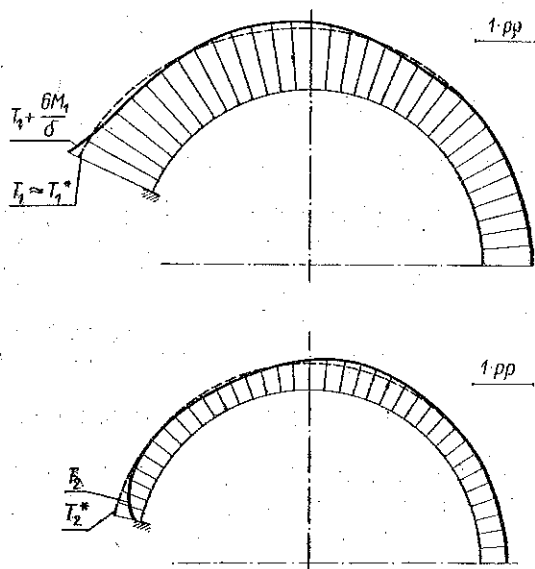
(5) Pierwiastki układu równań (7.28) wynoszą

$$(7.29) \quad \begin{cases} C_1 = -2,85 \cdot 10^{-4} p e, \\ C_3 = -4,28 \cdot 10^{-4} p e, \\ C_4 = -3,38 \cdot 10^{-4} p e. \end{cases}$$

(6) Na rysunku 19 przedstawiono wykresy napięć i momentów. Z rysunku wynika, że największe naprężenia występują we włóknach wewnętrznych przekroju zamocowanego, tj. dla $\alpha = \alpha_1 = -1,135$ radian

Składowe naprężenia wynoszą tutaj

$$(7.30) \quad \begin{cases} \sigma_1(\alpha_1) = (\sigma_1)_{max} = \frac{T_1}{\delta} + \frac{M_1 \cdot 6}{\delta^2} = (1,354 + 0,124) \frac{pe}{\delta} = 1,478 \frac{pe}{\delta}, \\ \sigma_2(\alpha_1) = \frac{T_2}{\delta} + \frac{M_2 \cdot 6}{\delta^2} = \nu \sigma_1(\alpha_1) = 0,3 \sigma_1(\alpha_1). \end{cases}$$



Rys. 19

Naprężenia zastępcze, które oblicza się według teorii H u b e r a, wynoszą

$$(7.31) \quad \sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}.$$

W danym przypadku

$$(7.32) \quad \sigma_e(\alpha_1) = (\sigma_e)_{max} = \sigma_1 \sqrt{1 + \nu^2 - \nu} = 0,889 \sigma_1 = 135 p.$$

Literatura cytowana w tekście

[1] R. A. Clark i E. Reissner, *Bending of Curved Tubes*, *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press., t. 2, New York 1952.

[2] W. I. Fieodosjew, *Izbrannyje zadaczi i woprosy po soprotiwlenju matieriałow*, Gostechizdat, Moskwa 1953.

[3] A. L. Goldien w i e j z i e r, *Dopólnienja i poprawki w teorji obołoczek Love*, *Sbornik statiej Płastinki i obołoczki*, Gosstrojizdat, 1939.

[4] K. S. K o l e s n i k o w, *Opriedielenje pieriemieszczienij w zamknutoj toroobraznoj obołoczkie*, *Inżynieryjnyj sbornik*, t. 12, 1952.

- [5] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge 1927.
- [6] E. Meissner, *Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringsflächen, Kugel und Kegelform*, Phys. Zeitschr., t. 14, 1913.
- [7] W. W. Nowożyłow, *K woprosu o rieszrenji zadacz teorji tonkich oboloczek w usiljach i momientach*, Dokl. Ak. Nauk ZSRR, t. 33, 9 (1943).
- [8] W. W. Nowożyłow, *Teorja tonkich oboloczek*, Sudpromizdat, 1951.
- [9] S. D. Ponomariow i inni, *Osnowy sowriemiennych metodow rasczota na procznost'*, Maszgiz., 1950.
- [10] K. Stange, *Der Spannungszustand einer Kreisringschale*, Ing.-Archiv. 1931.
- [11] S. A. Tumarkin, *Rasczot simmetriczno nagrużonnych toroobraznyh oboloczek*, Prikl. Mat. Miec. 5 (1952).
- [12] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 1945.
- [13] H. Wissler, *Festigkeitsberechnung von Ringsflächen*, Promotionsarbeit, Zurich 1916.
- [14] E. F. Zienowa i W. W. Nowożyłow, *Simmetricznaja dieformacjach toroobraznyh oboloczek*, Prikl. Mat. Miec. 5 (1951).
- [15] E. F. Zienowa, *Simmetricznaja dieformacja toroobraznyh oboloczek*, Dysertacja, Leningrad 1951, nieopublik.
- [16] M. Biernacki, *Geometria różniczkowa*, cz. 2, PWN, 1955.
- [17] M. Krzyżanski, *Równania liniowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu*, PZWS, 1951.
- [18] *Tables of the Modified Hankel Functions of Order one Third*, Annales of Harvard Computation Laboratory, t. 2, 1954.
- [19] P. S. Kuratow, *Napriaznonoje sostojanje toroidalnowo sopriazienja*. Sbornik Procznost' elementow parowych turbin, Maszgiz., 1951.

Резюме

ТОНКОСТЕННАЯ ТОРООБРАЗНАЯ ОБОЛОЧКА НАГРУЖЕННАЯ РАВНОМЕРНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

В работе изложен приближенный метод вычисления составляющих напряженного и деформированного состояний, возникающих в тонкостенной упругой торообразной оболочке кругового поперечного сечения, ограниченной двумя параллельными кругами $a = a_1$ и $a = a_2$ и нагруженной равномерным давлением (фиг. 1).

Вопрос сведен к определению комплексной функции X удовлетворяющей дифференциальному уравнению (3.22) (и соответствующим граничным условиям), выведенному при помощи метода комплексных усилий В. В. Новожилова. Во всех известных нам трудах предлагается решение выведенного дифференциального уравнения в виде степенного или тригонометрического рядов. Хотя, в работах [14] и [15] Е. Ф. Зеновой и В. В. Новожилова решение однородной задачи задано в замкнутом виде (при помощи функций типа Бесселя), однако упомянутые авторы частный интеграл неоднородного уравнения предлагают в виде ряда.

В настоящей работе найден частный интеграл неоднородного уравнения тоже в виде функций типа Бесселя, и таким образом устранен недостаток решения Зеновой и Новожилова.

Найденное частное решение основано на работе [1] Р. Кларка и Э. Райсснера, и поэтому предлагаемый метод расчета тонкостенного тора можно назвать методом Новожилова-Райсснера.

В итоге, получено полное решение, в удобном для применения в практике замкнутом виде [формулы (6.27)], причем значения употребляемых функций типа Бесселя можно найти, пользуясь построенными графиками (рис. 9, 10 и 12) или простыми асимптотическими формулами (5.18) и (6.24).

Точность предлагаемого метода Новожилова-Райсснера возрастает при уменьшении толщины δ стенок оболочки, а при стремлении δ к нулю, расчетные формулы (4.3) — для сечений достаточно удаленных от особых линий тора — переходят в хорошо известные формулы (2.11) безмоментной теории.

Способ применения предложенного метода показан на числовых примерах.

S u m m a r y

A THIN-WALLED TOROIDAL SHELL UNDER UNIFORM PRESSURE

In this paper is presented an approximate computation method of stress and strain components in a thin-walled toroidal elastic shell of circular cross-section limited by two parallels, $a = a_1$, and $a = a_2$, and loaded with a uniform pressure (Fig. 1). The problem is reduced to the determination of a complex function X satisfying the differential equation (3.22) (with suitable boundary conditions), derived by means of the «complex stress» method of V. V. Novozhilov. The solution of this differential equation is, in all the works known to the author, given in the form of power or trigonometric series. It is true that in Refs. [14] and [15] the homogeneous problem is solved by E. F. Zenova and V. V. Novozhilov in a closed form (by means of Bessel functions), the particular solution of the nonhomogeneous problem, however, is represented in those papers in the form of a series. This drawback of the solution of E. F. Zenova and V. V. Novozhilov is avoided in this paper, the particular solution of the nonhomogeneous problem being also expressed in a closed form by means of Bessel functions.

The particular solution is based on the paper [1] by R. Clark and E. Reissner and the method evolved can be called the method of Novozhilov-Reissner. As a result, full solution is obtained in a closed form, convenient for use [Eqs. (6.27)], where the values of

Bessel functions can be read from the graphs (Figs. 9, 10 and 12) or calculated by means of simple asymptotic formulae [Eqs. (5.18), and (6.24)]. The exactness of the Novozhilov-Reissner method increases with decreasing wall thickness. If the wall thickness δ tends to zero the computation formulae (4.3) are reduced to Eqs. (2.11) of the membrans theory, provided that the considered cross-sections are sufficiently distant from the singular lines of the torus.

The application of the method is illustrated by numerical examples.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 sierpnia 1955 r.
