

WITOLD WIERZBICKI

O BEZPIECZEŃSTWIE LINY NOŚNEJ MOSTU WISZĄCEGO

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XLII

## SPIS TREŚCI

	Str
1. Istota zagadnienia	101
2. Zarys obliczenia statycznego liny nośnej mostu wiszącego z belką usztywniającą	102
3. Siły graniczne w drutach liny nośnej i wskaźniki bezpieczeństwa	111
4. Wniosek	116

## 1. Istota zagadnienia

We współczesnej technice najważniejszym przypadkiem występowania liny nośnej jako elementu konstrukcyjnego jest most wiszący z belką usztywniającą. Lina stanowi tu główną część budowli, utrzymującą około 90% przypadającego na most obciążenia.

Most wiszący z belką usztywniającą przedstawia wśród budowli inżynierskich konstrukcję pod wieloma względami osobliwą, posiadającą właściwości nie spotykane w innych budowlach.

Dotyczy to przede wszystkim własności statycznych układu, z których najważniejsza polega na tym, że przy ścisłym obliczeniu układu nie możemy korzystać z zasady superpozycji, tj. z zasady niezależności działania sił.

Drugą osobliwość statyczną układu stanowi okoliczność, że podczas gdy w innych układach budowlanych po sprostaniu wszystkim wymaganiom wytrzymałości i stateczności ma się prawo oczekiwać możliwej do przyjęcia sztywności konstrukcji, w wypadku mostu linowego w tych samych warunkach można dojść do zadziwiająco dużych odkształceń. Tę ruchliwość mostu wiszącego uważał N a v i e r za zaletę układu, z czym nie może się jednak zgodzić współczesny inżynier zmuszony do liczenia się z wielkimi obciążeniami konstrukcji.

Z konstrukcyjnego punktu widzenia osobliwością mostów wiszących są liczne haki, nakrętki, wszelkiego rodzaju odlewy, zamocowania itd. wymagające wykonania tak precyzyjnego, jak to ma miejsce w budownictwie maszynowym, wobec czego z punktu widzenia wykonania most wiszący stanowi jakby coś pośredniego między mechanizmem a budowlą. Z uwagi na powyższe oraz ze względu na to, że głównym elementem nośnym w tym wypadku jest lina, pozostają specjalne warunki montażu mostów wiszących.

Specyficzne, trudne do ujęcia liczbowego warunki pracy mostów wiszących, mające źródło bądź w schemacie statycznym mostu, bądź w jego konstrukcji i jej wykonaniu, dają okazję do przekroczenia w linach nośnych naprężeń ustalonych w drodze obliczeń statycznych. Stąd płynie konieczność ustalenia granicznych wartości sił i naprężeń w linach mostów

wiszących, która stanowi, z drugiej strony, punkt wyjścia półprobabilistycznej metody badania bezpieczeństwa budowli. Drugą okolicznością przemawiającą za stosowaniem do lin nośnych metody półprobabilistycznej jest fakt, że liny składają się z oddzielnych drutów, dla których wytrzymałości można stosunkowo łatwo zdobyć obfity materiał statystyczny.

Chcąc zastosować do badania bezpieczeństwa lin nośnych mostów wiszących metodę półprobabilistyczną zmierzamy do tego w dwóch etapach; przedstawiamy, mianowicie, przede wszystkim zarys obliczenia statycznego mostu wiszącego uwypuklający cechy charakterystyczne pracy liny, następnie zaś podajemy wykonane w świetle tych cech obliczenie granicznych naprężeń w linach, a na podstawie tych naprężeń i na podstawie krzywej prawdopodobieństwa dla wytrzymałości drutów ustalamy współczynniki bezpieczeństwa liny nośnej.

Przy opracowaniu tego zagadnienia korzystałem z następujących dawniejszych moich publikacji:

- (1) *Bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1936,
- (2) *Schemat obliczenia jednoprzęsłowego mostu wiszącego z belką usztywniającą*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1938,
- (3) *W sprawie bezpieczeństwa belki zginanej*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1939,
- (4) *Détermination de coefficient de securité des câbles des ponts suspendus*, Zurych 1949,
- (5) *Methods of Determining the Index of Safety*, Warszawa 1954.

## 2. Zarys obliczenia statycznego liny nośnej mostu wiszącego z belką usztywniającą

Dążąc do sprecyzowania warunków bezpieczeństwa liny nośnej przedstawiamy tu główne linie schematu obliczeniowego liny z belką usztywniającą, wspólne dla różnych metod obliczenia i niezależne od liczby przęseł mostu wiszącego, którego lina nośna stanowi część istotną. Ograniczamy się w tych warunkach do liny przerzuconej przez jedno przęsło.

Myśl przewodnia obliczenia mostu wiszącego z belką usztywniającą uwydatnia się w sposób szczególnie jaskrawy w przypadku układu, składającego się z cięgien  $A'C'$ ,  $C'D'$  i  $D'B'$  oraz z symetrycznie obciążonej belki  $AB$  w dwóch punktach swobodnie podpartej i połączonej z cięgniami za pomocą niewydłużających się wieszaków  $CC'$  i  $DD'$  (rys. 1a).

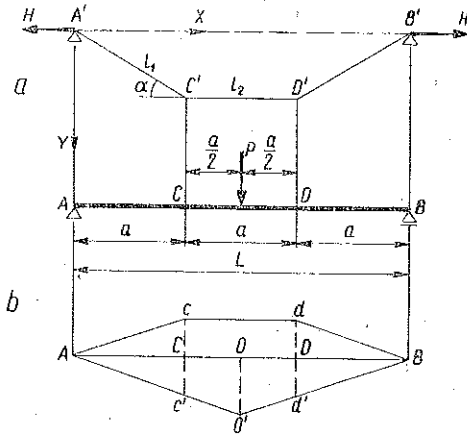
Dla przedstawionego układu obliczamy przede wszystkim  $v_c$ , pionowe przesunięcia punktów  $C$  i  $D$ . W tym celu przecinamy wieszaki  $CC'$  oraz  $DD'$  i oznaczamy przez  $T$  siły wzajemnego oddziaływania na siebie belki i cięgien. Wychodząc z warunków równowagi ciągu  $A'C'D'B'$ , w szczegól-

ności z warunku równowagi węzłów  $C'$  i  $D'$  możemy przedstawić siły  $T$  jako funkcje parcia poziomego w punktach  $A'$  i  $B'$  na podstawie równania

$$(2.1) \quad T = H \operatorname{tg} \alpha.$$

Belka  $AB$  znajdzie się w ten sposób pod działaniem sił  $T$  wyginających ją ku górze oraz pod działaniem siły  $P$  skierowanej odwrotnie. Odpowiednie wykresy momentów zginających przedstawione są na rys. 1b, gdzie

$$(2.2) \quad \begin{cases} Cc = Ta, \\ Cc' = \frac{1}{2} Pa, \\ 00' = \frac{3}{4} Pa. \end{cases}$$



Rys. 1

Reakcje od obciążenia wtórnego wynoszą

$$(2.3) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}' = \frac{9 Pa^2}{16} - Ta,$$

a moment wtórny w punkcie  $C$  równa się

$$(2.4) \quad \mathfrak{M}_c = \mathfrak{H} a - \frac{1}{2} \frac{1}{2} P a a \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} T a a \frac{1}{3} a,$$

skąd

$$(2.5) \quad v_c = \frac{\mathfrak{M}_c}{EJ} = \frac{23 Pa^3}{48 EJ} - \frac{5 Ta^3}{6 EJ}.$$

Wyznaczamy w dalszym ciągu pionowe przesunięcia węzłów  $C'$  i  $D'$  pod działaniem sił  $T$  wzajemnego oddziaływania na siebie belki i cięgien. W tym celu zauważamy, że

$$(2.6) \quad l_1^2 = x^2 + y^2,$$

gdzie  $x$  i  $y$  są współrzędnymi punktu  $C$ , i obliczamy przyrost współrzędnej  $y$ :

$$(2.7) \quad 2l_1 \Delta l_1 = 2x \Delta x + 2y \Delta y,$$

$$(2.8) \quad v_c' = \Delta y = \frac{l_1 \Delta l_1 - x \Delta x}{y},$$

gdzie  $v_c'$  jest pionowym przesunięciem punktu  $C'$ .

Oznaczając przez  $S_1$  i  $S_3$  siły w środkowym i w skrajnych cięgnach znajdujemy

$$(2.9) \quad S_1 = \frac{T}{\sin \alpha}, \quad S_3 = \frac{T}{\operatorname{tg} \alpha} = H,$$

skąd

$$(2.10) \quad \Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{EA} = \frac{Ta}{EA \sin \alpha \cos \alpha}, \quad \Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{EA} = \frac{Ta}{EA \operatorname{tg} \alpha}.$$

Wobec tego że

$$(2.11) \quad x = a, \quad y = a \operatorname{tg} \alpha, \quad \Delta x = -\frac{1}{2} \Delta l_2,$$

ze wzorów (2.8) - (2.11) otrzymujemy

$$(2.12) \quad v_c' = \frac{Ta}{EA} \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right).$$

Ponieważ przyjęliśmy, że wieszaki  $CC'$  i  $DD'$  nie ulegają wydłużeniu, więc możemy ułożyć równanie

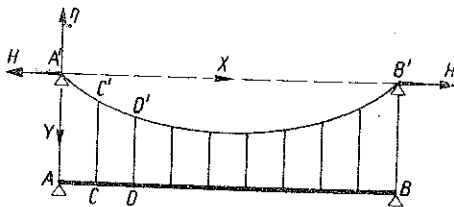
$$(2.13) \quad v_c = v_c',$$

z którego wyznaczymy  $T$ , a tym samym  $S_1$  oraz  $S_2$ , które jest równe  $H$ .

Przytoczone obliczenie układu przedstawionego na rys. 1a daje się sprowadzić do etapów następujących:

- (1) ustalenie sił  $T$  wzajemnego oddziaływania na siebie belki i cięgien oraz wyrażenie ich w zależności od  $H$  [wzór (2.1)],
- (2) wyznaczenie ugięć belki jako funkcji  $H$  [wzory (2.3)-(2.5)],
- (3) wyznaczenie przesunięć węzłów cięgien [wzory (2.6)-(2.12)],
- (4) uzależnienie od siebie ugięć belki i przesunięć węzłów cięgien [wzór (2.13)].

Most wiszący we właściwym słowa znaczeniu (rys. 2) tym różni się głównie od układu przedstawionego na rys. 1a, że lina  $A'B'$  posiada tu nieskończenie wielką lub w każdym razie bardzo znaczną liczbę stopni swobody.



Rys. 2

Siły wzajemnego oddziaływania na siebie belki usztywniającej i liny, w rzeczywistości działające w poszczególnych punktach liny, zastępujemy przez siły rozłożone w sposób ciągły wzdłuż mostu wiszącego.

W tych warunkach cztery przytoczone wyżej etapy obliczenia układu przedstawionego na rys. 1a mogą być zastosowane i do układu przedstawionego na rys. 2 z tym zastrzeżeniem, że etap (1) należy tu rozumieć jako ustalenie prawa rozkładu sił wzajemnego oddziaływania na siebie liny nośnej mostu wiszącego i belki usztywniającej.

Zmontowanie układu, o którym mowa, może być w ten sposób wykonane, aby całkowite obciążenie stałe, a więc ciężar własny liny, belki i wieszaków oraz stałe obciążenie belki były całkowicie przekazane samej tylko linie jako obciążenie równomierne. Belka  $AB$  ugina się w tych warunkach dopiero pod działaniem ciężarów ruchomych.

Wzajemne oddziaływanie na siebie liny i belki odbywa się poprzez wieszaki, które uważać będziemy w dalszym ciągu za nieodkształcalne. Przyjmujemy, że wieszaki są rozstawione tak gęsto, że siły wzajemnego oddziaływania na siebie liny i belki możemy uważać za ciągłe. Siły te w odniesieniu do jednostki bieżącej belki  $AB$  oznaczamy przez  $g$ .

Przed wprowadzeniem na belkę  $AB$  ciężarów ruchomych lina przybiera kształt odpowiadający równaniu różniczkowemu

$$(2.14) \quad H_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = -q,$$

gdzie  $q$  oznacza całkowite obciążenie nieruchome liny na jednostkę jej rzutu poziomego, a  $H_0$  parcie poziome liny na podpory  $A'$  i  $B'$ , które powstało pod wpływem tego obciążenia. Jeżeli  $q$  będziemy uważali za wielkość stałą, wówczas lina przybierze kształt paraboli, której w układzie współrzędnych przedstawionym na rys. 2 odpowiadać będzie równanie

$$(2.15) \quad y = \frac{q}{2H_0} x(l-x)$$

lub też równanie

$$(2.16) \quad y = \frac{4fx}{l^2} (l-x),$$

gdzie  $f$  oznacza strzałkę liny zwisającej wobec tego, że

$$(2.17) \quad H_0 = \frac{ql^2}{8f}.$$

Pod działaniem obciążenia ruchomego zmieni się wartość parcia poziomego  $H_0$  na  $H$ , a rolę równania (2.14) odgrywać będzie równanie

$$(2.18) \quad H \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -q - g,$$

odniesione do tegoż układu współrzędnych co równanie (2.15).

Oznaczamy w dalszym ciągu przez  $\eta$  pionowe przesunięcia poszczególnych punktów liny, wywołane przez obciążenia ruchome i równe z powodu nieodkształcalności wieszaków przesunięciom odpowiednich punktów belki  $AB$ ; mamy więc

$$(2.19) \quad \eta = y - y_1,$$

skąd wobec równań (2.14) i (2.15) znajdujemy

$$(2.20) \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{q}{H} + \frac{g}{H} - \frac{q}{H_0}.$$

Odpowiednio, równanie różniczkowe odkształconej belki  $AB$  przybiera postać

$$(2.21) \quad EJ \frac{d^2 \eta}{dx^2} = M,$$

gdzie  $M$  oznacza moment zginający w belce.

Wstawiając wyrażenie (2.20) w równanie (2.21) dochodzimy do następującego wyrażenia na moment  $M$ :

$$(2.22) \quad M = \frac{1}{k^2} \left( g - q \frac{H - H_0}{H_0} \right)$$

przy  $k^2 = H/EJ$ .

Różniczkujemy w dalszym ciągu wyrażenie (2.22) dwukrotnie względem  $x$  i mając na widoku, że  $q$  od  $x$  nie zależy, znajdujemy

$$(2.23) \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{1}{k^2} \frac{d^2 g}{dx^2}.$$

Z drugiej strony, ze znanej zależności między momentem a obciążeniem mamy

$$(2.24) \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = g - p,$$

gdzie  $p$  oznacza jednostkowe obciążenie ruchome belki  $AB$ , a różnica  $g - p$  jednostkowe obciążenie całkowite.

Zestawiając zależności (2.23) i (2.24) dochodzimy do równania

$$(2.25) \quad \frac{1}{k^2} \frac{d^2 g}{dx^2} = g - p,$$



skąd

$$(2.26) \quad g = p + C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx},$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  oznaczają stałe całkowania.

Wielkości  $C_1$  i  $C_2$  są funkcjami parcia poziomego  $H$  i mogą być wyznaczone na podstawie warunków brzegowych dla momentu zginającego  $M$  w belce  $AB$  [wzory (2.22) i (2.24)]. A więc np. w belce  $AB$  w punktach  $A$  i  $B$  swobodnie podpartej moment zginający  $M$  równa się w tych punktach 0, w belce  $AB$  całkowicie na końcach utwierdzonej jest  $\varphi_A = \varphi_B = 0$  itd.

Wstawiamy wielkość  $g$  ze wzoru (2.26) we wzór (2.22) dla momentu  $M$ , po czym znajdujemy

$$(2.27) \quad k^2 EJ \frac{d^2 \eta}{dx^2} = k^2 M = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + D,$$

gdzie

$$(2.28) \quad D = p - q \frac{H - H_0}{H_0}.$$

Po dwukrotnym całkowaniu równania (2.27) dochodzimy do następującego wyrażenia dla pionowego przesunięcia  $\eta$  pewnego punktu liny:

$$(2.29) \quad \eta = B_1 e^{kx} + B_2 e^{-kx} + D'x^2 + C_3 x + C_4,$$

gdzie  $C_3$  i  $C_4$  są to nowe stałe całkowania i gdzie

$$(2.30) \quad B_1 = \frac{C_1}{k^4 EJ}, \quad B_2 = \frac{C_2}{k^4 EJ}, \quad D' = \frac{1}{2k^2 EJ} \left( p - q \frac{H - H_0}{H_0} \right).$$

Wielkości  $C_3$  i  $C_4$ , które wyznaczamy z warunków brzegowych odkształcenia belki  $AB$ , są podobnie jak wielkości  $C_1$  i  $C_2$  funkcjami parcia poziomego. W ten sposób rozpatrywany układ złożony z liny nośnej  $A'B'$  i belki  $AB$  zawiera jedną wielkość statycznie niewyznaczalną, mianowicie parcie poziome  $H$ .

Wielkość  $H$  wyznaczamy podobnie jak dla układu przedstawionego na rys. 1a z zależności między wydłużeniami i pionowymi przesunięciami liny. Aby tę zależność ustalić, rozpatrujemy nieskończenie mały odcinek osi liny  $ds$ , który uważamy za prosty. Skoro  $dx$  i  $dy$  oznaczają rzuty odcinka  $ds$  na osie współrzędnych, to

$$(2.31) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Zależność między przyrostem długości odcinka  $ds$ , a przyrostem jego rzutów wyrazi się wzorem

$$(2.32) \quad 2 ds \Delta ds = 2 dx \Delta dx + 2 dy \Delta dy.$$

Dzieląc równanie (2.32) stronami przez  $2 dx$  znajdujemy

$$(2.33) \quad \Delta dx = \Delta ds \frac{ds}{dx} - \Delta dy \frac{dy}{dx}.$$

Na podstawie równania (1.16) mamy

$$(2.34) \quad dy = \left( \frac{4f}{l} - \frac{8fx}{l^2} \right) dx$$

oraz

$$(2.35) \quad \Delta ds = \frac{S ds}{EA} + \varepsilon_t t ds,$$

gdzie  $\varepsilon_t$  oznacza termiczne jednostkowe wydłużenie liny.

Siła podłużna  $S$  w pewnym punkcie liny, odpowiadająca obciążeniu ruchomemu, wyraża się wzorem

$$(2.36) \quad S = \frac{H - H_0}{\cos \varphi} = (H - H_0) \frac{ds}{dx},$$

gdzie  $\varphi$  oznacza kąt nachylenia względem osi  $X$  stycznej do osi liny.

Wreszcie

$$(2.37) \quad \Delta dy = d\eta.$$

W ten sposób równanie (2.33) przybiera postać

$$(2.38) \quad \Delta dx = \frac{H - H_0}{EA} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx \pm \varepsilon_t t \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx + \left( \frac{4f}{l} - \frac{8fx}{l^2} \right) d\eta.$$

Dodając do siebie wielkości  $\Delta dx$  obliczone dla wszystkich punktów liny i przechodząc do granicy znajdujemy

$$(2.39) \quad \int_0^l \Delta dx = \frac{H - H_0}{EA} \int_0^l \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx \pm \varepsilon_t t \int_0^l \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx + \frac{4f}{l} \int_0^l d\eta - \frac{8f}{l^2} \int_0^l x d\eta.$$

Wobec tego że odległość między punktami  $A$  i  $B$  jest niezmienna, to

$$(2.40) \quad \int_0^l \Delta dx = 0.$$

Ponieważ w punktach  $A$  i  $B$  mamy  $\eta = 0$ , więc

$$(2.41) \quad \int_0^l d\eta = [\eta]_0^l = 0.$$

Wreszcie ze wzoru na całkowanie częściami

$$(2.42) \quad \int_0^l d(x\eta) = \int_0^l x d\eta + \int_0^l \eta dx = [x\eta]_0^l = 0$$

wynika, że

$$(2.43) \quad \int_0^l x d\eta = - \int_0^l \eta dx.$$

W tych warunkach z równania (2.39) znajdujemy

$$(2.44) \quad H - H_0 = \frac{\frac{8f}{l^2} \int_0^l \eta dx \pm \varepsilon t \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx}{\frac{1}{EA} \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx}$$

Wstawiając wreszcie wyrażenie (2.29) we wzór (2.44) możemy to równanie rozwiązać względem  $H$ .

Całki oznaczone równania (2.44) mogą być obliczone na podstawie rozwinięcia ich w szereg lub też drogą zastąpienia ich przez sumy przy jednoczesnym zastąpieniu nieskończenie małych odcinków linii  $ds$  przez małe skończone odcinki  $\Delta s$  lub wreszcie przez zastosowanie dla  $ds$  funkcji  $\Phi$  i współczynników  $g$  stosowanych przy obliczaniu łuków.

W szczególności przy rozwinięciu całek oznaczonych w szereg otrzymujemy

$$(2.45) \quad \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 ds = l \left[ 1 + 8 \left(\frac{f}{l}\right)^2 + \frac{96}{5} \left(\frac{f}{l}\right)^4 \right],$$

$$(2.46) \quad \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right) ds = 1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{l}\right)^2.$$

Powyższy schemat obliczenia sprecyzujemy na przypadku, gdy

$$(2.47) \quad \begin{cases} A = 458 \text{ cm}^2, & l = 362,2 \text{ m}, & q = 3,94 \text{ t/m}, \\ J = 0,2553 \text{ m}^4, & f/l = 0,100, & p = 1,17 \text{ t/m}. \end{cases}$$

Wielkość  $H_0$  przybiera według wzoru (2.17) wartość

$$(2.48) \quad H_0 = \frac{q}{8} l \frac{l}{f} = 452,75 q = 1784 \text{ t},$$

wobec czego

$$(2.49) \quad D = p + q \frac{H - H_0}{H_0} = p + q - q \frac{H}{H_0} = 5,11 - \frac{H}{542,75}$$

Mając na widoku równanie (2.27) otrzymujemy

$$(2.50) \quad M = \frac{1}{k^2} (C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + D)$$

Wobec tego że zarówno przy  $x = 0$ , jak i przy  $x = 1$  jest  $M = 0$ , znajdujemy z równania (2.50), że

$$(2.51) \quad C_1 + C_2 + D = 0,$$

$$(2.52) \quad C_1 e^{kl} + C_2 e^{-kl} + D = 0.$$

Rozwiązując układ równań (2.51) i (2.52) dochodzimy do następujących wartości dla stałych  $C_1$  i  $C_2$ :

$$(2.53) \quad C_1 = -\frac{D}{1 + e^{kl}}, \quad C_2 = -\frac{De^{kl}}{1 + e^{kl}}$$

W związku z tym równanie (2.21) przybiera postać

$$(2.54) \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{C_1}{k^2 EJ} e^{kx} + \frac{C_2}{k^2 EJ} e^{-kx} + \frac{D}{k^2 EJ}$$

Stąd dla  $\eta$ , stosownie do wzoru (2.29), dochodzimy do wyrażenia

$$(2.55) \quad \eta = \frac{C_1}{k^4 EJ} e^{kx} + \frac{C_2}{k^4 EJ} e^{-kx} + \frac{D}{k^2 EJ} x^2 + C_3 x + C_4$$

Stałe  $C_3$  i  $C_4$  wyznaczamy tu z warunku, że zarówno przy  $x = 0$ , jak i przy  $x = 1$  jest  $\eta = 0$ ; warunek ten doprowadza do równań

$$(2.56) \quad \frac{C_1}{k^4 EJ} + \frac{C_2}{k^4 EJ} + C_3 = 0,$$

$$(2.57) \quad \frac{C_1}{k^4 EJ} e^{kl} + \frac{C_2}{k^4 EJ} e^{-kl} + \frac{D}{2k^2 EJ} l^2 + C_3 l + C_4 = 0;$$

stąd mając na uwadze równania (2.51) i (2.52) otrzymujemy

$$(2.58) \quad C_3 = -\frac{Dl}{2k^2 EJ},$$

$$(2.59) \quad C_4 = \frac{D}{k^4 EJ}.$$

Wobec tego że całka oznaczona, wchodząca do mianownika wzoru (2.44), obliczona ze wzoru (2.45) równa się w danym razie

$$(2.60) \quad \int_0^l \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx = 391,86$$

znajdujemy, że

$$(2.61) \quad H - H_0 = -5,42 \int_0^l \eta dx = \\ = -5,42 \left[ \frac{C_1}{k^5 EJ} e^{kx} - \frac{C_2}{k^5 EJ} e^{-kx} + \frac{D}{6k^2 EJ} x^3 + \frac{C_3}{2} x^2 + C_4 x \right]_0^l.$$

Wstawiając zamiast wielkości  $C_1, C_2, C_3, C_4$  i  $D$  ich wartości dochodzimy do równania

$$(2.62) \quad H - 1784 = -5,42 \frac{5,11 - 0,0022 H}{H} \left[ \frac{l}{k^2} - \frac{l^3}{12} - \frac{2(e^{kl} - 1)}{k^3(e^{kl} + 1)} \right].$$

Mając na widoku, że  $k^2 = H/EJ$  i rozwiązując równanie (2.62) drogą prób znajdujemy, że  $H = 2285$  t.

Wykonane tu obliczenie numeryczne pozwala na ocenę rzędu wielkości stosunków zachodzących między siłami występującymi w poszczególnych elementach mostu wiszącego, co ma duże znaczenie przy ocenie współczynników przyrostu naprężeń  $\alpha$ .

### 5. Siły graniczne w drutach liny nośnej i wskaźniki bezpieczeństwa

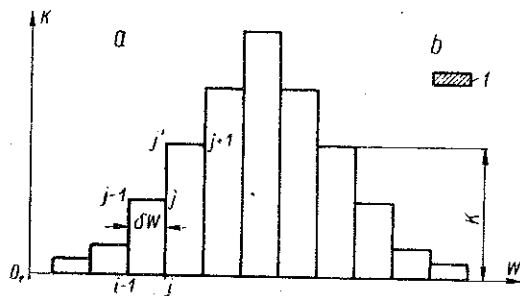
W większości przypadków lina nośna mostów wiszących wykonywana jest z drutów równoległych w liczbie od kilkuset do kilku tysięcy. Takie też liny będziemy mieli na widoku w dalszych rozważaniach i dla nich będziemy wyznaczali współczynniki bezpieczeństwa, korzystając z metody półprobabilistycznej.

Druty w rodzaju drutów, z których wykonana jest lina nośna, posiadają różne wytrzymałości, tzn. że ulegają rozerwaniu przy różnych wartościach siły rozciągającej  $W$ . Wskutek tego poszczególne wyniki próby muszą być rozpatrywane jako dzieło przypadku.

Liczbę wykonanych prób na rozerwanie drutów oznaczmy przez  $N$ , a poszczególne wartości siły  $W$  przez  $W_1, W_2, W_3, \dots, W_N$ . Wartości te grupujemy na wykresie na rys. 3, który nosi nazwę histogramu. Wykres ten wykonany jest w sposób następujący.

Na osi  $O_1 W$  odkładamy poszczególne wartości  $W$  siły rozciągającej w drucie. Poszczególne równe sobie odcinki  $\delta W$  przedstawiają różnice

między wartościami sił  $W$  wyrażającymi się za pomocą odcinków  $O_{i-1}$ ,  $i-1$  oraz  $O_{i-1, i}$  i zawierają końce odcinków  $W$ . Powierzchnie prostokątów  $i-1, j-1, j, i$  są proporcjonalne do wielkości  $K_{i-1, i}$  wyrażających



Rys. 3

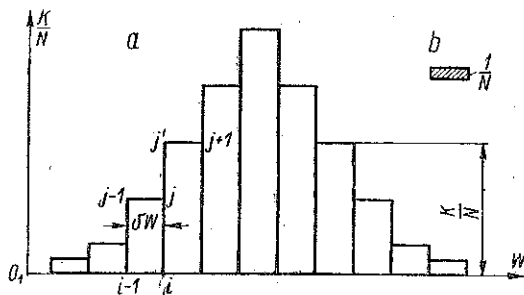
ilości wyników zawartych w poszczególnych granicach  $i-1, i$ . Powierzchnia zacieniowana na rys. 3b wyraża w skali rysunku jedność.

Jeżeli zmienimy skalę otrzymanego wykresu w ten sposób, aby zacieniowany na rys. 3b prostokąt wyrażał nie jedność, lecz iloraz  $1/N$ , to pola poszczególnych prostokątów  $i-1, j-1, j, i$  będą wy-

rażały stosunki  $K_{i-1, i}/N$ , czyli prawdopodobieństwa, że pewien wynik próby zawarty jest w granicach między wartościami  $W_{i-1}$ , a  $W_i = W_{i-1} + \delta W$ . Otrzymany w ten sposób wielobok ...  $j-1, j, j', j+1$  ... nosi nazwę wieloboku prawdopodobieństwa (rys. 4a).

Wobec tego że próba wytrzymałościowa na zerwanie drutu jest próbą prostą, uzyskanie dużej liczby  $N$  wyników tej próby jest stosunkowo łatwe do osiągnięcia.

Zmniejszając długość odcinków  $\delta W$  i zwiększając ich liczbę w sposób nieograniczony, przechodzimy po zmianie skali od wieloboku przedstawionego na rys. 4 do krzywej podanej schematycznie na rys. 5, którą nazywamy zwykle krzywą prawdopodobieństwa. Krzywa posiada tę zasadniczą własność, że pole gęsto zacieniowane na rysunku wyraża prawdopodobieństwo zawierania siły rozrywającej drut między  $W$  a  $W + dW$ .



Rys. 4

Zmiana skali przy przejściu od rys. 4 do rys. 5 polega na zastąpieniu liczb niemianowanych  $K:N$  przez pola  $\delta W$  (kg)  $\cdot y$  (1 : kg).

Gdybyśmy znali sposób bezpośredniego pomiaru sił w drutach liny bez pomiaru odkształceń, moglibyśmy zbudować krzywą prawdopodobieństwa dla sił efektywnie występujących w drutach, a na podstawie porównania jej z krzywą prawdopodobieństwa dla sił  $W$  moglibyśmy badać warunki

bezpieczeństwa liny. Ponieważ jednak sposobu takiego nie znamy, musimy operować siłami granicznymi  $s_g$  występującymi w drutach.

Jeżeli  $S$  wyraża siłę w drucie liny obciążoną według zasad wyłożonych w p. 2 i jeżeli wszystkie druty liny posiadają te same własności sprężyste, to siła  $s$  występująca w każdym z nich wynosi

$$(3.1) \quad s = \frac{S}{\nu},$$

gdzie  $\nu$  jest to liczba drutów w lince. Odpowiednio dla granicznej wartości siły  $s$  będziemy mieli wzór

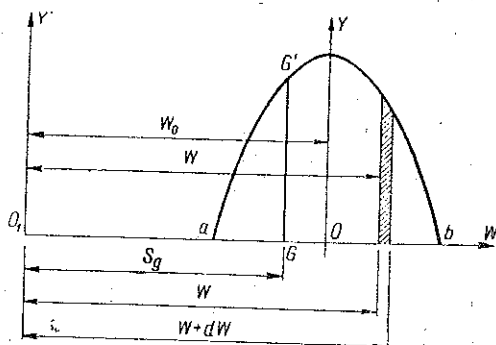
$$(3.2) \quad s_g = s(1 + \Sigma a),$$

gdzie  $a$  jest to ułamek przedstawiający największy możliwy przyrost siły  $s$ , spowodowany niecałkowitym spełnieniem się jednego z założeń, na których oparte są obliczenia p. 2. Dodawanie do siebie poszczególnych wartości  $a$  zamiast mnożenia przez siebie dwumianów  $(1 + a)$  uzasadnia się ich własnościami mechanicznymi oraz tym, że przedstawiają zwykle wielkości małe.

Wyniki prób na rozrywanie drutów tego typu, z którego wykonana jest lina, a tym samym, krzywa prawdopodobieństwa przedstawiona na rys. 5, uwzględniają niedokładności przy obróbce półfabrykatów, wobec czego nie obliczamy tu współczynników  $a$  wywołanych przez tego rodzaju przyczyny i nie uwzględniamy ich w sumie  $(1 + \Sigma a)$ .

Ponieważ most wiszący jest zwykle pod względem swych rozmiarów obiektem bardzo poważnym, jego konstrukcja i obliczenie statyczne musi być indywidualizowane i dlatego nie podobna tu podać współczynników  $a$  ważnych we wszystkich wypadkach. W tych warunkach podajemy tu przede wszystkim źródła oczekiwanych przyrostów  $a$  sił  $s$ . Przyrosty te obliczamy w stosunku do największych wartości sił  $s$ . Są to przyrosty następujące.

(1) Jak wynika z obliczeń p. 2 dzięki należytemu naciągnięciu śrub łączących wieszaki mostu wiszącego z linami, ciężar własny mostu rozkłada się równomiernie wzdłuż rzutu poziomego mostu. Niewłaściwe naciągnięcie jednej ze śrub zmienia rozkład ciężaru własnego, przyjęty w obliczeniu statycznym. W tych warunkach należy liczyć się poza ciągłym obciążeniem liny jeszcze z obciążeniem skupionym w jednym lub paru punktach i uwzględnić wpływ tego obciążenia na siłę  $s$ . W ten sposób wyznaczmy przyrost  $a_1$ . Ze względu na małą wartość obciążenia



Rys. 5

skupionego w porównaniu z obciążeniem ciągłym wpływ jego na siłę  $s$  możemy obliczyć w ten sam sposób, jak obliczamy w łuku parabolicznym siłę osiową wywołaną działaniem ciężaru skupionego.

(2) Wzór (2.36) dotyczy przypadku, kiedy lina nośna zachowuje kształt paraboli zarówno pod działaniem obciążenia stałego jak i ruchomego. Gdy obciążenie ruchome powoduje odchylenie liny nośnej od kształtu paraboli, siła  $S$ , a tym samym i siła  $s$ , ulec może przyrostowi. Dla oceny granicznego przyrostu  $a_2$  w tym wypadku powinniśmy parabolę 2 stopnia zastąpić przez inną krzywą podobnego kształtu, np. przez parabolę 3 stopnia.

(3) Jeżeli lina montowana jest na łądzie w położeniu poziomym w ten sposób, że tworzące ją druty łączone są ze sobą przewiązkami, to po nadaniu linie jej właściwego położenia powstają w niej podobnie jak w przecie zginanym w górnych częściach przekroju poprzecznego naprężenia ściskające, a w dolnych rozciągające. W tych warunkach w dolnych drutach siły rozciągające doznają przyrostów  $a_3$  dochodzących do 25%. Nie ma to miejsca, jeżeli druty są zawieszane na swoim miejscu pojedynczo lub niewielkimi grupami.

(4) Różnica długości drutów przewidzianych jako równe sobie stwarza konieczność rozciągania drutów i powoduje przyrost siły  $s$ , którą oznaczamy przez  $a_4$ .

(5) Różnica między wartościami współczynników sprężystości  $E$  w poszczególnych drutach liny może odbić się na siłach  $s$ . Wahania we współczynnikach  $E$  są na ogół bardzo małe, jeśli więc je tu uwzględniamy, możemy przyjąć, że stosunek wartości granicznych  $E$  do wartości średniej wynosi 3 do 4,5 z prawdopodobieństwem równym 1. Odpowiedni przyrost siły  $s$  niech wynosi  $a_5$ .

(6) Wydłużenie wieszaków mostu wiszącego może być uwzględnione w obliczeniu statycznym układu. Wtedy wydłużenie to musi wejść do wzorów (2.13) i (2.19). Jeżeli jednak w obliczeniu statycznym nie liczymy się z tym wydłużeniem, to wówczas przy badaniu bezpieczeństwa liny musimy ocenić graniczny przyrost siły  $s$  wywołany tą przyczyną. Oznaczamy go przez  $a_6$ .

W powyższym wyliczeniu pominięte zostały te współczynniki przyrostu sił  $s$ , które związane są ze specjalnymi warunkami pracy danego obiektu (np. tarcie w przegubach) oraz te, które mogą być uwzględnione w dokładnym obliczeniu statycznym (np. wpływy termiczne).

W rezultacie wartość graniczna  $s_g$  siły  $s$  w drucie liny nośnej wyraża się wzorem

$$(3.3) \quad s_g = s(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6),$$

gdzie wszystkie współczynniki  $a$  uważamy za znane.



Odkładamy w dalszym ciągu na wykresie krzywej prawdopodobieństwa dla tego rodzaju drutów, z którego wykonana jest lina, odcinek  $s_g$  i przeprowadzamy prostą  $GG'$ , która oddziela pole  $GG'b$ . Na podstawie własności krzywej prawdopodobieństwa możemy twierdzić, że pole  $GG'b$ , które oznaczamy symbolem  $\Omega'$ , wyraża prawdopodobieństwo, że siła rozrywająca drut jest większa od  $s_g$ , czyli że  $s_g < W$ . Jest to prawdopodobieństwo, że jakiś  $i$ -ty drut liny nie ulegnie rozerwaniu. Jeżeli jednak  $i$ -ty drut ulegnie rozerwaniu, to na jakiś  $j$ -ty pręt liny przypadnie siła

$$(3.4) \quad s = \frac{S}{\nu - 1}.$$

Nowa siła  $s$  będzie większa od poprzedniej i nowe prawdopodobieństwo  $\Omega''$  będzie mniejsze od prawdopodobieństwa  $\Omega'$ . Rozumując w podobny sposób w dalszym ciągu dojdziemy dla któregoś z drutów do prawdopodobieństwa  $\Omega = 0$ , czyli będziemy mieli pewność, że w tym drucie  $s_g$  będzie większe od wytrzymałości drutu, tzn. że  $W < s_g$ . Faktu tego nie należy uważać za równoznaczny z rozerwaniem się drutu, gdyż  $s_g$  oznacza największą możliwą siłę w drucie, a nie siłę, która w nim wystąpić musi. Ponieważ jednak trudne byłoby przeprowadzenie obliczeń wytrzymałościowych poszczególnych drutów liny, przyjmujemy z pewnym zapasem na rzecz bezpieczeństwa, iż prawdopodobieństwo nie rozerwania się pewnego drutu liny równe jest prawdopodobieństwu, że cała lina nie ulegnie katastrofie.

Prawdopodobieństwo  $\Omega'$ , jak to wynika z rys. 5 i z powyższych rozważań, zależy przy danej krzywej prawdopodobieństwa dla  $W$  tylko od  $s$ , ponieważ współczynniki  $a$  uważamy za wielkości stałe. Można więc napisać równanie

$$(3.5) \quad \Omega' = p,$$

gdzie  $p$  oznacza wskaźnik bezpieczeństwa, tzn. przyjęte z góry prawdopodobieństwo, że rozerwanie drutu nie nastąpi. Aby równanie (3.5) rozwiązać względem  $s$ , musimy znać postać matematyczną krzywej prawdopodobieństwa; może to więc być np. krzywa Gaussa, krzywa Pearsona 3 rodzaju lub inna. Bezpośrednio z równania (3.5) znajdujemy na podstawie danego  $p$  wielkość  $s$ , skąd ze wzoru (3.2) obliczamy  $s$ :

$$(3.6) \quad s = \frac{s_g}{1 + \Sigma a}.$$

Otrzymana ze wzoru (3.6) wielkość  $s$  odpowiadająca danemu wskaźnikowi bezpieczeństwa  $p$  odgrywa wobec tego rolę dopuszczalnej siły rozciągającej w drucie. Stosunek, jaki zachodzi między średnią warto-