

JERZY NOWIŃSKI

ZASTOSOWANIE NIEKTÓRYCH ZNANYCH METOD
PRZYBLIŻONYCH DO ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ PŁYT
ORTOTROPOWYCH O DUŻYCH UGIĘCIACH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXXII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wzory ogólne we współrzędnych prostokątnych	333
2. Wzory ogólne we współrzędnych biegunowych	335
3. Płyta kołowa cylindrycznie ortotropowa o promieniu a wygięta w kształcie powierzchni kulistej o promieniu R	336
4. Płyta kołowa cylindrycznie ortotropowa swobodnie podparta i wygięta podobnie jak płyta cylindrycznie ortotropowa równomiernie obciążona w teorii klasycznej	339
5. Metoda pseudo-energii	340
6. Płyta kołowa cylindrycznie ortotropowa oparta przegubowo na brzegu i poddana obciążeniu równomiernemu q_0	342
7. Płyta eliptyczna prostoliniowo ortotropowa oparta na brzegu przegubowo i poddana obciążeniu równomiernemu q_0	345
8. Płyta prostokątna ortotropowa o bokach poziomo nieprzesuwnych poddana obciążeniu równomiernemu q_0	347
9. Metody energetyczne	349
9.1. Błona ortotropowa kwadratowa obciążona równomiernie	350
9.2. Płyta ortotropowa kwadratowa oparta przegubowo i obciążona równomiernie	351

Jak wiadomo, rozwiązanie układu równań T. Kármána dla płyt izotropowych o dużych ugięciach zostało przeprowadzone różnymi metodami, głównie przybliżonymi, dla wielu przypadków szczególnych. Natomiast mało znane są rozwiązania układu równań G. G. Rostowcewa dla płyt ortotropowych o dużych ugięciach. Z tego względu wydaje się pożyteczne zastosowanie niektórych znanych metod, głównie przybliżonych, użytych w zagadnieniach płyt izotropowych — z których pewne można już dzisiaj uznać za klasyczne — do rozwiązania odpowiednich zagadnień dotyczących płyt ortotropowych. Do takich metod wypada zaliczyć między innymi metody przybliżone J. Prescottta, [1] i [2], polegające na poszukiwaniu obciążenia odpowiadającego danej powierzchni ugięcia oraz na zastosowaniu równania tzw. pseudo-energii; dalej metodę energetyczną stosowaną przez S. P. Timoszenkę i S. Waya, [3] i [5] (cyt. według [3]), różne pomysłowe metody A. i L. Föpplów, [4], a z nowszych metodę Wei-zang Chiena, [6], opartą na metodzie perturbacji, metodę H. M. Bergera, w której pomija się energię związaną z drugim niezmiennikiem odkształcenia, i inne.

W pracy niniejszej ograniczymy się do zastosowania metod J. Prescottta, S. P. Timoszenki oraz A. i L. Föpplów.

Przypomnijmy najpierw podstawowe wzory teorii płyt ortotropowych o dużych ugięciach we współrzędnych prostokątnych i biegunowych, które będą nam dalej potrzebne, a których część nie jest powszechnie znana.

1. Wzory ogólne we współrzędnych prostokątnych

We współrzędnych prostokątnych podstawowe równania G. G. Rostowcewa przyjmują postać następującą¹:

$$(1.1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2l^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{h}{D_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = \frac{q(x, y)}{D_1}$$

¹ Jak wiadomo, pierwsze z tych równań przedstawia równanie równowagi rzutów sił działających na element płyty w kierunku osi z (w równaniu tym uwzględniono ponadto równania równowagi momentów względem osi równoległych do osi płyty), drugie zaś równanie jest równaniem zgodności odkształceń.

$$(1.2) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + m^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + k^2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E_2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

Tutaj oznaczono

$$(1.3) \quad \begin{cases} k^2 = \frac{D_2}{D_1} = \frac{E_2}{E_1}, & l^2 = \frac{1}{2} (\nu_1 k^2 + \nu_2) + 2(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{G_{12}}{E_1}, \\ m^2 = \frac{E_2}{G_{12}} - 2\nu_2; \end{cases}$$

znaczenie E_1 , E_2 i G_{12} jest zrozumiałe, [8], zaś co do liczby Poissona, to np. ν_1 oznacza przewężenie względne w kierunku osi y pod wpływemciągnięć w kierunku osi x . Naturalnie $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$.

Poza tym dla napięć N_x , N_y i N_{xy} i odkształceń błonowych (tych ostatnich oznaczonych kreską) mamy

$$(1.4) \quad N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

$$(1.5) \quad \bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{hE_1} (N_x - \nu_1 N_y), \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{hE_2} (N_y - \nu_2 N_x), \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{hG_{12}} N_{xy},$$

gdzie h jest grubością płyty, a $F(x, y)$ funkcją naprężeń błonowych.

Jak dobrze wiadomo, pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami błonowymi (oznaczonymi również kreską) zachodzą związki nieliniowe

$$(1.6) \quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{cases}$$

Mamy również następujące wzory dla momentów oraz odpowiadających im odkształceń i przemieszczeń zgięciowych (dwu ostatnich oznaczonych gwiazdką):

$$(1.7) \quad \begin{cases} M_x = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y = -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} = 2D_h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

$$(1.8) \quad \begin{cases} \varepsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z, & \varepsilon_y^* = \frac{\partial v^*}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z, \\ \gamma_{xy}^* = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z, \end{cases}$$

zaś dla napięć poprzecznych

$$(1.9) \quad Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

gdzie sztywności zginania i skręcania są równe

$$(1.10) \quad \begin{cases} D_1 = \frac{E_1 I}{1 - \nu_1 \nu_2}, & D_2 = \frac{E_2 I}{1 - \nu_1 \nu_2}, & D_3 = \frac{1}{2} (\nu_1 D_2 + \nu_2 D_1) + 2D_k, \\ D_k = G_{12} I, & (I = h^3/12). \end{cases}$$

2. Wzory ogólne we współrzędnych biegunowych

We współrzędnych biegunowych r, φ , gdy ponadto podparcie i obciążenie płyty nie są funkcjami kąta φ , mamy odpowiednie równania podstawowe Rostowcewa w postaci

$$(2.1) \quad \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} + k^2 \left(-\frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) - \frac{h}{D_r r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \frac{dF}{dr} \right) = \frac{q(r)}{D_r},$$

$$(2.2) \quad \frac{d^3 F}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{k^2}{r^2} \frac{dF}{dr} = -\frac{E_t}{2r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2.$$

Dla wielkości błonowych otrzymujemy w danym razie następujące wzory:

$$(2.3) \quad N_r = \frac{h}{r} \frac{dF}{dr}, \quad N_t = h \frac{d^2 F}{dr^2}, \quad N_{rt} = 0,$$

gdzie naprężenia błonowe spełniają równanie równowagi

$$(2.3.1) \quad \frac{d}{dr} (N_r r) - N_t = 0;$$

$$(2.4) \quad \bar{\varepsilon}_r = \frac{1}{h E_r} (N_r - \nu_r N_t), \quad \bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{h E_t} (N_t - \nu_t N_r),$$

$$(2.5) \quad \bar{\varepsilon}_r = \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \bar{\varepsilon}_t = \frac{\bar{u}}{r} \quad (E_r \nu_t = E_t \nu_r).$$

Dla wielkości zgięciowych mamy natomiast

$$(2.6) \quad M_r = -D_r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu_t}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_t = -D_t \left(\nu_r \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right),$$

$$(2.7) \quad Q_r = -D_r \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - k^2 \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right),$$

lub z równowagi środkowej części płyty (P = siła skupiona w środku płyty)

$$(2.8) \quad Q_r = -N_r \frac{dw}{dr} - \frac{1}{r} \int_0^r q(r) r dr - \frac{P}{2\pi r};$$

$$(2.9) \quad \varepsilon_r^* = \frac{du^*}{dr} = -\frac{d^3 w}{dr^3} z, \quad \varepsilon_t^* = \frac{u^*}{r} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} z,$$

przy czym

$$(2.10) \quad D_r = \frac{E_r I}{1 - \nu_r \nu_t}, \quad D_t = \frac{E_t I}{1 - \nu_r \nu_t}, \quad k^2 = \frac{D_r}{D_t}.$$

Rozpatrzmy najpierw zastosowanie do płyt ortotropowych rozwiązań J. Prescottta, [1], uzyskanych dla płyt izotropowych.

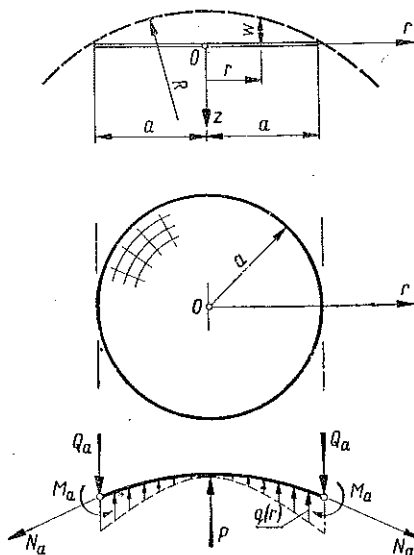
3. Płyta kołowa cylindrycznie ortotropowa o promieniu a wygięta w kształcie powierzchni kulistej o promieniu R (rys. 1)

Jak wiadomo, w teorii klasycznej Poissona - Kirchhoffa płyt izotropowych zgięcie takie następuje pod wpływem równomiernie rozłożonych

brzegowych momentów zginających, a w teorii nieliniowej płyt izotropowych, [1], do momentów tych dodać trzeba obciążenie nierównomierne rozłożone w sposób ciągły na powierzchni płyty (np. przy braku ciągłych brzegowych — obciążenie paraboloidalne, częściowo dodatnie, częściowo ujemne).

Znajdziemy odpowiednie obciążenie dla płyty walcowo ortotropowej o osi ortotropii przechodzącej przez środek płyty.

Przyjmijmy równanie odkształconej powierzchni środkowej płyty w znanej postaci przybliżonej



Rys. 1

$$(3.1) \quad w = \frac{r^2 - a^2}{2R}.$$

Drugie równanie podstawowe (2.2) przybiera teraz postać (kreski oznaczają różniczkowanie względem zmiennej r)

$$(3.2) \quad F'''' + \frac{1}{r} F''' - \frac{k^2}{r^2} F' = -\frac{E_t}{2R^2} r.$$

Łatwo znaleźć rozwiązanie powyższego równania

$$(3.3) \quad F = A + B r^{1+k} + C r^{1-k} + \beta r^4,$$

gdzie

$$(3.4) \quad \beta = \frac{E_t}{8 R^2 (k^2 - 9)},$$

przy czym założymy, że $k \neq 3$.

Z (2.3) obliczamy napięcia błonowe w postaci

$$(3.5) \quad N_r = h [B(1+k) r^{k-1} + C(1-k) r^{-k-1} + 4\beta r^2],$$

$$(3.6) \quad N_t = h [B(1+k) k r^{k-1} - C(1-k) k r^{-k-1} + 12\beta r^2].$$

Podstawiając (3.1) i (3.3) do pierwszego równania podstawowego (2.1) określamy obciążenie ciągłe płyty potrzebne dla utrzymania założonego kształtu powierzchni środkowej płyty:

$$(3.7) \quad q = -\frac{h}{R} [B(1+k)^2 r^{k-1} + C(1-k)^2 r^{-k-1} + 16\beta r^2].$$

Jeżeli jest $k < 1$, to dla tego, aby q nie rosło nieograniczenie wraz z $r \rightarrow 0$, powinno być $B = C = 0$. Przyjmujemy, że $k \geq 1$. Wówczas tylko $C = 0$, a B szukamy z warunku brzegowego. Jeżeli na obwód płyty działają napięcia radialne N_a (a sam obwód może się przemieszczać w kierunku radialnym), to z warunku

$$(3.8) \quad [N_r]_{r=a} = N_a$$

otrzymujemy

$$(3.8.1) \quad B = \left(\frac{N_a}{h} - 4\beta a^2 \right) \frac{1}{(1+k) a^{k-1}}$$

i napięcia błonowe są równe

$$(3.9) \quad N_r = h \left[\left(\frac{N_a}{h} - 4\beta a^2 \right) \frac{r^{k-1}}{a^{k-1}} + 4\beta r^2 \right],$$

$$(3.10) \quad N_t = h \left[k \left(\frac{N_a}{h} - 4\beta a^2 \right) \frac{r^{k-1}}{a^{k-1}} + 12\beta r^2 \right].$$

Łatwo ze wzorów (2.6) i (2.7) stwierdzić, że

$$(3.11) \quad M_r = -\frac{D_r}{R} (1 + \nu_t),$$

$$(3.12) \quad M_t = -\frac{D_t}{R} (1 + \nu_r),$$

$$(3.13) \quad Q_r = \frac{D_t - D_r}{R} \frac{1}{r}.$$

Wynika stąd, że na obwodzie płyty działają (równomiernie rozłożone) momenty zginające, natomiast napięcia poprzeczne rosną nieograniczenie w miarę przybliżania się do środka płyty. Ponieważ, zgodnie z naszym poprzednim założeniem, obciążenie ciągłe $q(r)$ posiada wszędzie wartość skończoną, to w środku płyty powinna działać siła skupiona, którą oznaczymy przez P . Z porównania wzorów (3.13) i (2.8) wynika, że siła ta jest równa

$$(3.14) \quad P = \frac{2\pi D_r}{R} (1 - k^2),$$

a dla płyty izotropowej znika, jak być powinno, [1].

Jest zrozumiałe, że reakcja pionowa R_a na obwodzie płyty, liczona na jednostkę długości obwodu, jest

$$(3.15) \quad R_a = \left[Q_r + N_r \frac{dw}{dr} \right]_{r=a}.$$

Z (2.8) wynika, że reakcja ta jest równa

$$(3.16) \quad R_a = -\frac{1}{a} \int_0^a q r dr - \frac{P}{2\pi a}.$$

Łatwo sprawdzić podstawiając odpowiednie wartości według wzorów (3.7), (3.9), (3.13) i (3.14), że prawe strony (3.15) i (3.16) są identyczne, jak, naturalnie, być powinno. Z porównania tego wyniku również, że siłę P «niosą» napięcia ścinające Q_r na brzegu, a obciążenie $q(r)$ «niosą» brzegowe napięcia promieniowe N_a .

O ile chodzi o teorię przybliżoną Poissona-Kirchhoffa, to wówczas trzeba przyjąć $F \equiv 0$. Wtedy założenie (3.1) spełnia równanie Z. Germain, jeżeli $q \equiv 0$. Natomiast M_r , M_t i Q_r wypadają te same, co poprzednio, skąd wynika, że według teorii klasycznej wygięcie płyty ortotropowej w kształcie powierzchni kulistej wymaga oprócz brzegowych momentów zginających również obecności siły skupionej w środku płyty. Jeżeli warunki oparcia brzegu wykluczają jego przemieszczenia radialne, to z drugiego związku (2.5) otrzymuje się

$$(3.17) \quad [N_t]_{r=a} = \nu_t N_a,$$

skąd ostatecznie wypada, że

$$(3.18) \quad N_a = \frac{E_t h a^2}{2 R^2 (k+3)(k-\nu_t)}$$

jest napięciem brzegowym promieniowym w tym przypadku.

4. Płyta kołowa cylindrycznie ortotropowa swobodnie podparta i wygięta podobnie jak płyta cylindrycznie ortotropowa równomiernie obciążona w teorii klasycznej

W teorii klasycznej mamy w danym przypadku dla płyty ortotropowej, [8],

$$(4.1) \quad w = m_0 \left[m_1 - m_2 \left(\frac{r}{a} \right)^{k+1} + \left(\frac{r}{a} \right)^4 \right],$$

gdzie

$$(4.2) \quad m_0 = \frac{p_0 a^4}{8(9-k^2) D_r}, \quad m_1 = \frac{(3-k)(4+k+\nu_l)}{(1+k)(k+\nu_l)}, \quad m_2 = \frac{4(3+\nu_l)}{(1+k)(k+\nu_l)};$$

tutaj p_0 jest co prawda intensywnością obciążenia równomiernego, ale w teorii nieliniowej uznamy je za parametr, który można dowolnie ustalić. Przyjmiemy, jak zwykle, że $k \neq 3$. Na mocy (4.1) można od razu obliczyć momenty zginające i napięcia poprzeczne według (2.6) i (2.7):

$$(4.3) \quad M_r = \frac{p_0(3+\nu_l)a^2}{2(9-k^2)} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{k-1} - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right],$$

$$(4.4) \quad M_t = \frac{p_0 k^2 a^2}{2(9-k^2)} \left[\frac{(3+\nu_l)(1+k\nu_r)}{k+\nu_l} \left(\frac{r}{a} \right)^{k-1} + (1+3\nu_r) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right],$$

$$(4.5) \quad Q_r = -\frac{p_0 r}{2}.$$

Drugie równanie podstawowe (2.2) przyjmuje postać

$$(4.6) \quad F'''' + \frac{1}{r} F''' - \frac{k^2}{r} F' = -\frac{E_t m_0^2}{2 a^3} \left[16 \left(\frac{r}{a} \right)^5 - 8 m_2 (k+1) \left(\frac{r}{a} \right)^{k+2} + m_2^2 (k+1)^2 \left(\frac{r}{a} \right)^{2k-1} \right],$$

a jego rozwiązaniem jest

$$(4.7) \quad F = A + B r^{1+k} + C r^{1-k} + \beta_1 r^8 + \beta_2 r^{k+5} + \beta_3 r^{2k+2},$$

gdzie

$$(4.8) \quad \begin{cases} \beta_1 = -\frac{E_t m_0^2}{(49-k^2)a^8}, & \beta_2 = \frac{E_t m_0^2 m_2 (k+1)}{2(k+5)(k+2)a^{k+5}}, \\ \beta_3 = -\frac{E_t m_0^2 m_2^2}{4(3k+1)a^{2k+2}}, \end{cases}$$

przy czym zakładamy, że $k \neq 7$.

Ze wzoru (2.3) po uwzględnieniu (4.7) otrzymujemy napięcie radialne N_r . Jeżeli ma ono przyjmować wartość skończoną w środku płyty i jeżeli założymy, że $k \geq 1$, to stała $C = 0$, ale $B \neq 0$. Ostatecznie mamy

$$(4.9) \quad N_r = h [B(1+k)r^{k-1} + 8\beta_1 r^6 + (k+5)\beta_2 r^{k+3} + 2(k+1)\beta_3 r^{2k}].$$

Ze wzoru powyższego wynika, że naprężenie radialne w środku płyty ortotropowej jest w danym razie równe zeru, podczas gdy dla płyty izotropowej wygiętej w tym samym kształcie jest ono równe w tym miejscu $2B$.

Wobec swobodnego podparcia brzegu płyty jest $N_r(a) = 0$; znajdujemy stąd jedyną nie znaną stałą B :

$$(4.10) \quad B = -\frac{1}{1+k} [8\beta_1 a^{7-k} + (k+5)\beta_2 a^4 + 2(k+1)\beta_3 a^{k+1}].$$

Zapiszemy ugięcie (4.1) w postaci

$$(4.11) \quad w = n_1 - n_2 r^{k+1} + n_3 r^4,$$

gdzie

$$(4.12) \quad n_1 = m_0 m_1, \quad n_2 = \frac{m_0 m_2}{a^{k+1}}, \quad n_3 = \frac{m_0}{a^4}.$$

Wówczas po podstawieniu (4.7) i (4.11) do pierwszego równania podstawowego (2.1) otrzymujemy obciążenie, które nadaje płycie żądany kształt:

$$(4.13) \quad q(r) = 8(9 - k^2) D_r n_3 - h \{ 4 n_3 r [80 \beta_1 r^7 + B(1+k)(3+k)r^k + (k+5)(k+7)\beta_2 r^{k+4} + 4(k+1)(k+2)\beta_3 r^{2k+1}] - (k+1)n_2 r^{k-1} [8(k+7)\beta_1 r^6 + 2Bk(1+k)r^{k-1} + 2(k+2)(k+5)\beta_2 r^{k+3} + 2(k+1)(3k+1)\beta_3 r^{2k}] \}.$$

Oczywiście, ogólnie biorąc, obciążenie to jest dalekie od równomiernego.

5. Metoda pseudo-energii

Metoda pseudo-energii stosowana przez J. Prescottta do płyt izotropowych o dużych ugięciach, [1], polega jak wiadomo na tym, że zamiast pierwszego równania podstawowego, odpowiadającego równaniu (2.1) dla $k = 1$, posługujemy się całą tego równania, która może być interpretowana jako przedstawiająca w pewnym sensie równanie pracy sprężystej. Przypomnijmy postępowanie Prescottta stosując je do ortotropowej płyty kołowej. W tym celu przedstawimy pierwsze równanie podstawowe Rostowcewa (2.1) w postaci

$$(5.1) \quad \frac{d}{dr} [w''' r + w'' - k^2 \frac{w'}{r} - \frac{h}{D_r} w' F'] = \frac{q(r)}{D_r} r$$

i po pomnożeniu obu jego stron przez $w dr$ wykonajmy całkowanie po całej powierzchni płyty. Otrzymujemy wówczas zamiast równania różniczkowego (5.1) równanie całkowe

$$(5.2) \quad \int_0^a q w r dr = D_r \int_0^a w \frac{d}{dr} \left(w''' r + w'' - k^2 \frac{w'}{r} \right) dr - h \int_0^a w \frac{d}{dr} (w' F') dr,$$

w którym lewą stronę można, istotnie, interpretować jako podwójną pracę obciążenia zewnętrznego podczas odkształcenia płyty, jeżeli pominąć pracę napięć błonowych (w tym bowiem przypadku ugięcie w jest proporcjonalne do obciążenia). Wykonajmy całkowanie przez części obu całek po prawej stronie (5.2). Dla pierwszej całki I_1 otrzymujemy po uwzględnieniu (2.7)

$$(5.3) \quad I_1 = - \left[w Q_{,r} r \right]_0^a - \int_0^a \left(w''' r + w'' - k^2 \frac{w'}{r} \right) w' dr.$$

Pierwszy z tych składników jest różny od zera tylko wtedy, gdy w środku płyty działa siła skupiona P , i wtedy jest równy $Pw_0/2\pi$, [por. (2.8)], gdyż jest w ogóle

$$(5.4) \quad \left[\frac{dw}{dr} \right]_{r=0} = 0 \quad \text{oraz} \quad [w]_{r=a} = 0.$$

Jeżeli uwzględnimy te ostatnie warunki, to z drugiej całki I_2 w (5.2) pozostaje wyrażenie

$$(5.5) \quad I_2 = h \int_0^a (w')^2 F' dr.$$

Ostatecznie zatem pierwsze równanie podstawowe w formie «pseudo-energetycznej» przybiera następującą postać:

$$(5.6) \quad \int_0^a q w r dr = - D_r \int_0^a \left(w''' r + w'' - k^2 \frac{w'}{r} \right) w' dr + h \int_0^a (w')^2 F' dr + \frac{Pw_0}{2\pi}.$$

Wprowadźmy do obu równań podstawowych zmienną bezwymiarową $\varrho = r/a$. Wówczas zamiast (5.6) i (2.2) otrzymujemy

$$(5.7) \quad a^4 \int_0^1 q w \varrho d\varrho = - D_r \int_0^1 \left(\frac{d^3 w}{d\varrho^3} \varrho + \frac{d^2 w}{d\varrho^2} - k^2 \frac{dw}{d\varrho} \frac{1}{\varrho} \right) \frac{dw}{d\varrho} d\varrho + \\ + h \int_0^1 \left(\frac{dw}{d\varrho} \right)^2 \frac{dF}{d\varrho} d\varrho + \pi_0 a^2,$$

$$(5.8) \quad \frac{d^3 F}{d \varrho^3} \varrho + \frac{d^2 F}{d \varrho^2} - k^2 \frac{d F}{d \varrho} \frac{1}{\varrho} = - \frac{E_t}{2} \left(\frac{d w}{d \varrho} \right)^2,$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie $\pi_0 = P w_0 / 2 \pi$.

Użyjemy teraz powyższego układu równań do rozwiązania zagadnienia płyty kołowej ortotropowej obciążonej równomiernie, stosując za J. Prescottem dwa kolejne przybliżenia.

6. Płyta kołowa cylindrycznie ortotropowa oparta przegubowo na brzegu i poddana obciążeniu równomiernemu q_0

6.1. Oś ortotropii przyjmijmy za oś z , a dla powierzchni ugięcia przyjmijmy następujące najprostsze założenie:

$$(6.1.1) \quad w = f(1 - \varrho^2)$$

(czyli takie samo, jak poprzednio rozpatrzone w p. 3). Oczywiście, moment podporowy nie jest tutaj równy zeru. Podstawiając (6.1.1) do równania (5.8) otrzymujemy łatwo całkę ogólną tego równania w postaci

$$(6.1.2) \quad F = A + B \varrho^{1+k} + C \varrho^{1-k} + a \varrho^4,$$

gdzie

$$(6.1.3) \quad a = \frac{E_t f^2}{2(k^2 - 9)}$$

(zakładamy, że $k \neq 3$).

Podstawiając (6.1.2) do (2.3) znajdujemy napięcia błonowe

$$(6.1.4) \quad N_r = h [B(1+k) \varrho^{k-1} + C(1-k) \varrho^{-k-1} + 4a \varrho^2],$$

$$(6.1.5) \quad N_t = h [B(1+k) \varrho^{k-1} - C(1-k) k \varrho^{-k-1} + 12a \varrho^2].$$

Jeśli założymy, że $k > 1$, to aby napięcia błonowe nie rosły nieograniczenie wraz z $r \rightarrow 0$, powinno być

$$(6.1.6) \quad C = 0.$$

Przyjmijmy jeszcze, że napięcia błonowe radialne na brzegu płyty znikają:

$$(6.1.7) \quad [N_r]_{\varrho=1} = 0,$$

co pozwala na znalezienie stałej B :

$$(6.1.8) \quad B = - \frac{4a}{1+k}.$$

Podstawiając teraz (6.1.1) i (6.1.2) do pierwszego równania podstawowego (5.7) i uwzględniając (6.1.8) znajdziemy ostatecznie następujące równanie trzeciego stopnia dla wyznaczenia nieznanego parametru f :

$$(6.1.9) \quad \frac{4h E_t}{3(k+3)^2} f^3 + 2D_r(k^2 - 1)f - \frac{a^4 q_0}{4} = 0,$$

które zapisać można również w postaci

$$(6.1.10) \quad \frac{q_0 a^4}{E_r h^4} = \frac{16k^2}{3(k+3)^2} \left(\frac{f}{h}\right)^3 + \frac{2(k^2 - 1)}{3(1 - \nu_r \nu_t)} \frac{f}{h}.$$

Zauważmy, że dla izotropii, tzn. dla $k = 1$, (6.1.10) przeobraża się w odpowiednie równanie warunkowe podane przez J. Prescottta, [1], w którym jednak pominięty zostaje wyraz² zawierający f/h jako mały wobec wyrazu zawierającego $(f/h)^3$. (Tak można postąpić, gdy ugięcia są znacznie większe od grubości płyty).

Gdy zamiast warunku (6.1.7) przyjąć warunek nieprzesuwalności radialnej brzegu płyty, $[u]_{r=a} = 0$ lub po przekształceniu [por. (3.17)]

$$(6.1.11) \quad \frac{d^2 F}{d \varrho^2} - \frac{\nu_t}{\varrho} \frac{d F}{d \varrho} = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = 1,$$

to po podstawieniu (6.1.2) otrzymujemy ostatecznie zamiast (6.1.8)

$$(6.1.12) \quad B = \frac{4(3 - \nu_t) a}{(1 + k)(\nu_t - k)},$$

a z pierwszego równania podstawowego (5.7) równanie zastępujące w danym razie (6.1.10):

$$(6.1.13) \quad \frac{q_0 a^4}{E_r h^4} = \frac{16k^2}{k^2 - 9} \left[\frac{1}{3} + \frac{2(3 - \nu_t)}{(k+3)(\nu_t - k)} \right] \left(\frac{f}{h}\right)^3 + \frac{4(k^2 - 1)}{3(1 - \nu_r \nu_t)} \frac{f}{h}.$$

Również to równanie dla $k = 1$ przeobraża się w równanie podane w [1], jeżeli w tym ostatnim pominąć wyraz zawierający iloraz f/h wobec wyrazu zawierającego ten sam iloraz w trzeciej potędze.

6.2. Przyjmijmy teraz ogólniejsze założenie, mianowicie

$$(6.2.1) \quad w = f(1 + m_1 \varrho^2 + m_2 \varrho^4).$$

² Pewne różnice pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi w niniejszej pracy i rozwiązaniami Prescottta (mowa o rozwiązaniach uzyskanych na podstawie równania pseudo-energii) wynikają stąd, że przy wyprowadzaniu równania pseudo-energii Prescottt spożytkowuje bezpośrednio warunek zanikania momentu radialnego na brzegu płyty, czego nie można uczynić w przypadku anizotropii materiału.

Oczywiście, ponieważ $w(1) = 0$, więc pomiędzy m_1 i m_2 istnieje związek $m_1 + m_2 = -1$. Postępując jak w przypadku poprzednim, p. 6.1, znajdziemy z łatwością całkę drugiego równania podstawowego (5.8) w postaci

$$(6.2.2) \quad F = A + B e^{1+k} + C e^{1-k} + a e^4 + \beta e^6 + \gamma e^8,$$

gdzie przyjęte zostały następujące oznaczenia:

$$(6.2.3) \quad a = \frac{E_t b^2 m_1^2}{2(k^2 - 9)}, \quad \beta = \frac{4 E_t b^2 m_1 m_2}{3(k^2 - 25)}, \quad \gamma = \frac{E_t b^2 m_2^2}{k^2 - 49}.$$

Założyliśmy tutaj, że $k \neq 3$, $k \neq 5$ i $k \neq 7$. Zużytkowując (6.2.2) znajdujemy z (2.3)

$$(6.2.4) \quad N_r = h [B(1+k) a^{k-1} + 4 a e^2 + 6 \beta e^4 + 8 \gamma e^6].$$

We wzorze powyższym przyjęliśmy od razu $C = 0$, aby naprężenie radialne zachowało wartość skończoną w środku płyty. Z warunku (6.1.7) znajdujemy jak poprzednio

$$(6.2.5) \quad B = - \frac{2(2a + 3\beta + 4\gamma)}{1+k}.$$

Podstawiając teraz (6.2.1) i (6.2.2) do równania pseudo-energii (5.7) otrzymujemy po wykonaniu stosownych przekształceń następujący wzór dla wyznaczenia nieznanego parametru f :

$$(6.2.6) \quad \frac{q_0 a^4}{E_t h^4} = \frac{12}{a_1} \left[4 k^2 a_2 \left(\frac{f}{h} \right)^3 - \frac{a_3}{12(1 - \nu_r \nu_t)} \frac{f}{h} \right],$$

w którym przyjęto oznaczenia

$$(6.2.7) \quad \begin{cases} a_1 = 6 + 3 m_1 + 2 m_2, \\ a_2 = -2 \left(\frac{m_1^2}{k^2 - 9} + \frac{4 m_1 m_2}{k^2 - 25} + \frac{4 m_2^2}{k^2 - 49} \right) \left(\frac{m_1^2}{k+3} + \frac{4 m_1 m_2}{k+5} + \frac{4 m_2^2}{k+7} \right) + \\ + m_1^2 \left[\frac{m_1^2}{3(k^2 - 9)} + \frac{m_1 m_2}{k^2 - 25} + \frac{4 m_2^2}{5(k^2 - 49)} \right] + m_1 m_2 \left[\frac{m_1^2}{k^2 - 9} + \frac{16 m_1 m_2}{5(k^2 - 25)} + \right. \\ \left. + \frac{8 m_2^2}{3(k^2 - 49)} \right] + 8 m_2^2 \left[\frac{m_1^2}{10(k^2 - 9)} + \frac{m_1 m_2}{3(k^2 - 25)} + \frac{2 m_2^2}{7(k^2 - 49)} \right], \\ a_3 = 2 m_1^2 (1 - k^2) + 4 m_1 m_2 (5 - k^2) + \frac{8}{3} m_2^2 (9 - k^2). \end{cases}$$

Oczywiście, gdy przyjąć $m_1 = -1$, $m_2 = 0$, to wzór powyższy przeobraża się we wzór (6.1.10). Gdy natomiast przyjąć $k = 1$, to otrzymuje się wzór na obciążenie płyty izotropowej, z tym, że współczynnik przy

ilorazie f/h w pierwszej potędze różni się od odpowiedniego współczynnika uzyskanego przez Prescottta, [1]. Mianowicie według [1] współczynnik ten jest równy

$$(6.2.8.1) \quad \frac{4}{(1-\nu^2)(3-m_2)} [(1-m_2)^3(1+\nu) + \frac{8}{3}m_2^3],$$

podczas gdy ze wzoru (6.2.6) uzyskujemy w tym przypadku

$$(6.2.8.2) \quad -\frac{16}{(1-\nu^2)(6+3m_1+2m_2)} (m_1 m_2 + \frac{4}{3}m_2^3).$$

Wynika stąd, że np. dla $\nu = 0,25$ z (6.2.8.1) i (6.2.8.2) otrzymuje się odpowiednio współczynnik 1,38 oraz 1,32³; różnica wynosi zatem niecałe 4,5% w stosunku do pierwszej z tych wielkości.

7. Płyta eliptyczna prostoliniowo ortotropowa oparta na brzegu przegubowo i poddana obciążeniu równomiernemu q_0

Przyjmijmy główne kierunki ortotropii za równoległe do osi x i y układu, którego początek leży w środku elipsy, a powierzchnię ugięcia w postaci

$$(7.1) \quad w = f \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

gdzie a i b są półosiami elipsy. Po uwzględnieniu (7.1) drugie równanie podstawowe (1.2) przyjmuje postać

$$(7.2) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + m^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + k^2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -\frac{4 E_2 f^2}{a^2 b^2}.$$

Zakładając, że na obwodzie płyty znikają napięcia normalne N_n i styczne N_{nt} , otrzymujemy następujące dwa warunki brzegowe dla funkcji $F(x, y)$ na obwodzie płyty:

$$(7.3) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^4} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{y^2}{b^4} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{xy}{a^2 b^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{xy}{a^2 b^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{y^2}{b^4} - \frac{x^2}{a^4} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0. \end{cases}$$

Aby lewa strona (7.2) była różna od zera, funkcja F musi być co najmniej czwartego stopnia. Przyjmijmy zatem za [1], że

$$(7.4) \quad F(x, y) = K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2,$$

³ We wzorze (6.2.8.1) przyjęto za [1] $m_2 = 0,2$, podczas gdy w (6.2.8.2) przyjęto $m_2 = 0,24$, co wynika z warunku $[M_r]_{\rho=1} = 0$ [por. wzór (2.6)].

gdzie K jest parametrem, który wypada wyznaczyć. Mamy wówczas na podstawie (1.4)

$$(7.5) \quad \begin{cases} N_x = -\frac{4Kh}{b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2}\right), \\ N_y = -\frac{4Kh}{a^2} \left(1 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \\ N_{xy} = -\frac{8Kh}{a^2 b^2} x y. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że wyrażenie (7.4) spełnia oba warunki brzegowe (7.3), natomiast z (7.2) otrzymujemy

$$(7.6) \quad K = K^* E_2 f^2,$$

gdzie

$$(7.7) \quad K^* = -\frac{a^2 b^2}{6(a^4 k^2 + b^4) + 2a^2 b^2 m^2}.$$

Jeżeli teraz podstawimy (7.1) i (7.4) do pierwszego równania podstawowego w postaci «pseudo-energetycznej» (F oznacza powierzchnię płyty),

$$(7.8) \quad \int_{(F)} q w dx dy = D_1 \int_{(F)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2l^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) w dx dy - \\ - 2h \int_{(F)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) w dx dy,$$

to okazuje się, że pierwsza całka po prawej stronie tego równania, przedstawiająca podwójną pseudo-energię momentowego odkształcenia płyty—wobec naszego przybliżonego założenia (7.1) — staje się równa zeru; oznaczałoby to, że płyta nie posiada sztywności giętej, co jest w danym razie oczywiście błędne. Za autorem metody, [1], podstawiamy zatem zamiast rozważanej całki podwójną energię odkształcenia zgięciowego (momentowego) według teorii Poissona-Kirchhoffa, [8], równą dla płyty ortotropowej

$$(7.9) \quad D_1 \int_{(F)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4n^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

gdzie $n^2 = G_{12}(1 - \nu_1 \nu_2)/E_1$.

Po podstawieniu do powyższego wyrażenia wartości w według (7.1) otrzymujemy ostatecznie zamiast (7.8) następujące równanie dla wyznaczenia nieznanego parametru f :

$$(7.10) \quad \frac{q_0 a^2 b^2}{E_1 h^4} = \frac{2(b^4 + 2\nu_2 a^2 b^2 + k^2 a^4)}{3(1 - \nu_1 \nu_2) a^2 b^2} \frac{f}{h} - \frac{16 K^* k^2}{3} \left(\frac{f}{h} \right)^3.$$

Gdy $a = b$, to elipsa przeobraża się w koło i dla płyty kołowej o ortotropii prostoliniowej otrzymujemy z (7.10)

$$(7.11) \quad \frac{q_0 a^4}{E_1 h^4} = \frac{2(1+2\nu_2+k^2)}{3(1-\nu_1\nu_2)} \frac{f}{h} + \frac{8k^2}{3(1+k^2)+m^2} \left(\frac{f}{h}\right)^3.$$

Jeżeli wreszcie przyjmiemy, że chodzi o płytę kołową izotropową, to wzór (7.11) przechodzi w następujący:

$$(7.12) \quad \frac{q_0 a^4}{E h^4} = \frac{4}{3(1-\nu)} \frac{f}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{f}{h}\right)^3,$$

który, jak widać, dla dużych stosunków f/h mało różni się od wzoru poprzednio wyprowadzonego (6.1.10), jeżeli ten wzór przekształcić w sposób odpowiadający izotropii⁴.

Ze wzorów (7.5) można teraz z łatwością znaleźć naprężenia błonowe, a z (1.7) uwzględniając (7.1) — momenty zginające, co pozwala na obliczenie całkowitych naprężeń panujących w płycie.

8. Płyta prostokątna ortotropowa o bokach poziomo nieprzesuwnych poddana obciążeniu równomiernemu q_0 (rys. 2)

Mamy w danym razie następujące warunki brzegowe:

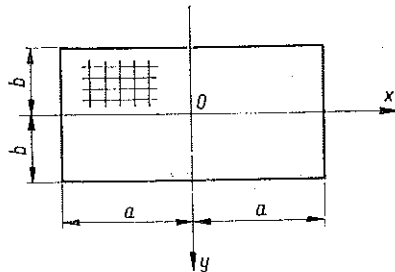
$$(8.1) \quad \begin{cases} \bar{u} = 0 & \text{dla } x = \pm a, \\ \bar{v} = 0 & \text{dla } y = \pm b. \end{cases}$$

Zakładamy jak dla płyty izotropowej, [1],

$$(8.2) \quad w = f \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}.$$

Podstawiamy (8.2) do drugiego równania podstawowego (1.2) i otrzymujemy równanie różniczkowe

$$(8.3) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + m^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + k^2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \\ = -\frac{E_2 \pi^4 f^2}{32 a^2 b^2} \left(\cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{b} \right),$$



Rys. 2

którego rozwiązanie szczególne przyjmujemy w postaci

$$(8.4) \quad F = C_1 \cos \frac{\pi x}{a} + C_2 \cos \frac{\pi y}{b} + C_3 x^2 + C_4 y^2.$$

⁴ Dla materiału izotropowego wzór (7.12) przybiera mianowicie postać identyczną z podaną w [1], s. 460.

Przez podstawienie (8.4) do (8.3) znajdujemy stałe całkowania C_1 i C_2 , wobec czego funkcja F przyjmuje następującą postać:

$$(8.5) \quad F = -\frac{E_1 f^2}{32 a^2 b^2} \left(k^2 a^4 \cos \frac{\pi x}{a} + b^4 \cos \frac{\pi y}{b} \right) + C_3 x^2 + C_4 y^2.$$

Ze wzorów (1.4) znajdujemy napięcia błonowe w płycie

$$(3.6) \quad \begin{cases} N_x = \frac{E_1 \pi^2 h f^2}{32 a^2} \cos \frac{\pi y}{b} + 2 C_4 h, \\ N_y = \frac{E_2 \pi^2 h f^2}{32 b^2} \cos \frac{\pi x}{a} + 2 C_3 h, \\ N_{xy} = 0. \end{cases}$$

Obliczamy teraz jednostkowe wydłużenia błonowe według (1.5) i następnie przemieszczenia błonowe \bar{u} i \bar{v} według (1.6). Po odpowiednich przekształceniach i uwzględnieniu, że wobec symetrii ustroju i obciążenia jest $\bar{u} = 0$ dla $x = 0$ oraz $\bar{v} = 0$ dla $y = 0$, otrzymujemy

$$(8.7) \quad \begin{cases} \bar{u} = \frac{\pi^2 f^2}{16 a^2} \left[\frac{x}{2} \cos \frac{\pi y}{b} - \left(x - \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \right) \cos^2 \frac{\pi y}{2b} \right] - \\ \quad - \frac{\pi \nu_2 a f^2}{32 b^2} \sin \frac{\pi x}{a} + \frac{2}{E_1} (C_4 - \nu_1 C_3) x, \\ \bar{v} = \frac{\pi^2 f^2}{16 b^2} \left[\frac{y}{2} \cos \frac{\pi x}{a} - \left(y - \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi y}{b} \right) \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \right] - \\ \quad - \frac{\pi \nu_1 b f^2}{32 a^2} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{2}{E_2} (C_3 - \nu_2 C_4) y. \end{cases}$$

Warunki brzegowe (8.1) pozwalają na obliczenie stałych C_3 i C_4 , które okazują się równe

$$(8.8) \quad \begin{cases} C_3 = \frac{\pi^2 f^2 E_2}{64 (1 - \nu_1 \nu_2)} \left(\frac{\nu_1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), \\ C_4 = \frac{\pi^2 f^2 E_1}{64 (1 - \nu_1 \nu_2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu_2}{b^2} \right). \end{cases}$$

Oczywiście biorąc pod uwagę (1.6) łatwo sprawdzić, że przemieszczenia (8.2) i (8.7) spełniają ostatnią z równości (8.6), jak być powinno.

Aby obliczyć nie znany jeszcze parametr f , posłużymy się równaniem pseudo-energii. W tym celu mnożymy obie strony równania podstawowego (1.1) przez $w dx dy$ i całkujemy po ćwiartce powierzchni płyty:

$$(8.9) \quad q_0 \int_0^a \int_0^b w dx dy = D_1 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2l^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) w dx dy - \\ - h \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) w dx dy.$$

Po dłuższych rachunkach otrzymujemy stąd ostatecznie następujące równanie trzeciego stopnia dla wyznaczenia stosunku f/h :

$$(8.10) \quad \frac{1024}{E_1 \pi^6 h^4} q_0 = \frac{1}{3(1-\nu_1 \nu_2)} \left(\frac{1}{a^4} + \frac{2l^2}{a^2 b^2} + \frac{k^2}{b^4} \right) \frac{f}{h} + \frac{\nu_2 \kappa}{2} \left(\frac{f}{h} \right)^3,$$

w którym przyjęto oznaczenie

$$(8.11) \quad \kappa = \frac{3 - \nu_1 \nu_2}{2(1 - \nu_1 \nu_2)} \left(\frac{1}{\nu_2 a^4} + \frac{1}{\nu_1 b^4} \right) + \frac{2}{(1 - \nu_1 \nu_2) a^2 b^2}.$$

Znając wartość f łatwo, naturalnie, znaleźć momenty zginające płytę według wzorów (1.7) oraz napięcia błonowe według wzorów (8.6) i (8.8). Ze wzorów tych wynika między innymi, że momenty zginające na brzegu płyty są równe zeru, wobec czego brzeg ten może się swobodnie obracać dokoła linii podparcia płyty.

9. Metody energetyczne

Przejdziemy obecnie do rozpatrzenia rozwiązań, które uzyskać można za pomocą metod energetycznych.

Oznaczmy energię odkształcenia związaną ze zginaniem płyty przez V_1 , a energię związaną z odkształceniem powierzchni środkowej płyty przez V_2 . Mamy wówczas kolejno dla płyt prostokątnie ortotropowych

$$(9.1) \quad V_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 4D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

$$(9.2) \quad V_2 = \frac{E_1 h}{2(1 - \nu_1 \nu_2)} \int_0^a \int_0^b \left[\bar{\epsilon}_x^2 + 2\nu_2 \bar{\epsilon}_x \bar{\epsilon}_y + \frac{\nu_2}{\nu_1} \bar{\epsilon}_y^2 + \frac{G_{12}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1} \bar{\gamma}_{xy}^2 \right] dx dy$$

oraz dla płyt cylindrycznie ortotropowych o kołowej symetrii obciążenia i podparcia

$$(9.3) \quad V_1 = \pi D_r \int_0^a \left\{ \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + \frac{\nu_t}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} + \right. \\ \left. + k^2 \left[\left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{\nu_r}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \right\} r dr,$$

$$(9.4) \quad V_2 = \frac{\pi E_r h}{1 - \nu_r \nu_t} \int_0^a (\bar{\varepsilon}_r^2 + 2\nu_t \bar{\varepsilon}_r \bar{\varepsilon}_t + k^2 \bar{\varepsilon}_t^2) r dr;$$

tutaj F jest polem, zaś a promieniem płyty.

9.1. Błona ortotropowa kwadratowa obciążona równomiernie. Dla błony takiej, lecz izotropowej, rozwiązanie podali A. i L. Föpplowie ([4], por. również [3], s. 345) stosując metodę energetyczną.

Oznaczmy boki płyty przez $2a$ (por. rys. 2) i przyjmijmy następujące wyrażenia dla przemieszczeń:

$$(9.1.1) \quad \begin{cases} \bar{u} = A \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2a}, \\ \bar{v} = B \sin \frac{\pi y}{a} \cos \frac{\pi x}{2a}, \\ w = f \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a}. \end{cases}$$

Tutaj przyjęliśmy różne współczynniki w wyrażeniach dla \bar{u} i \bar{v} , aby uwzględnić w ten sposób, w pewnym stopniu, różne własności sprężyste płyty w kierunkach x i y . Wyrażenia powyższe podstawiamy do wzorów (1.6), zaś obliczone w ten sposób odkształcenia do wzoru (9.2), który przedstawia w danym razie z wystarczającą dokładnością energię odkształcenia płyty.

Po odpowiednich przekształceniach znajdujemy energię odkształcenia płyty V z (9.2) jako

$$(9.1.2) \quad V = V_2 = \frac{E_1 h}{2(1 - \nu_1 \nu_2)} \left[A^2 \pi^2 a_{11} + B^2 \pi^2 a_{22} + AB a_{12} + A \frac{f^2 \pi^2}{6a} a_1 + \right. \\ \left. + B \frac{f^2 \pi^2}{6a} a_2 + \frac{f^4 \pi^4}{1024 a^2} a_0 \right],$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$(9.1.3) \quad \begin{cases} a_{11} = 1 + \frac{g_{12}}{4}, & a_{22} = \frac{\nu_2}{\nu_1} + \frac{g_{12}}{4}, & a_{12} = \frac{32}{9} (\nu_2 + g_{12}), \\ a_1 = \nu_2 - g_{12} - 2, & a_2 = \nu_2 - g_{12} - 2 \frac{\nu_2}{\nu_1}, \\ a_0 = 9 \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1} \right) + 2 \nu_2 + 4 g_{12}, & g_{12} = \frac{(1 - \nu_1 \nu_2) G_{12}}{E_1}. \end{cases}$$

Stosując zasadę prac wirtualnych uzyskujemy zrozumiałe, [9], równania dla wyznaczenia parametrów A , B i f :

$$(9.1.4) \quad \frac{\partial V_2}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial B} = 0,$$

$$(9.1.5) \quad q_0 \int \int_{(F)} \delta w \, dx \, dy = \delta V_2,$$

przy czym wariacja w ostatnim równaniu dotyczy strzałki ugięcia f .

Z równań (9.1.4) znajdujemy łatwo

$$(9.1.6) \quad A = \frac{f^2 \pi^2 a_2 a_{12} - 2 \pi^2 a_1 a_{22}}{6 a \, 4 \pi^4 a_{11} a_{22} - (a_{12})^2}, \quad B = \frac{f^2 \pi^2 a_1 a_{12} - 2 \pi^2 a_2 a_{11}}{6 a \, 4 \pi^4 a_{11} a_{22} - (a_{12})^2},$$

Natomiast z (9.1.5) przy uwzględnieniu (9.1.6) otrzymujemy ostatecznie następujący wzór pozwalający obliczyć parametr f :

$$(9.1.7) \quad f^3 \left\{ \frac{a_1 a_2 a_{12} - \pi^2 (a_1^2 a_{22} + a_2^2 a_{11})}{9 [4 \pi^4 a_{11} a_{22} - (a_{12})^2]} + \frac{a_0}{256} \right\} = \frac{32 a^4 (1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 h \pi^6} q_0.$$

Dla płyty izotropowej i $\nu = 1/4$ otrzymujemy z powyższego wzoru tę samą wartość strzałki ugięcia co w [4], gdzie zresztą posilkowano się tylko jednym parametrem $A = B$.

9.2. Płyta ortotropowa kwadratowa oparta przegubowo i obciążona równomiernie. Zadanie to rozwiążemy stosując metodę przybliżoną zaproponowaną w [4] (por. również [3]).

Podzielmy obciążenie istotnie działające q_0 na dwie części, z których jedna, q_1 , przenoszona jest przez naprężenia teorii zgięciowej, a druga, q_2 , przez naprężenia błonowe.

Ugięcie w środku płyty — równe w obu przypadkach $w_0 = f$ — jest według [8], s. 180, równe

$$(9.2.1) \quad w_0 = \frac{256 q_1 a^4}{\pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{m n (D_1 m^4 + 2 D_3 m^2 n^2 + D_2 n^4)},$$

jeżeli obliczyć to ugięcie na podstawie teorii małych ugięć. Poprzestańmy na jednym wyrazie szeregu (9.2.1). Wówczas

$$(9.2.2) \quad q_1 = \frac{w_0 \pi^6}{256 a^4} (D_1 + 2 D_3 + D_2).$$

Równocześnie z teorii membranowej mamy według (9.1.7)

$$(9.2.3) \quad q_2 = \frac{w_0^3 \pi^6}{32 a^4} D^*,$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie

$$(9.2.4) \quad D^* = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \left\{ \frac{a_1 a_2 a_{12} - \pi^2 (a_1^2 a_{22} + a_2^2 a_{11})}{9 [4 \pi^4 a_{11} a_{22} - (a_{12})^2]} + \frac{a_0}{256} \right\}.$$

Dodając stronami równości (9.2.2) i (9.2.3) otrzymujemy ostatecznie następujący wzór dla określenia wielkości ugięcia w środku płyty w_0 :

$$(9.2.5) \quad q_0 = \frac{w_0 \pi^6}{32 a^4} \left[\frac{1}{8} (D_1 + 2 D_3 + D_2) + w_0^2 D^* \right].$$

Dla płyty izotropowej i $\nu = 1/4$ otrzymujemy z (9.2.5) ten sam wzór, jaki podano w [3] i [4].

Oczywiście, znając w_0 można obliczyć q_1 i q_2 , następnie zaś naprężenia odpowiednio według teorii zgięciowej, [8], i błonowej (por. p. 9.1).

Literatura cytowana w tekście

- [1] J. Prescott, *Applied Elasticity*, New York 1946.
- [2] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 2, Warszawa 1954.
- [3] S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, New York-Londyn 1940.
- [4] A. i L. Föppl, *Drang und Zwang*, t. 1, 1924, tłum. ros.
- [5] S. Way, Proc. 5-th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge 1938.
- [6] Wei-zang Chien, *Problem of Large Deflection of Circular Plate*, Arch. Mech. Stos. 1 (1956).
- [7] H. M. Berger, *A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates*, Journ. Appl. Mech. 4 (1955).
- [8] S. G. Lechnicki, *Anizotropnyje plastinki*, Moskwa-Leningrad 1947.
- [9] J. Nowiński, *Równania odkształcenia płyt ortotropowych na podstawie nieliniowej teorii sprężystości*, Prace Nauk.-Bad. Inst. Techn. Bud., Nr 144, 1952.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИЗВЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК С БОЛЬШИМИ ПРОГИБАМИ

Автор приводит приближенное решение различных задач, касающихся ортотропных пластинок с большими прогибами, применяя методы Дж. Прескотта, С. П. Тимошенко, а также А. и Л. Феппелей. В пкт. 1 приводятся уравнения Г. Г. Ростовцева и общие

формулы для прямолинейно ортотропных пластинок в прямоугольной координатной системе, а в пкт. 2 — для цилиндрически ортотропных пластинок в полярных координатах. В пкт. 3 рассматривается цилиндрически ортотропная круговая пластинка, изгибаемая в форму сферической поверхности, а в пкт. 4 — такая же пластинка, но свободно опертая и изогнутая таким же образом, как и цилиндрически ортотропная пластинка, равномерно нагруженная в теории малых прогибов. В пкт. 5 применяется метод псевдоэнергии Дж. Прескотта, сводящий основную систему уравнений для круглых ортотропных пластинок к виду (5.7) и (5.8). В пкт. 6 рассматривается круглая цилиндрически ортотропная пластинка, шарнирно опертая и нагруженная равномерно, с двояким приближением: согласно (6.1.1) в п. 6.1 и по (6.2.1) в п. 6.2. В пкт. 7, при использовании того же метода, приводится решение для эллиптической прямолинейно ортотропной пластины, шарнирно опертой и равномерно нагруженной, а в пкт. 8 — для прямоугольной ортотропной пластины, с неподвижными в горизонтальном направлении сторонами, и нагруженной таким же образом, как в пкт. 7.

В пкт. 9 рассматривается энергетический метод. Применяя его, дается решение для равномерно нагруженной квадратной ортотропной мембраны (п. 9.1), а также для такой же пластины (п. 9.2).

Summary

APPLICATION OF SOME FAMILIAR APPROXIMATE METHODS TO PROBLEMS CONCERNING ORTHOTROPIC PLATES WITH LARGE DEFLECTIONS

Some problems concerning orthotropic plates with large deflections are solved in an approximate way using the methods proposed by J. Prescott, S. P. Timoshenko and A. and L. Föppl. G. G. Rostovtsev's equations and general equations for rectilinearly orthotropic plates are given in rectangular coordinates (Art. 1) and for cylindrically orthotropic plates in polar coordinates (Art. 2). In Art. 3 a circular cylindrically orthotropic plate bent into a portion of a spherical surface is considered, and in Art. 4 the same plate simply supported and with the same deflection surface as cylindrically orthotropic plate subjected to uniform load, in the small deflection theory. In Art. 5, J. Prescott's method of pseudo-energy is used reducing the principal system of equations for circular orthotropic plates to the form (5.7) and (5.8). Art. 6 is devoted to a circular cylindrically orthotropic plate on a hinged support and uniformly loaded, with two kinds of approximation: accord-

ing to (6.1.1) in Sec. 6.1, and according to (6.2.1) in Sec. 6.2. In Art. 7, a solution is obtained for an elliptical rectilinearly orthotropic plate uniformly loaded and resting on a hinged support, by the same method. The same is performed in Art. 8 for a rectangular orthotropic plate with edges fixed in the horizontal plane and loaded as in Art. 7. Art. 9 is devoted to the energy method. Using this method, a solution for a rectangular orthotropic membrane uniformly loaded is obtained in Sec. 9.1, a solution for a similar plate being obtained in Sec. 9.2.

**ZARŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN**

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 listopada 1956 r.