

RYSZARD DĄBROWSKI

W SPRAWIE OBLICZANIA MOSTÓW ZAKRZYWIONYCH
O PRZEKROJU OTWARTYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXIX

SPIS TRESCI

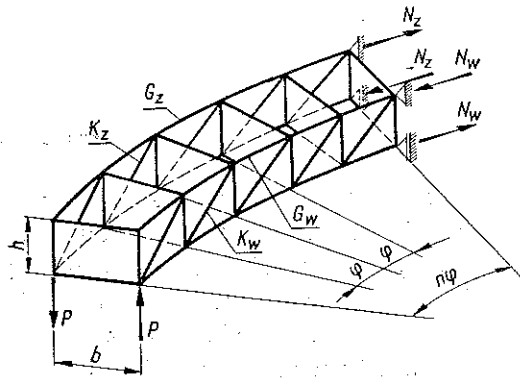
	Str.
1. Uwagi wstępne	229
2. Zadanie pomocnicze	230
3. Momenty zginające i siły tnące w dźwigarach ustroju jednoprzęsłowego	231
4. Ustroje ciągłe	235
5. Uwagi końcowe	238

1. Uwagi wstępne

Mosty o dźwigarach pełnościennych zakrzywionych i przekroju otwartym znalazły niejednokrotnie zastosowanie na traktach autostrad w tych przypadkach, kiedy chodziło o zachowanie płynnego łuku w planie również przy przejściu trasy przez przeszkodę. Przy dużych promieniach krzywizny (700-1000 m) wpływ zakrzywienia osi mostu wystarczy uwzględnić metodą przybliżoną¹. Natomiast na estakadach rozjazdowych, np. w miejscu krzyżowania się autostrad, a także na bocznicach kolejowych może powstać potrzeba zastosowania mostu zakrzywionego o małym promieniu krzywizny (rzędu 100 m). Wpływ zakrzywienia na obciążenie obu dźwigarów (zewnątrznego i wewnętrznego) jest wówczas znaczący i wskazane jest przeprowadzenie obliczenia ścisłego.

Ścisłe rozwiązanie zagadnienia przedstawił Gottfeld, [2] i [3]. Podane przez niego wyprowadzenie wzorów na linie wpływowe momentów i sił tnących w dźwigarze zewnętrznym i wewnętrznym jest nader żmudne i mało przejrzyste. Nieco przejrzystsze opracowanie zagadnienia (co prawda z ograniczeniem do ustrojów statycznie wyznaczalnych) podał U m a n s k i, [4], nie doprowadzając jednak rozwiązania do wzorów wynikowych. Te okoliczności są przeszkodą w spopularyzowaniu wśród inżynierów metody obliczenia omawianych ustrojów.

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzorów Gottfelda w sposób przejrzystszy i zarazem znacznie prostszy. Rozpatrzmy ustrój złożony z zakrzywionych dźwigarów kratowych (rys. 1). Przejście do dźwigarów pełnościennych nie nastęrcza trudności, skoro się zważy, że



Rys. 1

¹ Por. np. [1], s. 464.

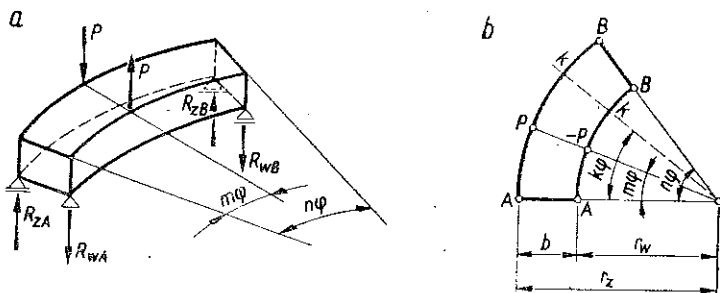
moment zginający w tym ostatnim równy jest iloczynowi siły w pasie dźwigara kratowego przez wysokość tego dźwigara, a siła tnąca równa jest pionowej składowej siły w krzyżulcu.

Najpierw rozwiążemy zadanie pomocnicze.

2. Zadanie pomocnicze

Rozpatrzmy ustrój nośny o dwóch dźwigarach kratowych zakrzywionych koncentrycznie (rys. 1), posiadający przepony w płaszczyznach radialnych (np. w postaci wykratowania przedstawionego na rys. 4b) oraz wykratowanie poziome w płaszczyźnie pasów dolnych (na rys. 1 dla przejrzystości krzyżulce tego wykratowania pominięto). Ustrój niech będzie na jednym końcu zamocowany, a na drugim obciążony parą sił $\pm P$, czyli momentem skręcającym Pb , gdzie b jest odległością między dźwigarami.

Jeżeli w dowolnym polu ustroju płaszczyznę radialną prostopadłą do wszystkich prętów pasów tego pola oddzielimy lewą część od reszty ustroju, to z rzutowania wszystkich sił (działających na odrzuconą część) na prostą poziomą leżącą w tej płaszczyźnie radialnej wynika, że siły w krzy-



Rys. 2

żulcach dolnego wykratowania są równe zero. Z równowagi wydzielonej części wynika również, że siły w krzyżulcach K_z i K_w (por. oznaczenia na rys. 1) dają pionowe składowe równe, lecz przeciwnie skierowane. A zatem ich składowe poziome mają się do siebie jak r_z do $-r_w$, gdzie r_z i r_w są odpowiednio promieniami koła zewnętrznego i wewnętrznego. Mając to na uwadze i rozpatrując po kolei równowagę węzłów górnych lub dolnych dźwigara zewnętrznego i wewnętrznego przez rzutowanie sił w prętach na prostą poziomą prostopadłą do promienia otrzymujemy, że również siły G_z i G_w w dowolnym polu mają się do siebie jak r_z do $-r_w$. W tym samym stosunku pozostają do siebie także pary reakcji normalnych N_z i N_w .

Rozpatrzmy z kolei taki sam ustrój kratowy podparty w czterech punktach, położonych parami na prostych radialnych i obciążony parą sił pionowych $\pm P$ w płaszczyźnie radialnej (rys. 2a). Mamy wyznaczyć

reakcje np. R_{zB} i R_{wB} . Warunek równowagi momentów względem osi pod-
pór $A - A$ daje (rys. 2b)

$$(2.1) \quad P(r_z - r_w) \sin m\varphi - (R_{zB}r_z - R_{wB}r_w) \sin n\varphi = 0,$$

gdzie φ jest kątem środkowym jednego pola, natomiast m i n są liczbami
całkowitymi.

Jako drugi warunek wykorzystamy zależność, że w ustroju wspornikowym zamocowanym w płaszczyźnie radialnej A nie tylko — jak to określa warunek (2.1) — całkowity moment zginający od obciążenia i reakcji musi być równy zero, lecz muszą również zniknąć momenty zamocowania poszczególnych dźwigarów, a więc $N_z = 0$ i $N_w = 0$. Stąd wynika, że reakcje R_{zB} i R_{wB} podobnie jak siły P muszą być równe, lecz przeciwnie skierowane, a zatem z (2.1) przy $R_{zB} = R_{wB} = R_B$ mamy

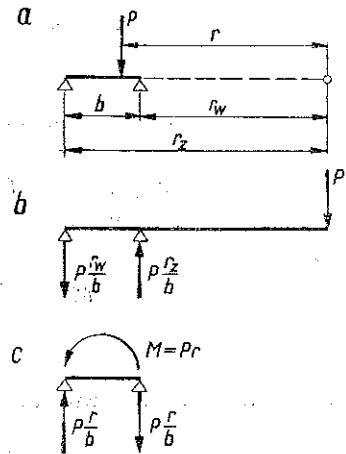
$$(2.2) \quad R_B = P \frac{\sin m\varphi}{\sin n\varphi}.$$

3. Momenty zginające i siły tnące w dźwigarach ustroju jednoprzęsłowego

Wprowadzenie wzorów na linie wpływowe momentów zginających i sił tnących można uprościć przez rozłożenie dowolnego obciążenia siłą P (przedstawionego na rys. 3a w przekroju poprzecznym) na dwa obciążenia składowe: (1) obciążenie siłą P przechodzącą przez środek krzywizny (rys. 3b) i (2) obciążenie momentem $M = Pr$ działającym w płaszczyźnie radialnej (rys. 3c).

Rozpatrzmy najpierw obciążenie pierwsze. Wyobraźmy sobie, że oba dźwigary zostały odłączone od przepon i znajdują się w niepodatnych prowadnicach, które pozwalają węzłom kratownic przesunąć się w płaszczyznach pionowych prostopadłych do odpowiednich płaszczyzn radialnych, przechodzących przez te węzły. Siły w kratownicach zakrzywionych będą — jak łatwo wykazać — identyczne z siłami w kratownicach wyprostowanych. Ponieważ w naszym przypadku obciążenia

obu kratownic są odwrotnie proporcjonalne do ich rozpiętości w rozwinięciu i działają w przeciwnych kierunkach, siły w odpowiednich prętach pasów kratownic będą równe lecz przeciwnego znaku. A ponieważ również reakcje poziome wywierane w węzłach przez prowadnice są równe i przeciwnie skierowane, można wnioskować, że w układzie rzeczywistym



Rys. 3

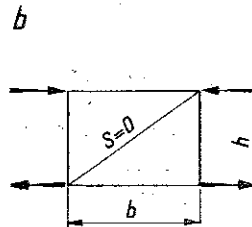
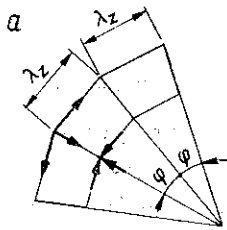
(z przeponami) siły przypadające na rozpórki przepon wzajemnie się równoważą, natomiast siły w krzyżulcach są równe zeru (rys. 4a i 4b).

Stąd wynika bezpośrednio taki moment w przekroju $k\varphi$ od obciążenia (1) działającego w przekroju $m\varphi$ jak dla belki rozwiniętej. Dla dźwignara zewnętrznego i wewnętrznego otrzymujemy wartości oznaczone przez $M_z^{(1)}$ i $M_w^{(1)}$ (rys. 2b)

$$(3.1) \quad \begin{cases} M_z^{(1)} = \frac{Pr_w \lambda_z m(n-k)}{b n}, \\ M_w^{(1)} = \frac{Pr_z \lambda_w m(n-k)}{b n} = -M_z^{(1)}, \end{cases}$$

gdzie λ_z i λ_w są odpowiednio długościami jednego pola zewnętrznego i wewnętrznego, przy czym mamy $r_z \lambda_w = r_w \lambda_z$. Wzory (3.1) ważne są dla

$k > m$. Dla przypadku $k < m$ należy $m(n-k)$ zastąpić przez $(n-m)k$.



Rys. 4

Dla obciążenia drugiego odpowiednie momenty $M_z^{(2)}$ i $M_w^{(2)}$ otrzymamy na podstawie p. 2 równoważąc momenty zginające prawej części względem osi radialnej, przechodzącej przez węzły k (rys. 2b):

$$R_B (r_z - r_w) \sin(n-k)\varphi = (M_z^{(2)} - M_w^{(2)}) \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Stąd przy uwzględnieniu $M_z^{(2)}/M_w^{(2)} = r_z/r_w$ i $b = r_z - r_w$ i po wyznaczeniu R_B ze wzoru (2.2) mamy

$$M_z^{(2)} = \frac{Pr}{b} r_z \frac{\sin m\varphi \sin(n-k)\varphi}{\sin n\varphi \cos \frac{\varphi}{2}},$$

a po uwzględnieniu związków

$$\lambda_z = 2r_z \sin \frac{\varphi}{2} \quad \text{i} \quad 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \sin \varphi$$

otrzymamy

$$(3.2) \quad M_z^{(2)} = \frac{Pr \lambda_z}{b} \frac{\sin m\varphi \sin(n-k)\varphi}{\sin \varphi \sin n\varphi} = \frac{r_z}{r_w} M_w^{(2)}.$$

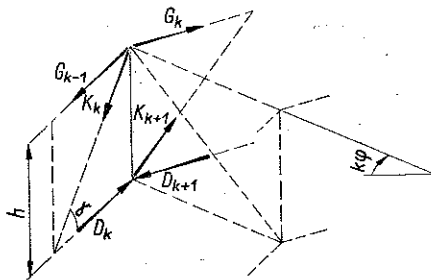
Po dodaniu wzorów (3.1) i (3.2) dla $P = 1$ znajdziemy ostatecznie momenty M_z i M_w :

$$(3.3) \quad \begin{cases} M_z = \frac{r \lambda_z}{b} \frac{\sin m \varphi \sin (n-k) \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} - \frac{r_w \lambda_z}{b} \frac{m (n-k)}{n} \\ M_w = \frac{r \lambda_w}{b} \frac{\sin m \varphi \sin (n-k) \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} + \frac{r_z \lambda_w}{b} \frac{m (n-k)}{n} \end{cases}$$

dla $k > m$. Dla $k < m$ należy m zastąpić przez $n - m$, zaś $(n - k)$ przez k .

Wzory (3.3) zgadzają się ze wzorami oznaczonymi jako (89a) i (89b) w pracy [2] i wzorem (235) w pracy [1].

Odpowiednie wzory dla sił tnących w przekroju $k\varphi$ od obciążenia w przekroju $m\varphi$ (określonych przez $Q = K \sin \gamma$, gdzie K jest siłą w krzyżulcu, zaś γ kątem nachylenia krzyżulca do poziomu) otrzymamy rzutu-jąc na normalną do promienia w płaszczyźnie poziomej siły G_{k-1} , G_k i K_k (rys. 5). Określenie składnika $Q^{(1)}$ pochodzącego od pierwszego obciążenia jest proste. Natomiast dla drugiego obciążenia składowego — wyrażając siły G_{k-1} i G_k przez momenty według (3.3) — otrzymujemy dla kratownicy zewnętrznej (przy oznaczeniach według rys. 2b i dla $k < m$)



Rys. 5

$$\frac{Pr \lambda_z}{bh} \left[\frac{\sin (n-m) \varphi \sin (k-1) \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} - \frac{\sin (n-m) \varphi \sin k \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} \right] = K_k \cos \gamma = Q^{(2)} \operatorname{ctg} \gamma.$$

Po przekształceniu i podstawieniu $\operatorname{ctg} \gamma = \lambda_z/h$ znajdziemy

$$(3.4) \quad Q^{(2)} = \frac{Pr}{b} \frac{\sin (n-m) \varphi \cos (k - \frac{1}{2}) \varphi}{\sin n \varphi \cos \frac{\varphi}{2}}$$

Dodając odpowiednie wyrażenia określające wpływy obu obciążeń otrzymujemy ostatecznie dla dźwigara zewnętrznego i wewnętrznego dla $P = 1$

$$(3.5) \quad \begin{cases} Q_z = -\frac{r_w}{b} \frac{n-m}{n} + \frac{r}{b} \frac{\sin (n-m) \varphi \cos (k - \frac{1}{2}) \varphi}{\sin n \varphi \cos \frac{\varphi}{2}} \\ Q_w = \frac{r_z}{b} \frac{n-m}{n} - \frac{r}{b} \frac{\sin (n-m) \varphi \cos (k - \frac{1}{2}) \varphi}{\sin n \varphi \cos \frac{\varphi}{2}} \end{cases}$$

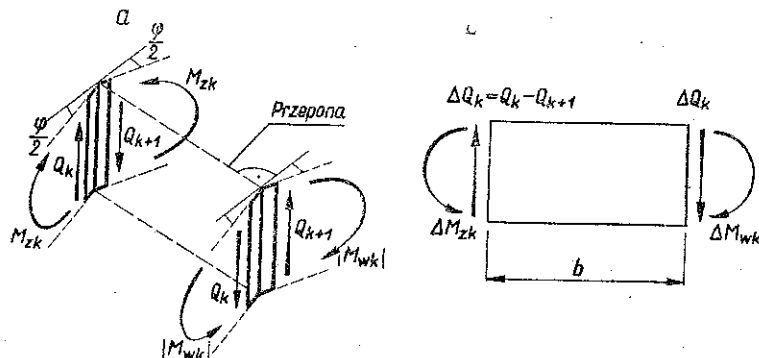
Oba składniki we wzorach (3.3) i (3.5) są przeciwnego znaku i dla uzyskania dostatecznie dokładnych wyników należy określać je z dokładnością do 5-6 znaków.

Sprawdzimy jeszcze dla obciążenia (2) warunek równowagi wydzielonej przepony. Siły tnące $Q^{(2)}$ w dźwigarze zewnętrznym i wewnętrznym są równe, lecz przeciwnie skierowane. Na przeponę działają z obu stron różnice sił tnących $\Delta Q_k = Q_k - Q_{k+1}$ (rys. 6a). (Wskaźniki górne pomijamy). Uwzględniając (3.4) mamy

$$(3.6) \quad \Delta Q_k = \frac{Pr}{b} \frac{\sin(n-m)\varphi}{\sin n\varphi \cos \frac{\varphi}{2}} \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi \right] =$$

$$= 2 \frac{Pr}{b} \frac{\sin(n-m)\varphi}{\sin n\varphi} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sin k\varphi.$$

Na przeponę działają ponadto składowe momenty zginających w obu dźwigarach $\Delta M_{zk} = 2 M_{zk} \sin \varphi/2$ i $\Delta M_{wk} = 2 |M_{wk}| \sin \varphi/2$ (rys. 6b). (Na rysunku 6 podano rzeczywisty kierunek działania momentów M_{wk} , odpowiadających dodatnim momentom M_{zk} przy rozpatrywanym obciążeniu).



Rys. 6

Wypadkowa tych składowych ΔM_k , po podstawieniu wartości według (3.2) (ale dla $k < m$), wynosi

$$\Delta M_k = \Delta M_{zk} - \Delta M_{wk} = 2 P \frac{r}{b} \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\sin(n-m)\varphi}{\sin n\varphi} \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi} (\lambda_z - \lambda_w),$$

co po uwzględnieniu $\lambda_z - \lambda_w = 2 b \sin \varphi/2$ daje

$$(3.7) \quad \Delta M_k = 2 Pr \frac{\sin(n-m)\varphi}{\sin n\varphi} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sin k\varphi.$$

Zatem z (3.6) i (3.7) wynika, że przepona jest w równowadze:

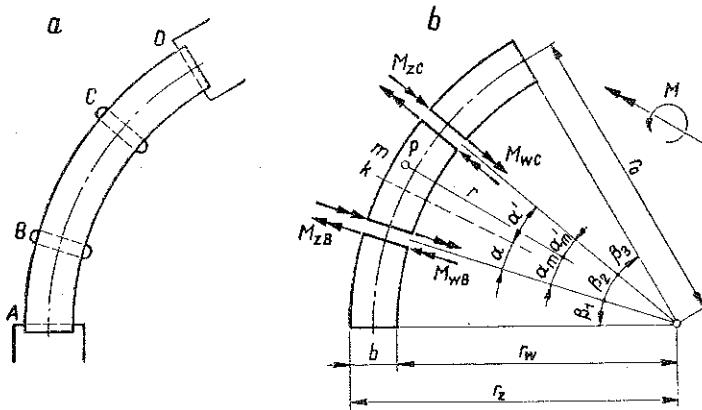
$$\Delta M_k = \Delta Q_k b.$$

Siły w krzyżulcu i prętach przepony kratowej można już łatwo wyznaczyć.

Przechodząc we wzorach (3.3) i (3.5) do granicy, gdy $\varphi \rightarrow 0$, i wprowadzając $\lambda_z/\sin \varphi = r_z$ i $\lambda_w/\sin \varphi = r_w$, otrzymamy odpowiednie wzory dla dźwigarów pełnościennych o stałym zakrzywieniu. We wzorach tych celowe jest wprowadzić skrócone oznaczenia: $k\varphi = a$, $m\varphi = a_m$, $n\varphi = \beta$. Oznaczenia te przyjęte zostały poniżej przy rozpatrywaniu ustrojów ciągłych.

4. Ustroje ciągłe

Wieloprzęsłowe ustroje ciągłe (rys. 7a) są w odróżnieniu od ustrojów jednoprzęsłowych statycznie niewyznaczalne. Jeżeli podpory wewnętrzne posiadają swobodę przesuwania się w kierunku radialnym (np. przy podporach-wahaczach), niewiadomymi wielkościami będą momenty podporowe w dźwigarze zewnętrznym i wewnętrznym. Przedstawione są one na rys. 7b dla ustroju trójprzęsłowego.



Rys. 7

Dla uproszczenia wzorów rzeczą celową wydaje się przyjąć za nadliczbowe nie momenty podporowe, lecz pewne wielkości statyczne dające prostsze wyrażenia na momenty i przemieszczenia. Dla podpory B przyjmujemy dwie nadliczbowe X_I i X_{II} będące układami momentów podporowych, przy czym

$$(4.1) \begin{cases} \text{stan } X_I = 1 & \text{oznacza } M_{zB} = 1 & \text{i jednocześnie } M_{wB} = -1, \\ \text{stan } X_{II} = 1 & \text{oznacza } M_{zB} = \frac{r_z}{r_0} & \text{i jednocześnie } M_{wB} = -\frac{r_w}{r_0}. \end{cases}$$

Podobnie na podporze C:

$$(4.2) \begin{cases} \text{stan } X_{II} = 1 & \text{oznacza } M_{zC} = 1, & M_{wC} = -1, \\ \text{stan } X_2 = 1 & \text{oznacza } M_{zC} = \frac{r_z}{r_0}, & M_{wC} = -\frac{r_w}{r_0}. \end{cases}$$

Tak np. w przęśle 2 stanami tymi wywołane zostają następujące momenty w dźwigarze zewnętrznym (oznaczenia według rys. 7b):

$$(4.3) \quad \text{od } X_I = 1 \quad M_z = \frac{a'}{\beta_2}, \quad \text{od } X_{II} = 1 \quad M_z = \frac{a}{\beta_2},$$

$$(4.4) \quad \text{od } X_1 = 1 \quad M_z = \frac{r_z \sin a'}{r_0 \sin \beta_2}, \quad \text{od } X_2 = 1 \quad M_z = \frac{r_z \sin a}{r_0 \sin \beta_2}.$$

Wyrażenia są proste, bowiem układy X_I , X_{II} i X_1 , X_2 przedstawiają obciążenia posiadające te same właściwości, co rozpatrzone w p. 3 obciążenia składowe (1) lub (2). Wzory (4.4) wynikają z p. 2, ponieważ już tam stwierdzono, że parom momentów działających w dźwigarze zewnętrznym i wewnętrznym na jednym końcu ustroju, proporcjonalnym do r_z i $-r_w$, przyporządkowane są na drugim końcu siły (reakcje) równe, lecz przeciwnie skierowane, a momenty przęsłowe od tych sił wyznacza się tak jak poprzednio.

Odpowiednie wartości dla dźwigara wewnętrznego otrzymujemy zmieniając w (4.3) tylko znak, natomiast w (4.4) podstawiając r_w zamiast r_z .

Obciążenie siłą P działającą w przęśle 2 w odległości r od środka krzywizny wywołuje w tym przęśle momenty

$$(4.5) \quad \begin{cases} M_{z0} = -\frac{Pr_w r_z}{b} \frac{a'_m}{\beta_2} a + \frac{Pr r_z}{b} \frac{\sin a'_m}{\sin \beta_2} \sin a & \text{dla } a < a_m, \\ M_{z0} = -\frac{Pr_w r_z}{b} \frac{a_m}{\beta_2} a' + \frac{Pr r_z}{b} \frac{\sin a_m}{\sin \beta_2} \sin a' & \text{dla } a > a_m. \end{cases}$$

Odpowiednie wyrażenie dla M_{w0} otrzymamy zmieniając znak w pierwszych wyrazach po prawej stronie wyrażen (4.5) i zmieniając w drugich wyrazach r_z na $-r_w$.

Nadliczbowe X_I , X_1 , X_{II} i X_2 wyznaczymy z układu równań wyrażających warunek ciągłości odkształceń²:

$$(4.6) \quad \begin{cases} X_I \delta_{I1} + X_1 \delta_{11} + X_{II} \delta_{II1} + X_2 \delta_{21} + \delta_{10} = 0, \\ X_I \delta_{I2} + X_1 \delta_{12} + X_{II} \delta_{II2} + X_2 \delta_{22} + \delta_{20} = 0, \\ X_I \delta_{I3} + X_1 \delta_{13} + X_{II} \delta_{II3} + X_2 \delta_{23} + \delta_{30} = 0, \\ X_I \delta_{I4} + X_1 \delta_{14} + X_{II} \delta_{II4} + X_2 \delta_{24} + \delta_{40} = 0. \end{cases}$$

² Pierwsze równanie oznacza, że praca nadliczbowych X_I jest równa zeru, natomiast drugie oznacza znikanie prac układu niewiadomych X_1 . Te dwa równania razem wzięte stanowią warunek ciągłości odkształceń na podporze B, ponieważ tylko w takim przypadku możliwe jest spełnienie ich obu jednocześnie. Analogiczne znaczenie mają dwa pozostałe równania odnoszące się do podpory C.

Współczynniki δ_{ii} , δ_{ik} i δ_{i0} wyznacza się z ogólnych równań

$$(4.7) \quad \delta_{ii} = \int \frac{M_i^2}{EJ} ds, \quad \delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds, \quad \delta_{i0} = \int \frac{M_i M_0}{EJ} ds,$$

gdzie przez M_i , M_k i M_0 oznaczono momenty w dźwigarze zewnętrznym i wewnętrznym, wywołane jednostkowymi nadliczbowymi X_i i X_k oraz obciążeniem zewnętrznym.

Podstawiając do wzorów (4.7) odpowiednie wyrażenia według (4.3), (4.4) i (4.5) dla obu dźwigarów i obliczając całki typu

$$\int a^2 da, \quad \int a(\beta - a) da, \quad \int a \sin a da, \quad \int (\beta - a) \sin a da, \\ \int a \sin(\beta - a) da, \quad \int \sin^2 a da, \quad \int \sin a \sin(\beta - a) da,$$

otrzymujemy współczynniki układu równań (4.6), z których typowe przytoczone są poniżej (δ_{i0} i δ_{i0} obliczono dla obciążenia siłą P pierwszego przęsła):

$$\delta_{II} = \frac{1}{3} (A_1 \beta_1 + A_2 \beta_2), \quad \delta_{I\text{II}} = \frac{1}{6} A_2 \beta_2 = \delta_{\text{III}},$$

$$\delta_{11} = \frac{C_1}{r_0^2 \sin^2 \beta_1} \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\sin 2\beta_1}{4} \right) + \frac{C_2}{r_0^2 \sin^2 \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{2} - \frac{\sin 2\beta_2}{4} \right),$$

$$\delta_{12} = \frac{C_2}{4 r_0^2 \sin \beta_2} [(1 - \cos 2\beta_2) - \text{ctg } \beta_2 (2\beta_2 - \sin 2\beta_2)] = \delta_{21},$$

$$\delta_{11} = \frac{B_1}{r_0 \beta_1} (1 - \beta_1 \text{ctg } \beta_1) + \frac{B_2}{r_0 \beta_2} (1 - \beta_2 \text{ctg } \beta_2) = \delta_{11},$$

$$\delta_{\text{III}} = \frac{B_2}{r_0 \beta_2 \sin \beta_2} (\beta_2 - \sin \beta_2) = \delta_{\text{III}} = \delta_{12} = \delta_{21},$$

$$\delta_{i0} = \frac{Pr B_1}{b \beta_1 \sin \beta_1} [\sin \alpha' (\sin \alpha - a \cos \alpha) + \sin \alpha (\beta_1 - \sin \alpha' - a \cos \alpha')] - \\ - \frac{Pr_w r_z A_1}{6 b} \left(a \beta_1 - \frac{\alpha^3}{\beta_1} \right),$$

$$\delta_{i0} = \frac{Pr C_1}{b r_0 \sin^2 \beta_1} \left\{ \sin \alpha' \left(\frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4} \right) + \sin \alpha \left[\frac{\sin \beta_1}{4} (1 - \cos 2\alpha') - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \beta_1 \left(\frac{\alpha'}{2} - \frac{\sin 2\alpha'}{4} \right) \right] \right\} - \frac{Pr_w r_z B_1}{b r_0 \beta_1 \sin \beta_1} [a' (\sin \alpha - a \cos \alpha) + \\ + a (\alpha' \cos \alpha + \sin \alpha - \sin \beta_1)],$$

gdzie dla krótkości zapisu przyjęto $a = a_m$ i $a' = a'_m$, a ponadto

$$A_\nu = \frac{r_z}{E J_{z\nu}} + \frac{r_w}{E J_{w\nu}}, \quad B_\nu = \frac{r_z^2}{E J_{z\nu}} + \frac{r_w^2}{E J_{w\nu}}, \quad C_\nu = \frac{r_z^3}{E J_{z\nu}} + \frac{r_w^3}{E J_{w\nu}}.$$

Tutaj $J_{z\nu}$ i $J_{w\nu}$ są momentami bezwładności dźwigara zewnętrznego i wewnętrznego w prześle ν ($\nu = 1, 2, 3$).

Analogicznie określa się $\delta_{\text{II II}}$, δ_{22} , $\delta_{\text{II}2} = \delta_{2\text{II}}$ oraz $\delta_{\text{II}0}$ i δ_{20} .

Między momentami podporowymi wywołanymi obciążeniem zewnętrznym i przyjętymi nadliczbowymi istnieją proste zależności, np. między M_{zB} , M_{wB} i X_I , X_1 (na podporze B) zachodzi związek

$$(4.8) \quad M_{zB} = X_I + \frac{r_z}{r_0} X_1, \quad M_{wB} = -X_I - \frac{r_w}{r_0} X_1,$$

albo inaczej

$$(4.9) \quad X_I = -\frac{1}{b} (M_{zB} r_w + M_{wB} r_z), \quad X_1 = \frac{r_0}{b} (M_{zB} + M_{wB}).$$

Układ równań (4.6) należy obliczyć z dużą dokładnością; będzie można zmniejszyć dokładność rachunków przy jego rozwiązaniu, jeżeli nadliczbowe X_I , X_1 , X_{II} i X_2 wyrazimy momentami podporowymi według wzorów (4.9) i te ostatnie wyznaczmy bezpośrednio z nowego układu równań.

Obliczenie jest, jak widać, dosyć żmudne. Rozwiązanie ustroju trójprzęsłowego o jednakowych prześłach przy zastosowaniu całkowania numerycznego podał Hartmann, [1]. W jego rozwiązaniu podobnie jak w naszym wpływ odkształcenia przepón nie został uwzględniony.

5. Uwagi końcowe

Ze względów konstrukcyjnych mosty zakrzywione o przekroju otwartym wykonywane bywają z reguły jako pełnościennie o płynnym zakrzywieniu. Przepóny (w postaci ram utworzonych przez poprzecznice i żebrapionowe) umieszczane są w pewnych odstępach. Jako schemat obliczeniowy właściwszym byłby zatem schemat wieloboczny, w którym λ_z i λ_w oznaczają odstęp między poprzecznicami, mierzone po obwodzie zewnętrznym lub wewnętrznym. Dla prostoty można jednak posługiwać się układem o płynnym zakrzywieniu, w którym czyni się założenie, że przepóny rozłożone są na długości mostu w sposób ciągły.

Należy dalej zwrócić uwagę na to, że dla uniknięcia niekorzystnego obciążenia zakrzywionego środniczka powinien on być dostatecznie gęsto usztywniony żebrami pionowymi albo powinien posiadać kształt linii łamanej.

Z przebiegu linii wpływowych dla ustroju jednoprzęsłowego³ wynika, że dźwigar wewnętrzny zostaje odciążony kosztem przeciążenia dźwi-

³ Por. [1], s. 406 i [4], s. 54-56.

gara zewnętrznego. Rozwiązanie konstrukcyjne w postaci mostu zakrzywionego może być ekonomiczne nawet przy silnym zakrzywieniu (małe r), jeżeli strzałka łuku mierzona od cięciwy łączącej środki podpór jednego przęsła nie przekracza połowy szerokości mostu.

W rozpatrzonych przypadkach pary punktów podporowych leżały na prostych przechodzących przez środek krzywizny. Inne przypadki podparcia są bardziej złożone.

Literatura cytowana w tekście

- [1] F. Hartmann, *Stahlbrücken*, F. Deuticke, Wiedeń 1952.
- [2] H. Gottfeld, *Die Berechnung räumlich gekrümmter Stahlbrücken*, Bau-technik 1932, s. 715.
- [3] H. Gottfeld, *Einflusslinien für räumlich gekrümmte Stahlbrücken*, Stahlbau, 1933, s. 57.
- [4] A. A. Umanski, *Prostranstwiennyje sistemy*, Strojizdat, Moskwa 1948.

Резюме

К РАСЧЕТУ КРИВОЛИНЕЙНЫХ МОСТОВ ОТКРЫТОГО СЕЧЕНИЯ

Представлен упрощенный вывод формул для изгибающих моментов и поперечных сил во внешней и внутренней балках криволинейного моста открытого сечения, путем разделения любой нагрузки силой P на две нагрузки: (1) силой P , проходящей через центр кривизны, и (2) моментом $M = Pr$, действующими в радиальной плоскости, где r — расстояние силы от центра кривизны.

При расчете многопролетной системы вводятся на опорах добавочные системы моментов.

Summary

ON THE COMPUTATION OF CURVED BRIDGES WITH OPEN CROSS-SECTION

In this paper, a simplified derivation of equation for bending moments and shearing forces is proposed for the outer and the inner girder of a curved bridge with open cross-section, by resolving the load with an arbitrary force P into two component loads: (1) the load by the force P passing through the centre of curvature and, (2), the load by the moment $M = Pr$ acting in the radial plane, where r is the distance of the force from the centre of curvature.

In the solution for a multi-span system, additional moments are introduced at the supports.

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 maja 1956 r.