

VÁCLAV VODIČKA

ZGINANIE PŁYTY W KSZTAŁCIE PIERŚCIENIA KOŁOWEGO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LX

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Ogólne założenia	5
1.1. Rozwiązanie podstawowego równania różniczkowego	5
1.2. Specjalny typ obciążenia	6
2. Płyta pierścieniowa podparta na brzegu zewnętrznym	7
3. Płyta podparta na brzegu wewnętrznym	11

1. Ogólne założenia

1.1. Rozwiązanie podstawowego równania różniczkowego. Płaska płyta pierścieniowa z brzegami $r=b$, $r=a$ ($b < a$) o jednakowej małej grubości h zbudowana jest z materiału o stałych sprężystych E, μ . Poddana jest ona symetrycznie rozłożonemu obciążeniu. Przyjmijmy

$$(1.1) \quad H = \frac{6}{\pi} \frac{1 - \mu^2}{E h^3}, \quad K = \frac{2(1 - \mu^2)}{E h}.$$

Oznaczmy przez $Q(r)$ całkowitą zewnętrzną siłę działającą na tę część płyty, która znajduje się wewnątrz współśrodkowego koła o promieniu r .

Wtedy nachylenie $\varphi = \varphi(r)$ odkształconej spełnia dobrze znane równanie

$$(1.2) \quad \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2} \varphi = H \frac{Q(r)}{r}.$$

Ugięcie $y(r)$, radialne i obwodowe naprężenia $\sigma(r)$ oraz $\tau(r)$ na górnej powierzchni wyrażone są za pomocą wzorów

$$(1.3) \quad \frac{dy(r)}{dr} = \varphi(r), \quad \sigma(r) = \frac{1}{K} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right), \quad \tau(r) = \frac{1}{K} \left(\mu \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right).$$

Ogólne rozwiązanie $\varphi(r)$ (1.2) jest $\varphi(r) = B/r + Cr + \psi(r)$; B i C są stałymi całkowania, $\psi(r)$ oznacza całkę szczególną (1.2). Biorąc pod uwagę powyższe łatwo znajdziemy na podstawie (1.3)

$$(1.4) \quad \begin{cases} y(r) = A + B \ln r + \frac{1}{2} C r^2 + \Psi(r), \\ r\varphi(r) = B + C r^2 + r\psi(r), \\ K r^2 \sigma(r) = -(1 - \mu) B + (1 + \mu) C r^2 + R(r), \\ K r^3 \tau(r) = (1 - \mu) B + (1 + \mu) C r^2 + T(r). \end{cases}$$

Wyrażenia

$$(1.4.1) \quad \Psi(r) = \int \psi(r) dr, \quad R(r) = r^2 \left(\frac{d\psi}{dr} + \mu \frac{\psi}{r} \right), \quad T(r) = r^2 \left(\mu \frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r} \right)$$

zależą od rodzaju siły zewnętrznej $Q(r)$, stałe A , B i C wyznacza się z warunków brzegowych.

2. Płyta pierścieniowa podparta na brzegu zewnętrznym

Odróżniamy tutaj trzy części płyty oznaczone 1, 2 i 3 jak wskazano na rys. 1. W każdej z tych części $Q(r)$ ma postać (1.5) i całłość można przedstawić w sposób następujący:

$$(2.1) \begin{cases} \text{dla części 1 } b \leq r \leq c, & Q(r) = 0, & \kappa_1 = \lambda_1 = 0, \\ \text{dla części 2 } c \leq r \leq d, & Q(r) = \pi(r^2 - c^2)q, & \kappa_2 = -c^2q, \quad \lambda_2 = q, \\ \text{dla części 3 } d \leq r \leq a, & Q(r) = \pi(d^2 - c^2)q, & \kappa_3 = (d^2 - c^2)q, \quad \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Stąd zgodnie ze wzorem (1.4) dla $i = 1, 2, 3$ mamy

$$(2.2) \begin{cases} y_i(r) = A_i + B_i \ln r + \frac{1}{2} C_i r^2 + \Psi_i(r), \\ r \varphi_i(r) = B_i + C_i r^2 + r \psi_i(r), \\ K r^3 \sigma_i(r) = -(1 - \mu) B_i + (1 + \mu) C_i r^2 + R_i(r), \\ K r^2 \tau_i(r) = (1 - \mu) B_i + (1 + \mu) C_i r^2 + T_i(r). \end{cases}$$

Wyrażenia $\Psi_i(r)$, $\psi_i(r)$, $R_i(r)$ i $T_i(r)$ mogą być obliczone na podstawie wzoru (1.6) i (1.6.1) dla odpowiednich wartości κ_i i λ_i ze wzoru (2.1).

Stałe A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$) odnajdziemy z warunków

$$(2.3) \begin{cases} y_1(c) = y_2(c), & y_2(d) = y_3(d), & y_3(a) = 0, \\ \varphi_1(c) = \varphi_2(c), & \varphi_2(d) = \varphi_3(d), \\ \sigma_1(b) = 0, & \sigma_1(c) = \sigma_2(c), & \sigma_2(d) = \sigma_3(d), & \sigma_3(a) = 0. \end{cases}$$

Te warunki przy uwzględnieniu (2.2) dają następujący układ równań:

$$(2.3.1) \begin{cases} A_2 - A_1 + (B_2 - B_1) \ln c + \frac{1}{2} (C_2 - C_1) c^2 + \Psi_2(c) = 0, \\ A_3 - A_2 + (B_3 - B_2) \ln d + \frac{1}{2} (C_3 - C_2) d^2 + \Psi_3(d) - \Psi_2(d) = 0, \\ B_2 - B_1 + (C_2 - C_1) c^2 + c \psi_2(c) = 0, \\ B_3 - B_2 + (C_3 - C_2) d^2 + d [\psi_3(d) - \psi_2(d)] = 0, \\ -(1 - \mu) (B_2 - B_1) + (1 + \mu) (C_2 - C_1) c^2 + R_2(c) = 0, \\ -(1 - \mu) (B_3 - B_2) + (1 + \mu) (C_3 - C_2) d^2 + R_3(d) - R_2(d) = 0, \\ -(1 - \mu) B_1 + (1 + \mu) C_1 b^2 = 0, \\ A_3 + B_3 \lg a + \frac{1}{2} C_3 a^2 + \Psi_3(a) = 0, \\ -(1 - \mu) B_3 + (1 + \mu) C_3 a^2 + R_3(a) = 0. \end{cases}$$

Stosując wzory (1.6) i (1.6.1) możemy zastąpić układ (2.3.1) przez układ prostszy

1.2. Specjalny typ obciążenia. Niżej podane rozważania opierają się na założeniu, że

$$(1.5) \quad Q(r) = \pi(\kappa + \lambda r^2),$$

gdzie κ, λ są stałymi. W tym przypadku z łatwością możemy znaleźć szczególne rozwiązanie

$$\psi(r) = \frac{\pi H r}{8} \bar{\psi}(r), \quad \bar{\psi}(r) = \lambda r^2 + 4\kappa \ln r$$

równania (1.2), a wzory (1.4.1) od razu dają

$$\Psi(r) = \frac{\pi H r^2}{32} (-4\kappa + \lambda r^2 + 8\kappa \ln r),$$

$$R(r) = \frac{\pi H r^2}{8} [4\kappa + (3 + \mu)\lambda r^2 + 4(1 + \mu)\kappa \ln r],$$

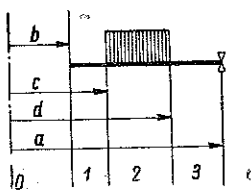
$$T(r) = \frac{\pi H r^2}{8} [4\mu\kappa + (1 + 3\mu)\lambda r^2 + 4(1 + \mu)\kappa \ln r].$$

W ten sposób w szczególnym przypadku (1.5) musimy podstawić do wzoru (1.4)

$$(1.6) \quad \begin{cases} \Psi(r) = \frac{\pi H r^2}{32} \bar{\Psi}(r), & \psi(r) = \frac{\pi H r}{8} \bar{\psi}(r), \\ R(r) = \frac{\pi H r^2}{8} \bar{R}(r), & T(r) = \frac{\pi H r^2}{8} \bar{T}(r), \end{cases}$$

gdzie

$$(1.6.1) \quad \begin{cases} \bar{\Psi}(r) = -4\kappa + \lambda r^2 + 8\kappa \ln r, \\ \bar{\psi}(r) = \lambda r^2 + 4\kappa \ln r, \\ \bar{R}(r) = 4\kappa + (3 + \mu)\lambda r^2 + 4(1 + \mu)\kappa \ln r, \\ \bar{T}(r) = 4\mu\kappa + (1 + 3\mu)\lambda r^2 + 4(1 + \mu)\kappa \ln r. \end{cases}$$



Rys. 1

Przejdziemy teraz do sprawy zginania pierścieniowej płyty poddanej działaniu jednostajnego obciążenia o intensywności q na swej środkowej części i podpartej swobodnie wzdłuż swego zewnętrznego brzegu $r = a$ (rys. 1). Podamy również rozwiązanie dla płyty podpartej wzdłuż wewnętrznego brzegu. Niezależnie od bezpośredniego znaczenia technicznego obydwu przypadki mogą służyć za teoretyczną podstawę dla obszernej grupy zagadnień odnoszących się do zginania płyt.

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad & A_1 - A_2 = \frac{\pi H c^2}{32} \{ \bar{\Psi}_2(c) - (1 - \mu) \bar{\psi}_2(c) - \bar{R}_2(c) - 2 [(1 + \mu) \bar{\psi}_2(c) - \bar{R}_2(c)] \ln c \}, \\
 & A_2 - A_3 = \frac{\pi H d^2}{32} \{ -\bar{\Psi}_2(d) + \bar{\Psi}_3(d) + \bar{R}_2(d) - \bar{R}_3(d) + \\
 & \quad + (1 - \mu) [\bar{\psi}_2(d) - \bar{\psi}_3(d)] - 2 [\bar{R}_2(d) - \bar{R}_3(d) + \\
 & \quad + (1 + \mu) [-\bar{\psi}_2(d) + \bar{\psi}_3(d)] \} \ln d \}, \\
 & B_1 - B_2 = \frac{\pi H c^2}{16} [(1 + \mu) \bar{\psi}_2(c) - \bar{R}_2(c)], \\
 & B_2 - B_3 = \frac{\pi H d^2}{16} \{ \bar{R}_2(d) - \bar{R}_3(d) + (1 + \mu) [-\bar{\psi}_2(d) + \bar{\psi}_3(d)] \}, \\
 & C_1 - C_2 = \frac{\pi H}{16} [(1 - \mu) \bar{\psi}_2(c) + \bar{R}_2(c)], \\
 & C_2 - C_3 = \frac{\pi H}{16} \{ -\bar{R}_2(d) + \bar{R}_3(d) + (1 - \mu) [-\bar{\psi}_2(d) + \bar{\psi}_3(d)] \}, \\
 & (1 - \mu) (B_1 - \beta^2 B_3) = \frac{\pi H b^2}{16} \{ -2 \bar{R}_3(a) + (1 + \mu) [\bar{R}_2(c) - \bar{R}_2(d) + \\
 & \quad + \bar{R}_3(d)] + (1 - \mu^2) [\bar{\psi}_2(c) - \bar{\psi}_2(d) + \bar{\psi}_3(d)] \}, \\
 & (1 + \mu) (\beta^2 C_1 - C_3) = \frac{\pi H}{16} \{ 2 \bar{R}_3(a) + (1 - \mu) [-\gamma^2 \bar{R}_2(c) + \delta^2 \bar{R}_2(d) - \\
 & \quad - \delta^2 \bar{R}_3(d)] + (1 - \mu^2) [\gamma^2 \bar{\psi}_2(c) - \delta^2 \bar{\psi}_2(d) + \delta^2 \bar{\psi}_3(d)] \} \\
 & A_3 + B_3 \ln a + \frac{1}{2} C_3 a^2 + \Psi_3(a) = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.4.1) \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad \gamma = \frac{c}{a}, \quad \delta = \frac{d}{a}.$$

Wprowadzając następną bezwymiarową wielkość

$$(2.5) \quad q = \frac{r}{a}$$

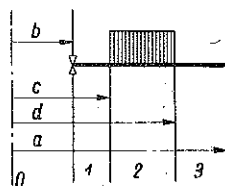
i biorąc pod uwagę (1.6), (1.6.1) i (2.1) otrzymujemy równania (2.4) w postaci

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad & A_1 - A_2 = \frac{\pi H a^4}{32} \gamma^4 q (5 - 4 \ln c), \quad A_2 - A_3 = -\frac{\pi H a^4}{32} \delta^4 q (5 - 4 \ln d), \\
 & B_1 - B_2 = \frac{\pi H a^4}{8} \gamma^4 q, \quad B_2 - B_3 = -\frac{\pi H a^4}{8} \delta^4 q, \\
 & C_1 - C_2 = -\frac{\pi H a^2}{2} \gamma^2 q \ln c, \quad C_2 - C_3 = \frac{\pi H a^2}{2} \delta^2 q \ln d, \\
 & B_1 - \beta^2 B_3 = \frac{\pi H a^4}{2(1 - \mu)} \beta^2 q [\gamma^2 - \delta^2 + (1 + \mu) (\delta^2 \ln \delta - \gamma^2 \ln \gamma)], \\
 & \beta^2 C_1 - C_3 = \frac{\pi H a^2}{8(1 + \mu)} q (\delta^2 - \gamma^2) [4 - (1 - \mu) (\gamma^2 + \delta^2) + 4(1 + \mu) \ln a], \\
 & 2 A_3 + 2 B_3 \ln a + C_3 a^2 = \frac{\pi H a^4}{4} q (\delta^2 - \gamma^2) (1 - 2 \ln a).
 \end{aligned}$$

Wzory (2.9.1) - (2.13) całkowicie rozwiązują nasze pierwsze zagadnienie, mianowicie zagadnienie zginania płyty w kształcie pierścienia kołowego, obciążonej równomiernie w części współśrodkowej i swobodnie podpartej wzdłuż zewnętrznego brzegu.

3. Płyta podparta na brzegu wewnętrznym

Ten przypadek przedstawiony jest na rys. 2; można go traktować w ten sam sposób jak w p. 2. Dlatego nie będziemy powtarzali obliczeń, a podamy jedynie otrzymane wzory dla nachyleń, ugięć oraz obu naprężeń w poszczególnych częściach płyty:



Rys. 2

$$(3.1) \left\{ \begin{aligned} y_i(r) &= \frac{a^3 q}{64 D (1 - \mu^2) (1 - \beta^2)} [\tilde{Y}_3(\beta, \gamma, \delta; \varrho) - \tilde{e}_i \tilde{Y}(\beta, \gamma; \varrho) + \\ &\quad + \tilde{\omega}_i \tilde{Y}(\beta, \delta; \varrho)] \quad (i = 1, 2, 3), \\ \tilde{Y}_3(\beta, \gamma, \delta; \varrho) &= \tilde{\Gamma}_1 + 2 \tilde{\Gamma}_2 [(1 - \mu) \varrho^2 + 2(1 + \mu) \ln \varrho]; \\ \tilde{\Gamma}_1 &= (\delta^2 - \gamma^2) \{-4(1 - \mu) \beta^2 [1 + \mu - (3 + \mu) \beta^2] + (1 - \mu) [5(1 + \mu) - \\ &\quad - (7 + 3\mu) \beta^2] (\gamma^2 + \delta^2) + 4(1 + \mu) \beta^2 [2(3 - \mu) - (1 - \mu) (\gamma^2 + \delta^2) + \\ &\quad + 4(1 + \mu) \ln \beta] \ln \beta\} - 4(1 + \mu) \{2\beta^2 [1 - \mu + 2(1 + \mu) \ln \beta] (\delta^2 \ln \delta - \\ &\quad - \gamma^2 \ln \gamma) + (1 - \mu) (1 - \beta^2) (\delta^4 \ln \delta - \gamma^4 \ln \gamma)\}, \\ \tilde{\Gamma}_2 &= (\delta^2 - \gamma^2) \{-4\beta^2 + (1 - \mu) (\gamma^2 + \delta^2) - 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta\} + \\ &\quad + 4(1 + \mu) \beta^2 (\delta^2 \ln \delta - \gamma^2 \ln \gamma), \\ \tilde{Y}(\beta, \xi; \varrho) &= (1 - \mu^2) (1 - \beta^2) \left[(\varrho^2 - \xi^2) (\varrho^2 + 5\xi^2) - 4\xi^2 (2\varrho^2 + \xi^2) \ln \frac{\varrho}{\xi} \right]. \end{aligned} \right.$$

$$(3.2) \left\{ \begin{aligned} \varphi_i(r) &= \frac{a^3 q}{16 D (1 - \mu^2) (1 - \beta^2) \varrho} [\tilde{\Phi}_3(\beta, \gamma, \delta; \varrho) - \tilde{e}_i \tilde{\Phi}(\beta, \gamma; \varrho) + \\ &\quad + \tilde{\omega}_i \tilde{\Phi}(\beta, \delta; \varrho)] \quad (i = 1, 2, 3), \\ \tilde{\Phi}_3(\beta, \gamma, \delta; \varrho) &= \tilde{\Gamma}_2 [1 + \mu + (1 - \mu) \varrho^2], \\ \tilde{\Phi}(\beta, \xi; \varrho) &= (1 - \mu^2) (1 - \beta^2) \left(\varrho^4 - \xi^4 - 4\xi^2 \varrho^2 \ln \frac{\varrho}{\xi} \right), \end{aligned} \right.$$

$$(3.3) \left\{ \begin{aligned} \sigma_i(r) &= \frac{3 a^2 q}{8 (1 - \mu^2) (1 - \beta^2) h^2 \varrho^2} [\tilde{S}_3(\beta, \gamma, \delta; \varrho) - \tilde{e}_i \tilde{S}(\beta, \gamma; \varrho) + \\ &\quad + \tilde{\omega}_i \tilde{S}(\beta, \delta; \varrho)] \quad (i = 1, 2, 3), \\ \tilde{S}_3(\beta, \gamma, \delta; \varrho) &= -(1 - \mu^2) \tilde{\Gamma}_2 (1 - \varrho^2), \\ \tilde{S}(\beta, \xi; \varrho) &= (1 - \mu^2) (1 - \beta^2) \left\{ (\varrho^2 - \xi^2) [(3 + \mu) \varrho^2 - (1 - \mu) \xi^2] - \right. \\ &\quad \left. - 4(1 + \mu) \xi^2 \varrho^2 \ln \frac{\varrho}{\xi} \right\}. \end{aligned} \right.$$

