

ZDZISŁAW MARCINIAK

ANALIZA STATECZNOŚCI
CIENKOŚCIENNEJ POWŁOKI WALCOWEJ
PODDANEJ ROZCIĄGANIU W STANIE PLASTYCZNYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CX

Jedną z form utraty stateczności, występującą przy rozciąganiu, jest zjawisko nierównomiernego rozkładu odkształceń wzdłuż długości odkształconego plastycznie elementu. W przypadku jednoosiowego rozciągania prętów zjawisko to uwiadcza się w postaci powstawania szyjki (przewężenia) w rozciąganej próbce. Przy odkształcaniu cienkościennych rur zjawisko to może przybrać postać miejscowego przewężenia lub wybrzuszenia zależnie od wielkości wewnętrznego ciśnienia. Zjawisko to badali W. Leukford i E. Saibel przyjmując potęgową krzywą wzmocnienia, [2].

W niniejszej pracy zanalizowano warunki, w których powstać może wspomniana wyżej forma utraty stateczności cienkościennej walcowej powłoki, poddanej działaniu siły osiowej i ciśnienia w oparciu o rzeczywistą krzywą wzmocnienia, daną w postaci wykresu. Rozpatrzmy w tym celu walcowy, cienkościenny płaszcz naczynia (rys. 1) o średnicy D i grubości ścianki g poddany ciśnieniu wewnętrznemu p i osiowej sile P . Naprężenie obwodowe σ_{θ} i osiowe σ_z w płaszczu zbiornika wyniosą wówczas:

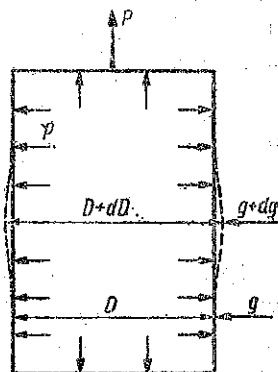
$$(1) \quad \sigma_{\theta} = \frac{pD}{2g}, \quad \sigma_z = \frac{P}{\pi Dg} + \frac{pD}{4g}$$

Jeżeli pominąć naprężenie w kierunku promieniowym, to naprężenia σ_{θ} i σ_z w czasie odkształcenia plastycznego powłoki muszą spełniać warunek plastyczności, który w tym przypadku przyjmie postać

$$(2) \quad \sigma_{\theta}^2 - \sigma_{\theta} \sigma_z + \sigma_z^2 = Q^2,$$

gdzie Q jest granicą plastyczności materiału powłoki przy jednoosiowym stanie naprężeń.

Wyobraźmy sobie, że w pewnym miejscu walcowej powłoki powstało niezmiernie małe wybrzuszenie przedstawione na rys. 1 liniami przerywanymi. Średnica powłoki w tym miejscu wzrasta o dD , czemu towa-



Rys. 1

rzyszy odpowiednio zmiana grubości dg . Przyrosty naprężeń $d\sigma_z$ i $d\sigma_\theta$ wywołane miejscową zmianą wymiarów D i g wyznaczmy różniczkując równania (1) i przyjmując wartości p i P za stałe:

$$(3) \quad d\sigma_\theta = \frac{pD}{2g} \left(\frac{dD}{D} - \frac{dg}{g} \right), \quad d\sigma_z = -\frac{P}{\pi Dg} \left(\frac{dD}{D} + \frac{dg}{g} \right) + \frac{pD}{4g} \left(\frac{dD}{D} - \frac{dg}{g} \right).$$

Jeżeli przyjąć oznaczenia

$$(4) \quad \frac{dD}{D} = d\varepsilon_\theta, \quad \frac{dg}{g} = d\varepsilon_g,$$

gdzie $d\varepsilon_\theta$ i $d\varepsilon_g$ są odpowiednio przyrostami odkształcenia obwodowego i odkształcenia w kierunku grubości, spowodowanymi miejscowym wybrzuszeniem powłoki, oraz uwzględnić związki (1), to równania (3) można napisać w postaci

$$(5) \quad \begin{cases} d\sigma_\theta = \sigma_\theta (d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_g), \\ d\sigma_z = -\left(\sigma_z - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) (d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_g) + \frac{1}{2} \sigma_\theta (d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_g) = \\ = (\sigma_\theta - \sigma_z) d\varepsilon_\theta - \sigma_z d\varepsilon_g. \end{cases}$$

Zmiana naprężeń σ_z i σ_θ w miejscu wybrzuszenia powoduje zmianę wartości lewej strony równania plastyczności (2), będącej funkcją tych naprężeń. Jednocześnie jednak zmienia się i prawa strona równania, gdyż granica plastyczności Q ulega zwiększeniu wskutek zjawiska wzmocnienia. O tym czy rozpatrywane miejscowe wybrzuszenie zostanie w następnej chwili zlikwidowane, czy też będzie się dalej powiększać decydują wielkości przyrostu lewej i prawej strony równania (2), określone wybrzuszeniem. Jeżeli bowiem przyrost zastępczego naprężenia stanowiącego lewą stronę równania (2) będzie mniejszy od przyrostu granicy plastyczności, wchodzącej do prawej strony równania, to materiał przestanie się w miejscu wybrzuszenia odkształcać plastycznie, a powstały zarodek wybrzuszenia zostanie zlikwidowany. Jeżeli natomiast przyrost lewej strony równania (2) będzie większy od przyrostu strony prawej, wówczas z warunku plastyczności dla miejsca wybrzuszenia wynika, że nastąpi odciążenie miejsc sąsiednich, które wejdą w stan sprężysty i przestaną się dalej odkształcać plastycznie. A więc w tym przypadku nierównomierność odkształcenia będzie wzrastała z biegiem czasu.

Ogólny warunek stateczności można więc napisać w postaci

$$d(\sigma_z^2 - \sigma_z \sigma_\theta + \sigma_\theta^2) \leq d(Q^2)$$

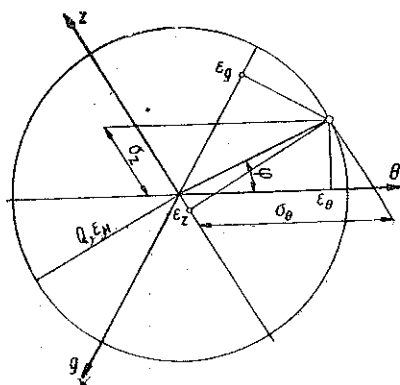
lub po zróżniczkowaniu w postaci

$$(2\sigma_\theta - \sigma_z) d\sigma_\theta + (2\sigma_z - \sigma_\theta) d\sigma_z \leq 2QdQ.$$

Podstawiając wartości przyrostów naprężeń z równania (5) otrzymamy po uporządkowaniu nierówność

$$(6) \quad \frac{\sigma_{\theta}^2 + 2\sigma_z\sigma_{\theta} - 2\sigma_z^2}{2Q^2} d\varepsilon_{\theta} - d\varepsilon_g \leq \frac{dQ}{Q}$$

W celu zilustrowania na wykresie powyższego warunku przyjmijmy układ trzech osi współrzędnych θ , z , g tworzących ze sobą kąty 120° (rys. 2). Płaski stan naprężeń zinterpretować możemy w tym układzie za pomocą punktu, którego współrzędne w ukośno-kątnym układzie osi θ i z odpowiadają naprężeniom σ_z i σ_{θ} . Warunek plastyczności (2) przedstawić można wówczas w postaci koła o promieniu Q . Korzystając z tego wykresu dowolny stan naprężeń spełniający warunek plastyczności (a więc reprezentowany na wykresie przez punkt leżący na okręgu koła) można wyrazić we współrzędnych Q , φ , gdzie φ jest kątem, który tworzy promień danego punktu z osią θ . Otrzymamy wówczas



Rys. 2

$$(7) \quad \sigma_{\theta} = Q \left(\cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi \right), \quad \sigma_z = \frac{2Q}{\sqrt{3}} \sin \varphi$$

Z warunku proporcjonalności odpowiednich składowych dewiatora naprężeń i składowych tensora przyrostów odkształceń plastycznych wynikają związki

$$(8) \quad \frac{d\varepsilon_{\theta}}{d\varepsilon_H} = \frac{\sigma_{\theta} - \frac{1}{2}\sigma_z}{Q}, \quad \frac{d\varepsilon_g}{d\varepsilon_H} = -\frac{\frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_{\theta})}{Q},$$

gdzie

$$d\varepsilon_H = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_{\theta}^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_g^2}$$

jest zastępczym odkształceniem plastycznym. Korzystając z zależności (7) można powyższe związki przedstawić w postaci

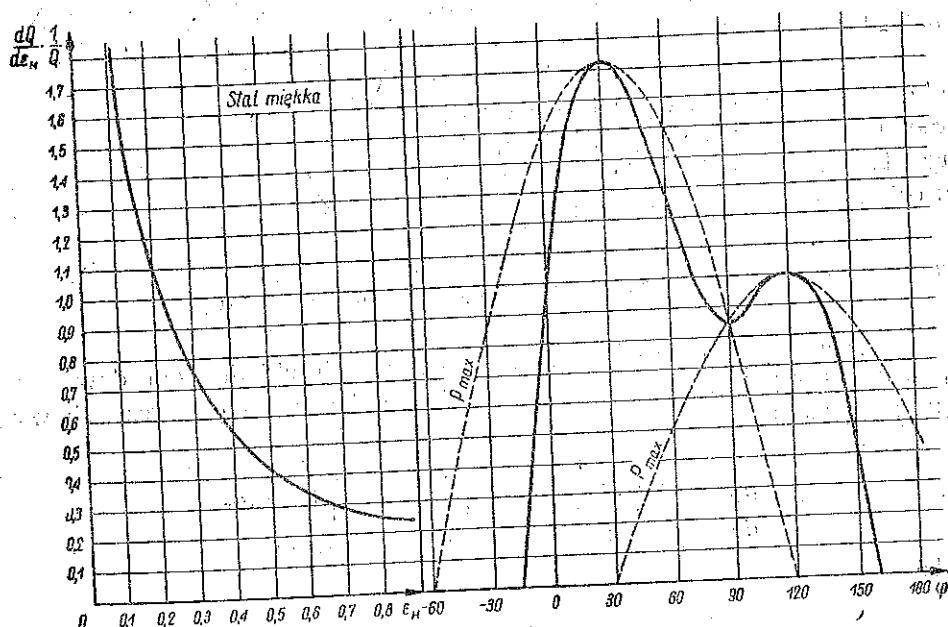
$$(9) \quad d\varepsilon_{\theta} = \cos \varphi d\varepsilon_H, \quad d\varepsilon_g = -\left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) d\varepsilon_H$$

Podstawiając do nierówności (6) wartości naprężeń ze wzoru (7), a wartości przyrostów odkształceń ze związków (9), wyrazimy lewą stronę wa-

runku stateczności jako funkcję jedynie kąta φ , charakteryzującego schemat stanu odkształcenia i naprężenia. Po uproszczeniu warunek ten przyjmie postać

$$(10) \quad \cos^3 \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \leq \frac{dQ}{d\varepsilon_H} \frac{1}{Q}.$$

Wykres po stronie prawej na rys. 3 przedstawia wartości lewej strony nierówności (10) w zależności od kąta φ . Po lewej stronie tego wykresu przedstawiono związek między wartością $dQ/d\varepsilon_H Q$, a wartością ε_H dla stali miękkiej o zawartości około 0,1% C. Zależność tę wyznaczono wykresnie na podstawie krzywej wzmocnienia tego materiału przedstawionej we współrzędnych Q, ε_H . Wykres podany na rys. 3 pozwala więc wyznaczyć dla każdej wartości kąta φ maksymalną wartość zastępczego odkształcenia ε_H , przy którym następuje utrata stateczności materiału.



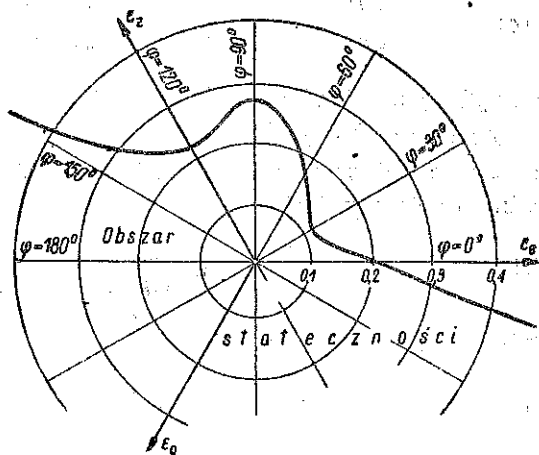
Rys. 3

Uzyskany tą metodą związek między φ i ε_H przedstawiono na rys. 4 we współrzędnych biegunowych. Przebieg odkształcenia może być na tym wykresie przedstawiony w postaci punktu przesuwanego się po promieniu wyznaczonym przez kąt φ . Gdy punkt ten osiągnie granicę zaznaczoną na rysunku, nastąpi utrata stateczności i powstanie miejscowe odkształcenie, przy czym postać tego odkształcenia zależy od kąta φ . Przy jednoosiowym rozciąganiu ($\varphi = 120^\circ$), następuje zwięźlenie uwidocz-

niające się miejscowym zmniejszeniem średnicy. Stanowi temu odpowiada przy tym względne minimum stateczności. Jeżeli kąt φ wynosi 90° , wówczas utrata stateczności wyraża się miejscowym zmniejszeniem grubości ścianki bez zmiany średnicy, a stanowi temu odpowiada maksymalna wartość wydłużenia ε_H .

Przy kącie φ mniejszym od prostego zamiast zwięzienia, występuje miejscowe wybrzuszenie, przy czym minimum odkształcenia przypada na kąt $\varphi = 30^\circ$. Przy dalszym zmniejszaniu kąta φ , co może być zrealizowane przez działanie siły ściskającej na dna naczynia następuje szybki wzrost stateczności. Jak wynika z omawianego wykresu utrata stateczności w omawianej formie może dla miękkiej stali nastąpić jedynie dla kąta φ zawartego w granicach od około -13° do około 150° .

Przy jednoosiowym rozciąganiu prętów początek tworzenia się szybki przypada w momencie, gdy siła rozciągająca osiąga maksimum. W celu zbadania związku, jaki zachodzi między utratą stateczności a osiągnięciem maksimum siły P lub ciśnienia p , w przypadku rozpatrywanej powłoki przedstawimy przebieg zmienności



Rys. 4

obu tych parametrów jako funkcji zastępczego odkształcenia ε_H , przyjmując, że odkształcenie jest proporcjonalne, to znaczy, że wydłużenie obwodowe ε_θ i osiowe ε_z wzrastają proporcjonalnie do tego samego parametru ($\varphi = \text{const}$). Aby osiągnąć taki przebieg odkształcenia, siła P i ciśnienie p ulegać muszą w czasie odkształcenia odpowiedniej zmianie, przy czym zmiany tych wielkości nie zachodzą już proporcjonalnie do jednego parametru. Wskutek tego moment osiągnięcia maksimum przez siłę P nie pokrywa się na ogół z momentem osiągnięcia maksimum ciśnienia p . Jeżeli początkową wartość siły osiowej oznaczmy przez P_0 , to w dowolnej chwili odkształcenia określonego wymiarami $D = D_0 e^{\varepsilon_\theta}$ i $g = g_0 e^{\varepsilon_z}$ siła P osiągnie wartość

$$(11) \quad P = P_0 \frac{F}{F_0} \frac{Q}{Q_0} = P_0 \frac{Q}{Q_0} e^{-\varepsilon_z},$$

gdzie Q i Q_0 jest granicą plastyczności w rozpatrywanej chwili i na początku odkształcenia, $F = F_0 e^{-\varepsilon_z}$ polem przekroju poprzecznego,

$\varepsilon_z = -\varepsilon_g - \varepsilon_\theta$ wydłużeniem w kierunku osi z. Korzystając z zależności (9) można wartość wydłużenia ε_z przedstawić w postaci

$$(12) \quad -\varepsilon_z = \varepsilon_\theta + \varepsilon_g = \left(\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) = -\varepsilon_H \cos (120 - \varphi).$$

Po podstawieniu tej wartości do wzoru (11) otrzymamy

$$(13) \quad P = P_0 \frac{Q}{Q_0} e^{-\varepsilon_H \cos (120 - \varphi)},$$

skąd wyznaczyć można warunek konieczny na ekstremum siły P :

$$(14) \quad \frac{dP}{d\varepsilon_H} = 0, \quad \text{gdy} \quad \left[\frac{dQ}{d\varepsilon_H} \frac{1}{Q} \right]_{P \max} = \cos (120 - \varphi).$$

Powyższą zależność przedstawia linia przerywana na rys. 3.

Analogicznie można wyznaczyć wartość $(dQ/d\varepsilon_H)(1/Q)$ odpowiadającą ekstremalnej wartości ciśnienia p . W dowolnej chwili odkształcenia ciśnienie to wyniesie

$$(15) \quad p = p_0 \frac{gD_0}{g_0D} \frac{Q}{Q_0} = p_0 \frac{Q}{Q_0} e^{-\varepsilon_g - \varepsilon_\theta}$$

lub po uwzględnieniu zależności (9)

$$(16) \quad p = p_0 \frac{Q}{Q_0} e^{-\sqrt{3} \cos (\varphi - 30^\circ) \varepsilon_H}.$$

Jak wynika z powyższej zależności, ciśnienie osiągnie maksymalną wartość, gdy spełniony będzie warunek

$$(17) \quad \left[\frac{dQ}{d\varepsilon_H} \frac{1}{Q} \right]_{P \max} = \sqrt{3} \cos (\varphi - 30^\circ).$$

Warunek ten zilustrowano również na wykresie 3 linią przerywaną.

Jak wynika z powyższego wykresu, dwa punkty odpowiadające utracie stateczności pokrywają się z odpowiednimi punktami odpowiadającymi ekstremum siły P (gdy $\varphi = 120^\circ$ i $\varphi = 90^\circ$) oraz z dwoma punktami odpowiadającymi ekstremum ciśnienia ($\varphi = 90^\circ$ i $\varphi = 30^\circ$). Przy pozostałych schematach stanu naprężenia utrata stateczności następuje dopiero po przekroczeniu ekstremalnej wartości siły lub ciśnienia.

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. Nádai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, New York 1950.
- [2] E. Saibel, *Metals Technol.*, 1947.
- [3] S. Sachs, G. Espey, G. B. Kasik, *Trans. ASME* 68, 1946.

Резюме

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННОЙ, ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ РАСТЯГИВАЕМОЙ В ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Анализируется возможность возникновения местного сужения или выпучины во время пластической деформации тонкостенной, цилиндрической оболочки под действием осевой силы и внутреннего давления, основываясь на действительной кривой упрочнения, данной в форме графика. Проведенная выше форма потери устойчивости зависит от явления упрочнения материала во время деформации зная кривую упрочнения в координатах $Q - \epsilon_H$. Дается метод определения величины пластической деформации, при которой наступает потеря деформации. В качестве примера приводятся диаграммы, иллюстрирующие возможность потери устойчивости при растягивании мягкой стали.

Summary

AN ANALYSIS OF THE STABILITY OF A THIN-WALLED SHELL SUBJECTED TO TENSION IN THE PLASTIC STATE

The possibility of the appearance of local neck or buckling during plastic deformation is discussed for a thick-walled cylindrical shell subjected to the action of axial force and internal pressure, using the real strain hardening curve given in the form of a diagram. The form of stability loss depends on the phenomenon of strain hardening during the deformation process. A method is given for determining the value of plastic strain for which stability loss occurs, using the strain-hardening curve in the $Q - \epsilon_H$ coordinate system. By way of example, diagrams are presented illustrating the possibility of stability loss during the tension of mild steel shells.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKOW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 kwietnia 1958 r.