

**ZDZISŁAW MARCINIAK**

**STUDIA NAD KSZTAŁTEM BŁONOWYCH POWŁOK  
OBROTOWYCH W STANIE PLASTYCZNYM**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CVII**

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT  
5712 S. UNIVERSITY AVE. CHICAGO, ILL. 60637

PHYSICS DEPARTMENT  
5712 S. UNIVERSITY AVE.  
CHICAGO, ILL. 60637

W wielu procesach tłoczenia cienkich blach, jak np. przy obciążaniu, wytłaczaniu, tłoczeniu hydraulicznym itp. grubość kształtowanej powłoki jest bardzo mała w porównaniu z jej wymiarami, przy czym naprężenia występujące w czasie tłoczenia są w przybliżeniu jednakowe na całej grubości kształtowanej blachy. Przy analizowaniu procesów kształtowania tego rodzaju powłok przydatna okazać się może analiza uproszczonego modelu takiej powłoki, będąca przedmiotem niniejszej pracy.

Jako uproszczony model przyjmijmy powłokę bardzo cienką, a więc błonę, którą traktować będziemy jako ustrój jedynie dwuwymiarowy. W pracy ograniczono się do rozważania powłok obrotowych poddanych działaniu obciążenia obrotowo symetrycznego. Powłoce tej przypiszmy następujące własności mechaniczne:

1) zdolność przenoszenia sił południkowych  $S_r$  i obwodowych  $S_\theta$  zarówno ściskających jak i rozciągających; siły te odnosić będziemy do jednostki długości przekroju;

2) niezdolność przenoszenia momentów zginających i sił poprzecznych, a więc  $M_r = M_\theta = 0$  i  $Q_r = Q_\theta = 0$ ;

3) osiągnięcie stanu plastycznego, gdy

$$(1) \quad S_r^2 - S_r S_\theta + S_\theta^2 = K^2,$$

przy czym wartość  $K$  jest stała i nie zależy od położenia punktu. Ten ostatni warunek jest spełniony w powłokach jednorodnych o stałej grubości ( $Q = \text{const}$  i  $g = \text{const}$ ) lub takich, gdzie zmiana grubości jest wyrównana umocnieniem materiału, przy czym  $gQ = \text{const}$ .

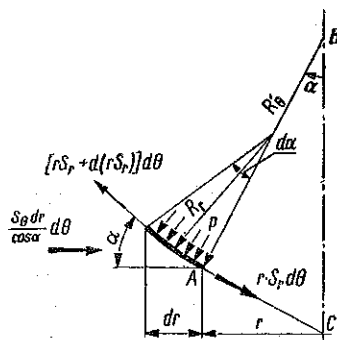
Rozpatrzmy teraz, jaki kształt przyjmować może powłoka o określonych wyżej własnościach przy obciążeniu obrotowo symetrycznym normalnym do powierzchni, jeśli będziemy wymagać, aby w każdym jej punkcie nastąpiło uplastycznienie.

Rozważmy warunek równowagi sił działających na dowolny element powłoki ograniczony promieniami  $r$  i  $r + dr$  oraz dwiema płaszczyznami przechodzącymi przez oś symetrii powłoki i tworzącymi kąt  $d\theta$ . Na element działa stałe ciśnienie  $p$  (rys. 1). Rzutuując wszystkie siły na kierunek  $AC$  styczny do rozpatrywanego odcinka powłoki otrzymamy równanie

$$d(rS_r) d\theta - S_\theta \frac{dr}{\cos \alpha} d\theta \cos \alpha = 0,$$

dające po uproszczeniu znaną zależność

$$(2) \quad \frac{dS_r}{dr} + \frac{S_r - S_\theta}{r} = 0.$$



Rys. 1

Warunek równowagi sił w kierunku normalnej  $AB$  wyraża się równaniem

$$pr d\theta \frac{dr}{\cos \alpha} - S_r r d\theta da - S_\theta \frac{dr}{\cos \alpha} d\theta \sin \alpha = 0,$$

które po uproszczeniu i uwzględnieniu związków

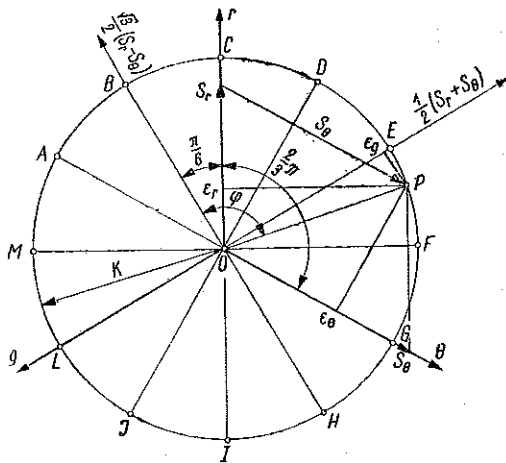
$$r = R_\theta \sin \alpha, \quad dr = R_r \cos \alpha da$$

można przedstawić w postaci

$$(3) \quad p = \frac{S_r}{R_r} + \frac{S_\theta}{R_\theta},$$

gdzie  $R_r$  i  $R_\theta$  są promieniami krzywizny rozpatrywanego elementu powłoki w płaszczyźnie osiowej oraz płaszczyźnie do niej prostopadłej.

Warunek plastyczności według równania (1) przedstawić można na wykresie 2 w postaci okręgu koła o promieniu  $K$ . Każdemu stanowi uplastycznienia odpowiada na tym wykresie pewien punkt  $P$  leżący na okręgu, przy czym wartości odpowiadające temu stanowi napięć  $S_r$  i  $S_\theta$  równają się współrzędnym punktu  $P$  w ukośno-kątym układzie osi  $S_r$  i  $S_\theta$ . Należy tu zauważyć, że ortogonalne rzuty punktu  $P$  na trzy osie układu  $\theta$ ,  $r$ ,  $g$ , odmierzają na nich odcinki proporcjonalne do szybkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_r$ ,  $\dot{\epsilon}_\theta$  i  $\dot{\epsilon}_g$  zachodzących w kierunkach głównych.



Rys. 2

Położenie punktu  $P$  określić można również we współrzędnych biegunowych za pomocą kąta  $\varphi$ , który tworzy promień  $OP$  z promieniem  $OB$  przyjętym jako początek układu. Otrzymamy wówczas zależności

$$(4) \quad \begin{cases} S_r = K \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi + K \sin \varphi, \\ S_\theta = -K \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi + K \sin \varphi, \end{cases}$$

a stąd

$$(5) \quad \begin{cases} K \sin \varphi = \frac{1}{2} (S_r + S_\theta), \\ K \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} (S_r - S_\theta). \end{cases}$$

A zatem rzuty punktu  $P$  na dwie wzajemnie prostopadłe osie  $OB$  i  $OE$  (rys. 2) wyznaczą na nich odcinki równe odpowiednio  $1/2(S_r + S_\theta)$  i  $\sqrt{3}(S_r - S_\theta)/2$ .

Wyrażając w równaniu równowagi (2) wartości  $dS_r$ ,  $S_r$  i  $S_\theta$  przez  $K$  i kąt  $\varphi$  ze związków (4) i (5) otrzymamy zależność

$$(6) \quad 2 \frac{dr}{r} = (\operatorname{tg} \varphi - \sqrt{3}) d\varphi.$$

Po jej scałkowaniu otrzymamy podstawowy związek między promieniem  $r$  i kątem  $\varphi$  w postaci

$$(7) \quad \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = \cos \varphi e^{\sqrt{3}\varphi},$$

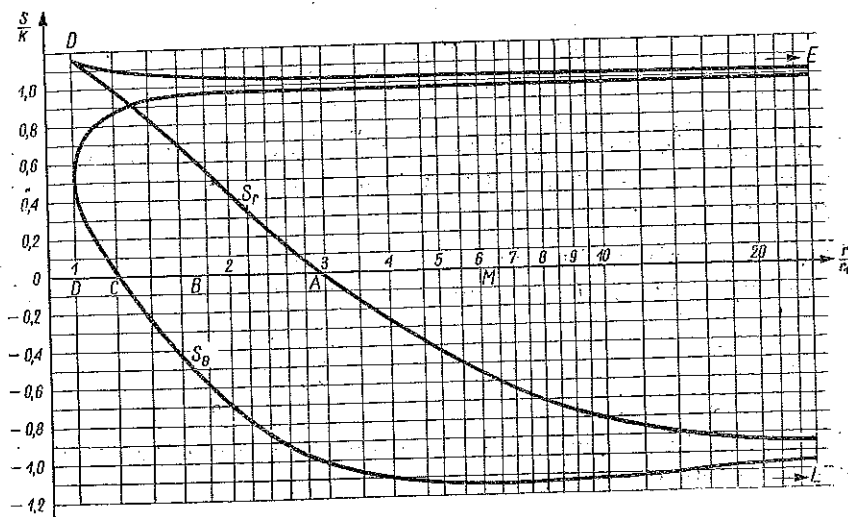
gdzie  $r_0$  jest promieniem odpowiadającym zerowej wartości kąta  $\varphi$ . Powyższy sposób rozwiązania układu równań (1) i (2) podał A. Nádai w 1944 r.

Traktując kąt  $\varphi$  jako parametr można wyznaczyć z równań (4) i (7) zależność między promieniem  $r$ , a jednostkowymi siłami  $S_r$  i  $S_\theta$  spełniającymi jednocześnie warunek równowagi i warunek plastyczności. Zależność tę przedstawia wykres podany na rys. 3. Na osi odciętych odmierzonego stosunek promienia  $r$  do promienia  $r_0$  odpowiadającego wartości kąta  $\varphi = \pi/3$ .

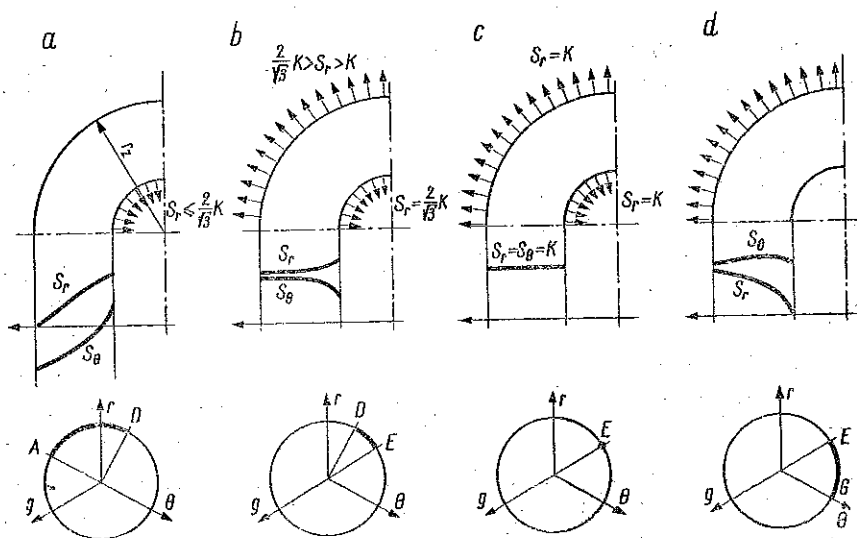
Należy zauważyć, że siły  $S_r$  i  $S_\theta$  zależą wyłącznie od promienia  $r$ , nie zależą natomiast od kształtu powłoki oraz wielkości ciśnienia  $p$ . Rozkład sił promieniowych  $S_r$  i obwodowych  $S_\theta$  w dowolnej powłoce będzie zatem taki sam jak w płaskim pierścieniu obciążonym na krawędziach siłami promieniowymi. Jeżeli ograniczymy się do przypadków, w których siły promieniowe są jednego znaku (rozciągające), to wyodrębnić można cztery rozkłady naprężeń odpowiadające czterem możliwym sposobom obciążenia, powodującym pełne uplastycznienie pierścienia.

Pierwszy z nich (rys. 4a) odpowiada wartości kąta  $\varphi$  w granicach od punktu  $A$  do  $D$  (rys. 2 i 3) i jest realizowany przy obciążeniu wewnętrznej krawędzi pierścienia. Szerokość pierścienia jest w tym przypadku ograniczona, gdyż promień zewnętrzny  $r_z$  nie może przekraczać około

$2,95r_1$ . Omawiane obciążenie powoduje przesuwanie się punktów materialnych do środka, a więc odkształcenie obwodowe  $\varepsilon_\theta$  ma wartość ujemną.



Rys. 3



Rys. 4

Drugi przypadek (rys. 4b) występuje wówczas, gdy zewnętrzna krawędź pierścienia poddana jest działaniu sił rozciągających, którym przeciwdziałają siły większe od  $K$  na krawędzi wewnętrznej. Punkty materialne przesuwają się na zewnątrz za wyjątkiem krawędzi wewnętrznej, która nie zwiększa swej średnicy.

Przypadek trzeci (rys. 4c) odpowiadający punktowi *E* jest rozwiązaniem szczególnym układu równań (1) i (2) mającym postać

$$S_r = S_\theta = K.$$

Realizowany jest on przez rozciąganie zarówno zewnętrznej, jak i wewnętrznej krawędzi pierścienia siłami jednostkowymi o wartości *K*, powodującymi jednorodne odkształcenie pierścienia.

Wreszcie przypadek czwarty (rys. 4d) odpowiadający łukowi *EG* zachodzi wówczas, gdy obciążenie rozciągające jest przyłożone do zewnętrznej krawędzi pierścienia, natomiast krawędź wewnętrzna jest swobodna. Obciążeniu takiemu odpowiada intensywnie zwiększanie średnicy.

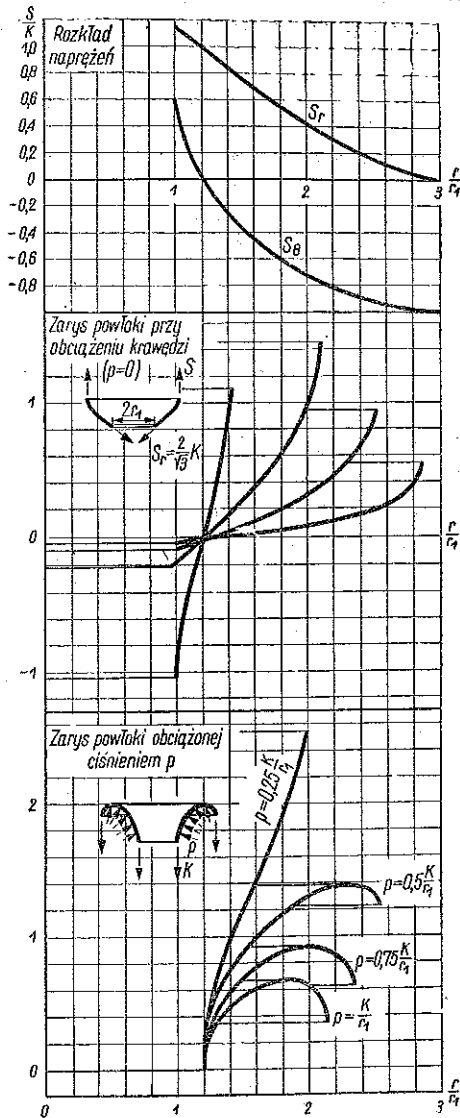
Przejdźmy teraz od płaskiego pierścienia do powłoki poddanej działaniu stałego ciśnienia *p* działającego normalnie do jej powierzchni. Warunek równowagi sił działających w kierunku osi powłoki przybierze wówczas postać

$$2\pi r' S_r' \sin \alpha' + \pi(r^2 - r'^2)p = 2\pi r S_r \sin \alpha.$$

Równanie to pozwala wyznaczyć kąt  $\alpha$  pochylenia stycznej do powłoki w dowolnym punkcie leżącym w odległości *r* od osi symetrii powłoki, jeżeli są dane kąt  $\alpha'$  i siła  $S_r'$  dla danego punktu na promieniu  $r'$  oraz wielkość ciśnienia *p*. A więc

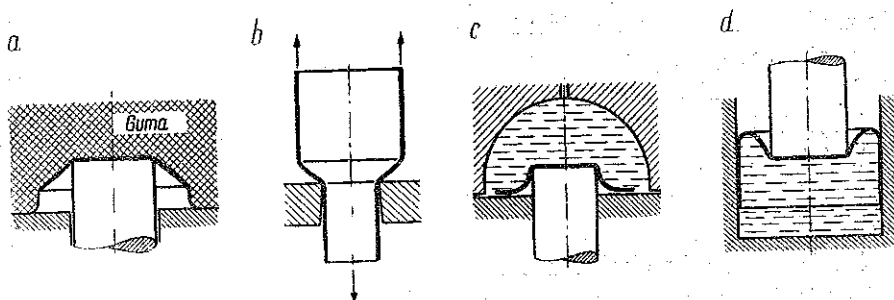
$$(8) \quad \sin \alpha = \frac{S_r' 2 r' \sin \alpha' + (r^2 - r'^2) p}{2 r S_r}.$$

Występującą po prawej stronie równania wartość siły  $S_r$  w punkcie *r* wyznaczamy znając wartość  $S_r'$  w punkcie  $r'$  z wykresu 3 zależnie od rodzaju obciążenia. Dla każdego z czterech omówionych rodzajów obciążenia istnieje może, przy danej wartości ciśnienia *p*, tylko jedna powłoka mająca określony kąt pochylenia  $\alpha'$  w punkcie  $r'$ , która prócz warunku równowagi speł-



Rys. 5

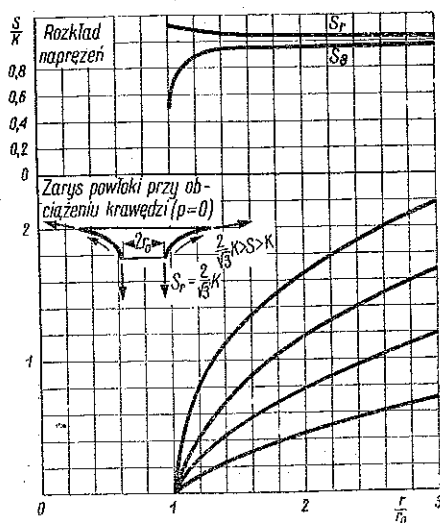
niałaby w każdym punkcie warunek plastyczności. Przybliżony kształt takiej powłoki można wyznaczyć wykreślnie obliczając dla kolejnych punktów z równania (8) kąt  $\alpha$  pochylenia stycznej, a z równania (3) promień krzywizny  $R_r$ . Zmieniając parametry wyjściowe  $a'$ ,  $r'$ ,  $p$  i  $S_r'$  otrzymamy



Rys. 6

różne zarysy powłok spełniających dane warunki obciążenia, przy czym różnorodność uzyskanych kształtów jest bardzo duża z uwagi na znaczną liczbę niezależnych parametrów.

Na rys. 5 przedstawiono przykłady takich powłok wyznaczonych dla pierwszego przypadku (rys. 4a) charakteryzującego się rozkładem naprężeń



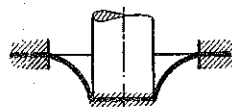
Rys. 7

uwidocznionym w górnej części rysunku. Rozważono przypadek obciążenia zewnętrznych krawędzi powłoki przy  $p=0$  oraz przypadek obciążenia ciśnieniem  $p$  i siłami działającymi na krawędzi. Powyższy rozkład naprężeń występuje we wszystkich procesach ciągnięcia, których kilka przykładów podaje rys. 6. Rysunek 6a przedstawia wytłaczanie za pomocą gumowej matrycy, rys. 6b przeciąganie rur przez ciągnadło przy zastosowaniu przeciwności, rys. 6c wytłaczanie hydrauliczne (metoda hydroform), a na rys. 6d przewijanie za pomocą ciśnienia cieczy. Na wszystkich rysunkach przedstawiono kształt

jaki przybrałaby obrabiana blacha, gdyby jej własności były zgodne z własnościami obranego na wstępie modelu. Wskutek istniejących różnic powstaną pewne odchylenia od profilu wyznaczonego teoretycznie, nie wpływające jednak w sposób zasadniczy na ogólny kształt powłoki.



Przejdźmy do drugiego przypadku obciążenia odpowiadającego łukowi  $DE$  (rys. 4b). Kształty powłok swobodnych, a więc takich, na które nie działa żadne ciśnienie, przedstawiono na rys. 7. Omawiany przypadek obciążenia zachodzi przy wytłaczaniu w blasze wybrzuszeń stemplem o tak dużym współczynniku tarcia, że stykająca się z nimi blacha nie doznaje żadnych przesunięć promieniowych (rys. 8).



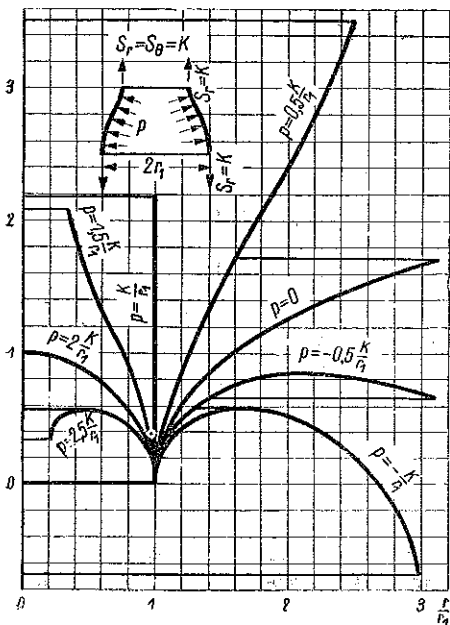
Rys. 8

Odkształcenie zachodzi wówczas wyłącznie w pierścieniu otaczającym stempel przy czym

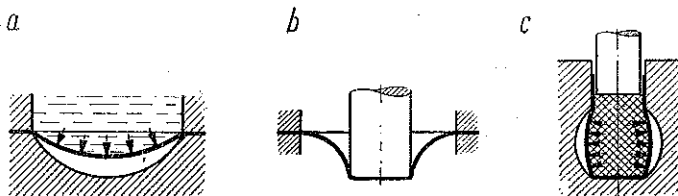
odkształcenie obwodowe  $\epsilon_\theta$  przy samym stemple jest równe zero.

Przy całkowitym braku tarcia między stemplem a kształtowaną blachą utwardzoną na obwodzie powstanie jednorodny stan naprężeń  $S_r = S_\theta = K$  odpowiadający punktowi  $E$  na rys. 4c. Zależnie od wielkości ciśnienia  $p$  otrzymamy wówczas różne kształty powłok przedstawione na rys. 9 przy założeniu, że  $\alpha' = 90^\circ$ , gdy  $r/r' = 1$ . Przykłady procesów technologicznych, przy których występuje zbliżony rozkład naprężeń oraz kształty, jakie przybiera wówczas odkształcony materiał, podaje rys. 10.

Wreszcie czwarty przypadek obciążenia (rys. 4d) daje powłoki o zarysie przedstawionym na rys. 11. Zachodzi to przy takich zabiegach, jak

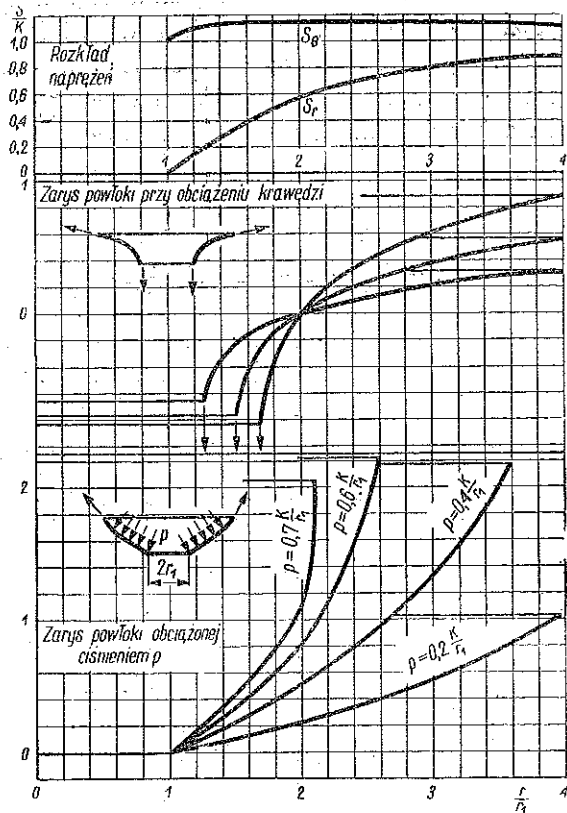


Rys. 9

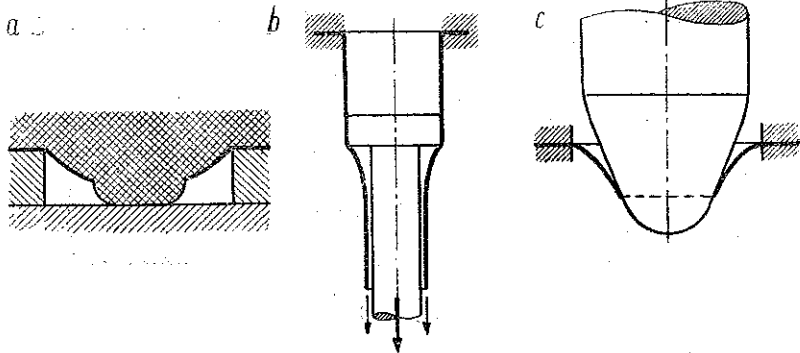


Rys. 10

wywijanie gumą kołnierzy wokół otworów (rys. 12a), rozszerzanie rur podanych jednocześnie działaniu siły osiowej (rys. 12b) lub rozwijanie kołnierzy stożkowym stemplem (rys. 12c).



Rys. 11



Rys. 12

## Literatura cytowana w tekście

- [1] A. Nádai, *Plasticity*, 1934.  
[2] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, 1950.

## Резюме

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК В ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Обсуждается форма контура тонкостенных вращательных оболочек, рассматриваемых как оболочки, находящиеся в пластическом состоянии при нагрузке осесимметрическим нормальным давлением  $p$  и силами действующими на края оболочки. Одновременное удовлетворение условиям равновесия и условию пластичности в виде

$$S_r^2 - S_r S_\theta + S_\theta^2 = K^2 \text{ const},$$

где  $S_r$  и  $S_\theta$  — силы отнесенные к единице длины сечения, действующие в меридиональном и окружном направлении, приводит к зависимости между углом наклона касательной к оболочке в данной точке. Эта зависимость дает возможность графически определить форму оболочки, отвечающей заданным краевым условиям. В работе даются примеры оболочек, получаемых при различных видах нагрузки и указываются технологические процессы штамповки, при которых обрабатываемое листовое железо применяет формы, близкие к определенным теоретическим путем.

## Summary

### DETERMINATION OF THE FORM OF MEMBRANE TYPE SHELLS IN THE PLASTIC STATE

Devoted to a discussion of the forms of thin walled shells of revolution treated as plastic membranes. The load is composed of an axially symmetric normal pressure  $p$  and edge forces. The simultaneous satisfaction of the equilibrium conditions and the yield condition in the form

$$S_r^2 - S_r S_\theta + S_\theta^2 = K^2 \text{ const},$$

where  $S_r$  and  $S_\theta$  are forces per unit length of cross-section in the meridional and the parallel direction, leads to a relation between the inclination

angle of the tangent to the shell at the given point and distance of that point from the axis of the shell. This relation enables the graphical determination of the form of the shell corresponding to the given boundary conditions. Examples of shell forms obtained for various loads are given, and technological processes indicated for which the sheet worked takes a form approaching that determined theoretically.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 21 stycznia 1958 r.*