

AUGUSTYN BORCZ

PLYTY WZMOCNIONE BELKAMI

1931

1. Wstęp

2. Materiały

3. Wykonanie

4. Próby

5. Wyniki

6. Podsumowanie

7. Bibliografia

8. Wykaz rysunków

9. Wykaz tabel

10. Wykaz literatury

11. Wykaz zdjęć

12. Wykaz tabel

13. Wykaz rysunków

14. Wykaz literatury

15. Wykaz zdjęć

16. Wykaz tabel

17. Wykaz rysunków

18. Wykaz literatury

19. Wykaz zdjęć

20. Wykaz tabel

21. Wykaz rysunków

22. Wykaz literatury

23. Wykaz zdjęć

24. Wykaz tabel

25. Wykaz rysunków

26. Wykaz literatury

27. Wykaz zdjęć

28. Wykaz tabel

29. Wykaz rysunków

30. Wykaz literatury

31. Wykaz zdjęć

32. Wykaz tabel

33. Wykaz rysunków

34. Wykaz literatury

35. Wykaz zdjęć

36. Wykaz tabel

37. Wykaz rysunków

38. Wykaz literatury

39. Wykaz zdjęć

40. Wykaz tabel

41. Wykaz rysunków

42. Wykaz literatury

43. Wykaz zdjęć

44. Wykaz tabel

45. Wykaz rysunków

46. Wykaz literatury

47. Wykaz zdjęć

48. Wykaz tabel

49. Wykaz rysunków

50. Wykaz literatury

51. Wykaz zdjęć

52. Wykaz tabel

53. Wykaz rysunków

54. Wykaz literatury

55. Wykaz zdjęć

56. Wykaz tabel

57. Wykaz rysunków

58. Wykaz literatury

59. Wykaz zdjęć

60. Wykaz tabel

61. Wykaz rysunków

62. Wykaz literatury

63. Wykaz zdjęć

64. Wykaz tabel

65. Wykaz rysunków

66. Wykaz literatury

67. Wykaz zdjęć

68. Wykaz tabel

69. Wykaz rysunków

70. Wykaz literatury

71. Wykaz zdjęć

72. Wykaz tabel

73. Wykaz rysunków

74. Wykaz literatury

75. Wykaz zdjęć

76. Wykaz tabel

77. Wykaz rysunków

78. Wykaz literatury

79. Wykaz zdjęć

80. Wykaz tabel

81. Wykaz rysunków

82. Wykaz literatury

83. Wykaz zdjęć

84. Wykaz tabel

85. Wykaz rysunków

86. Wykaz literatury

87. Wykaz zdjęć

88. Wykaz tabel

89. Wykaz rysunków

90. Wykaz literatury

91. Wykaz zdjęć

92. Wykaz tabel

93. Wykaz rysunków

94. Wykaz literatury

95. Wykaz zdjęć

96. Wykaz tabel

97. Wykaz rysunków

98. Wykaz literatury

99. Wykaz zdjęć

100. Wykaz tabel

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CII**

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Założenia. Przegląd prac	351
2. Wielkości statyczne i odkształcenia w płycie oraz związki między nimi	357
3. Odkształcenia belki wzmacniającej krawędź płyty	364
4. Wielkości statyczne w belce. Równania równowagi	368
5. Związki między wielkościami statycznymi w belce a odkształceniami	372
6. Związki między wielkościami statycznymi w belce a wielkościami statycznymi w płycie na jej krawędzi	376
7. Warunki nierozdzielności dla płyty	379
8. Funkcje naprężeń dla płyty prostokątnej i warunki dla brzegu wzmocnionego belką	382
9. Funkcje naprężeń dla płyty kołowej i warunki brzegowe	389
10. Przykłady rozwiązywania płyt prostokątnych wzmocnionych belkami	395

Praca przedstawia ogólny sposób obliczania płyt wzmocnionych na krawędzi belkami. Stanowi ona część studium nad obliczaniem powłok wzmocnionych belkami. Ogólne sformułowanie tego zadania dla powłok nie przedstawiało większych trudności. Przy opracowaniu natomiast szczegółowym z konieczności należało się zająć przypadkami najprostszymi pod względem rachunkowym, a więc płytami wzmocnionymi belkami.

Ponieważ w ogólnym przypadku środek ciężkości belek nie leży w płaszczyźnie środkowej płyty, przeto mamy do czynienia nie tylko ze zginaniem, lecz również z płaskim stanem naprężeń w konstrukcji. Dlatego omówione tu płyty stanowią szczególny przypadek powłoki, której powierzchnia środkowa ma obie krzywizny równe zeru.

Koncepcję zagadnienia zaczerpnięto z pracy W. Z. Własowa i A. K. Mroszczyńskiego, [26], która podaje warunki brzegowe dla powłoki wzmocnionej prostym cienkościennym prętem.

Po ogólnym sformułowaniu zagadnienia zapoznano się z innymi pracami cytowanymi w tekście. Okazało się, że są one przypadkami szczególnymi proponowanego sposobu obliczenia tego rodzaju konstrukcji.

W ostatnim czasie ukazały się prace, [21], [22], rozpatrujące płyty okrągłe i prostokątne, w których warunki na brzegu wzmocnionym belką są formułowane w przemieszczeniach, a nie w naprężeniach jak to przedstawiono w niniejszej pracy. Obie metody należy uważać za równoważne. W pracy wykazujemy, że nie ma potrzeby formułowania warunków brzegowych w przemieszczeniach nawet wówczas, gdy posługujemy się funkcjami naprężeń i gdy problem nie wymaga przechodzenia do przemieszczeń.

1. Założenia. Przegląd prac

Rysunek 1 przedstawia dwa przykłady płyt wzmocnionych belkami. Obliczenia w tej pracy opierają się na następujących założeniach:

1. Płyta i belka są wykonane z materiału sprężystego, izotropowego i jednorodnego. Stałe sprężystości (moduł Younga E , współczynnik Poissona ν) dla płyty i belki mogą być różne.

2. Płyta jest cienka, a ugięcia są małe w porównaniu z jej grubością.

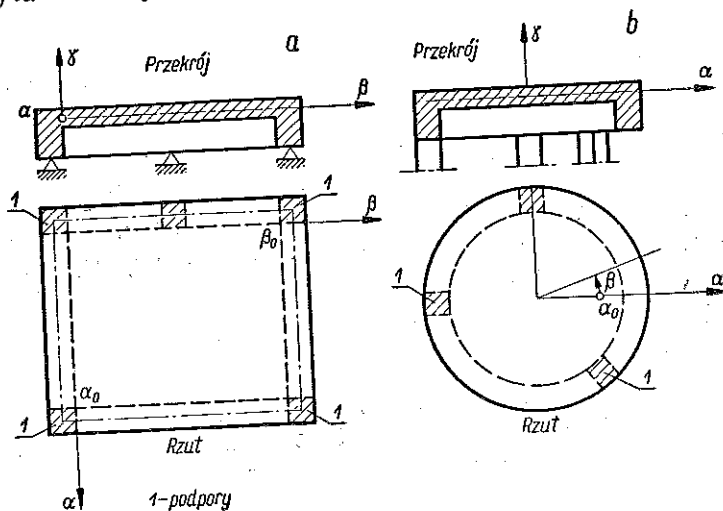
3. Belka jest połączona z płytą w sposób nierozdzielny. Takie połączenie zapewnia zgodność odkształceń wzdłuż krawędzi styku obu elementów.

4. Przyjmujemy dla płyty hipotezę Kirchhoffa, czyli założenie, że normalna do płyty przed odkształceniem pozostaje normalną i nieodkształconą po ugięciu.

5. Belkę traktujemy jako pełny cienki pręt. Przyjmujemy dla belki hipotezę płaskich przekrojów.

6. Konstrukcja pracuje w przedziale odkształceń liniowych, dzięki temu można stosować superpozycję płaskiego stanu naprężeń w płycie i naprężeń pochodzących od zginania. Wyklucza się utratę stateczności płyty lub belki.

7. Płyta może być jednoprzęsłowa lub wieloprzęsłowa.



Rys. 1

8. Płyty i belki mogą być obciążone dowolnie. Obciążenie na podpory konstrukcji może być przekazywane bezpośrednio z płyty lub za pośrednictwem belki.

9. Konstrukcję rozpatrujemy w układzie ortogonalnym, a wielkości statyczne i odkształcenia odnosimy do powierzchni środkowej płyty.

Przy tych założeniach podajemy próbę ogólnego matematycznego sformułowania zagadnienia i ilustrujemy uzyskaną metodę przykładami obliczenia tego rodzaju konstrukcji.

Płyty wzmocnione belkami są elementem konstrukcyjnym występującym w budownictwie, konstrukcji maszyn, samolotów itd. Zagadnienie, jak płyta współpracuje z belką, jest bardzo istotne. Zajmowano się nim już od dawna zarówno na drodze teoretycznej jak i doświadczalnej. Przy współpracy belki z płytą występują w płycie zarówno naprężenia pocho-

dzące od jej zginania, jak też płaski stan naprężenia występujący, gdy linia obojętna w belce nie leży na powierzchni środkowej płyty. Dla płyt bardzo cienkich wskutek ściskania może nawet nastąpić utrata stateczności. Ze względu na złożony charakter tej współpracy opracowywano jak dotąd to zagadnienie tylko fragmentarycznie.

M. T. Huber proponuje, [9], obliczać płyty gęstożebrowe tak, jak płyty anizotropowe. Przy obliczaniu płyty wprowadza zredukowane sztywności uwzględniające żebra. Jest to tak zwana anizotropia konstrukcji. Również obecnie często w ten sposób oblicza się płyty gęstożebrowe. Tak postępują np. Girkmann ([6], s. 479), S. G. Lechnicki ([11], s. 158-162), W. G. Donczenko, [3], S. Timoszenko, ([24], 189-190), W. Nowacki, [16], K. Trenks, [25].

W biurach projektowych na podstawie obowiązujących przepisów i norm oblicza się płyty oparte na żebrach przy następujących założeniach:

- 1) belki dźwigające płytę traktuje się jako całkowicie sztywne w kierunku pionowym,
- 2) podparcie płyty na żebrach uważa się za przegubowe, co jest równoznaczne z pominięciem sztywności belki na skręcanie.

Przy obliczaniu belek wprowadza się pojęcie tzw. «współpracującej szerokości płyty», która łącznie z żebrzem tworzy belkę teową.

O wyznaczeniu «współpracującej szerokości płyty» piszą: A. Eggen-

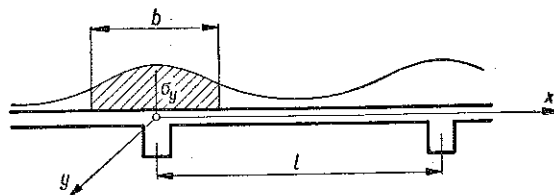
schwyler, [4], R. Bortsch, [1], M. T. Huber, ([9], § 21), K. Girkmann, ([7], [6], s. 112), E. Reissner, [18], H. Reissner, [19], E. Chwalla, [2].

W pracach tych próbowano wyznaczyć w płycie rozkład naprężeń σ_y przy różnych warunkach brzegowych. Podane rozwiązania uwzględniały płaski stan naprężeń bez równoczesnego zginania płyty. Naprężenia $[\sigma_y]_{x=0}$ traktowano jako dane.

E. Müller oblicza w pracy [15] płytę prostokątną, opartą przegubowo w narożach, a wzmocnioną na brzegach belkami sprężystymi. W tym przypadku nie udało mu się otrzymać rozwiązania ogólnego. Podany został tylko numerycznie rozwiązany przykład przy następujących warunkach na brzegu:

$$(1.1) \quad EIw_{ssss} + \bar{Q} = 0, \quad M = 0.$$

W warunku tym E oznacza współczynnik sprężystości belki, I moment bezwładności belki na zginanie, w_s pochodne funkcji ugięcia $w(s)$ w kie-



Rys. 2

runku stycznym do konturu s , w_n pochodne w kierunku normalnej zewnętrznej do konturu, $\bar{Q} = -K [w_{nnn} + (2 - \nu) w_{ssn}]$ oddziaływanie płyty, $M = -K [w_{nn} + \nu w_{ss}]$ moment zginający na krawędzi płyty, $K = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ sztywność płyty, ν współczynnik Poissona. Kierunki s i n tworzą układ prawoskrętny. Powyższe warunki brzegowe nie uwzględniają jednak bezpośredniego obciążenia belki. S. Timoszenko w podręczniku [24] na s. 92 formułuje następujące warunki brzegowe dla płyty prostokątnej wzmocnionej na krawędzi belką sprężystą:

$$(1.2) \quad Bw_{sss} + \bar{Q} = 0, \quad Cw_{nss} + M = 0,$$

gdzie B oznacza sztywność belki na zginanie, C sztywność belki na skręcanie, \bar{Q} oddziaływanie płyty na belkę, M moment zginający na krawędzi płyty.

W pracy [24] nie ma jednak przykładów na obliczanie płyt przy wyżej sformułowanych warunkach brzegowych. S. I. Fuchs w pracy [5] rozwiązuje przykład płyty prostokątnej wzmocnionej na brzegu belkami, podpartej w narożach i obciążonej równomiernie. Warunki brzegowe formułuje jak S. Timoszenko (1.2) uwzględniając sztywność belki na zginanie i na skręcanie. Rozwiązuje numerycznie przykład płyty kwadratowej o różnej sztywności belek. Otrzymane wyniki sprawdza doświadczalnie na dwóch modelach, szklanym i gipsowym. Naprężenia otrzymane doświadczalnie wynoszą 87% i 91% naprężeń obliczonych teoretycznie.

S. I. Fuchs tłumaczy różnicę tym, że w modelu były inne warunki brzegowe aniżeli w obliczeniach teoretycznych. W modelu płyta leżała na belce, która pracowała jak przekrój teowy.

W. Nowacki w pracy [16] również posługuje się warunkami (1.2). Podane w pracy [16] przykłady dotyczą płyt prostokątnych opartych przegubowo na obwodzie, a wewnątrz obszaru wzmocnionych belkami. Przyjęto, że oddziaływania między zębem a płytą odbywają się wzdłuż linii prostych. W ten sposób kontakt zębra z płytą z obu stron zębra sprowadzono do kontaktu wzdłuż jego osi. Oddziaływania zębów traktuje się jako obciążenie zewnętrzne płyty. Rozwiązania są podane w postaci szeregów podwójnych, mających zastosowanie do płyt na obwodzie swobodnie podpartych, lub w postaci pojedynczych szeregów trygonometrycznych, gdzie swobodne podparcie płyty ogranicza się do dwu przeciwległych brzegów płyty. Niewiadome współczynniki pochodzące z rozwinięcia w szereg funkcji określających oddziaływanie zębów są wyznaczone z warunków (1.2).

M. T. Huber w pracy [9], § 16 i 19 oblicza kilka schematów płyt wzmocnionych belkami. Uwzględnia w obliczeniach sztywność belki na zginanie i występujący w płycie płaski stan naprężeń, który superponuje

się ze zginaniem. Nie uwzględnia jednak sztywności belki na skręcanie. Przy obliczaniu sztywności belki na zginanie posługuje się pojęciem «współpracującej szerokości płyty», którą wprowadza do rachunku jako daną. Sprawa jak znaleźć tę «współpracującą szerokość» jest przedmiotem osobnych rozważań, [9], § 21. Obliczenia prowadzi metodą Ritz'a wykorzystując warunek na minimum energii układu.

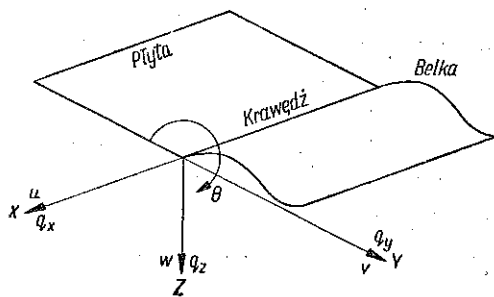
W. Z. Własow w pracy [26], s. 31 podaje warunki brzegowe w przypadku, gdy krawędź jest wzmocniona prostym cienkościennym prętem o stałym przekroju. Równania są w składowych przemieszczenia u , v , w oraz kąta sprężystego obrotu Θ belki:

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma X = 0, \quad Fu'' - S_y v''' - S_z w''' - S_\Omega \Theta''' + \frac{1}{E} q_x = 0, \\ \Sigma Y = 0, \quad S_y u''' - I_{yy} v^{IV} - I_{yz} w^{IV} - I_{y\Omega} \Theta^{IV} + \frac{1}{E} q_y = 0, \\ \Sigma Z = 0, \quad S_z u''' - I_{zy} v^{IV} - I_{zz} w^{IV} - I_{z\Omega} \Theta^{IV} + \frac{1}{E} q_z = 0, \\ \Sigma M_k = 0, \quad S_\Omega u''' - I_{\Omega y} v^{IV} - I_{\Omega z} w^{IV} - I_{\Omega\Omega} \Theta^{IV} + \\ + \frac{1}{E} G I_d \Theta'' + \frac{1}{E} m_k = 0. \end{array} \right.$$

Oznaczenia występujące w tych równaniach są podane w cytowanej już pracy [26].

Powyżej sformułowane warunki brzegowe zostały wykorzystane w pracy [26] przy obliczaniu powłoki walcowej.

M. P. Szeriemietiew w pracy [23] formułuje warunki brzegowe dla płyty wzmocnionej na krawędzi cienkim pierścieniem, w szczególności pierścieniem obramowującym okrągły otwór w płycie. Środek ciężkości pierścienia leży na przedłużeniu powierzchni środkowej. Wyprowadzając warunki brzegowe Szeriemietiew posługuje się równaniami równowagi pierścienia, napisanymi w postaci całkowej, a nie różniczkowej. Rozpatruje więc równowagę sił wewnętrznych w pierścieniu dla przekroju s z siłami zewnętrznymi działającymi na całym odcinku od podpory aż do rozpatrywanego miejsca. Ponieważ rozpatruje pierścień zamknięty bez podpór, więc może wyznaczyć z warunku powtarzalności, przy obchodzeniu brzegu, oddziaływanie na wyróżnionym początku belki. Połączenie pierścienia z płytą wyraża się zgod-



Rys. 3

nością ugięć, $w(s) = w^0(s)$, oraz zgodnością pochodnych normalnych do brzegu, $\partial w(s)/\partial n = \gamma$, gdzie $w^0(s)$ oznacza ugięcie osi pierścienia, a γ kąt obrotu.

Za pomocą równań równowagi i warunków zgodności ugięć można sformułować warunki brzegowe. Szeriemietiew pisze je za pomocą funkcji naprężeń $w(a, \beta)$, tę zaś przedstawia za pomocą dwóch funkcji analitycznych.

Z wyjątkiem pracy Własowa, [26], sformułowania warunków brzegowych są fragmentaryczne i nie obejmują całokształtu współpracy belki z płytą. W ogólnym, najczęściej występującym przypadku, współpraca belki z płytą wywołuje zarówno momentowy jak też i płaski stan naprężeń w płycie. Wprowadzenie pojęcia «współpracującej szerokości płyty» jest bardzo sztuczne. Określenie tej szerokości współpracującej na podstawie płaskiego rozkładu naprężeń w płycie nie jest ścisłe, bo płaski i momentowy stan naprężeń oddziałują na siebie wzajemnie. Oddzielenie tych dwóch stanów jest sprzeczne z warunkami równowagi dla belki. Jak później wykazemy (p. 8) warunki brzegowe sformułowane równaniami (1.1), (1.2) stosują się tylko dla szczególnych i uproszczonych sposobów połączenia belki z płytą.

Warunki brzegowe (1.3) podane przez Własowa są poprawne. Ponieważ składowa przemieszczenia w opisuje zginanie płyty, a składowe u, v płaski stan naprężeń, więc jak widać z budowy równań (1.3) te dwa stany są przez warunki brzegowe ze sobą sprzężone.

W pracy niniejszej sformułowano warunki brzegowe nie w przemieszczeniach, lecz w naprężeniach. Sformułowano je ogólnie dla dowolnej ortogonalnej parametryzacji a, β oraz dla dowolnego przekroju pręta pełnego (nie cienkościennego).

Warunki brzegowe są sformułowane w postaci różniczkowej a nie całkowej (jak to czyni M. P. Szeriemietiew). Stwarza to większą swobodę pozwalającą na spełnienie ogólniejszych warunków podparcia belki.

Myśl ujęcia warunków brzegowych dla płyt wzmocnionych belkami przedstawia się w sposób następujący. Jak wiadomo z ogólnej teorii sprężystości¹, stan naprężeń w płycie jest wyznaczony przez dwie funkcje naprężeń Θ i w za pomocą równań

$$(1.4) \quad \Delta \Delta \Theta = q(a, \beta), \quad \Delta \Delta w = \frac{p(a, \beta)}{K}.$$

Tutaj $q(a, \beta)$ i $p(a, \beta)$ są danymi funkcjami określonymi za pomocą obciążenia zewnętrznego. Funkcja $\Theta(a, \beta)$ nazywa się funkcją Airy'ego, a $w(a, \beta)$ oznacza składową przemieszczenia prostopadłego do płyty. Dla jednoznacznego rozwiązania równań potrzebne są cztery warunki na brzegu płyty. Oznaczamy kierunek styczny do brzegu przez s (obchodząc

¹ Por. [6], s. 22 i 153; [24], s. 88; [10], s. 141, t. 1, s. 139, t. 2; [12], s. 159 i 347.

w tym kierunku obszar pozostawiamy go z prawej strony), a kierunek normalnej zewnętrznej przez n . Będziemy dążyli do tego, by warunki, które funkcje Θ i w muszą spełniać na brzegach (wzmocnionych belkami), miały następującą postać:

$$(1.5) \quad \begin{cases} L_{11} \Theta(s) + L_{12} w(s) = g_1(s), \\ L_{21} \Theta(s) + L_{22} w(s) = g_2(s), \\ L_{31} \Theta(s) + L_{32} w(s) = g_3(s), \\ L_{41} \Theta(s) + L_{42} w(s) = g_4(s), \end{cases}$$

gdzie L_{ik} oznaczają operacje różniczkowe względem s , a $g_i(s)$ oznacza obciążenie belki pochodzące od płyty i bezpośrednie obciążenie. Warunki (1.5) otrzymamy z dwóch układów równań, mianowicie z równań równowagi belki obciążonej płytą i obciążeniem bezpośrednim oraz ze związków określających zależność między wielkościami statycznymi w płycie i w belce.

Związki te otrzymamy z warunku, żeby odkształcenia belki i płyty w miejscu ich kontaktu były zgodne. Przy wprowadzaniu tych związków wykorzystamy hipotezę Kirchhoffa dla płyty oraz hipotezę płaskich przekrojów dla belki. W ogólnym przypadku można utworzyć sześć takich związków. A zatem sześć wielkości statycznych w belce (trzy składowe siły i trzy składowe momenty) można związać z wielkościami statycznymi występującymi na krawędzi płyty. Poniżej wykazemy, że należy przyjąć tylko cztery związki, które łącznie z równaniami równowagi belki można zredukować do czterech równań wyrażonych za pomocą tylko wielkości statycznych w płycie. Ponieważ wszystkie wielkości statyczne w płycie opisuje się za pomocą funkcji naprężeń Θ i w , więc można otrzymane cztery równania wyrazić w postaci (1.5). W dalszych rozwiązaniach (p. 8) wykazemy, że warunki brzegowe w postaci (1.5) są najogólniej zapisanymi warunkami brzegowymi dla płyty. Zawierają one przy pewnych założeniach dotyczących sztywności belki nie tylko przypadki (1.1) i (1.2), lecz również przypadki krawędzi swobodnej, przegubowego oparcia i sztywnego zamocowania.

Następne punkty tej pracy zawierają wyprowadzenie równań równowagi belki oraz wyprowadzenie związków między wielkościami statycznymi a odkształceniami. Przedtem jednak wprowadzimy oznaczenia dla wielkości statycznych i odkształceń w płycie.

2. Wielkości statyczne i odkształcenia w płycie oraz związki między nimi

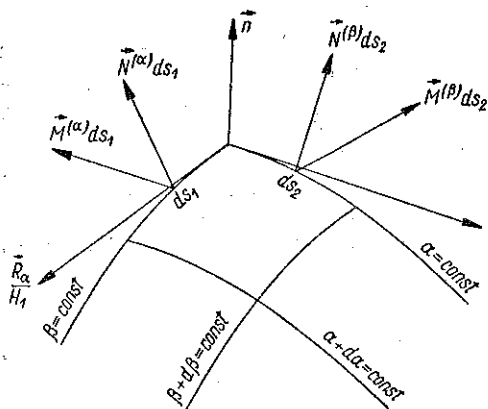
Stan naprężeń w płycie zazwyczaj opisuje się za pomocą dziesięciu wielkości statycznych. Oznaczmy je symbolami N_1 , N_2 , S_1 , S_2 , Q_1 , Q_2 , M_1 , M_2 , M_{12} i M_{21} . Definicję tych wielkości statycznych wprowadzimy na

podstawie następującego rozumowania. Napiszmy równanie wektorowe powierzchni środkowej płyty

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha, \beta),$$

gdzie \mathbf{R} jest wektorem wodzącym, a α i β parametrami odpowiadającymi dowolnej siatce ortogonalnej na powierzchni. Dowolny punkt w płycie ma wektor wodzący

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R}(\alpha, \beta) + \gamma \mathbf{n},$$



Rys. 4

gdzie $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$, przy czym h jest grubością płyty, a \mathbf{n} jednostkowym wektorem normalnym do płyty.

Zakładamy, jak zwykle, że płyta jest cienka o stałej grubości h .

Rozpatrzmy przekrój normalny do płyty wzdłuż linii $\beta = \text{const}$, leżącej na powierzchni środkowej. Niech

$$\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}^*(\alpha, \gamma)$$

będzie wektorem naprężenia w tym przekroju.

Siły $\mathbf{N}^{(\alpha)}$ i momenty $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ odniesione do jednostki długości linii α , występujące w rozpatrywanym przekroju są następujące:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \mathbf{N}^{(\alpha)} ds_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{\sigma}^*(\alpha, \gamma) ds_1 d\gamma, \\ \mathbf{M}^{(\alpha)} ds_1 = - \int_{-h/2}^{h/2} [\vec{\sigma}^*(\alpha, \gamma) \times \gamma \mathbf{n}] ds_1 d\gamma, \end{cases}$$

gdzie ds_1 jest elementem długości łuku α , a znak \times oznacza iloczyn wektorowy.

Postępując analogicznie w przekroju normalnym do płyty wzdłuż linii $\alpha = \text{const}$ a leżącej na powierzchni środkowej określamy siły $\mathbf{N}^{(\beta)}$ oraz momenty $\mathbf{M}^{(\beta)}$ w sposób następujący:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mathbf{N}^{(\beta)} ds_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{\sigma}^*(\beta, \gamma) ds_2 d\gamma, \\ \mathbf{M}^{(\beta)} ds_2 = - \int_{-h/2}^{h/2} [\vec{\sigma}^*(\beta, \gamma) \times \gamma \mathbf{n}] ds_2 d\gamma. \end{cases}$$

W równaniach (2.2) $\vec{\sigma}^*(\beta, \gamma)$ oznacza wektor naprężenia występujący w przekroju α , ds_2 długość łuku linii β .

Utwórzmy dla dowolnego punktu powierzchni środkowej układ ruchomy utworzony z wektorów:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} = \mathbf{R}_\alpha, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} = \mathbf{R}_\beta.$$

Oznaczmy

$$H_1 = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\alpha', \quad H_2 = \mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\beta'.$$

Wówczas przyjmujemy następujący układ odniesienia utworzony z wektorów jednostkowych:

$$(2.3) \quad \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1}, \quad \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} \times \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}.$$

Wytnijmy z płyty element za pomocą przekrojów normalnych do powierzchni środkowej wzdłuż linii $\alpha = \text{const}$, $\alpha + d\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, $\beta + d\beta = \text{const}$. Siły wewnętrzne działające na wyodrębniony element są określone równaniami (2.1) i (2.2). Gęstości tych sił rozkładamy na kierunki przyjętego układu odniesienia (2.3) w następujący sposób:

$$(2.4) \quad \begin{cases} N^{(\alpha)} = S_2 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} - N_2 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + Q_2 \mathbf{n}, \\ M^{(\alpha)} = -M_2 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} - M_{21} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}, \\ N^{(\beta)} = -N_1 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} - S_1 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + Q_1 \mathbf{n}, \\ M^{(\beta)} = -M_{12} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + M_1 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}. \end{cases}$$

Wielkościami statycznymi będziemy nazywali skalarne wartości tych sił i momentów. Siły N_1 , N_2 , S_1 , S_2 , Q_1 i Q_2 mają wymiar kG/m, momenty M_1 , M_2 , M_{12} i M_{21} mają wymiar kGm/m. Niech na rozpatrywany element płyty działają siły zewnętrzne o gęstości \mathbf{P} oraz moment zewnętrzny o gęstości \mathbf{Q} . Obciążenie zewnętrzne rozkładamy na następujące składowe:

$$\mathbf{P} = q_1 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + q_2 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} - q_3 \mathbf{n}, \quad \mathbf{Q} = m_1^* \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + m_2^* \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + m_3^* \mathbf{n}.$$

Składowe obciążenia są zależne od współrzędnych α, β . Równania równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych, działających na rozpatrywany element, mają postać:

$$(2.5) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 N^{(\alpha)}) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 N^{(\beta)}) + H_1 H_2 \mathbf{P} = \mathbf{0}, \\ -\frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 M^{(\alpha)}) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 M^{(\beta)}) + H_1 N^{(\alpha)} \times \mathbf{R}_\beta + H_2 N^{(\beta)} \times \mathbf{R}_\alpha + H_1 H_2 \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Wyprowadzenie równań (2.5) jest podane w pracy A. L. Goldienwiejziera, ([18], s. 34). Pierwsze równanie jest sumą sił, drugie sumą momentów działających na element objętości płyty.

Rzutuując równania (2.5) na kierunki ruchomego układu odniesienia otrzymamy sześć skalarnych równań równowagi:

$$(2.6) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 N_1) + \frac{\partial H_1}{\partial \beta} S_1 - \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 S_2) - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} N_2 + H_1 H_2 q_1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 S_1) - \frac{\partial H_1}{\partial \beta} N_1 + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 N_2) - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} S_2 + H_1 H_2 q_2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 Q_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 Q_2) + H_1 H_2 q_3 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 M_{12}) - \frac{\partial H_1}{\partial \beta} M_1 + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 M_2) - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} M_{21} - H_1 H_2 Q_2 + H_1 H_2 m_1^* = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 M_1) + \frac{\partial H_1}{\partial \beta} M_{12} - \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 M_{21}) - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} M_2 - H_1 H_2 Q_1 - H_1 H_2 m_2^* = 0, \\ S_1 + S_2 - m_3^* = 0. \end{cases}$$

Równania równowagi nie wystarczają do wyznaczenia niewiadomych wielkości statycznych. Brakujące cztery równania otrzymuje się z własności fizycznych danego materiału konstrukcji oraz ze związku statyczno-geometrycznego. Są nimi trzy warunki nierozdzielności oraz warunków, który nazywamy statyczno-geometrycznym: $M_{12} + M_{21} = 0$. Warunki nierozdzielności wyprowadzimy w p. 7. Poniżej podajemy równania, które dotyczą stanu odkształcenia w płycie. Będą one wykorzystane w następnych punktach tej pracy.

Deformacja w danym punkcie ciała sprężystego jest wyznaczona przez sześć składowych tensora odkształcenia. Jeżeli rozpatrujemy odkształcenia w ortogonalnym układzie R_α/H_1 , R_β/H_2 , \mathbf{n} , a kierunki oznaczymy przez 1, 2 i 3, wówczas tensor ma postać

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = (e_{ik}), \quad e_{ik} = e_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Dzięki hipotezie Kirchhoffa o nieodkształcalności normalnej do płyty można wyrazić odkształcenia w dowolnym punkcie płyty, nie leżącym na powierzchni środkowej, za pomocą odkształceń na powierzchni środkowej. Na podstawie tej hipotezy przemieszczenie $U^*(\alpha, \beta, \gamma)$ w dowolnym punkcie płyty wyraża się za pomocą przemieszczenia $U(\alpha, \beta, 0)$ powierzchni środkowej w następujący sposób:

$$(2.7) \quad \begin{cases} U^*(\alpha, \beta, \gamma) = U(\alpha, \beta, 0) + \gamma \mathbf{m}, \\ \mathbf{m} = \mathbf{n}' - \mathbf{n} = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi, \end{cases}$$

gdzie \mathbf{m} jest wektorem otrzymanym z różnicy między wektorem \mathbf{n}' , normalnym do odkształconej powierzchni środkowej, a wektorem \mathbf{n} normalnym do nieodkształconej powierzchni środkowej płyty.

Odształcenie dowolnego punktu w płycie wyraża się w następujący sposób ([18], s. 53):

$$(2.8) \quad \begin{cases} e_{11}^* = \frac{R_\alpha^*}{H_1^*} \frac{U_\alpha^*}{H_1^*}, & e_{12}^* = \frac{R_\alpha^*}{H_1^*} \frac{R_\beta^*}{H_2^*}, \\ e_{22}^* = \frac{R_\beta^*}{H_2^*} \frac{U_\beta^*}{H_2^*}, & e_{13}^* = \frac{R_\alpha^*}{H_1^*} \frac{R_\gamma^*}{H_3^*}, \\ e_{33}^* = \frac{R_\gamma^*}{H_3^*} \frac{U_\gamma^*}{H_3^*}, & e_{23}^* = \frac{R_\beta^*}{H_2^*} \frac{R_\gamma^*}{H_3^*}. \end{cases}$$

Tutaj (e_{ik}^*) oznacza tensor odkształcenia dla punktów nie leżących na powierzchni środkowej, (e_{ikh}) tensor odkształcenia dla punktów powierzchni środkowej, oraz

$$R^{*'}(\alpha, \beta, \gamma) = R^*(\alpha, \beta, \gamma) + U^*(\alpha, \beta, \gamma).$$

Ponieważ $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\alpha, \beta)$, więc $H_1^* = H_1$, $H_2^* = H_2$, $H_3^* = H_3$, $R_\alpha^*/H_1^* = R_\alpha/H_1$, $R_\beta^*/H_2^* = R_\beta/H_2$ i $R_\gamma^*/H_3^* = \mathbf{n}$. Na przykład pierwsze wyrażenie z równań (2.8) napisane skalarnie ma postać

$$e_{11}^* = \frac{R_\alpha}{H_1} \frac{U_\alpha + \gamma \mathbf{m}_\alpha}{H_1} = e_{11} + \gamma \varkappa_{11}.$$

Analogicznie postępując wyrazimy odkształcenia (e_{ik}^*) dowolnego punktu płyty za pomocą odkształceń (e_{ikh}) powierzchni środkowej:

$$(2.9) \quad \begin{cases} e_{11}^* = e_{11} + \gamma \varkappa_{11}, & e_{12}^* = e_{12} + \gamma \tau, \\ e_{22}^* = e_{22} + \gamma \varkappa_{22}, & e_{13}^* = e_{13} + \gamma \tau_{13}, \\ e_{33}^* = e_{33}, & e_{23}^* = e_{23} + \gamma \tau_{23}. \end{cases}$$

W równaniach (2.9) wprowadzono oznaczenia

$$(2.10) \quad \begin{cases} e_{11} = \frac{R_\alpha}{H_1} \frac{U_\alpha}{H_1}, & e_{22} = \frac{R_\beta}{H_2} \frac{U_\beta}{H_2}, & e_{33} = \mathbf{nm}, & e_{13} = \frac{U_\alpha}{H_1} \mathbf{n} + \mathbf{m} \frac{R_\alpha}{H_1}, \\ e_{12} = \frac{U_\alpha}{H_1} \frac{R_\beta}{H_2} + \frac{U_\beta}{H_2} \frac{R_\alpha}{H_1}, & & & e_{23} = \frac{U_\beta}{H_2} \mathbf{n} + \mathbf{m} \frac{R_\beta}{H_2}, \end{cases}$$

$$(2.11) \quad \begin{cases} \varkappa_{11} = \frac{R_\alpha}{H_1} \frac{\mathbf{m}_\alpha}{H_1}, & \varkappa_{22} = \frac{R_\beta}{H_2} \frac{\mathbf{m}_\beta}{H_2}, & \tau = \tau_{12} + \tau_{21}, & \tau_{12} = \frac{R_\beta}{H_2} \frac{\mathbf{m}_\alpha}{H_1}, \\ \tau_{21} = \frac{R_\alpha}{H_1} \frac{\mathbf{m}_\beta}{H_2}, & \tau_{13} = \frac{\mathbf{m}_\alpha}{H_1} \mathbf{n}, & \tau_{23} = \frac{\mathbf{m}_\beta}{H_2} \mathbf{n}. \end{cases}$$

Przy wyprowadzeniu równań (2.10) i (2.11) pominięto wielkości małe drugiego rzędu, jak się to zwykle robi w liniowej teorii sprężystości.

W dalszych wyprowadzeniach będą potrzebne składowe wektora \mathbf{m} . W tym celu oznaczymy odkształcenie osi R_α/H_1 przez \mathbf{t} oraz odkształcenie osi R_β/H_2 przez \mathbf{p} :

$$\mathbf{t} = \frac{R'_\alpha}{H_1} - \frac{R_\alpha}{H_1} = \frac{R_\alpha + U_\alpha}{H_1} - \frac{R_\alpha}{H_1} = \frac{U_\alpha}{H_1},$$

$$\mathbf{p} = \frac{R'_\beta}{H_2} - \frac{R_\beta}{H_2} = \frac{R_\beta + U_\beta}{H_2} - \frac{R_\beta}{H_2} = \frac{U_\beta}{H_2}.$$

W przyjętym układzie odniesienia składowe wektorów \mathbf{t} i \mathbf{p} są następujące:

$$(2.12) \quad \begin{cases} \mathbf{t} = \frac{U_\alpha}{H_1} = e_{11} \frac{R_\alpha}{H_1} + \omega_{12} \frac{R_\beta}{H_2} + \omega_{13} \mathbf{n}, \\ \mathbf{p} = \frac{U_\beta}{H_2} = \omega_{21} \frac{R_\alpha}{H_1} + e_{22} \frac{R_\beta}{H_2} + \omega_{23} \mathbf{n}, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.13) \quad \begin{cases} e_{11} = \frac{U_\alpha}{H_1} \frac{R_\alpha}{H_1}, & \omega_{12} = \frac{U_\alpha}{H_1} \frac{R_\beta}{H_2}, & \omega_{13} = \frac{U_\alpha}{H_1} \mathbf{n}, \\ \omega_{21} = \frac{U_\beta}{H_2} \frac{R_\alpha}{H_1}, & e_{22} = \frac{U_\beta}{H_2} \frac{R_\beta}{H_2}, & \omega_{23} = \frac{U_\beta}{H_2} \mathbf{n}. \end{cases}$$

W równaniach (2.13) poszczególne wyrazy mają następującą interpretację geometryczną: symbole e_{11} i e_{22} oznaczają jednostkowe wydłużenie lub skrócenie osi 1, 2, ω_{ik} kąt obrotu osi i w kierunku osi k .

Mamy na przykład

$$\frac{R'_\alpha}{H_1} \cdot \frac{R_\beta}{H_2} = \frac{R_\alpha + U_\alpha}{H_1} \cdot \frac{R_\beta}{H_2} = \frac{U_\alpha}{H_1} \frac{R_\beta}{H_2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_{12}\right) = \sin \omega_{12} \approx \omega_{12}.$$

Podobnie znajdziemy odkształcenie osi \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = \mathbf{n}' - \mathbf{n} &= \frac{R_\alpha + U_\alpha}{H_1} \times \frac{R_\beta + U_\beta}{H_2} - \frac{R_\alpha}{H_1} \times \frac{R_\beta}{H_2} = \\ &= \frac{U_\alpha}{H_1} \times \frac{R_\beta}{H_2} + \frac{R_\alpha}{H_1} \times \frac{U_\beta}{H_2} + \frac{U_\alpha}{H_1} \times \frac{U_\beta}{H_2} \end{aligned}$$

Dla małych odkształceń wyrażenie $(U_\alpha/H_1) \times (U_\beta/H_2)$ jest wielkością małą drugiego rzędu, więc pomija się je zazwyczaj. Odkształcenie osi \mathbf{n} m następujące składowe:

$$\mathbf{m} = -\omega_{13} \frac{R_\alpha}{H_1} - \omega_{23} \frac{R_\beta}{H_2} + (e_{11} + e_{22}) \mathbf{n},$$

gdzie

$$(2.14) \quad \begin{cases} \mathbf{m} \frac{R_\alpha}{N_1} = -\mathbf{n} \frac{U_\alpha}{H_1} = -\omega_{13}, \\ \mathbf{m} \frac{R_\beta}{H_2} = -\mathbf{n} \frac{U_\beta}{H_2} = -\omega_{23}, \\ \mathbf{m}\mathbf{n} = \frac{R_\alpha}{H_1} \frac{U_\alpha}{H_1} + \frac{R_\beta}{H_2} \frac{U_\beta}{H_2} = e_{11} + e_{22}. \end{cases}$$

Przy wyprowadzeniu równań (2.14) wykorzystaliśmy wzór

$$\mathbf{a} \times \mathbf{bc} = -\mathbf{a} \times \mathbf{cb} = -\mathbf{c} \times \mathbf{ba}.$$

Ponieważ hipoteza Kirchhoffa zakłada nieodkształcalność normalnej, więc na tej podstawie przyjmujemy

$$(2.15) \quad \mathbf{m} = -\omega_{13} \frac{R_\alpha}{H_1} - \omega_{23} \frac{R_\beta}{H_2}.$$

Tensor odkształceń (e_{ik}^*) dla dowolnego punktu płyty określiliśmy za pomocą odkształceń powierzchni środkowej (2.9).

W cienkich płytach przyjmuje się oprócz hipotezy Kirchhoffa o nieodkształcalności normalnej również założenia $e_{33}^* = 0$, $e_{13}^* = 0$, $e_{23}^* = 0$, czyli

$$(2.16) \quad (e_{ik}^*) = \begin{vmatrix} e_{11}^* & e_{12}^* & 0 \\ e_{21}^* & e_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (ik = 1, 2).$$

Oznaczamy przez $(\sigma_{ik}^*)(ik = 1, 2, 3)$ tensor naprężeń dla dowolnego punktu płyty. Dla płyt cienkich przyjmuje się założenie $\sigma_{33}^* = 0$, czyli

$$(2.17) \quad (\sigma_{ik}^*) = \begin{vmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12}^* & \sigma_{13}^* \\ \sigma_{21}^* & \sigma_{22}^* & \sigma_{23}^* \\ \sigma_{31}^* & \sigma_{32}^* & 0 \end{vmatrix} \quad (ik = 1, 2, 3).$$

Te założenia są również przyjęte w niniejszej pracy.

W dalszych rozważaniach będziemy korzystali ze stosowanych zazwyczaj związków między składowymi tensora odkształceń a wielkościami statycznymi w płycie:

$$(2.18) \quad \begin{cases} e_{12} = -\frac{1}{Gh} S_2 = \frac{1}{Gh} S_1, & \kappa_{22} = -\frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1), \\ e_{22} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1), & \kappa_{11} = -\frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2), \\ e_{11} = \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2), & \tau = -\frac{12}{Gh^3} M_{12} = \frac{12}{Gh^3} M_{21}. \end{cases}$$

Przedstawione powyżej wzory wykorzystamy w następnych punktach niniejszej pracy.

3. Odształcenia belki wzmacniającej krawędź płyty

Przyjmujemy, że belka jest połączona z płytą monolitycznie, co pociąga za sobą zgodność odształceń w miejscu kontaktu tych dwóch elementów konstrukcyjnych. Dla przykładu rozpatrzmy belkę na krawędzi pokrywającej się z przekrojem płyty $\beta = \beta_0$. Równanie dowolnego punktu w belce można wyrazić za pomocą ruchomego układu odniesienia R_α/H_1 , R_β/H_2 , \mathbf{n} związanego z krawędzią płyty w następujący sposób:

$$\mathbf{r}(a, \eta, \gamma) = \mathbf{R}(a, \beta_0) + \eta \frac{\mathbf{R}_\beta'(a, \beta_0)}{H_2(a, \beta_0)} + \gamma \mathbf{n}.$$

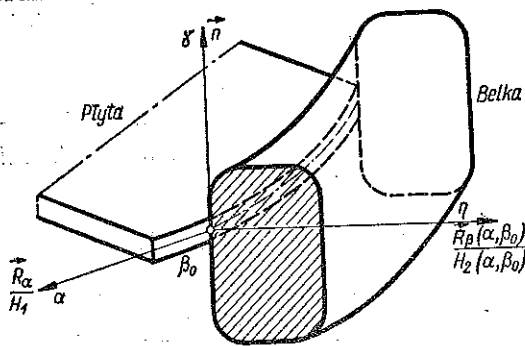
Jeżeli znamy funkcję przemieszczeń punktów belki $\mathbf{U}^*(a, \eta, \gamma)$, wówczas analogicznie jak w równaniach (2.8) odształcenia (e_{ik}^*) dowolnego punktu belki wyrazimy w następujący sposób:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \bar{e}_{11}^* = \frac{\mathbf{r}_\alpha}{H_1} \frac{U_\alpha^*}{H_1}, & \bar{e}_{12}^* = \frac{\mathbf{r}'_\alpha}{H_1} \frac{\mathbf{r}'_\eta}{H_2}, \\ \bar{e}_{22}^* = \frac{\mathbf{r}_\eta}{H_2} \frac{U_\eta^*}{H_2}, & \bar{e}_{13}^* = \frac{\mathbf{r}'_\alpha}{H_1} \frac{\mathbf{r}'_\gamma}{H_3}, \\ \bar{e}_{33}^* = \frac{\mathbf{r}_\gamma}{H_3} \frac{U_\gamma^*}{H_3}, & \bar{e}_{23}^* = \frac{\mathbf{r}'_\eta}{H_2} \frac{\mathbf{r}'_\gamma}{H_3}. \end{cases}$$

Odształcenia w dowolnym punkcie belki możemy wyrazić za pomocą odształceń płyty na jej krawędzi, jeżeli przyjmiemy dla belki hipotezę płaskich przekrojów. Według tej hipotezy płaski przekrój belki przed odształceniem pozostaje płaski po odształceniu. Na tej podstawie

$$(3.2) \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}(a, \beta_0) + \eta \mathbf{p}(a, \beta_0) + \gamma \mathbf{m}(a, \beta_0).$$

W równaniu (3.2) \mathbf{p} i \mathbf{m} oznaczają deformację osi $R_\beta'/\alpha, \beta_0/H_2(a, \beta_0)$, oraz osi \mathbf{n} na krawędzi płyty [por. równania (2.12) i (2.15)] oraz



Rys. 5

$$\mathbf{p} = \omega_{21} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + \omega_{23} \mathbf{n},$$

$$\mathbf{m} = -\omega_{13} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} - \omega_{23} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}.$$

Hipoteza płaskich przekrojów (nazywana też hipotezą Bernoulliego) jest rozszerzoną hipotezą Kirchhoffa. Dlatego też związki między odształceniami, wyprowadzone na jej podstawie, zapewnią

zgodność deformacji belki i płyty na całej powierzchni styku tych dwóch elementów konstrukcyjnych (rys. 5). W równaniach (3.1) wprowadzone zostały następujące oznaczenia:

$$(3.3) \left\{ \begin{aligned} H_1^{*2} = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha &= \left[\mathbf{R}_\alpha + \eta \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha \right] \left[\mathbf{R}_\alpha + \eta \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha \right] = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\alpha + 2\eta \mathbf{R}_\alpha \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha + \\ &+ \eta^2 \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha = H_1^2 + 2\eta \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \eta^2 \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \\ &= \left(H_1 + \eta \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \right)^2, \\ H_1^* &= H_1 \left(1 + \eta \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \right) = H_1 p_{11}(a, \eta), \quad H_2^{*2} = \mathbf{r}_\eta \mathbf{r}_\eta = \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} = 1, \\ H_3^{*2} &= \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma = 1. \end{aligned} \right.$$

Na podstawie równań (3.2) i (3.3) składowe tensora odkształcenia można napisać w postaci

$$(3.4) \left\{ \begin{aligned} \bar{e}_{11}^* &= \frac{1}{p_{11}^2(a, \eta)} (e_{11} + \eta \bar{\kappa}_{22} + \gamma \kappa_{11} + \eta^2 \bar{\kappa}_{12} + \eta \gamma \bar{\kappa}_{13}), \\ \bar{e}_{22}^* &= 0, \quad \bar{e}_{33}^* = e_{33} = 0, \\ \bar{e}_{12}^* &= \frac{1}{p_{11}(a, \eta)} (e_{12} + \eta \vartheta_{11} + \gamma \tau_{12}), \quad \bar{e}_{13}^* = \frac{1}{p_{11}(a, \eta)} (e_{13} + \eta \bar{\tau}_{21} + \gamma \vartheta_{12}), \\ \bar{e}_{23}^* &= e_{23} = 0. \end{aligned} \right.$$

W równaniach (3.4) wprowadzono oznaczenia:

$$(3.5) \left\{ \begin{aligned} e_{11} &= \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} \frac{\mathbf{U}_\alpha}{H_1}, \quad e_{33} = \mathbf{n} \mathbf{m}, \quad e_{12} = \frac{\mathbf{U}_\alpha}{H_1} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + \mathbf{p} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1}, \\ e_{13} &= \frac{\mathbf{U}_\alpha}{H_1} \mathbf{n} + \mathbf{m} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} = 0, \quad e_{23} = \mathbf{p} \mathbf{n} + \mathbf{m} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}, \quad \kappa_{11} = \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} \frac{\mathbf{m}_\alpha}{H_1}, \\ \tau_{12} &= \frac{\mathbf{m}_\alpha}{H_1} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}, \quad \bar{\tau}_{21} = \frac{1}{H_1} \mathbf{p}_\alpha \mathbf{n} + \frac{1}{H_1} \mathbf{m} \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha, \\ \bar{\kappa}_{22} &= \frac{1}{H_1} \frac{\mathbf{U}_\alpha}{H_1} \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha + \frac{\mathbf{p}_\alpha}{H_1} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1}, \quad \bar{\kappa}_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\mathbf{p}_\alpha}{H_1} \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha, \\ \bar{\kappa}_{13} &= \frac{1}{H_1} \frac{\mathbf{m}_\alpha}{H_1} \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha, \quad \vartheta_{11} = \frac{\mathbf{p}_\alpha}{H_1} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + \frac{\mathbf{p}}{H_1} \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha, \quad \vartheta_{12} = \frac{\mathbf{m}_\alpha}{H_1} \mathbf{n} = 0. \end{aligned} \right.$$

Z porównania równań (3.5) z równaniami (2.11) widać, że niektóre składowe deformacji są równe. Poniżej wykazemy, że również wyrazy $\bar{\tau}_{21}$, $\bar{\kappa}_{22}$, $\bar{\kappa}_{12}$, $\bar{\kappa}_{13}$ i ϑ_{11} można wyrazić za pomocą tensora odkształcenia płyt na jej krawędzi. Istotnie,

$$\bar{\tau}_{21} = \frac{1}{H_1} \left[\mathbf{p}_\alpha \mathbf{n} + \mathbf{m} \left(\frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha \right] = \frac{1}{H_1} \left[(\mathbf{p} \mathbf{n})_\alpha + \left(\mathbf{m} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha - \mathbf{m}_\alpha \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right] = -\tau_{12},$$

ponieważ

$$(3.6) \quad \begin{cases} (\mathbf{pn})_\alpha + \left(\mathbf{m} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right)_\alpha = (\omega_{23})_\alpha - (\omega_{23})_\alpha = 0, \\ \vartheta_{11} = \frac{1}{H_1} \left[\mathbf{p} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} \right]_\alpha = 0, \quad \bar{\kappa}_{22} = \frac{1}{H_1} (\omega_{21})_\alpha + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} e_{11}, \\ \bar{\kappa}_{12} = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} (\omega_{21})_\alpha, \quad \bar{\kappa}_{13} = -\frac{1}{H_1^2 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} (\omega_{13})_\alpha - \\ - \frac{1}{H_1 H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \omega_{23}. \end{cases}$$

Składowe tensora odkształcenia dla dowolnego punktu belki wyrażają się za pomocą składowych deformacji płyty na jej krawędzi w sposób następujący:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \bar{e}_{11}^* &= \frac{1}{p_{11}^y(\alpha, \eta)} \left\{ e_{11} + \eta \left[\frac{1}{H_1} (\omega_{21})_\alpha + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} e_{11} \right] + \right. \\ &+ \gamma \kappa_{11} + \eta^2 \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} (\omega_{21})_\alpha - \eta \gamma \left[\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} (\omega_{13})_\alpha + \frac{1}{H_1 H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \omega_{23} \right] \left. \right\}, \\ \bar{e}_{22}^* &= 0, \quad \bar{e}_{33}^* = 0, \quad \bar{e}_{23}^* = 0, \quad \bar{e}_{12}^* = \frac{1}{p_{11}(\alpha, \eta)} (e_{12} + \gamma \tau_{12}), \\ \bar{e}_{1.}^* &= -\frac{\eta}{p_{11}(\alpha, \eta)} \tau_{12}. \end{aligned}$$

Postępując analogicznie wyznaczmy składowe tensora odkształcenia w belce wzmacniającej krawędź pokrywającą się z przekrojem $\alpha = \alpha_0$. Równanie dowolnego punktu w belce wyraża się następująco w ruchomym układzie odniesienia $\mathbf{R}_\alpha/H_1, \mathbf{R}_\beta/H_2, \mathbf{n}$ utworzonym na krawędzi płyty:

$$\mathbf{r}(\beta, \xi, \gamma) = \mathbf{R}(\alpha, \beta) + \xi \frac{\mathbf{R}_\alpha(\alpha_0, \beta)}{H_1(\alpha_0, \beta)} + \gamma \mathbf{n}.$$

Na podstawie hipotezy płaskich przekrojów przemieszczenie dowolnego punktu belki można przedstawić za pomocą przemieszczenia płyty na jej krawędzi:

$$(3.8) \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}(\alpha_0, \beta) + \xi \mathbf{t}(\alpha_0, \beta) + \gamma \mathbf{m}(\alpha_0, \beta).$$

W równaniu (3.8) \mathbf{t} i \mathbf{m} oznaczają deformacje osi $\mathbf{R}_\alpha(\alpha_0, \beta)/H_1(\alpha_0, \beta)$ oraz osi \mathbf{n} na krawędzi płyty. Deformacje osi mają następujące składowe:

$$(3.9) \quad \mathbf{t} = \omega_{12} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + \omega_{13} \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} = -\omega_{13} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} - \omega_{23} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}.$$

Składowe tensora odkształcenia ($e_{i\alpha}^*$) dla dowolnego punktu belki wyrażają się następująco:

$$(3.10) \quad \begin{cases} \bar{e}_{11}^* = \frac{r_\xi}{H_1^*} \frac{U_\xi^*}{H_1^*}, & \bar{e}_{12}^* = \frac{r'_\xi}{H_1^*} \frac{r'_\beta}{H_2^*}, & \bar{e}_{13}^* = \frac{r_\beta}{H_2^*} \frac{U_\beta^*}{H_2^*}, \\ \bar{e}_{13}^* = \frac{r'_\xi}{H_1^*} \frac{r'_\gamma}{H_3^*}, & \bar{e}_{33}^* = \frac{r_\gamma}{H_3^*} \frac{U_\gamma^*}{H_3^*}, & \bar{e}_{22}^* = \frac{r'_\beta}{H_2^*} \frac{r'_\gamma}{H_3^*}. \end{cases}$$

W równaniach (3.10) wprowadzono oznaczenia

$$(3.11) \quad \begin{cases} H_1^{*2} = r_\xi r_\xi = 1, \\ H_2^{*2} = r_\beta r_\beta = \left[R_\beta + \xi \left(\frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta \right] \left[R_\beta + \xi \left(\frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta \right] = R_\beta R_\beta + 2\xi R_\beta \left(\frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta + \xi^2 \left(\frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta \left(\frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta = \left(H_2 + \xi \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right)^2, \\ H_2^* = H_2 \left(1 + \xi \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) = H_2 p_{22}(\beta, \xi), & H_3^{*2} = r_\gamma r_\gamma = 1. \end{cases}$$

Na podstawie równań (3.8) i (3.11) można równania (3.10) przekształcić do postaci

$$(3.12) \quad \begin{cases} \bar{e}_{11}^* = 0, & \bar{e}_{22}^* = \frac{1}{p_{22}^2(\beta, \xi)} (e_{22} + \xi \bar{\kappa}_{11} + \gamma \kappa_{22} + \xi^2 \bar{\kappa}_{21} + \xi \gamma \bar{\kappa}_{23}), \\ \bar{e}_{33}^* = 0, & \bar{e}_{21}^* = \frac{1}{p_{22}(\beta, \xi)} (e_{21} + \xi \vartheta_{21} + \gamma \tau_{21}), \\ \bar{e}_{13}^* = 0, & \bar{e}_{23}^* = \frac{1}{p_{22}(\beta, \xi)} (e_{23} + \xi \tau_{12} + \gamma \vartheta_{22}). \end{cases}$$

W równaniach (3.12) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(3.13) \quad \begin{cases} e_{23} = \frac{R_\beta}{H_2} \frac{U_\beta}{H_2}, & e_{21} = \frac{U_\beta}{H_2} \frac{R_\alpha}{H_1} + t \frac{R_\beta}{H_2}, & e_{23} = \frac{U_\beta}{H_2} n + m \frac{R_\beta}{H_2} = 0, \\ \kappa_{22} = \frac{R_\beta}{H_2} \frac{m_\beta}{H_2}, & \tau_{21} = \frac{m_\beta}{H_2} \frac{R_\alpha}{H_1}, & \bar{\tau}_{12} = \frac{1}{H_2} t_\beta n + \frac{1}{H_2} m \left(\frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta, \\ \bar{\kappa}_{11} = \frac{1}{H_2} \frac{U_\beta}{H_2} \left(\frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta + \frac{t_\beta}{H_2} \frac{R_\beta}{H_2}, & \bar{\kappa}_{21} = \frac{1}{H_2} \frac{t_\beta}{H_2} \left(\frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta, \\ \bar{\kappa}_{23} = \frac{1}{H_2} \frac{m_\beta}{H_2} \left(\frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta, & \vartheta_{21} = \frac{1}{H_2} \left(t \frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta = 0, & \vartheta_{22} = \frac{m_\beta}{H_2} n = 0, \\ \bar{\tau}_{12} = \frac{1}{H_2} \left[(tn)_\beta + \left(m \frac{R_\alpha}{H_1} \right)_\beta - m_\beta \frac{R_\alpha}{H_1} \right] = -\tau_{21}, \\ \bar{\kappa}_{11} = \frac{1}{H_2} (\omega_{12})_\beta + \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} e_{22}, & \bar{\kappa}_{21} = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} (\omega_{12})_\beta, \\ \bar{\kappa}_{23} = -\frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} (\omega_{23})_\beta - \frac{1}{H_2^2 H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \omega_{13}. \end{cases}$$

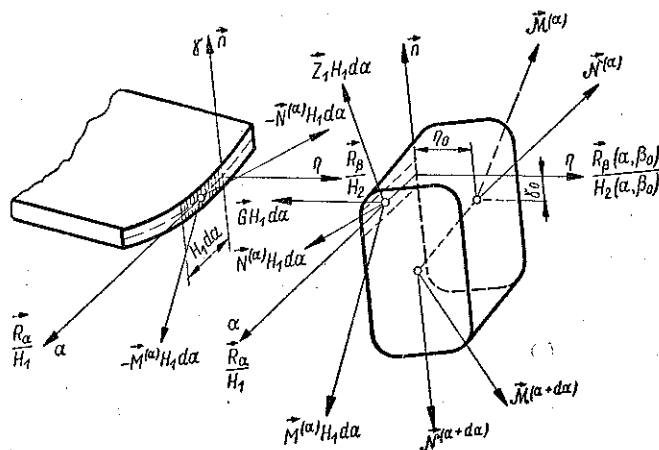
Na podstawie (3.13) przekształcamy równania (3.12) do postaci (3.14)

$$(3.14) \quad \begin{cases} \bar{e}_{11}^* = 0, & \bar{e}_{33}^* = 0, \\ \bar{e}_{22}^* = \frac{1}{p_{22}^2(\beta, \xi)} \left\{ e_{22} + \xi \left[\frac{1}{H_2} (\omega_{12})_\beta + \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} e_{22} \right] + \gamma \kappa_{22} + \right. \\ \left. + \xi^2 \frac{1}{H_2^2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} (\omega_{12})_\beta - \xi \gamma \left[\frac{1}{H_2^2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} (\omega_{23})_\beta + \frac{1}{H_2^2 H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \omega_{13} \right] \right\}, \\ \bar{e}_{21}^* = \frac{1}{p_{22}(\beta, \xi)} (e_{21} + \gamma \tau_{21}), & \bar{e}_{13}^* = 0, & \bar{e}_{23}^* = -\frac{\xi}{p_{22}(\beta, \xi)} \tau_{21}. \end{cases}$$

Równania (3.7) i (3.14) posłużą do napisania warunków zgodności odkształceń w belce i w płycie na krawędzi ich kontaktu.

4. Wielkości statyczne w belce. Równania równowagi

Na belkę połączoną monolitycznie z płytą oddziałują wielkości statyczne płyty. Rozpatrzmy naprzód krawędź $\beta = \beta_0$. Na rysunku 6 przedstawiono fragment krawędzi płyty oraz, ze względów rysunkowych, odsunięty od niej element belki. Na krawędzi płyty działają: siła — $N^{(\alpha)} H_1 da$ oraz moment — $M^{(\alpha)} H_1 da$. Na element belki działają równoważące wielkości statyczne z płyty, oddziaływania $N^{(\alpha)} H_1 da$, $M^{(\alpha)} H_1 da$, obciążenie bezpośrednie belki siłą $G H_1 da$ i momentem $Z H_1 da$ oraz siły wewnętrzne w belce.



Rys. 6

Oddziaływania pochodzące od płyty mają składowe podane równaniami (2.4). Obciążenie bezpośrednie belki ma składowe

$$(4.1) \quad \mathbf{G} = g_1 \frac{R_\alpha}{H_1} + g_2 \frac{R_\beta}{H_2} - g_3 \mathbf{n}, \quad \mathbf{Z} = z_1 \frac{R_\alpha}{H_1} + z_2 \frac{R_\beta}{H_2} + z_3 \mathbf{n}.$$

Będziemy się posługiwać siłami i momentami wewnętrznymi belki, powstałymi ze zredukowania naprężeń działających w przekroju, a odniesionymi do środka ciężkości belki. Równanie osi belki traktowanej jako miejsce geometryczne środków ciężkości przekrojów można napisać

$$\mathbf{r}(a, \beta_0) = \mathbf{R}(a, \beta_0) + \eta_0(a) \frac{\mathbf{R}_\beta(a, \beta_0)}{H_2(a, \beta_0)} + \gamma_0(a) \mathbf{n}.$$

Oznaczmy wektor naprężeń w przekroju a, β_0 przez $\vec{\sigma}^*(a, \beta_0, \eta, \gamma)$. Wówczas odniesiona do środka ciężkości belki siła wewnętrzna i moment wynoszą¹

$$(4.2) \quad \begin{cases} \mathbf{n}^{(a)} = \int_F \vec{\sigma}^* H_2^* H_3^* d\eta d\gamma, \\ \mathbf{m}^{(a)} = - \int_F \vec{\sigma}^* \times \left[(\eta - \eta_0) \frac{\mathbf{r}_\eta}{H_2^*} + (\gamma - \gamma_0) \frac{\mathbf{r}_\gamma}{H_3^*} \right] H_2^* H_3^* d\eta d\gamma. \end{cases}$$

Całkowanie należy wykonać po całym przekroju F belki. W równaniu (4.2) wprowadzone zostały oznaczenia $H_2^* = \mathbf{r}_\eta \mathbf{r}_\eta = 1$ oraz $H_3^* = \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma = 1$. Składowe wielkości statycznych $\mathbf{n}^{(a)}$ i $\mathbf{m}^{(a)}$ oznaczamy w następujący sposób:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \mathbf{n}^{(a)} = -n \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + t_2 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + t_1 \mathbf{n}, \\ \mathbf{m}^{(a)} = m_s \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + m_1 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + m_2 \mathbf{n}. \end{cases}$$

Siły wewnętrzne w belce są w równowadze z obciążeniami. Równania równowagi składają się z sumy sił i sumy momentów. Obie te sumy muszą być równe zeru. Suma sił wynosi:

$$(4.4) \quad -\delta \mathbf{n}^{(a)} + \mathbf{N}^{(a)} H_1 da + \mathbf{G} H_1 da = 0.$$

W równaniu (4.4) wykorzystano następującą zależność:

$$\mathbf{n}^{(a+da)} = -\mathbf{n}^{(a)} - \delta \mathbf{n}^{(a)} \approx -\mathbf{n}^{(a)} - \mathbf{n}_a^{(a)} da.$$

Podobnie można napisać:

$$\mathbf{m}^{(a+da)} = -\mathbf{m}^{(a)} - \delta \mathbf{m}^{(a)} \approx -\mathbf{m}^{(a)} - \mathbf{m}_a^{(a)} da.$$

Momenty obliczamy względem początku układu odniesienia; otrzymamy

- 1) $\mathbf{M}^{(a)} H_1 da,$
- 2) $Z H_1 da,$
- 3) $\mathbf{m}^{(a)},$
- 4) $-\mathbf{m}^{(a)} - \mathbf{m}_a^{(a)} da,$
- 5) $\mathbf{R}(a, \beta_0) \times \mathbf{N}^{(a)} H_1 da,$
- 6) $\mathbf{R}(a, \beta_0) \times \mathbf{G} H_1 da,$
- 7) $\mathbf{r} \times \mathbf{n}^{(a)},$
- 8) $(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times (-\mathbf{n}^{(a)} - \mathbf{n}_a^{(a)} da).$

¹ Na rysunku 6 oznaczone są symbolami $\bar{\mathbf{N}}^{(a)}$ i $\bar{\mathbf{M}}^{(a)}$.

Sumując powyższe momenty otrzymamy

$$-m_a^{(\alpha)} da - \left(R + \eta_0 \frac{R_\beta}{H_2} + \gamma_0 n \right) \times n_a^{(\alpha)} da - \left[R_\alpha + \eta_{0\alpha} \frac{R_\beta}{H_2} + \gamma_{0\alpha} n + \eta_0 \left(\frac{R_\beta}{H_2} \right)_\alpha \right] \times n^{(\alpha)} da + R \times N^{(\alpha)} H_1 da + R \times G H_1 da + M^{(\alpha)} H_1 da + Z H_1 da = 0,$$

a po zgrupowaniu wyrazów

$$R \times [-n_a^{(\alpha)} da + N^{(\alpha)} H_1 da + G H_1 da] - m_a^{(\alpha)} da - \left[\eta_0 \frac{R_\beta}{H_2} + \gamma_0 n \right] \times n_a^{(\alpha)} da - \left[R_\alpha + \eta_{0\alpha} \frac{R_\beta}{H_2} + \gamma_{0\alpha} n + \eta_0 \left(\frac{R_\beta}{H_2} \right)_\alpha \right] \times n^{(\alpha)} da + M^{(\alpha)} H_1 da + Z H_1 da = 0.$$

Uwzględniając, że wyraz w pierwszym nawiasie na podstawie (4.4) jest równy zeru, otrzymamy

$$(4.5) \quad -m_a^{(\alpha)} - \left[\eta_0 \frac{R_\beta}{H_2} + \gamma_0 n \right] \times n_a^{(\alpha)} - \left[R_\alpha + \eta_{0\alpha} \frac{R_\beta}{H_2} + \gamma_{0\alpha} n + \eta_0 \left(\frac{R_\beta}{H_2} \right)_\alpha \right] \times n^{(\alpha)} + H_1 M^{(\alpha)} + Z H_1 = 0.$$

Rzutuując równania (4.4) i (4.5) na kierunki $R_\alpha H_1$, $R_\beta H_1$, n , otrzymamy sześć skalarnych równań równowagi dla $\beta = \beta_0$ i $\beta = \beta_1 < \beta_0$:

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_\alpha - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} t_2 \pm H_1 S_2 + H_1 g_1 = 0, \\ -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} n - t_{2\alpha} \mp H_1 N_2 + H_1 g_2 = 0, \\ -t_{1\alpha} \pm H_1 Q_2 - g_3 H_1 = 0, \\ -m_{s\alpha} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} m_1 \mp \eta_0 t_{1\alpha} + \gamma_0 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} n + \gamma_0 t_{2\alpha} \mp \eta_{0\alpha} t_1 + \gamma_{0\alpha} t_2 \mp M_2 H_1 + Z_1 H_1 = 0, \\ -m_{1\alpha} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} m_s + \gamma_0 n_\alpha - \gamma_0 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} t_2 + t_1 H_1 \pm \eta_0 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} t_1 + \gamma_{0\alpha} n \mp H_1 M_{21} + Z_2 H_1 = 0, \\ -m_{2\alpha} \mp \eta_0 n_\alpha - t_2 H_1 \mp \eta_{0\alpha} n + z_3 H_1 = 0. \end{array} \right.$$

Górne znaki dodawania odnoszą się do krawędzi $\beta = \beta_0$, dolne dla $\beta = \beta_1 < \beta_0$. Analogicznie postępując wyprowadzimy równania równowagi dla belki wzmacniającej krawędź $a = a_0$.

Równanie osi belki ma postać

$$\mathbf{r}(\alpha_0, \beta) = \mathbf{R}(\alpha_0, \beta) + \xi_0(\beta) \frac{\mathbf{R}_\alpha(\alpha_0, \beta)}{H_1(\alpha_0, \beta)} + \gamma_0(\beta) \mathbf{n}.$$

Składowe wielkości statycznych $\mathbf{n}^{(\beta)}$ i $\mathbf{m}^{(\beta)}$ można rozłożyć w następujący sposób:

$$(4.7) \quad \begin{cases} \mathbf{n}^{(\beta)} = t_2 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} - n \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + t_1 \mathbf{n}, \\ \mathbf{m}^{(\beta)} = m_1 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + m_s \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + m_2 \mathbf{n}. \end{cases}$$

Równania równowagi mają postać

$$(4.8) \quad \begin{cases} -\mathbf{n}_\beta^{(\beta)} + H_2 \mathbf{N}^{(\beta)} + H_2 \mathbf{G} = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{m}_\beta^{(\beta)} - \left[\xi_0 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + \gamma_0 \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n}_\beta^{(\beta)} - \left[\mathbf{R}_\beta + \xi_{1,\beta} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + \right. \\ \left. + \gamma_{1,\beta} \mathbf{n} + \xi_0 \left(\frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} \right)_\beta \right] \times \mathbf{n}^{(\beta)} + H_2 \mathbf{M}^{(\beta)} + H_2 \mathbf{Z} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Zastąpmy równania wektorowe (4.8) równaniami skalarnymi w układzie \mathbf{R}_α/H_1 , \mathbf{R}_β/H_2 , \mathbf{n} ; otrzymamy sześć skalarnych równań równowagi ($\alpha = \alpha_0$) i ($\alpha = \alpha_1 < \alpha_0$):

$$(4.9) \quad \begin{cases} -t_{2\beta} - n \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \mp H_2 N_1 + H_2 g_1 = 0, \\ -t_2 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + n_\beta \mp H_2 S_1 + H_2 g_2 = 0, \\ -t_{1\beta} \pm H_2 Q_1 - H_2 g_3 = 0, \\ -m_{1\beta} + m_s \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \gamma_0 t_2 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} - \gamma_0 n_\beta - H_2 t_1 \mp \xi_0 t_1 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} - \\ - \gamma_{0\beta} n - M_{12} H_2 + z_1 H_2 = 0, \\ -m_1 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} - m_{s\beta} \pm \xi_0 t_{1\beta} - \gamma_0 t_{2\beta} - \gamma_0 n \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \pm \xi_{0\beta} t_1 - \\ - \gamma_{0\beta} t_2 \pm M_1 H_2 + z_2 H_2 = 0, \\ -m_{2\beta} \pm \xi_0 n_\beta + H_2 t_2 \pm \xi_{0\beta} n + z_3 H_2 = 0. \end{cases}$$

Równaniami równowagi (4.6) i (4.9) będziemy się posługiwali przy wyprowadzaniu warunków brzegowych dla płyty wzmocnionej belkami.

5. Związki między wielkościami statycznymi w belce a odkształceniami

Rozważmy najpierw belkę wzmacniającą krawędź płyty, pokrywaną się z przekrojem $\beta = \beta_0$. Przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów tensor naprężeń w dowolnym punkcie belki wyraża się za pomocą składowych odkształcenia na krawędzi powierzchni środkowej płyty. Tensor odkształceń ma postać:

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_{11}^* & \bar{e}_{12}^* & \bar{e}_{13}^* \\ \bar{e}_{21}^* & 0 & 0 \\ \bar{e}_{31}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przyjmujemy analogiczną postać tensora naprężeń:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11}^* & \bar{\sigma}_{12}^* & \bar{\sigma}_{13}^* \\ \bar{\sigma}_{21}^* & 0 & 0 \\ \bar{\sigma}_{31}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Między naprężeniami a odkształceniami na podstawie prawa Hooke'a zachodzą następujące związki:

$$(5.1) \quad \bar{\sigma}_{11}^* = E' \bar{e}_{11}^*, \quad \bar{\sigma}_{12}^* = G' \bar{e}_{12}^*, \quad \bar{\sigma}_{13}^* = G' \bar{e}_{13}^*.$$

W równaniach (5.1) E' i G' oznaczają moduły Yunga i Kirchhoffa w belce. Uwzględniając równania (3.7) otrzymamy z równań (5.1):

$$(5.2) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_{11}^* = \frac{E'}{p_{11}^2(a, \eta)} (e_{11} + \eta \bar{\kappa}_{23} + \gamma \kappa_{11} + \eta^2 \bar{\kappa}_{12} + \eta \gamma \bar{\kappa}_{13}), \\ \bar{\sigma}_{12}^* = \frac{G'}{p_{11}(a, \eta)} (e_{12} + \gamma \tau_{12}), \\ \bar{\sigma}_{13}^* = -\frac{G' \eta}{p_{11}(a, \eta)} \tau_{12}. \end{cases}$$

Składowe wektora naprężeń mają następujące kierunki:

$$\vec{\sigma}^*(a, \beta_0, \eta, \gamma) = -\bar{\sigma}_{11}^* \frac{\mathbf{r}_\alpha}{H_1^*} - \bar{\sigma}_{12}^* \frac{\mathbf{r}_\eta}{H_2^*} - \bar{\sigma}_{13}^* \frac{\mathbf{r}_\gamma}{H_3^*}.$$

Ponieważ na podstawie równań (3.3)

$$H_1^* = H_1 p_{11}(a, \eta), \quad H_2^* = H_3^* = 1,$$

$$\frac{\mathbf{r}_\alpha}{H_1^*} = \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1}, \quad \frac{\mathbf{r}_\eta}{H_2^*} = \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}, \quad \frac{\mathbf{r}_\gamma}{H_3^*} = \mathbf{n},$$

więc

$$\vec{\sigma}^*(a, \beta_0, \eta, \gamma) = -\bar{\sigma}_{11}^* \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} - \bar{\sigma}_{12}^* \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} - \bar{\sigma}_{13}^* \mathbf{n}.$$

Na podstawie definicji (4.2) i oznaczeń (4.3) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 -n \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + t_2 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + t_1 \mathbf{n} &= \int_F \left(-\bar{\sigma}_{11}^* \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} - \bar{\sigma}_{12}^* \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} - \bar{\sigma}_{13}^* \mathbf{n} \right) H_2^* H_3^* d\eta d\gamma, \\
 m_s \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + m_1 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + m_2 \mathbf{n} &= - \int_F \left(-\bar{\sigma}_{11}^* \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} - \bar{\sigma}_{12}^* \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} - \bar{\sigma}_{13}^* \mathbf{n} \right) \times \\
 &\quad \times \left((\eta - \eta_0) \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + (\gamma - \gamma_0) \mathbf{n} \right) H_2^* H_3^* d\eta d\gamma.
 \end{aligned}$$

Porównując składowe po obu stronach znajdziemy

$$(5.3) \quad \begin{cases} n = \int_F \bar{\sigma}_{11}^* d\eta d\gamma, & m_s = - \int_F [\bar{\sigma}_{13}^* (\eta - \eta_0) - \bar{\sigma}_{12}^* (\gamma - \gamma_0)] d\eta d\gamma, \\ t_2 = - \int_F \bar{\sigma}_{12}^* d\eta d\gamma, & m_1 = - \int_F \bar{\sigma}_{11}^* (\gamma - \gamma_0) d\eta d\gamma, \\ t_1 = - \int_F \bar{\sigma}_{13}^* d\eta d\gamma, & m_2 = \int_F \bar{\sigma}_{11}^* (\eta - \eta_0) d\eta d\gamma. \end{cases}$$

Wstawiając do równań (5.3) zależności (5.2) otrzymamy

$$(5.4) \quad \begin{cases} n = \int_F \frac{E'}{p_{11}^2(a, \eta)} (e_{11} + \eta \bar{\kappa}_{22} + \gamma \kappa_{11} + \eta^2 \bar{\kappa}_{12} + \eta \gamma \bar{\kappa}_{13}) d\eta d\gamma, \\ t_2 = - \int_F \frac{G'}{p_{11}(a, \eta)} (e_{12} + \gamma \tau_{12}) d\eta d\gamma, \\ t_1 = \int_F \frac{G \eta \tau_{12}}{p_{11}(a, \eta)} d\eta d\gamma, \\ m_2 = \int_F \frac{E'(\eta - \eta_0)}{p_{11}^2(a, \eta)} (e_{11} + \eta \bar{\kappa}_{22} + \gamma \kappa_{11} + \eta^2 \bar{\kappa}_{12} + \eta \gamma \bar{\kappa}_{13}) d\eta d\gamma, \\ m_1 = - \int_F \frac{E'(\gamma - \gamma_0)}{p_{11}^2(a, \eta)} (e_{11} + \eta \bar{\kappa}_{22} + \gamma \kappa_{11} + \eta^2 \bar{\kappa}_{12} + \eta \gamma \bar{\kappa}_{13}) d\eta d\gamma, \\ m_s = \int_F G' \left[\frac{\eta(\eta - \eta_0)}{p_{11}(a, \eta)} \tau_{12} + \frac{\gamma - \gamma_0}{p_{11}(a, \eta)} (e_{12} + \gamma \tau_{12}) \right] d\eta d\gamma. \end{cases}$$

Dla belek smukłych przyjmujemy

$$(5.5) \quad p_{11}(a, \eta) = 1.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 & F = \int_F d\eta d\gamma, \quad S_\eta = \int_F \eta d\eta d\gamma = F\eta_0, \quad S_\gamma = \int_F \gamma d\eta d\gamma = F\gamma_0, \\
 & I_\eta = \int_F \eta^2 dx dy = I_2 + F\eta_0^2, \quad I_\gamma = \int_F \gamma^2 d\eta d\gamma = I_3 + F\gamma_0^2, \\
 & I_{\eta\gamma} = \int_F \eta\gamma d\eta d\gamma = I_{23} + F\eta_0\gamma_0, \quad \int_F (\eta - \eta_0) d\eta d\gamma = 0, \\
 & \int_F (\gamma - \gamma_0) dx dy = 0, \quad \int_F \eta(\eta - \eta_0) dx dy = I_\eta - \eta_0^2 F = I_2, \\
 & \int_F \gamma(\gamma - \gamma_0) d\eta d\gamma = I_\gamma - \gamma_0^2 F = I_3, \\
 & \int_F \gamma(\eta - \eta_0) d\eta d\gamma = I_{\eta\gamma} - \eta_0\gamma_0 F = I_{32}, \\
 & \int_F \eta(\gamma - \gamma_0) d\eta d\gamma = I_{\eta\gamma} - \eta_0\gamma_0 F = I_{23}, \\
 & \int_F \eta^2(\eta - \eta_0) d\eta d\gamma = W_2, \quad \int_F \gamma^2(\eta - \eta_0) d\eta d\gamma = W_{32}, \\
 & \int_F \eta^2(\gamma - \gamma_0) d\eta d\gamma = W_{23}, \quad \int_F \gamma^2(\gamma - \gamma_0) d\eta d\gamma = W_3, \\
 & \int_F \eta\gamma(\eta - \eta_0) d\eta d\gamma = W_{232}, \quad \int_F \eta\gamma(\gamma - \gamma_0) d\eta d\gamma = W_{233}.
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

We wzorach tych I_2 , I_3 i I_{23} oznaczają odpowiednio momenty bezwładności względem osi przechodzących przez środek ciężkości przekroju belki. Ośie te są równoległe do przyjętego układu odniesienia. Wykorzystując oznaczenia (5.6) oraz założenie (5.5) napiszemy równania w postaci

$$\begin{cases}
 n = E' F(e_{11} + \eta_0 \bar{x}_{22} + \gamma_0 \kappa_{11}) + E'(I_\eta \bar{x}_{12} + I_{\eta\gamma} \bar{x}_{13}), \\
 t = -G' F(e_{12} + \gamma_0 \tau_{12}), \quad t_1 = G' F \eta_0 \tau_{12}, \\
 m_2 = E'(I_2 \bar{x}_{22} + I_{32} \kappa_{11}) + E'(W_2 \bar{x}_{12} + W_{232} \bar{x}_{13}), \\
 m_1 = -E'(I_{23} \bar{x}_{22} + I_3 \kappa_{11}) - E'(W_{23} \bar{x}_{12} + W_{233} \bar{x}_{13}), \\
 m_3 = G'(I_2 + I_3) \tau_{12}.
 \end{cases}
 \tag{5.7}$$

Analogiczne związki można wyprowadzić dla belki wzmacniającej krawędź płyty $\alpha = \alpha_0$. Tensor odkształceń ma składowe

$$\begin{bmatrix}
 0 & \bar{e}_{12}^* & 0 \\
 \bar{e}_{21}^* & \bar{e}_{22}^* & \bar{e}_{23}^* \\
 0 & \bar{e}_{32}^* & 0
 \end{bmatrix},$$

a tensor naprężeń składowe

$$\begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma}_{12}^* & 0 \\ \bar{\sigma}_{21}^* & \bar{\sigma}_{22}^* & \bar{\sigma}_{23}^* \\ 0 & \bar{\sigma}_{32}^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Wprowadźmy jeszcze następujące oznaczenia:

$$(5.8) \left\{ \begin{aligned} F &= \int_F d\xi d\gamma, & S_\xi &= \int_F \xi d\eta d\gamma = F\xi_0, & S_\gamma &= \int_F \gamma d\eta d\gamma = F\gamma_0, \\ I_\xi &= \int_F \xi^2 d\xi d\gamma = I_1 + F\xi_0^2, \\ I_\gamma &= \int_F \gamma^2 d\xi d\gamma = I_3 + F\gamma_0^2, \\ I_{\xi\gamma} &= \int_F \xi\gamma d\xi d\gamma = I_{13} + F\xi_0\gamma_0, \\ \int_F (\xi - \xi_0) d\xi d\gamma &= 0, & \int_F (\gamma - \gamma_0) d\xi d\gamma &= 0, \\ \int_F \xi(\xi - \xi_0) d\xi d\gamma &= I_\xi - \xi_0^2 F = I_1, \\ \int_F \gamma(\gamma - \gamma_0) d\xi d\gamma &= I_\gamma - \gamma_0^2 F = I_3, \\ \int_F \gamma(\xi - \xi_0) d\xi d\gamma &= I_{\gamma\xi} - \xi_0\gamma_0 F = I_{32}, \\ \int_F \xi(\gamma - \gamma_0) d\xi d\gamma &= I_{\xi\gamma} - \xi_0\gamma_0 F = I_{23}, \\ \int_F \xi^2(\xi - \xi_0) d\xi d\gamma &= W_1, & \int_F \xi^2(\gamma - \gamma_0) d\xi d\gamma &= W_{13}, \\ \int_F \gamma^2(\xi - \xi_0) d\xi d\gamma &= W_{31}, & \int_F \gamma^2(\gamma - \gamma_0) d\xi d\gamma &= W_3, \\ \int_F \xi\gamma(\xi - \xi_0) d\xi d\gamma &= W_{131}, & \int_F \xi\gamma(\gamma - \gamma_0) d\xi d\gamma &= W_{133}. \end{aligned} \right.$$

Otrzymamy

$$(5.9) \left\{ \begin{aligned} n &= E' F(e_{22} + \xi_0 \bar{\kappa}_{11} + \gamma_0 \bar{\kappa}_{22}) + E'(I_\xi \bar{\kappa}_{21} + I_{\xi\gamma} \bar{\kappa}_{23}), \\ t_2 &= -G' F(e_{21} + \gamma_0 \tau_{21}), & t_1 &= G' F \xi_0 \tau_{21}, \\ m_1 &= E'(I_{23} \bar{\kappa}_{11} + I_3 \bar{\kappa}_{22}) + E'(W_{13} \bar{\kappa}_{21} + W_{133} \bar{\kappa}_{23}), \\ m_2 &= -E'(I_1 \bar{\kappa}_{11} + I_{32} \bar{\kappa}_{22}) - E'(W_1 \bar{\kappa}_{21} + W_{131} \bar{\kappa}_{23}), \\ m_3 &= -G'(I_1 + I_3) \tau_{21}. \end{aligned} \right.$$

Równania (5.7) i (5.9) posłużą do wyznaczenia zależności między wielkościami statycznymi w belce i w płycie na jej krawędzi.

6. Związki między wielkościami statycznymi w belce a wielkościami statycznymi w płycie na jej krawędzi

Równania (2.18) przedstawiają związki między składowymi tensora odkształceń a wielkościami statycznymi w płycie. Związki te mają zastosowanie w całym obszarze płyty łącznie z krawędziami. Wielkości statyczne w belce połączonej monolitycznie z płytą wyrażają się również za pomocą składowych tensora odkształcenia w płycie na jej krawędzi. Będziemy posługiwali się przybliżonymi równaniami uzyskanymi z (5.7) i (5.9). Dla krawędzi $\beta = \beta_0$ i $\beta = \beta_1 < \beta_0$ mamy

$$(6.1) \quad \begin{cases} n = E' F(e_{11} \pm \eta_0 \bar{\kappa}_{22} + \gamma_0 \kappa_{11}), & m_2 = E' (I_2 \bar{\kappa}_{22} \pm I_{32} \kappa_{11}), \\ t_2 = -G' F(e_{12} + \gamma_0 \tau_{12}), & m_1 = -E' (\pm I_{23} \bar{\kappa}_{22} + I_3 \kappa_{11}), \\ t_1 = \pm G' F \eta_0 \tau_{12}, & m_s = G' I_0 \tau_{12}. \end{cases}$$

Dla krawędzi $\alpha = a_0$ i $\alpha = \alpha_1 < a_0$ mamy

$$(6.2) \quad \begin{cases} n = E' F(e_{22} \pm \xi_0 \bar{\kappa}_{11} + \gamma_0 \kappa_{22}), & m_1 = E' (\pm I_{23} \bar{\kappa}_{11} + I_3 \kappa_{22}), \\ t_2 = -G' F(e_{21} + \gamma_0 \tau_{21}), & m_2 = -E' (I_1 \bar{\kappa}_{11} \pm I_{32} \kappa_{22}), \\ t_1 = \pm G' F \xi_0 \tau_{21}, & m_s = -G' I_0 \tau_{21}. \end{cases}$$

W równaniach (6.1) i (6.2) uwzględniliśmy założenie, że w belce jest liniowy rozkład odkształceń. Wyrazy, które pominęliśmy, mają bardzo małe znaczenie, a wywierają większy wpływ dla grubych i silnie zakrzywionych belek.

W powyższych równaniach składowe tensora odkształcenia e_{12} , e_{21} , e_{11} , e_{22} , τ_{12} , τ_{21} , κ_{11} i κ_{22} są odpowiednio równe składowym odkształcenia płyty na jej krawędzi. Należy jeszcze wyrazić za pomocą powyższych składowych wyrażenia $\bar{\kappa}_{11}$ i $\bar{\kappa}_{22}$, ażeby można było przedstawić wielkości statyczne belki za pomocą wielkości statycznych w płycie. Na podstawie równań (3.6) i (3.13) znajdziemy

$$\bar{\kappa}_{11} = \frac{1}{H_2} (\omega_{12})_\beta + \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} e_{22},$$

$$\bar{\kappa}_{22} = \frac{1}{H_1} (\omega_{21})_\alpha + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} e_{11}.$$

Funkcje $(\omega_{12})_\beta$ i $(\omega_{21})_\alpha$ można przedstawić za pomocą składowych odkształcenia e_{11} , e_{22} i e_{12} . Skorzystamy w tym celu z zależności

$$(6.3) \quad (\lambda + 2G) \operatorname{grad} \Delta^* - 2G \operatorname{rot} \omega^* = 0,$$

stosującej się dla ciała izotropowego podlegającego prawu Hooke'a a przy pominięciu sił masowych i sił bezwładności.

Odliczamy odpowiednie wyrażenia dla płyty:

$$(6.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^* &= e_{11}^* + e_{22}^* = e_{11} + \gamma \kappa_{11} + e_{22} + \gamma \kappa_{22}, \\ \text{grad } \Delta^* &= \frac{\partial \Delta^*}{\partial \alpha} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + \frac{\partial \Delta^*}{\partial \beta} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + \frac{\partial \Delta^*}{\partial \gamma} \mathbf{n}, \\ \omega^* &= \frac{1}{2} (\omega_{32}^* - \omega_{23}^*) \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + \frac{1}{2} (\omega_{13}^* - \omega_{31}^*) \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + \frac{1}{2} (\omega_{21}^* - \omega_{12}^*) \mathbf{n}, \\ \text{rot}_1 \omega^* &= \frac{1}{H_2^2} \left\{ \frac{1}{2} (\omega_{21}^* - \omega_{12}^*)_\beta - \left[\frac{H_2^*}{2} (\omega_{13}^* - \omega_{31}^*) \right]_\gamma \right\}, \\ \text{rot}_2 \omega^* &= \frac{1}{H_1^2} \left\{ \left[\frac{H_1^*}{2} (\omega_{32}^* - \omega_{23}^*) \right]_\gamma - \frac{1}{2} (\omega_{21}^* - \omega_{12}^*)_\alpha \right\}, \\ \text{rot}_3 \omega^* &= \frac{1}{H_1^* H_2^*} \left\{ \left[\frac{H_2^*}{2} (\omega_{13}^* - \omega_{31}^*) \right]_\alpha - \left[\frac{H_1^*}{2} (\omega_{32}^* - \omega_{23}^*) \right]_\beta \right\}. \end{aligned} \right.$$

Na podstawie hipotezy Kirchhoffa (o nieodkształcalności normalnej) otrzymamy dla płyty

$$\left[\frac{H_2^*}{2} (\omega_{13}^* - \omega_{31}^*) \right]_\gamma = 0, \quad \left[\frac{H_1^*}{2} (\omega_{32}^* - \omega_{23}^*) \right]_\gamma = 0, \\ \omega_{13}^* + \omega_{31}^* = 0, \quad \omega_{23}^* + \omega_{32}^* = 0.$$

Zastąpmy równanie wektorowe (6.3) równaniami skalarnymi w układzie $\mathbf{R}_\alpha/H_1, \mathbf{R}_\beta/H_2, \mathbf{n}$; otrzymamy

$$(\lambda + 2G)(e_{11} + \gamma \kappa_{11} + e_{22} + \gamma \kappa_{22})_\alpha = \frac{2G}{H_2^2} \frac{1}{2} (\omega_{21}^* - \omega_{12}^*)_\beta, \\ (\lambda + 2G)(e_{11} + \gamma \kappa_{11} + e_{22} + \gamma \kappa_{22})_\beta = -\frac{2G}{H_1^2} \frac{1}{2} (\omega_{21}^* - \omega_{12}^*)_\alpha, \\ (\lambda + 2G)(\kappa_{11} + \kappa_{22}) = \frac{2G}{H_1^* H_2^*} (H_2^* \omega_{13}^*)_\alpha + \frac{2G}{H_1^* H_2^*} (H_1^* \omega_{23}^*)_\beta.$$

Dla $\gamma = 0$ tj. dla powierzchni środkowej otrzymamy

$$(6.5) \quad \left\{ \begin{aligned} (\lambda + 2G)(e_{11} + e_{22})_\alpha &= \frac{2G}{H_2} \frac{1}{2} (\omega_{21} - \omega_{12})_\beta, \\ (\lambda + 2G)(e_{11} + e_{22})_\beta &= -\frac{2G}{H_1} \frac{1}{2} (\omega_{21} - \omega_{12})_\alpha, \\ (\lambda + 2G)(\kappa_{11} + \kappa_{22}) &= \frac{2G}{H_1 H_2} (H_2 \omega_{13})_\alpha + \frac{2G}{H_1 H_2} (H_1 \omega_{23})_\beta. \end{aligned} \right.$$

Z równania (2.18) wynika, że

$$e_{12} = \omega_{12} + \omega_{21} = -\frac{1}{Gh} S_2 = \frac{1}{Gh} S_1,$$

a z równania (6.5) wynika, że

$$\frac{G}{H_2} [(\omega_{21})_\beta - (\omega_{12})_\beta] = (\lambda + 2G)(e_{11} + e_{22})_\alpha.$$

Różniczkując równanie pierwsze względem β , a następnie mnożąc je przez G/h_2 oraz odejmując równanie drugie otrzymamy

$$\frac{2G}{H_2}(\omega_{12})_\beta = -\frac{1}{H_2 h} S_{2\beta} - (\lambda + 2G)(e_{11} + e_{22})_\alpha,$$

stąd

$$(6.6) \quad \bar{\omega}_{11} = -\frac{1}{2GhH_2} S_{2\beta} - \frac{\lambda + 2G}{2G}(e_{11} + e_{22})_\alpha + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} e_{22}.$$

Podobnie różniczkując równość

$$e_{11} = \omega_{12} + \omega_{21} = \frac{1}{Gh} S_1,$$

względem α , a następnie mnożąc przez G/H_2 i odejmując od równania

$$-\frac{G}{H_1} [(\omega_{21})_\alpha - (\omega_{12})_\alpha] = (\lambda + 2G)(e_{11} + e_{22})_\beta,$$

otrzymamy

$$\frac{2G}{H_1}(\omega_{21})_\alpha = \frac{1}{H_1 h} S_{1\alpha} - (\lambda + 2G)(e_{11} + e_{22})_\beta.$$

Stąd

$$(6.7) \quad \bar{\omega}_{22} = \frac{1}{2GhH_1} S_{1\alpha} - \frac{(\lambda + 2G)}{2G}(e_{11} + e_{22})_\beta + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} e_{11}.$$

Na podstawie równań (6.6) i (3.7) można związki (6.1) i (6.2) przedstawić w następującej postaci:

dla krawędzi $\beta = \beta_0$ ($\beta = \beta_1 < \beta_0$)

$$(6.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{E'F}{Eh}(N_1 - \nu N_2) + F \left[\mp \eta_0 \frac{m_2 I_3 + m_1 I_{32}}{I_{23} I_{32} - I_2 I_3} + \gamma_0 \frac{m_1 I_2 + m_2 I_{23}}{I_{23} I_{32} - I_2 I_3} \right], \\ t_2 = \frac{G'F}{Gh} S_2 - \frac{6F\gamma_0}{h^2} \frac{G'}{G} M_{21}, \\ t_1 = \pm \frac{6G'F\eta_0}{Gh^3} M_{21}, \\ m_2 = -\frac{E'I_2}{2GhH_1} S_{2\alpha} - \frac{E'I_2}{2EGh} (1 - \nu)(\lambda + 2G)(N_1 + N_2)_\beta + \\ \quad + \frac{E'I_2}{EhH_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} (N_1 - \nu N_2) \mp \frac{12E'I_{32}}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2), \\ m_1 = \pm \frac{E'I_{23}}{2GhH_1} S_{1\alpha} \pm \frac{E'I_{23}(\lambda + 2G)}{2EGh} (1 - \nu)(N_1 + N_2)_\beta \mp \\ \quad \mp \frac{E'I_{23}}{EhH_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} (N_1 - \nu N_2) + \frac{12E'I_3}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2), \\ m_3 = \frac{6G'I_0}{Gh^3} M_{21}; \end{array} \right.$$

dla krawędzi $a = a_0$ ($a = a_1 < a_0$),

$$(6.9) \left\{ \begin{aligned} n &= \frac{E'F}{Eh} (N_2 - \nu N_1) + F \left[\pm \xi_0 \frac{+m_1 I_{32} + m_2 I_3}{I_{23} I_{32} - I_1 I_3} - \gamma_0 \frac{+m_2 I_{23} + m_1 I_1}{I_{23} I_{32} - I_1 I_3} \right], \\ t_2 &= -\frac{G'F}{Gh} S_1 + \frac{6G'F}{Gh^3} \gamma_0 M_{12}, \\ t_1 &= \pm \frac{6G'F\xi_0}{Gh^3} M_{12}, \\ m_1 &= \pm \frac{E' I_{23}}{2GhH_2} S_{1\beta} \mp \frac{E' I_{23}}{2GEh} (\lambda + 2G)(1 - \nu)(N_1 + N_2)\alpha \pm \\ &\quad \pm \frac{E' I_{23}}{EhH_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial a} (N_2 - \nu N_1) - \frac{12E' I_3}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1), \\ m_2 &= -\frac{E' I_1}{2GhH_2} S_{1\beta} + \frac{E' I_1}{2GEh} (\lambda + 2G)(1 - \nu)(N_1 + N_2)\alpha - \\ &\quad - \frac{E' I_1}{EhH_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial a} (N_2 - \nu N_1) \pm \frac{E' I_{32}}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1), \\ m_3 &= \frac{6G' I_0}{Gh^3} M_{12}. \end{aligned} \right.$$

Równania (6.8) i (6.9) zostaną wykorzystane do sformułowania warunków brzegowych dla płyty wzmocnionej belką.

7. Warunki nierozdzielności dla płyty

Sześć równań równowagi nie wystarcza do wyznaczenia dziesięciu niewiadomych wielkości statycznych w płycie. Brakujące równania wyprowadzamy z własności sprężystych materiału konstrukcji, tj. z warunków nierozdzielności oraz warunku statyczno-geometrycznego. Warunek statyczno-geometryczny wynika wprost z równań

$$M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21}^* \gamma d\gamma, \quad M_{12} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}^* \gamma d\gamma.$$

Ze względu na symetrię tensora naprężeń mamy $\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^*$. Stąd

$$(7.1) \quad M_{21} = -M_{12}.$$

Warunek nierozdzielności jest w różny sposób formułowany, lecz daje te same rezultaty. Posłużmy się sformulowaniem Goldienwiewiera ([18], s. 57), który przez warunek nierozdzielności rozumie, zapewnienie dostatecznej gładkości powierzchni odkształconej płyty. Wektor obrotu sprężystego ω powinien spełniać warunek

$$(7.2) \quad \omega_{\alpha\beta} = \omega_{\beta\alpha}.$$

Na podstawie równania (6.4) oraz przyjętej hipotezy Kirchhoffa mamy

$$(7.3) \quad \omega = -\omega_{23} \frac{R_\alpha}{H_1} + \omega_{13} \frac{R_\beta}{H_2} + \frac{\omega_{21} - \omega_{12}}{2} \mathbf{n}.$$

Równanie (7.3) można napisać w symbolice wektorowej przy wykorzystaniu równań (2.13) i (2.15) w następujący sposób:

$$(7.4) \quad \omega = \left(\mathbf{m} \frac{R_\beta}{H_2} \right) \frac{R_\alpha}{H_1} - \left(\mathbf{m} \frac{R_\alpha}{H_1} \right) \frac{R_\beta}{H_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{U_\beta}{H_2} \frac{R_\alpha}{H_1} - \frac{U_\alpha}{H_1} \frac{R_\beta}{H_2} \right) \mathbf{n}.$$

Ponieważ wektor obrotu sprężystego ω wyraża się za pomocą przemieszczenia U , więc warunek (7.2) pociąga za sobą związek

$$(7.5) \quad U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}.$$

Piszemy warunek (7.2) za pomocą wielkości statycznych. Utwórzmy pomocnicze wektory V_1 i V_2 takie, ażeby ich składowe w układzie $R_\alpha, H_1, R_\beta, H_2, \mathbf{n}$ były składowymi tensora odkształceń:

$$(7.6) \quad \frac{V_1}{H_1} = e_{11} \frac{R_\alpha}{H_1} + \frac{1}{2} e_{12} \frac{R_\beta}{H_2}, \quad \frac{V_2}{H_2} = \frac{1}{2} e_{21} \frac{R_\alpha}{H_1} + e_{22} \frac{R_\beta}{H_2}.$$

Równania (7.6) są spełnione, jeżeli przyjmiemy

$$(7.7) \quad \frac{V_1}{H_1} = \frac{U_\alpha}{H_1} + \omega \times \frac{R_\alpha}{H_1}, \quad \frac{V_2}{H_2} = \frac{U_\beta}{H_2} + \omega \times \frac{R_\beta}{H_2}.$$

Na podstawie (7.7) równanie (7.5) można przekształcić do postaci

$$(7.8) \quad V_{1\beta} - V_{2\alpha} - \omega_\beta \times R_\alpha + \omega_\alpha \times R_\beta = 0.$$

Rzutując wektory występujące w równaniu (7.8) na kierunki przyjętego układu odniesienia otrzymamy

$$(7.9) \quad \begin{cases} \frac{R_\alpha}{H_1} (V_{1\beta} - V_{2\alpha}) - H_1 H_2 \xi_1 = 0, \\ \frac{R_\beta}{H_2} (V_{1\beta} - V_{2\alpha}) - H_1 H_2 \xi_2 = 0, \\ \mathbf{n} (V_{1\beta} - V_{2\alpha}) + H_1 H_2 \left(\frac{\omega_\beta}{H_2} \frac{R_\beta}{H_2} + \frac{\omega_\alpha}{H_1} \frac{R_\alpha}{H_1} \right) = 0. \end{cases}$$

W równaniach (7.9) oznaczono:

$$(7.10) \quad \xi_1 = \frac{\omega_\alpha}{H_1} \mathbf{n}, \quad \xi_2 = \frac{\omega_\beta}{H_2} \mathbf{n}.$$

Wektor obrotu sprężystego ω można wyrazić za pomocą składowych odkształceń $\kappa_{11}, \kappa_{22}, \tau_{12}$ i τ_{21} w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha \frac{R_\alpha}{H_1} &= m_\alpha \frac{R_\beta}{H_2} + m \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \frac{R_\alpha}{H_1} - m \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \frac{R_\alpha}{H_1} = m_\alpha \frac{R_\beta}{H_2}, \\ \omega_\alpha \frac{R_\beta}{H_2} &= -m_\alpha \frac{R_\alpha}{H_1}, \quad \omega_\beta \frac{R_\alpha}{H_1} = m_\beta \frac{R_\beta}{H_2}, \quad \omega_\beta \frac{R_\beta}{H_2} = -m_\beta \frac{R_\alpha}{H_1}. \end{aligned}$$

Porównując je z równaniami (2.11) otrzymamy

$$(7.11) \quad \frac{\omega_\alpha}{H_1} \frac{R_\alpha}{H_1} = \tau_{12}, \quad \frac{\omega_\alpha}{H_2} \frac{R_\beta}{H_2} = -\kappa_{11}, \quad \frac{\omega_\beta}{H_2} \frac{R_\alpha}{H_1} = \kappa_{22}, \quad \frac{\omega_\beta}{H_2} \frac{R_\beta}{H_2} = -\tau_{21}.$$

Na podstawie równań (7.10) i (7.11) można znaleźć

$$(7.12) \quad \frac{\omega_\alpha}{H_1} = \tau_{12} \frac{R_\alpha}{H_1} - \kappa_{11} \frac{R_\beta}{H_2} + \xi_1 \mathbf{n}, \quad \frac{\omega_\beta}{H_2} = \kappa_{22} \frac{R_\alpha}{H_1} - \tau_{21} \frac{R_\beta}{H_2} + \xi_2 \mathbf{n}.$$

Za pomocą równań (7.12) i (2.18) można przedstawić pochodne wektora obrotu sprężystego za pomocą wielkości statycznych:

$$(7.13) \quad \begin{cases} \omega_\alpha = H_1 \left[-\frac{6}{Gh^3} M_{12} \frac{R_\alpha}{H_1} + \frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2) \frac{R_\beta}{H_2} + \xi_1 \mathbf{n} \right], \\ \omega_\beta = H_2 \left[-\frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1) \frac{R_\alpha}{H_1} - \frac{6}{Gh^3} M_{21} \frac{R_\beta}{H_2} + \xi_2 \mathbf{n} \right], \end{cases}$$

w którym na podstawie równania (7.9), (7.6), (2.18) mamy

$$\begin{aligned} H_1 H_2 \xi_1 &= \frac{R_\alpha}{H_1} \left\{ \left[H_1 \frac{N_1 - \nu N_2}{Eh} \frac{R_\alpha}{H_1} + \frac{H_1 S_1}{2 Gh} \frac{R_\beta}{H_2} \right]_\beta - \right. \\ &\quad \left. - \left[-\frac{H_2 S_2}{2 Gh} \frac{R_\alpha}{H_1} + H_2 \frac{(N_2 - \nu N_1)}{Eh} \frac{R_\beta}{H_2} \right]_\alpha \right\}, \\ H_1 H_2 \xi_2 &= \frac{R_\beta}{H_2} \left\{ \left[\frac{H_1 (N_1 - \nu N_2)}{Eh} \frac{R_\alpha}{H_1} + \frac{H_1 S_1}{2 Gh} \frac{R_\beta}{H_2} \right]_\beta - \right. \\ &\quad \left. - \left[-\frac{H_2 S_2}{2 Gh} \frac{R_\alpha}{H_1} + \frac{H_2 (N_2 - \nu N_1)}{Eh} \frac{R_\beta}{H_2} \right]_\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Zastępując równanie wektorowe (7.2), po uwzględnieniu wzorów (7.13), przez równania skalarne w przyjętym układzie odniesienia otrzymamy trzy następujące równania:

$$(7.14) \quad \begin{cases} -\frac{6}{Gh^3} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 M_{12}) - \frac{12}{Eh^3} H_1 (M_1 - \nu M_2) \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \\ \quad + \frac{12}{Eh^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} (M_2 - \nu M_1) H_2 + \frac{6}{Gh^3} H_2 M_{21} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} = 0, \\ -\frac{6}{Gh^3} M_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{12}{Eh^3} \frac{\partial}{\partial \beta} H_1 (M_1 - \nu M_2) - \frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1) \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \\ \quad + \frac{6}{Gh^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} H_2 M_{21} = 0, \\ (H_1 \xi_1)_\beta - (H_2 \xi_2)_\alpha = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$H_1 H_2 \xi_1 = \left[\frac{H_1 (N_1 - \nu N_2)}{Eh} \right]_{\beta} - \frac{S_1}{2Gh} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \left(\frac{H_2 S_2}{2Gh} \right)_{\alpha} - \frac{(N_2 - \nu N_1)}{Eh} \frac{\partial H_1}{\partial \beta},$$

$$H_1 H_2 \xi_2 = \frac{(N_1 - \nu N_2)}{Eh} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \left(\frac{H_1 S_1}{2Gh} \right)_{\beta} - \frac{S_2}{2Gh} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - \left[\frac{H_2 (N_2 - \nu N_1)}{Eh} \right]_{\alpha}.$$

Równania równowagi (2.6), warunki nierozdzielności (7.14) oraz równania (7.1) stanowią układ dziesięciu równań potrzebnych do wyznaczenia niewiadomych wielkości statycznych $N_1, N_2, S_1, S_2, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}, Q_1$ i Q_2 .

8. Funkcje naprężeń dla płyty prostokątnej i warunki dla brzegu wzmocnionego belką

Powyżej otrzymane ogólne wzory zastosujemy teraz do płyty prostokątnej. Równanie płyty rozpatrujemy w układzie kartezjańskim,

$$R(x, y) = xi + yj$$

$$H_1 = 1, H_2 = 1, \alpha = x, \beta = y.$$

Równania służące do wyznaczenia wielkości statycznych na podstawie (2.6), (7.14) i (7.1) mają postać

$$(8.1) \quad \begin{cases} N_{1x} - S_{2y} + q_1 = 0, & S_{1x} + N_{2y} + q_2 = 0, & Q_{1x} + Q_{2y} + q_3 = 0, \\ M_{12x} + M_{2y} - Q_2 + m_1^* = 0, & M_{1x} - M_{21y} - Q_1 - m_2^* = 0, \\ S_1 + S_2 - m_3^* = 0, & M_{12} + M_{21} = 0, & -\frac{1}{G} M_{12y} + \frac{2}{E} (M_2 - \nu M_1)_x = 0, \\ \frac{2}{E} (M_1 - \nu M_2)_y + \frac{1}{G} M_{21x} = 0, & \frac{1}{E} (N_1 - \nu N_2)_{yy} + \frac{1}{2G} S_{2xy} - \frac{1}{2G} S_{1xy} + \\ & + \frac{1}{E} (N_2 - \nu N_1)_{xx} = 0. \end{cases}$$

Powyższy układ dziesięciu równań można zredukować do dwóch zawierających jako niewiadome dwie funkcje $\theta(x, y)$ i $w(x, y)$. Funkcja $\theta(x, y)$ znana jest jako funkcja naprężeń Airy'ego, a $w(x, y)$ jako funkcja Z. Germain. Wyprowadza się je przy założeniu, że $m_1^* = m_2^* = m_3^* = 0$. Równania pierwsze, drugie i szóste są spełnione tożsamościowo, jeżeli wprowadzi się funkcję $\theta(x, y)$, za pomocą której wielkości statyczne wyrażają się w następujący sposób:

$$(8.2) \quad N_1 = \theta_{yy} + U, \quad N_2 = \theta_{xx} + U, \quad S_1 = -S_2 = -\theta_{xy},$$

gdzie $U(x, y)$ jest znaną funkcją potencjału pola sił $q_1 = -U_x, q_2 = U_y$.

Funkcję $\Theta(x, y)$ wyznacza się z dziesiątego równania. Po wstawieniu do niego wartości według oznaczeń (8.2) otrzymamy

$$(8.3) \quad \Delta \Delta \Theta(x, y) = q(x, y), \quad q(x, y) = -(1 - \nu) \Delta U = (1 - \nu) (q_{1x} - q_{2y}),$$

gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Przy wyprowadzeniu tych równań wykorzystuje się zależność

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Podobnie równania czwarte, piąte, siódme, ósme i dziewiąte są spełnione tożsamościowo, jeżeli wprowadzi się funkcję $w(x, y)$ określającą w następujący sposób wielkości statyczne:

$$(8.4) \quad \begin{cases} M_1 = -K(w_{xx} + \nu w_{yy}), \\ M_2 = -K(w_{yy} + \nu w_{xx}), & Q_1 = -K(w_{xxx} + w_{xyy}), \\ -M_{12} = M_{21} = (1 - \nu) K w_{xy}, & Q_2 = -K(w_{xxy} + w_{yyx}), \end{cases}$$

gdzie $K = Eh^3/12(1 - \nu^2)$.

Z równania trzeciego otrzymujemy warunek na wyznaczenie funkcji $w(x, y)$:

$$(8.5) \quad \Delta \Delta w(x, y) = \frac{q_1(x, y)}{K}.$$

Funkcja $w(x, y)$ ma prostą interpretację fizyczną, mianowicie wyznacza ona powierzchnię ugięcia płyty.

Jeżeli wektor przemieszczenia ma składowe

$$\mathbf{U} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} - w\mathbf{k},$$

wówczas odkształcenie normalnej do płyty \mathbf{m} ma składowe (2.15)

$$\mathbf{m} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j}.$$

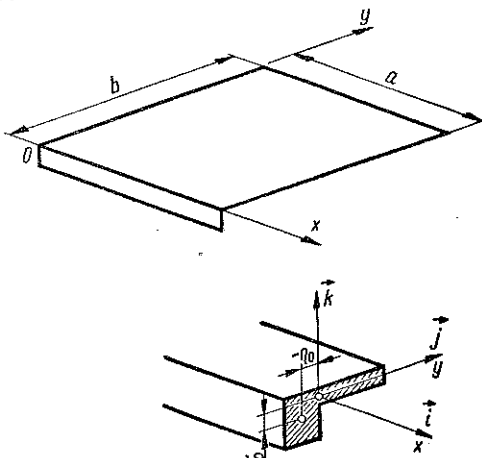
Na podstawie (2.11) znajdziemy

$$\kappa_{11} = \mathbf{m}_x\mathbf{i} = w_{xx}, \quad \kappa_{22} = \mathbf{m}_y\mathbf{j} = w_{yy},$$

$$\tau_{12} = \mathbf{m}_x\mathbf{j} = w_{xy}, \quad \tau_{21} = \mathbf{m}_y\mathbf{i} = w_{xy}.$$

Podstawiając składowe odkształcenia do równań (2.18) otrzymamy trzy pierwsze równania (8.4). Wyrażenia na Q_1 i Q_2 otrzymamy z czwartego i piątego równania równowagi.

Pokażemy, w jaki sposób formuluje się warunki brzegowe dla płyty wzmocnionej belkami. W tym celu rozważmy płytę prostokątną na trzech bokach wolnopodpartą, a na czwartym opartą na belce sprężystej. Belka



Rys. 7

jest połączona z płytą monolitycznie, jest z tego samego materiału co płyta oraz ma stały przekrój. Obciążenie ma tylko składową pionową $q_3(x, y)$. Pozostałe składowe obciążenia przyjmujemy równe zero: $q_1 = q_2 = m_1^* = m_2^* = m_3^* = 0$. Przekrój belki jest symetryczny względem osi pionowej. Środek ciężkości przekroju belki ma współrzędne $(-\eta_0, -\gamma_0)$. Zadanie polega na tym, by wyznaczyć wielkości statyczne w płycie, powstałe od obciążenia pionowego.

W sformułowaniu matematycznym zadanie polega na wyznaczeniu dwu funkcji $\Theta(x, y)$ i $w(x, y)$ spełniających wewnątrz obszaru płyty równania (8.3) i (8.5):

$$(8.6) \quad \Delta\Delta\Theta(x, y) = 0, \quad \Delta\Delta w(x, y) = \frac{q_3(x, y)}{K},$$

a na brzegach płyty po dwa warunki dla każdej funkcji:

$$(8.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1) \text{ dla } x=0 & 0 \leq y \leq b \\ 2) \text{ dla } y=b & 0 \leq x \leq a \\ 3) \text{ dla } x=a & 0 \leq y \leq b \\ 4) \text{ dla } y=0 & 0 \leq x \leq a. \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} \Theta_{yy} = 0, & -\Theta_{xy} = 0, \\ w = 0, & w_{xx} = 0, \\ \Theta_{xx} = 0, & -\Theta_{xy} = 0, \\ w = 0, & w_{yy} = 0, \\ \Theta_{yy} = 0, & -\Theta_{xy} = 0, \\ w = 0, & w_{xx} = 0, \end{array}$$

Belka obciążona płytą ma się odkształcać zgodnie z płytą wzdłuż krawędzi. Przy tych odkształceniach muszą być spełnione równania równowagi belki.

Belka jest podparta na swoich końcach przegubowo, dzięki temu jest zapewniona zgodność warunków brzegowych w narożach płyty.

Obecnie wyprowadzimy warunek na brzegu $y = 0$. Korzystamy z równań równowagi belki (4.6). Otrzymujemy teraz:

$$(8.8) \begin{cases} n_x - S_2 + g_1 = 0, & -t_{2x} + N_2 + g_2 = 0, & -t_{1x} - Q_2 - g_3 = 0, \\ -m_{sx} + \eta_0 t_{1x} - \gamma_0 t_{2x} + M_2 + z_1 = 0, & -m_{lx} - \gamma_0 n_x + t_1 + M_{21} + z_2 = 0, \\ & -m_{2x} + \eta_0 n_x - t_2 + z_3 = 0. \end{cases}$$

Korzystamy dalej z równań (6.8), przyjmując w nich $I_{23} = I_{32} = 0$, $E = E'$ oraz $G = G'$ znajdziemy:

$$(8.9) \begin{cases} n = \frac{F}{h} (N_1 - \nu N_2) + F \left(-\eta_0 \frac{m_2}{I_2} + \gamma_0 \frac{m_1}{I_3} \right), & t_2 = \frac{F}{h} S_2 + \frac{6F\gamma_0}{h^3} M_{21}, \\ t_1 = -\frac{6F\eta_0}{h^3} M_{21}, & m_2 = -\frac{EI_2}{2Gh} S_{2x} - \frac{I_2}{h} \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} (N_1 + N_2)_y, \\ m_1 = \frac{12I_3}{h^3} (M_1 - \nu M_2), & m_s = \frac{6I_1}{h^3} M_{21}. \end{cases}$$

Za pomocą równań (8.9) możemy równania (8.8) przedstawić jako zależne tylko od wielkości statycznych w płycie. Następnie za pomocą równań (8.2) i (8.4) uzyskamy sześć równań wyrażonych za pomocą funkcji naprężeń $\Theta(x, 0)$ i $w(x, 0)$, które będą stanowić warunki brzegowe.

Dla uzyskania jednoznacznego rozwiązania równań (8.6) są potrzebne cztery warunki brzegowe. Otrzymaliśmy więc na brzegu $y = 0$ za dużo warunków i zamiast czterech warunków możemy sformułować sześć warunków. W tym przypadku należy dostosować warunki brzegowe do uproszczeń przyjętych przy wyprowadzaniu równań (8.6). E. Reissner w pracy [20] wykazuje, że pominięcie przy czystym zginaniu płyty składowych odkształcania e_{33} , e_{13} i e_{23} zmusza do określania tylko dwu warunków brzegowych.

Proponujemy więc zredukowanie uzyskanych warunków brzegowych z sześciu do czterech zgodnie z następującym rozumowaniem. Hipoteza płaskich przekrojów daje liniowy rozkład naprężeń stycznych (5.2) w belce.

Z wytrzymałości materiałów i na podstawie odpowiednich doświadczeń wiadomo, że rozkład naprężeń stycznych zazwyczaj nie jest liniowy. Wobec powyższego w równaniach (8.9) związki określające t_2 , t_1 i m_s za pomocą wielkości statycznych w płycie nie będą zgodne z rzeczywistością, ponieważ są wyprowadzone przy założeniu płaskich przekrojów. Pozostały więc tylko trzy związki między siłą osiową w belce, momentami a wielkościami statycznymi w płycie. Ale trzy związki pozwolą na sformułowanie tylko trzech warunków brzegowych, a więc niedostateczną ilość do uzyskania jednoznacznego rozwiązania równań (8.6). Dlatego musimy skorzystać z jednego związku uzyskanego na drodze doświadczalnej.

Będziemy go nazywali związkem fizykalnym i przyjmiemy go jako poprawiony ostatni związek z równań (8.9):

$$(8.10) \quad m_s = k \frac{GI_0}{h^3} M_{21},$$

gdzie k jest współczynnikiem doświadczalnym.

Na tej podstawie będziemy korzystali zamiast z równań (8.9) z następujących związków:

$$(8.11) \quad \begin{cases} n = \frac{F}{h} (N_1 - \nu N_2) + F \left(-\eta_0 \frac{m_2}{I_2} + \gamma_0 \frac{m_1}{I_3} \right), \\ m_2 = -\frac{EI_2}{2Gh} S_{2x} - \frac{I_2}{h} \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} (N_1 + N_2)_y, \\ m_1 = \frac{12I_3}{h^3} (M_1 - \nu M_2), \quad m_s = k \frac{6I_0}{h^3} M_{21}. \end{cases}$$

Przy powyższych założeniach otrzymamy tylko cztery warunki brzegowe. Przedstawimy je w następującej postaci. Wyeliminujemy z równań (8.8) wielkości statyczne t_1 i t_2 :

$$(8.12) \quad \begin{cases} n_x - S_2 + g_1 = 0, \\ -m_{sx} - \eta_0(Q_2 + g_3) - \gamma_0(N_2 + g_2) + M_2 + z_1 = 0, \\ -m_{1xx} - \gamma_0 S_{2x} + \gamma_0 g_{1x} - Q_2 + M_{21x} - g_3 + z_{2x} = 0, \\ -m_{2xx} + \eta_0(S_{2x} - g_{1x}) - N_2 - g_2 + z_{3x} = 0. \end{cases}$$

Podstawiając do (8.12) równania (8.11) otrzymamy

$$(8.13) \quad \begin{cases} \frac{F}{h} (N_1 - \nu N_2)_x + \frac{F\eta_0}{h} \frac{(1-\nu)^3}{1-2\nu} (N_1 + N_2)_{xy} + \left[\frac{F\eta_0}{h} (1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right] S_2 + \\ \quad + \frac{12F\gamma_0}{h^3} (M_1 - \nu M_2)_x + g_1 = 0, \\ -\frac{6kI_0}{h^3} M_{21x} - \eta_0 Q_2 - \gamma_0 N_2 + M_2 - \eta_0 g_3 - \gamma_0 g_2 + z_1 = 0, \\ -\frac{12I_3}{h^3} (M_1 - \nu M_2)_{xx} - Q_2 + M_{21x} - \gamma_0 S_{2x} + \gamma_0 g_{1x} - g_3 + z_{2x} = 0, \\ \left[\frac{I_2}{h} (1+\nu) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial x} \right] S_2 + \frac{I_2}{h} \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} (N_1 + N_2)_{xxy} - N_2 - \\ \quad - \eta_0 g_{1x} - g_2 + z_{3x} = 0. \end{cases}$$

Równania (8.13) są właśnie warunkami brzegowymi, jakie mają spełnić wielkości statyczne w płycie na krawędzi wzmocnionej belką. Wstawiając związki (8.2) i (8.4) otrzymamy

$$(8.14) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\Theta_{xy} + \frac{F}{h} \Theta_{xyy} - \frac{F}{h} \nu \Theta_{xxx} + \frac{F\eta}{h} \left[\frac{E}{2G} + \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} \right] \Theta_{xxx} + \\ & \quad + \frac{F\eta(1-\nu)^2}{h(1-2\nu)} \Theta_{xyyy} - E\Gamma\gamma_0 w_{xxx} + g_1 = 0, \\ & -kGI_0 w_{xxy} + \eta_0 K(w_{xxy} + w_{yyy}) - K(w_{yy} + \nu w_{xx}) - \gamma_0 \Theta_{xx} - \eta_0 g_3 - \\ & \quad - \gamma_0 g_2 + z_1 = 0, \\ & EI_3 w_{xxxx} + K[w_{yyy} + (2-\nu) w_{xxy}] - \gamma_0 \Theta_{xxy} - g_3 + \gamma_0 g_{1x} + z_{2x} = 0, \\ & -\Theta_{xx} + \eta_0 \Theta_{xxy} + \left[\frac{EI_2}{2Gh} + \frac{I_2(1-\nu)^2}{h(1-2\nu)} \right] \Theta_{xxxx} + \frac{I_0(1-\nu)^2}{h(1-2\nu)} \Theta_{xyyy} - \\ & \quad - g_2 - \eta g_{1x} + z_{3x} = 0. \end{aligned} \right.$$

Przedyskutujemy powyżej wprowadzone warunki brzegowe.

1. Jeżeli równania (8.14) napiszemy dla założenia, że belki nie ma, czyli przyjmiemy $F=0$, $I_0=I_2=I_3=0$, $\eta_0=0$, $\gamma_0=0$ oraz $g_1=g_2=g_3=z_1=z_2=z_3=0$, to otrzymamy

$$(8.15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Theta_{xy} = 0, \quad -K(w_{yy} + \nu w_{xx}) = M_2 = 0, \\ & K[w_{yyy} + (2-\nu) w_{xxy}] = -\bar{Q} = 0, \quad \Theta_{xx} = 0. \end{aligned} \right.$$

Powyższe warunki odpowiadają krawędzi swobodnej, niepodpartej.

2. Stan płaski i momentowy są ze sobą związane przez warunki brzegowe. Jeżeli $\gamma=0$, czyli jeżeli oś ciężkości belki leży na przedłużeniu powierzchni środkowej płyty, wówczas stan płaski i momentowy jest rozdzielony, to się odbija również na warunkach brzegowych.

3. Dla $\eta_0=0$, $\gamma_0=0$, $g_1=g_2=g_3=z_1=z_2=z_3=0$, ale $I_0 \neq 0$, $I_3 \neq 0$ drugi i trzeci warunek redukują się do postaci

$$(8.16) \quad \left\{ \begin{aligned} & kGI_0 w_{xxy} + K(w_{yy} + \nu w_{xx}) = 0, \\ & EI_3 w_{xxxx} + K[w_{yyy} + (2-\nu) w_{xxy}] = 0. \end{aligned} \right.$$

Otrzymaliśmy warunki sformułowane w podręczniku przez S. Timoszenkę ([24], s. 92; por. (1.2)).

Dla $I_0=0$ równania (8.16) redukują się do warunków stosowanych przez E. Müllera, [por. (1.1)].

4. Dla $I_0=0$, $I_3 \rightarrow \infty$ równania (8.16) dają warunek dla krawędzi płyty wolno podpartej. Podzielmy drugie równanie przez I_3 , a następnie przejdźmy do granicy, gdy $I_3 \rightarrow \infty$ otrzymamy warunki

$$(8.17) \quad -K(w_{yy} + \nu w_{xx}) = 0, \quad w_{xxx} = 0.$$

Drugi warunek w równaniu (8.17) jest ogólniejszy od zazwyczaj stosowanego w teorii płyt: $w = 0$. Wynika to stąd, że równania zostały wprowadzone w formie różniczkowej. Wystarczy jednak w drugim równaniu (8.17) uwzględnić warunki na końcu belki, np. $w(0) = 0$, $w_x(0) = 0$, $w(a) = 0$ oraz $w_x(a) = 0$, a otrzymamy rozwiązanie pokrywające się ze stosowanym warunkiem $w(x) = 0$.

5. Dla $I_0 \rightarrow \infty$, $I_3 \rightarrow \infty$ równania (8.16) dają warunek dla krawędzi płyty sztywno zamocowanej. Podzielmy pierwsze równanie przez I_0 , drugie zaś przez I_3 , a następnie przejdźmy do granicy, gdy $I_0 \rightarrow \infty$ oraz $I_3 \rightarrow \infty$; otrzymamy

$$(8.18) \quad u_{yxx} = 0, \quad w_{xxx} = 0.$$

Otrzymaliśmy ogólniejszą postać od stosowanej w teorii płyt:

$$w_y = 0, \quad w = 0.$$

Analogicznie jak poprzednio można przejść od ogólniejszej postaci do zazwyczaj stosowanej przez spełnienie warunków na końcach belki:

$$w_y(0) = 0, \quad w_y(a) = 0, \quad w(0) = 0, \quad w_x(0) = 0, \quad w(a) = 0, \quad w_x(a) = 0.$$

6. Dla $\eta_1 = 0$, $\gamma_0 = 0$ i $g_1 = g_2 = z_3 = 0$, otrzymamy z pierwszego i czwartego równania (8.14)

$$-\Theta_y + \frac{F}{h} \Theta_{yy} - \nu \frac{F}{h} \Theta_{xx} = 0,$$

$$-\Theta + \left[\frac{EI_2}{2Gh} + \frac{I_2(1-\nu)^2}{h(1-2\nu)} \right] \Theta_{xy} + \frac{I_2(1-\nu)^2}{h(1-2\nu)} \Theta_{yyy} = 0.$$

Przechodząc do granicy, gdy $F \rightarrow \infty$ i $I_2 \rightarrow \infty$ otrzymamy warunek na sztywne przytrzymanie krawędzi.

Podzielmy pierwsze równanie przez F , drugie przez I_2 , a następnie przejdźmy do granicy, gdy $F \rightarrow \infty$ oraz $I_2 \rightarrow \infty$, otrzymamy

$$(8.19) \quad \Theta_{yy} - \nu \Theta_{xx} = 0, \quad \left[\Theta_{xx} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\Theta_{xx} + \Theta_{yy}) \right]_y = 0.$$

Aby zinterpretować fizycznie znaczenie równań (8.19), posłużymy się związkami (2.18). Otrzymamy wówczas

$$e_{11} = 0, \quad \left[\left(\frac{1-\nu}{1-\nu-\nu^2} + 1 \right) e_{22} + e_{11} \right]_y = 0.$$

Stąd widać, że warunki (8.19) opisują nieodkształcalną krawędź. Warunki brzegowe (8.14) sformułowane dla brzegu wzmocnionego belką mają ogólną postać, z której można uzyskać wszystkie graniczne przypadki warunków brzegowych w płycie, a mianowicie: krawędź swobodną, sztyw-

ne zamocowanie, podparcie przegubowe. Pomijając ciężar własny belek można równania (8.14) napisać w postaci

$$(8.20) \quad \begin{cases} -\Theta_y + \frac{F}{h}(\Theta_{yy} - \nu\Theta_{xx}) + \frac{F\eta_0}{I_2}(\Theta - \eta_0\Theta_y) - EF\gamma_0 w_{xx} = 0, \\ -kGI_0 w_{xxy} + \eta_0 K(w_{xxy} + w_{yyy}) - K(w_{yy} + \nu w_{xx}) - \gamma_0 \Theta_{xx} = 0, \\ EI_3 w_{xxxx} + K[w_{yyy} + (2 - \nu)w_{xxy}] - \gamma_0 \Theta_{xxy} - g_3 = 0, \\ -\Theta + \eta_0 \Theta_y + \frac{I_2}{h} \left[(1 + \nu) + \frac{(1 - \nu)^2}{1 - 2\nu} \right] \Theta_{xxy} + \frac{I_2(1 - \nu)^2}{h(1 - 2\nu)} \Theta_{yyy} = 0. \end{cases}$$

Przyjmujemy nowy układ współrzędnych (s, n) , w którym s oznacza kierunek styczny do konturu i taki, że obchodząc w tym kierunku obszar pozostawiamy go z prawej strony, natomiast n jest kierunkiem zewnętrznej normalnej do konturu. W przyjętym układzie równania (8.20) napiszemy w postaci niezmienniczej:

$$(8.21) \quad \begin{cases} \Theta_n + \frac{F}{h}(\Theta_{nn} - \nu\Theta_{ss}) + \frac{F\eta_0}{I_2}(\Theta + \eta_0\Theta_n) - EF\gamma_0 w_{ss} = 0, \\ kGI_0 w_{ssn} - \eta_0 K(w_{ssn} + w_{nnn}) - K(w_{nn} + \nu w_{ss}) - \gamma_0 \Theta_{ss} = 0, \\ EI_3 w_{ssss} - K[w_{nnn} + (2 - \nu)w_{ssn}] + \gamma_0 \Theta_{ssn} - g_3 = 0, \\ -\Theta - \eta_0 \Theta_n - \frac{I_2}{h} \left[(1 + \nu) + \frac{(1 - \nu)^2}{1 - 2\nu} \right] \Theta_{ssn} - \frac{I_2(1 - \nu)^2}{h(1 - 2\nu)} \Theta_{nnn} = 0. \end{cases}$$

W ten sam sposób napisane warunki brzegowe mają taką samą postać na całym konturze s .

9. Funkcje naprężeń dla płyty kołowej i warunki brzegowe

Zastosujemy jeszcze wyniki ogólne do drugiego przypadku szczególnego, mianowicie do płyty kołowej. Równanie powierzchni środkowej płyty kołowej (rys. 1b) w postaci wektorowej jest następujące:

$$R(a, \beta) = a \cos \beta \mathbf{i} + a \sin \beta \mathbf{j}.$$

Współczynniki pierwszej formy metrycznej wynoszą odpowiednio

$$H_1 = 1, \quad H_2 = a, \quad \frac{\partial H_2}{\partial a} = 1.$$

Linia $a = a_0$ pokrywa się z krawędzią płyty, z którą jest połączona monolitycznie belka o stałym przekroju między podporami. Wielkości statycz-

ne w płycie, powstałe od obciążenia zewnętrznego, obliczamy z układu równań (2.6), (7.1), (7.14):

$$(9.1) \quad \begin{cases} (\alpha N_1)_\alpha - S_\beta - N_2 + \alpha q_1 = 0, & (\alpha S_1)_\alpha + N_{2\beta} - S_2 + \alpha q_3 = 0, \\ (\alpha Q_1)_\alpha + Q_{2\beta} + \alpha q_3 = 0, & (\alpha M_{12})_\alpha + M_{2\beta} - M_{21} - \alpha Q_2 + \alpha m_1^* = 0, \\ (\alpha M_1)_\alpha - M_{21\beta} - M_2 - \alpha Q_1 - \alpha m_2^* = 0, & S_1 + S_2 - m_3^* = 0, \\ M_{12} + M_{21} = 0, & -\frac{1}{G} M_{12\beta} - \frac{2}{E} (M_1 - \nu M_2) + \frac{2}{E} [\alpha (M_2 - \nu M_1)]_\alpha = 0, \\ -\frac{1}{G} M_{12} + \frac{2}{E} (M_1 - \nu M_2)_\beta + \frac{1}{G} (\alpha M_{21})_\alpha = 0, \\ \left[\frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{E} (N_1 - \nu N_2)_\beta - \frac{1}{2G} S_1 + \frac{1}{2G} (\alpha S_2)_\alpha \right]_\beta - \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{E} (N_1 - \nu N_2) + \frac{1}{2G} S_{1\beta} - \frac{1}{E} [\alpha (N_2 - \nu N_1)]_\alpha \right] \right]_\alpha = 0. \end{cases}$$

Powyższy układ równań redukuje się do dwu równań na funkcje naprężeń $\Theta(\alpha, \beta)$ i $w(\alpha, \beta)$. Dla $q_1 = q_2 = m_1^* = m_2^* = m_3^* = 0$ równanie pierwsze, drugie, szóstą jest spełnione tożsamościowo, jeżeli wprowadzić funkcję $\Theta(\alpha, \beta)$ określającą w następujący sposób wielkości statyczne:

$$(9.2) \quad N_1 = \frac{1}{\alpha^2} \Theta_{\beta\beta} + \frac{1}{\alpha} \Theta_\alpha, \quad N_2 = \Theta_{\alpha\alpha}, \quad S_1 = -S_2 = -\left(\frac{1}{\alpha} \Theta_\beta \right)_\alpha.$$

Z równania dziesiątego otrzymamy warunek dla funkcji $\Theta(\alpha, \beta)$:

$$(9.3) \quad \Delta \Theta = 0,$$

gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Podobnie równanie czwarte, piąte, siódme, ósme, dziewiąte jest spełnione, jeżeli wprowadzimy funkcję $w(\alpha, \beta)$ określającą w następujący sposób wielkości statyczne:

$$(9.4) \quad \begin{cases} M_1 = -K \left[w_{\alpha\alpha} + \nu \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} w_{\beta\beta} + w_\alpha \right) \right], \\ M_2 = -K \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} w_{\beta\beta} + w_\alpha \right) + \nu w_{\alpha\alpha} \right], \\ -M_{12} = M_{21} = (1 - \nu) K \left(\frac{1}{\alpha} w_\beta \right)_\alpha, \\ Q_2 = -K \frac{1}{\alpha} \left[w_{\alpha\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} w_{\beta\beta} + w_\alpha \right) \right]_\beta, \\ Q_1 = -K \left[w_{\alpha\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} w_{\beta\beta} + w_\alpha \right) \right]_\alpha. \end{cases}$$

Z trzeciego równania równowagi otrzymamy

$$(9.5) \quad \Delta \Delta w = a \frac{g_3(a, \beta)}{K},$$

gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Funkcja $w(a, \beta)$ jest równocześnie składową przemieszczenia płyty odkształconej, normalną do powierzchni środkowej. Dla przemieszczenia $U(a, \beta)$ o składowych

$$U = u(a, \beta) \mathbf{i} + v(a, \beta) \mathbf{j} - w(a, \beta) \mathbf{k}$$

otrzymamy na podstawie równań (2.11):

$$(9.6) \quad \kappa_{11} = w_{aa}, \quad \kappa_{22} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} w_{\beta\beta} + w_a \right), \quad \tau_{12} = \left(\frac{1}{a} w_\beta \right)_a, \quad \tau_{21} = \left(\frac{1}{a} w_\beta \right)_a,$$

Po podstawieniu (9.6) do równań (2.18) otrzymamy pierwsze trzy związki (9.4). Z czwartego i piątego równania równowagi otrzymamy wzory na Q i Q_2 .

Sformulujemy teraz warunki brzegowe dla płyty kołowej wzmocnionej belką na krawędzi $a = a_0$. Belka jest połączona z płytą monolitycznie (rys. 1b). Wykonana jest z tego samego materiału co płyta i ma stały przekrój między podporami. Obciążenie zewnętrzne ma tylko jedną składową $q_3(a, \beta)$ normalną do powierzchni środkowej płyty. Pozostałe składowe są zerami: $q_1 = q_2 = m_1^* = m_2^* = m_3^* = 0$. Przekrój belki jest symetryczny względem osi pionowej przechodzącej przez środek ciężkości belki. Środek ciężkości przekroju belki ma współrzędne $(+\xi, -\gamma_0)$. Zadanie polega na tym, by wyznaczyć wielkości statyczne w płycie (rys. 1b) pochodzące od obciążenia pionowego. Należy więc wyznaczyć dwie funkcje naprężeń $\Theta(a, \beta)$ i $w(a, \beta)$ spełniające wewnątrz obszaru równania (9.3) i (9.5):

$$(9.7) \quad \Delta \Delta \Theta(a, \beta) = 0, \quad \Delta \Delta w(a, \beta) = \frac{q_3(a, \beta)}{K},$$

a na brzegu płyty $a = a_0$ warunki następujące:

dla $a = a_0$ ($0 \leq \beta \leq 2\pi$) belka obciążona płytą ma się odkształcać zgodnie z nią wzdłuż krawędzi; przy tych odkształceniach muszą być spełnione równania równowagi belki;

dla $\beta = \beta_i$ ($i = 1, 2, \dots$) belka jest podparta i powinna spełniać warunki podporowe. Litera i oznacza numery podpór.

Powyższe warunki brzegowe sformulujemy analitycznie. W tym celu posłużymy się równaniami równowagi (4.9) belki oraz związkami (6.9). Równania równowagi belki dla $a = a_0$ są następujące:

$$(9.8) \quad \begin{cases} -t_{2\beta} - n - a_0 N_1 + a_0 g_1 = 0, & -t_2 + n_\beta - a_0 S_1 + a_0 g_2 = 0, \\ -t_{1\beta} + a_0 Q_1 - a_0 g_3 = 0, & -m_{1\beta} + m_s - \gamma_0 t_2 + \gamma_0 n_\beta - a_0 t_1 - \\ & -\xi_0 t_1 - M_{12} a_0 + z_1 a_0 = 0, \\ -m_1 - m_{s\beta} + \xi_0 t_{1\beta} + \gamma_0 t_{2\beta} + \gamma_0 n + M_1 a_0 + z_2 a_0 = 0, \\ -m_{2\beta} + \xi_0 n_\beta + a_0 t_2 + z_3 a_0 = 0. \end{cases}$$

Związki (6.9) dla $a = a_0$ przyjmują postać

$$(9.9) \quad \begin{cases} n = \frac{F}{h} (N_2 - \nu N_1) + F \left(-\xi_0 \frac{m_2}{I_1} - \gamma_0 \frac{m_1}{I_3} \right), & m_1 = -\frac{12I_3}{h^3} (M_2 - rM_1), \\ m_2 = -\frac{EI_1}{2G a_0 h} S_{1\beta} + \frac{I_1}{h} \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} (N_1 + N_2) a_0 - \frac{I_1}{h a_0} (N_2 - rN_1), \\ m_s = k \frac{6I_0}{h^3} M_{12}. \end{cases}$$

Wyeliminujemy z równań (9.8) wielkości statyczne t_1 i t_2 . Przyjmujemy $g_1 = g_2 = 0$, $z_2 = z_3 = 0$, $g_3 \neq 0$ oraz $z_1 \neq 0$. Otrzymujemy

$$(9.10) \quad \begin{cases} -n - n_{\beta\beta} + (S_{1\beta} - N_1) a_0 = 0, \\ -m_{1\beta\beta} + m_{s\beta} + \gamma_0 a_0 S_{1\beta} - \xi_0 a_0 Q_1 - a_0 (a_0 Q_1 + M_{12\beta}) + a_0 z_{1\beta} + \\ & + a_0 (\xi_0 + a_0) g_3 = 0, \\ -m_1 - m_{s\beta} + \xi_0 a_0 Q_1 - \gamma_0 a_0 N_1 + a_0 M_1 - \xi_0 a_0 g_3 = 0, \\ -m_{2\beta} + (\xi_0 + a_0) n_\beta - a_0^2 S_1 = 0. \end{cases}$$

Podstawiamy do (9.10) równanie (9.9), następnie wprowadzamy związki (9.2) i (9.4) i otrzymamy cztery warunki na brzegu dla równań (9.7). Równania te mają złożoną budowę, dlatego posłużymy się ich uproszczoną postacią dla $\xi_0 = \gamma_0 = 0$:

$$(9.11) \quad \begin{cases} -\frac{F}{h} \left[\Theta_{\alpha\alpha} + \Theta_{\alpha\alpha\beta\beta} - \frac{\nu}{a_0^2} (\Theta_{\beta\beta} + \Theta_{\beta\beta\beta\beta}) - \frac{\nu}{a_0} (\Theta_\alpha + \Theta_{\alpha\beta\beta}) \right] + \\ & + (S_{1\beta} - N_1) a_0 = 0, \\ -EI_3 \left[\frac{1}{a_0} \left(\frac{1}{a_0} w_{\beta\beta\beta\beta} + w_{\alpha\beta\beta} \right) \right] - kGI_0 \left(-\frac{1}{a_0^2} w_{\beta\beta} + \frac{1}{a_0} w_{\alpha\beta\beta} \right) - \\ & - a_0 \bar{Q}_1 + a_0^2 g_3 = 0, \\ -EI_3 \left[\frac{1}{a_0} \left(\frac{1}{a_0} w_{\beta\beta} + w_\alpha \right) \right] + kGI_0 \left(-\frac{1}{a_0^2} w_{\beta\beta} + \frac{1}{a_0} w_{\alpha\beta\beta} \right) + a_0 M_1 = 0, \\ -\frac{EI_1}{2G a_0 h} \left(-\frac{1}{a_0^2} \Theta_{\beta\beta} + \frac{1}{a_0} \Theta_{\alpha\beta\beta} \right) - \frac{I_1 (1-\nu)^2}{h(1-2\nu)} \left(-\frac{2}{a_0^2} \Theta_{\beta\beta\beta} + \frac{1}{a_0^2} \Theta_{\alpha\beta\beta\beta} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{a_0^2} \Theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{a_0} \Theta_{\alpha\alpha\beta} + \Theta_{\alpha\alpha\alpha\beta} \right) + \left(\frac{F a_0}{h} + \frac{I_1}{h a_0} \right) \left(\Theta_{\alpha\alpha\beta} - \frac{\nu}{a_0^2} \Theta_{\beta\beta\beta} - \right. \\ & \left. - \frac{\nu}{a_0} \Theta_{\alpha\beta} \right) - a_0^2 S_1 = 0. \end{cases}$$

W równaniach (9.11) \bar{Q} oznacza oddziaływanie, M_1 moment, S_1 i N_1 napięcia:

$$(9.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{Q} = -K \left\{ \alpha_0 w_{\alpha\alpha\alpha} - \frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{1}{\alpha_0} w_{\beta\beta} + w_\alpha \right) + w_{\alpha\alpha} + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + (2-\nu) \left(-\frac{1}{\alpha_0^2} w_{\beta\beta} + \frac{1}{\alpha_0} w_{\alpha\beta\beta} \right) \right\}, \\ M_1 = -K \left\{ w_{\alpha\alpha} + \nu \frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{1}{\alpha_0} w_{\beta\beta} + w_\alpha \right) \right\}, \quad S_{1\beta} - N_1 = -\frac{1}{\alpha_0} (\Theta_\alpha + \Theta_{\alpha\beta\beta}), \\ -\alpha_0 S_1 = \alpha_0 \left(-\frac{1}{\alpha_0^2} \Theta_\beta + \frac{1}{\alpha_0} \Theta_{\alpha\beta} \right). \end{array} \right.$$

Podobnie jak dla płyty prostokątnej przeprowadzimy dyskusję powyższych warunków brzegowych w granicznych przypadkach.

1. Jeżeli nie ma belki, czyli $F = 0$, $I_3 = 0$, $I_0 = 0$, $I_1 = 0$, $g_3 = 0$ otrzymujemy warunki:

$$\begin{aligned} S_{1\beta} - N_1 &= 0, & M_1 &= 0, \\ \bar{Q} &= 0, & S_1 &= 0. \end{aligned}$$

Są to warunki dla krawędzi swobodnej.

2. Dla $\xi_0 = \gamma_0 = 0$ stan płaski i czyste zginanie są niezależne.

3. Sztywne zamocowanie podpory dla czystego zginania płyty formuluje się następująco:

$$(9.13) \quad w(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad w_\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0.$$

Powyższy warunek otrzymamy z drugiego i trzeciego równania (9.11). Przedstawiamy je następująco:

$$(9.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left[\frac{1}{\alpha_0} (EI_3 + kGI_0) w_\alpha + \frac{1}{\alpha_0^2} kGI_0 w - \frac{1}{\alpha_0^2} EI_3 w_{\beta\beta} \right] + \alpha_0 \bar{Q}_1 = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left[\frac{1}{\alpha_0^2} (EI_3 + kGI_0) w - \frac{1}{\alpha_0} kGI_0 w_\alpha \right] + \frac{1}{\alpha_0} EI_3 w_\alpha - \alpha_0 M_1 = 0. \end{array} \right.$$

Podzielmy równania stronami przez $EI_3 + kGI_0$, a następnie przejdźmy równocześnie z I_3 i I_0 (niezależnie) do nieskończoności.

Oznaczmy:

$$\lim_{\substack{I_3 \rightarrow \infty \\ I_0 \rightarrow \infty}} \frac{kGI_0}{EI_3 + kGI_0} = \varepsilon_1, \quad \lim_{\substack{I_3 \rightarrow \infty \\ I_0 \rightarrow \infty}} \frac{EI_3}{EI_3 + kGI_0} = \varepsilon_2.$$

Granice ε_1 i ε_2 mogą przyjmować różne wartości w zależności od kształtu geometrycznego przekroju belki. Równania (9.14) przyjmują postać:

$$(9.15) \quad \begin{cases} \frac{1}{\alpha_0} w_{\alpha\beta\beta} + \frac{1}{\alpha_0^2} \varepsilon_1 w_{\beta\beta} - \frac{1}{\alpha_0^2} \varepsilon_2 w_{\beta\beta\beta\beta} = 0, \\ \frac{1}{\alpha_0^2} w_{\beta\beta} - \frac{1}{\alpha_0} \varepsilon_1 w_{\alpha\beta\beta} + \frac{1}{\alpha_0} \varepsilon_2 w_{\alpha} = 0. \end{cases}$$

Równania (9.15) są spełnione dla każdego ε_1 i ε_2 tylko wtedy, jeżeli równocześnie $w_{\alpha} \equiv 0$ i $w_{\beta\beta} \equiv 0$. Dla podpory zamocowanej otrzymaliśmy

$$w_{\beta\beta}(\alpha_0, \beta) \equiv 0, \quad w_{\alpha}(\alpha_0, \beta) \equiv 0.$$

Jest to ogólniejszy warunek od zazwyczaj stosowanego (9.13).

4. Przegubowe podparcie dla czystego zginania płyty wyraża się równaniami:

$$(9.16) \quad w(\alpha_0, \beta) = 0, \quad w_{\alpha\alpha}(\alpha_0, \beta) + \nu \frac{1}{\alpha_0} w_{\alpha} = 0.$$

Otrzymamy je z równań (9.14) przy przejściu granicznym $I_0 \rightarrow 0$ i $I_3 \rightarrow \infty$. Wykonajmy w pierwszym równaniu przejście graniczne (9.14) $I_0 \rightarrow 0$, a następnie podzielimy przez I_3 i przejdźmy do granicy $I_3 \rightarrow \infty$, otrzymamy:

$$(9.17) \quad \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(\frac{1}{\alpha_0} w_{\alpha} - \frac{1}{\alpha_0^2} w_{\beta\beta} \right) = 0.$$

W drugim równaniu (9.14) po wstawieniu $I_0 = 0$ otrzymamy:

$$(9.18) \quad EI_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} w_{\alpha} + \frac{1}{\alpha_0^2} w_{\beta\beta} \right) - \alpha_0 M_1 = 0.$$

Na podstawie (9.17) $(1/\alpha_0) w_{\alpha\beta\beta} = (1/\alpha_0^2) w_{\beta\beta\beta\beta}$. Różniczkujemy równanie (9.18) dwukrotnie i podstawiamy (9.17)

$$\frac{2EI_3}{\alpha_0^3} w_{\beta\beta\beta\beta} - \alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} M_1 = 0.$$

Jeżeli

$$(9.19) \quad w_{\beta\beta\beta\beta} = 0,$$

to

$$(9.20) \quad M_{1\beta\beta} = -K \left[w_{\alpha\alpha\beta\beta} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(\frac{1}{\alpha_0^2} w_{\beta\beta} + \frac{1}{\alpha_0} w_{\alpha} \right) \right]_{\beta\beta} = 0.$$

Jeżeli $w_{\beta\beta}(\alpha_0, \beta) = 0$, wówczas z powyższego równania otrzymamy

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(w_{\alpha\alpha} + \nu \frac{1}{\alpha_0} w_{\alpha} \right) = 0.$$

Jest to ogólniejszy warunek od zazwyczaj stosowanego (9.16).

Przed przystąpieniem do omówienia konkretnych przykładów zastosowania przedstawionej powyżej metody należy dodać kilka uwag ogólnych.

Po pierwsze, jak widać z p. 8 i 9, warunki brzegowe można w zupełnie analogiczny sposób sformułować nie tylko dla płyt prostokątnych i kołowych, lecz także o innym kształcie. Należy tylko uwzględnić odpowiednie warunki geometryczne. W pracy tej ograniczono się tylko do płyt prostokątnych lub kołowych jedynie po to, by zilustrować metodę.

Po drugie, należy cmówić jeszcze bardzo ważną sprawę warunków podporowych. Oprócz warunków brzegowych łączących płytę z belką trzeba zbadać jeszcze warunki podporowe, ponieważ warunki brzegowe są określone w postaci różniczkowej i nie zależą wcale od sposobu oparcia belek na podporach lub w narożach. Warunki podporowe formuluje się w taki sam sposób jak w teorii ustrojów prętowych. Najlepiej jest określać je w przemieszczeniach. Wtedy łatwo jest sformułować je nawet dla konstrukcji wielokrotnie statycznie niewyznaczalnej.

Gdybyśmy dysponowali takim rozwiązaniem ogólnym równań (1.4), że po spełnieniu warunków brzegowych np. (8.21) albo (9.11) pozostanie jeszcze do wyznaczenia dostateczna ilość stałych całkowania, które należy wyznaczyć z warunków podporowych, wówczas można by te ostatnie określać równie dobrze metodą sił.

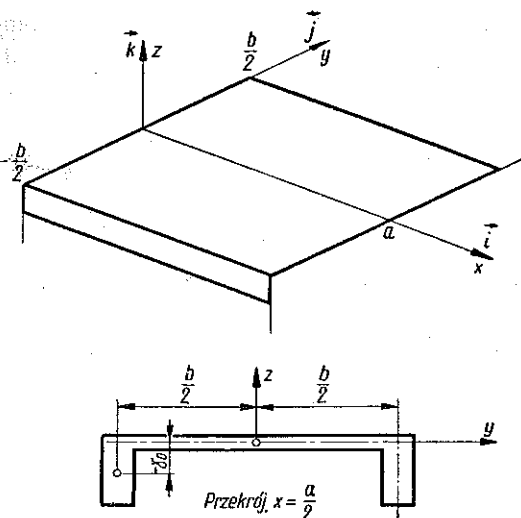
Dotychczas jednak brak jest takich ogólnych rozwiązań równań (1.4), a w konkretnych rozważaniach skrępowani jesteśmy zazwyczaj doбором dowolnych warunków podporowych już przez przyjęcie określonego typu rozwiązania.

10. Przykłady rozwiązywania płyt prostokątnych wzmocnionych belkami

Podajemy kilka przykładów ilustrujących sposób rozwiązywania płyt wzmocnionych belkami, których oś nie leży w płaszczyźnie powierzchni środkowej, lecz jest oddalona od niej o γ_0 . Rozwiązanie uwzględnia równoczesne występowanie zginania i płaskiego stanu naprężeń. Należy podkreślić, że trudności w rozwiązywaniu płyt z belkami są tego samego rodzaju co dla płyt bez belek, czyli dla krawędzi swobodnych, przegubowo opartych lub sztywno zamocowanych. Metody matematyczne służące do rozwiązywania płyt zwykłych można równie dobrze wykorzystać dla płyt wzmocnionych belkami. Pod względem rachunkowym obliczenia płyt wzmocnionych belkami są jednak żmudniejsze. W przykładach specjalnie dobrano takie warunki brzegowe i podporowe oraz takie metody rachunkowe, ażeby uzyskać rozwiązania w postaci znanych funkcji. Obliczone płyty są bardzo często stosowane, a wyniki można użyć do celów praktycznych, jeżeli się je zestawi tabelarycznie. Sporządzenie takich tablic jest już zagadnieniem, które nie wchodzi do niniejszej pracy.

Przykład 1. Płyta prostokątna przegubowo podparta na dwu przeciwnych bokach i wzmocniona belkami na dwu pozostałych krawędziach. Obydwie belki mają jednakowy i stały przekrój. Przyjęto $\eta_0 = 0$.

Środek ciężkości belki jest przesunięty o $-\gamma_0$ w kierunku osi z od powierzchni środkowej płyty. Obciążenie płyty równomiernie rozłożone jest prostopadłe do powierzchni środkowej i ma wartość stałą q_0 . Nie uwzględniamy ciężaru własnego belki. Szukamy wielkości statycznych w płycie. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia dwóch funkcji naprężeń $\Theta(x, y)$ i $w(x, y)$, spełniających wewnątrz obszaru równania (8.6):



Rys. 8

$$\Delta \Delta \Theta(x, y) = 0,$$

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{q_0}{K}.$$

Na brzegu funkcje naprężeń mają spełniać warunki: dla $x = 0$ oraz $x = a$

$$Q_{xx} = Q_{yy} = 0, \quad w = w_{xx} = 0;$$

dla $y = \pm b/2$, (8.21)

$$\begin{aligned} \Theta_n + \frac{F}{h} (\Theta_{nn} - \nu \Theta_{sn}) - EF\gamma_0 w_{ss} &= 0, \\ -\Theta - \frac{I_2}{h} \left[(1 + \nu) + \frac{(1 - \nu)^2}{1 - 2\nu} \right] \Theta_{ss} - \frac{I_2(1 - \nu)^2}{h(1 - 2\nu)} \Theta_{nnn} &= 0, \\ -kGI_0 w_{ssn} + K(w_{nn} + \nu w_{ss}) + \gamma_0 \Theta_{ss} &= 0, \\ -EI_3 w_{ssss} + K[w_{nnn} + (2 - \nu)w_{ssn}] - \gamma_0 \Theta_{ssn} &= 0. \end{aligned}$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregów Fouriera. W tym celu rozwijamy obciążenie q_0 w szereg Fouriera

$$q = \frac{4q_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Całka szczególna równania niejednorodnego na funkcję ugięcia $w(x, y)$, spełniająca warunki brzegowe dla $x = 0$, $x = a$ ma postać

$$(10.1) \quad w_1(x, y) = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 K} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Całką ogólną równania jednorodnego na funkcję ugięcia $w(x, y)$ ze względu na symetrię względem osi y może być przyjęta w postaci

$$(10.2) \quad w_2(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} y_n \sin \frac{n\pi x}{a},$$

gdzie

$$y_n = \frac{q_0 a^4}{K} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2 \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \frac{n\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right).$$

Przyjęta całka

$$(10.3) \quad w = w_1 + w_2$$

spełnia warunki brzegowe i podporowe dla $x=0$ oraz $x=a$. Stałe C_n i D_n wystarczy wyznaczyć ze względu na symetrię na jednym z pozostałych brzegów $y=\pm b/2$. Analogicznie przyjmujemy

$$(10.4) \quad \theta(x, y) = \frac{q_0 a^4}{K} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2 \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \frac{n\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

spełniając przyjęte warunki brzegowe dla $x=0$, $x=a$. Stałe A_n i B_n wyznaczmy ze względu na symetrię na jednym z brzegów $y=\pm b/2$. Podstawiając wyrażenia na $\theta(x, y)$ i $w(x, y)$ do warunków na brzegu $y=b/2$ otrzymamy do wyznaczenia stałych A_n , B_n , C_n i D_n następujący układ równań algebraicznych:

$$(10.5) \quad \begin{cases} A_n \omega_n^{11} + B_n \omega_n^{12} + \gamma_0 C_n \omega_n^{13} + \gamma_0 D_n \omega_n^{14} = -\gamma_0 d_n^1, \\ A_n \omega_n^{21} + B_n \omega_n^{22} = 0, \\ \gamma_0 A_n \omega_n^{13} + \gamma_0 B_n \omega_n^{32} + C_n \omega_n^{33} + D_n \omega_n^{34} = d_n^3, \\ \gamma_0 A_n \omega_n^{41} + \gamma_0 B_n \omega_n^{42} - C_n \omega_n^{43} + D_n \omega_n^{44} = d_n^4. \end{cases}$$

W powyższych równaniach ω_n^{hi} i d_n^k są znanymi współczynnikami. Zestawiono je w tabelicy 1. Wyprowadzone zostało oznaczenie $\alpha_n = n\pi b/2a$. Rozwiązując powyższy układ równań otrzymamy

$$(10.6) \quad \begin{cases} A_n = - \frac{\gamma_0 \left(d_n^1 + \varphi_4 \frac{d_n^3 \omega_n^{43} + d_n^4 \omega_n^{33}}{\Delta_n^{34}} - \frac{\omega_n^{13}}{\omega_n^{43}} d_n^4 \right)}{\varphi_3 + \gamma_0^2 \left(\frac{\omega_n^{13}}{\omega_n^{33}} \varphi_2 - \frac{\varphi_1 \varphi_4}{\Delta_n^{34}} \right)}, \\ B_n = -A_n \frac{\omega_n^{21}}{\omega_n^{22}}, \quad D_n = -\gamma_0 \frac{A_n \varphi_1}{\Delta_n^{34}} + \frac{d_n^3 \omega_n^{43} + d_n^4 \omega_n^{33}}{\Delta_n^{34}}, \\ C_n = \gamma_0 A_n \frac{\varphi_2}{\omega_n^{43}} + \frac{\omega_n^{44}}{\omega_n^{43}} D_n - \frac{d_n^4}{\omega_n^{43}}. \end{cases}$$

Tablica 1

$\frac{i}{k}$	ω_n^{k1}	ω_n^{k2}	ω_n^{k3}	ω_n^{k4}	d_n^k
1	$\frac{a}{n\pi} \operatorname{sh} \alpha_n + \frac{F}{h} (1+\nu) \operatorname{ch} \alpha_n$	$\frac{a}{n\pi} (\operatorname{sh} \alpha_n + \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n) + \frac{F}{h} [2 \operatorname{ch} \alpha_n + (1+\nu) \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n]$	$FE \operatorname{ch} \alpha_n$	$FE \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n$	$\frac{4FE}{a^2 n^2 \pi^3}$
2	$-\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \operatorname{ch} \alpha_n + \frac{I_2}{h} \frac{n\pi}{a} \times (1+\nu) \operatorname{sh} \alpha_n$	$-\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n + \frac{I_2}{h} [(1+\nu) - 2 \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}] \frac{n\pi}{a} \times \operatorname{sh} \alpha_n + \frac{I_2}{h} \frac{n\pi}{a} \times (1+\nu) \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n$	—	—	—
3	$-\operatorname{ch} \alpha_n$	$-\alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n$	$kGI_0 \frac{n\pi}{a} \operatorname{sh} \alpha_n + K(1-\nu) \operatorname{ch} \alpha_n$	$kGI_0 \frac{n\pi}{a} (\operatorname{sh} \alpha_n + \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n) + K[2 \operatorname{ch} \alpha_n + (1-\nu) \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n]$	$\nu \frac{4K}{a^2 n^2 \pi^3}$
4	$\frac{n\pi}{a} \operatorname{sh} \alpha_n$	$\frac{n\pi}{a} (\operatorname{sh} \alpha_n + \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n)$	$EI_3 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \operatorname{ch} \alpha_n + K \frac{n\pi}{a} (1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_n$	$-EI_3 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n + K(1+\nu) \frac{n\pi}{a} \operatorname{sh} \alpha_n - K(1-\nu) \frac{n\pi}{a} \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n$	$\frac{4}{n\pi a^2} EI_3$

W powyższych równaniach wprowadzono oznaczenia

$$\Delta_{n_j}^{34} = \omega_n^{44} \omega_n^{33} + \omega_n^{34} \omega_n^{43}, \quad \varphi_1 = \omega_n^{33} \omega_n^{41} + \omega_n^{31} \omega_n^{43} - \frac{\omega_n^{32} \omega_n^{21} \omega_n^{43} + \omega_n^{42} \omega_n^{21} \omega_n^{33}}{\omega_n^{22}},$$

$$\varphi_2 = \omega_n^{41} - \frac{\omega_n^{42} \omega_n^{21}}{\omega_n^{22}}, \quad \varphi_3 = \omega_n^{11} - \frac{\omega_n^{12} \omega_n^{21}}{\omega_n^{22}}, \quad \varphi_4 = \frac{\omega_n^{13} \omega_n^{44} + \omega_n^{14} \omega_n^{43}}{\omega_n^{43}}$$

Podstawiając obliczone współczynniki (10.6) do równań (10.2) i (10.4) otrzymamy ogólne rozwiązanie zadania. Znając funkcję $w(x, y)$ i $\Theta(x, y)$ wyznaczymy za pomocą równań (8.2), (8.4) wartości statyczne w płycie.

W ten sposób w zasadzie zadanie zostało całkowicie rozwiązane. W obliczeniach praktycznych najlepiej posłużyć się gotowymi tablicami, które można i należy sporządzić na podstawie otrzymanych wzorów.

Przykład 2. Rozpatrzmy teraz tę samą płytę prostokątną co w przykładzie 1, ale uwzględnimy wpływ ciężaru własnego belek na wielkości statyczne w płycie. Zakładamy, że ciężar belek g kG/m jest stały. Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregów Fouriera. W tym celu rozwijamy obciążenie g_3 w szereg Fouriera:

$$g_3 = \frac{4g_3}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Funkcje naprężeń $\Theta(x, y)$ i $w(x, y)$ przyjmujemy w postaci

$$\Theta(x, y) = \frac{g_3 a^4}{K} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2 \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \frac{n\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a},$$

$$w(x, y) = \frac{g_3 a^4}{K} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2 \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \frac{n\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Spełniają one równania

$$\Delta \Delta \Theta(x, y) = 0, \quad \Delta \Delta w(x, y) = 0$$

oraz warunki brzegowe

$$x=0, \quad x=a, \quad w=w_{xx}=0, \quad \Theta_{xx}=\Theta_{yy}=0.$$

Stałe A_n, B_n, C_n i D_n wyznaczamy z warunku na brzegu $y = \pm b/2$:

$$-\Theta_n - \frac{F}{h} (\Theta_{nn} + \nu \Theta_{ss}) + EF\gamma_0 w_{ss} = 0,$$

$$-\Theta - \frac{I_2}{h} \left[(1+\nu) + \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} \right] \Theta_{ssn} - \frac{I_2(1-\nu)^2}{h(1-2\nu)} \Theta_{nnn} = 0,$$

$$kGI_0 w_{ssn} - K(w_{nn} + \nu w_{ss}) - \gamma_0 \Theta_{ss} = 0,$$

$$-EI_3 w_{ssss} + K[w_{nnn} + (2-\nu)w_{ssn}] - \gamma_0 \Theta_{ssn} = -g_3.$$

Wstawiając wyrażenia na $\Theta(x, y)$ i $w(x, y)$ do powyższych równań otrzymamy do wyznaczenia stałych A_n, B_n, C_n i D_n układ równań zwyczajnych. Ma on takie same współczynniki ω_n^{ki} jak w przykładzie 1. Różne są tylko wyrazy wolne, mianowicie

$$d_n^1 = d_n^2 = d_n^3 = 0, \quad d_n^4 = \frac{4K}{a^4 n\pi}.$$

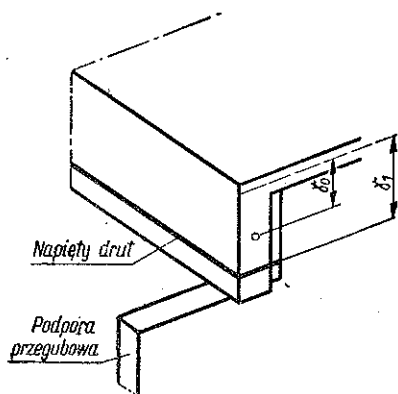
Na podstawie przykładu 1 otrzymamy

$$A_n = -\frac{\gamma_0 \left(\varphi_4 \frac{\omega_n^{33}}{\Delta_n^{34}} - \frac{\omega_n^{13}}{\omega_n^{43}} \right) d_n^4}{\varphi_3 + \gamma_0^2 \left(\frac{\omega_n^{13} \varphi_2}{\omega_n^{43}} - \frac{\varphi_1 \varphi_4}{\Delta_n^{14}} \right)}, \quad B_n = -A_n \frac{\omega_n^{21}}{\omega_n^{22}},$$

$$D_n = -\frac{\gamma_0 A_n \varphi_1}{\Delta_n^{14}} + \frac{\omega_n^{33}}{\Delta_n^{14}} d_n^4, \quad C_n = \gamma_0 A_n \frac{\varphi_2}{\omega_n^{43}} + \frac{\omega_n^{44}}{\omega_n^{43}} D_n - \frac{d_n^4}{\omega_n^{43}}.$$

Na podstawie równań (8.4) możemy obliczyć wielkości statyczne w płycie.

Przykład 3. Rozpatrzmy teraz płytę jak w przykładzie 1, ale obciążoną w inny sposób. Obydwie belki zostały sprężone jednakową stałą siłą S_0



Rys. 9

działającą w odległości γ_1 od powierzchni środkowej płyty. Sprężenie wykonano przez owinięcie belek po zewnętrznej stronie napiętym drutem. Położenie drutów pokazano na rys. 9. Oprócz sprężenia na płytę nie działa żadne obciążenie.

Obliczamy wielkości statyczne w płycie powstałe od sprężenia belek. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia dwu funkcji naprężeń $w(x, y)$ i $\Theta(x, y)$ spełniających wewnątrz obszaru równania

$$\Delta \Delta \Theta(x, y) = 0, \quad \Delta \Delta w(x, y) = 0,$$

na brzegach $x=0$ oraz $x=a$ warunki $w = w_{xx} = 0$, $\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = 0$, a na brzegach $y = \pm b/2$ warunki (8.14):

$$\Theta_n + \frac{F}{h} (\Theta_{nn} - \nu \Theta_{ss}) - EF \gamma_0 w_{ss} = - \int g_1(x) dx = S(x),$$

$$-\Theta - \frac{I_2}{h} \left[(1 + \nu) - \frac{(1 - \nu)^2}{1 - 2\nu} \right] \Theta_{ssn} - \frac{I_2}{h} \frac{(1 - \nu)^2}{1 - 2\nu} \Theta_{nnn} = 0,$$

$$kGI_0 w_{ssn} - K(w_{nn} + \nu w_{ss}) - \gamma_0 \Theta_{ss} = 0,$$

$$EI_3 w_{ssss} - K[w_{nnn} + (2 - \nu) w_{ssn}] + \gamma_0 \Theta_{ssn} = g_{1x}(\gamma_1 - \gamma_0).$$

Funkcje naprężeń spełniające równania wewnątrz obszaru i warunki brzegowe dla $x=0$, $x=a$ przyjmujemy w postaci następującej:

$$\Theta(x, y) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2 \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \frac{n\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a},$$

$$w(x, y) = \sum_{n=1, 2, 4, \dots} \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2 \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \frac{n\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Ze względu na symetrię względem osi x , stałe A_n , B_n , C_n i D_n wyznaczymy z warunków na jednym z brzegów $y = \pm b/2$. Siłą sprężającą $S(x)$, która jest stała i występuje w pierwszym równaniu warunku brzegowego dla $y = \pm b/2$, rozwijamy w szereg Fouriera

$$S(x) = -\frac{4S_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Między obciążeniem na jednostkę długości $g_1(x)$ a siłą $S(x)$ zachodzi związek:

$$\int_0^a g_1(x) dx = -S_0.$$

Ponieważ wyrażenie $g_{1x}(x)$ po rozwinięciu w szereg jest rozbieżne, należy czwarte równanie warunków brzegowych dla $y = \pm b/2$ dwukrotnie scałkować względem x . Otrzymamy

$$EI_3 w_{ss} - K \left[\iint w_{nnnd} ds + (2 - \nu) w_n \right] + \gamma_0 \Theta_n = (\gamma_1 - \gamma_0) \iint g_{1x}(x) dx = (\gamma_1 - \gamma_0) S(x),$$

gdzie

$$\iint w_{nnnd} ds = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{a}{n\pi} \left[(C_n + 3D_n) \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + D_n \frac{n\pi b}{2a} \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} \right] \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Posłużymy się rozwiązaniem (10.6) współczynników A_n , B_n , C_n i D_n z przykładu 1. Oznaczmy

$$d_n^1 = \frac{1}{\gamma_0} \frac{4S_0}{n\pi}, \quad d_n^2 = 0, \quad d_n^3 = 0, \quad d_n^4 = -(\gamma_1 - \gamma_0) \frac{4S_0}{n\pi}$$

oraz

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_n^{41} &= -\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \omega_n^{41}, & \bar{\omega}_n^{42} &= -\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \omega_n^{42}, \\ \bar{\omega}_n^{43} &= -\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \omega_n^{43}, & \bar{\omega}_n^{44} &= -\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \omega_n^{44}. \end{aligned}$$

Pozostałe współczynniki występują jak w przykładzie 1. Po podstawieniu do równań (10.6) otrzymamy:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\gamma_0 \left(d_n^1 + \varphi_4 \frac{d_n^4 \omega_n^{33}}{\Delta_n^{34}} - \frac{\omega_n^{13}}{\omega_n^{43}} d_n^4 \right)}{\varphi_3 + \gamma_0^2 \left(\frac{\omega_n^{13}}{\omega_n^{43}} \varphi_2 - \frac{\varphi_1 \varphi_4}{\Delta_n^{34}} \right)}, \\ B_n &= -A_n \frac{\omega_n^{21}}{\omega_n^{22}}, & D_n &= -\gamma_0 \frac{A_n \varphi_1}{\Delta_n^{34}} + \frac{d_n^4 \omega_n^{33}}{\Delta_n^{34}}, \\ C_n &= \gamma_0 A_n \frac{\varphi^2}{\omega_n^{43}} + \frac{\bar{\omega}_n^{44}}{\omega_n^{43}} D_n - \frac{d_n^4}{\omega_n^{43}}. \end{aligned}$$

W powyższych równaniach wprowadzono oznaczenia następujące:

$$\Delta_n^{34} = \bar{\omega}_n^{44} \omega_n^{33} + \omega_n^{24} \bar{\omega}_n^{43}, \quad \varphi_1 = \omega_n^{33} \bar{\omega}_n^{41} + \omega_n^{31} \bar{\omega}_n^{43} - \frac{\omega_n^{21}}{\omega_n^{22}} (\omega_n^{32} \bar{\omega}_n^{43} + \bar{\omega}_n^{42} \omega_n^{33}),$$

$$\varphi_2 = \bar{\omega}_n^{41} - \frac{\omega_n^{21}}{\omega_n^{22}} \bar{\omega}_n^{42}, \quad \varphi_3 = \omega_n^{11} - \frac{\omega_n^{21}}{\omega_n^{22}} \omega_n^{12}, \quad \varphi_4 = \bar{\omega}_n^{14} + \frac{\bar{\omega}_n^{44}}{\omega_n^{43}} \omega_n^{13}.$$

Po obliczeniu współczynników A_n , B_n , C_n i D_n wyznaczamy wielkości statyczne w płycie z równań (8.2) i (8.4).

Literatura cytowana w tekście

- [1] R. Bortsch, *Die Mitwirkende Plattenbreite*, Bauing, 1921, s. 662.
- [2] E. Chwalla, *Die Formeln zur Berechnung der vollmittragenden Breite dünner Gurt- und Rippenplatten*, Stahlbau, 1936, s. 73.
- [3] В. Г. Донченко, *Пространственный расчет далочных автодорожных мостов*, 1953.
- [4] A. Eggenschwyler, *Über die Spannungsverteilung in breiten Trägerflansche*, Eisenbahn, 1917, s. 228.
- [5] S. I. Fuchs, *Plates with Boundary Conditions of Elastic Support*, Proc. Amer. Soc. Civ. Engin., 1953.
- [6] K. Girkmann, *Flächentragwerke*, Wiedeń 1948.
- [7] K. Girkmann, *Spannungsverteilung in geschweisster Blechträgern*, Stahlbau, 1933, s. 98.
- [8] А. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек*, Moskwa 1953 s. 34.
- [9] M. T. Huber, *Teoria płyt*, Lwów 1921.
- [10] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, Kraków 1950.
- [11] С. Г. Лехницкий, *Анизотропные пластинки*, Moskwa-Leningrad 1947.
- [12] Л. С. Лейбенсон, *Теория упругости*, Moskwa 1947.
- [13] Я. Е. Милейковский и В. С. Васылков, *Экспериментальные и теоретические исследования тонкостенных пространственных конструкций*, 1952, s. 21.
- [14] E. Müller, *Ing. Arch.*, 2 (1932), s. 606.
- [15] E. Müller, *Rechteckige Platten, die an allen vier Seiten durch elastische Träger unterstützt sind*, *Ing. Arch.* 12. (1941), s. 37.
- [16] W. Nowacki, *Zagadnienia statyki i dynamiki płyt wzmocnionych żebrami*, *Arch. Mech. Stos.* 4 (1954), s. 600.
- [17] W. Nowacki, *Stateczność płyt prostokątnych*, *Arch. Mech. Stos.* 2 (1954), s. 332.
- [18] E. Reissner, *Über die Berechnung von Plattenbalken*, Stahlbau, 1934, s. 206.
- [19] H. Reissner, *Spannungsverteilung in der Gurtplatte einer Rippendecke*, *Zeitschr. Math. Mech.*, t. 14, 1934, s. 312.
- [20] E. Reissner, *On Bending of Elastic Plates*, *Quart. Appl. Math.* 1947, s. 55.
- [21] D. Rüdiger, *Die strenge Theorie der Faltwerke Konstanter Krümmung*, *Ing. Arch.* 23, 133, (1955), *Öster. Ing. Arch.* 1957, s. 5.

[22] M. Sokołowski, *The Stability of an Orthotropic Infinitely Long Plate with Ribs*, Arch. Mech. Stos. 4 (1956).

[23] М. П. Шереметьев, *Изгиб тонких плит с подкрепленным краем*, Укр. мат. журн. 1953, s. 58.

[24] S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, 1940.

[25] K. Trenks, *Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten*, Der Bauing. 29 (1954), s. 372.

[26] В. З. Власов, *Исследования по вопросам теории и проектирования тонкостенных конструкций*, 1950, s. 31.

[27] В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, 1949.

Резюме

ПЛАСТИНКИ ПОДКРЕПЛЕННЫЕ БАЛКАМИ

Главной темой настоящей работы является сформулирование краевых условий для пластинки подкрепленной по краям балками. Такими пластинками занимались многие авторы. Критический обзор их работ приводится в п. 1.

Конструкция краевых условий состоит в предположении, что:

1) балка подкрепляющая край пластинки и соединенная с ней монолитически, под влиянием воздействия, деформируется также как и пластинка в месте контакта двух конструктивных элементов.

2) при таком сотрудничестве сохраняются условия равновесия балки и пластинки.

В п. 2-7 представлены понятия и уравнения, использованные для формулирования задачи. Рассуждения опираются на гипотезе Кирхгофа и гипотезе плоских сечений.

Условие 1 выражается уравнениями (6.8) и (6.9) и определяет зависимости между статическими величинами в балке и такими же величинами на краю пластинки. Это условие вытекает из равенства деформации балки и пластинки в месте их стыка. Для выведения этих уравнений были использованы формулы (2.18), определяющие зависимости между компонентами тензора деформации и статическими величинами в пластинке, а также формулы (6.1) и (6.2), выражающие статические величины в балке с помощью компонентов тензора деформации на краю пластинки.

Условие 2 составляют уравнения равновесия балки (4.6) и (4.9), находящейся под влиянием воздействия пластинки и непосредственной наружной нагрузки.

В общем получаем шесть зависимостей (6.8) и (6.9) и таким образом все статические величины в балке выражаются с помощью статических величин в пластинке.

Для однозначного сформулирования задачи использовано только четыре зависимости, т.е. зависимость между осевой силой и моментами в балке и статическими величинами в пластинке.

В п. 8 автор обосновывает и иллюстрирует такое представление вопроса примером прямоугольной пластинки. Из уравнения равновесия балки (8.8), а также из уравнений (8.11) можно создать условия на краю подкрепленном балкой. Ввиду того, что статические величины в пластинке можно представить с помощью двух функций напряжений $\Theta(x, y)$ и $w(x, y)$, поэтому условия для края подкрепленного балкой (8.14) выражаются при помощи этих двух функций. Они заключают в себе такие частные случаи, как:

- а) свободный край (8.15),
- б) жесткое защемление (8.18) и (8.19),
- в) шарнирная опора (8.17),
- г) применяемые до сих пор случаи упругого опирания пластинки на балке (8.16).

В п. 9 автор получил аналогичные краевые условия (9.11) для круговой пластинки. Они заключают в себе также и случай жесткого опирания и свободный край.

Для каждого иного частного случая пластинки можно, аналогичным образом, сформулировать краевые условия.

Условия для края подкрепленного балкой выражаются в дифференциальной форме и не зависят от вида опоры балки. Поэтому, следует еще задавать условия опирания на конце балки или в местах изгиба оси балки в плане. Эти условия формулируются по принципам, применяемым в сопротивлении материалов, для стержневых систем.

В п. 10 приводятся подробные примеры, которые иллюстрируются представленным методом; там же дается решение для прямоугольной пластинки, подкрепленной балками с двух сторон.

В примере 3 автор приводит расчет влияния предварительного напряжения балки на статические величины в пластинке.

Summary

PLATES WITH STIFFENING BEAMS

The principal object of this paper is to establish the boundary conditions for a plate stiffened with edge beams. Such plates have been considered by many authors, a critical survey of whose works is given in Art. 1.

The establishment of the boundary conditions is based on the assumptions that

1) the edge beam (constituting a whole with the plate) is deformed in the same way as the plate at the contact line,

2) the conditions of equilibrium of the beam and the plate are preserved.

The concepts and equations for the statement of the problem are described in Art. 2 to 7. The reasoning is based on the Kirchhoff hypothesis and the hypothesis of plane cross-sections.

The condition 1 is expressed by the Eqs. (6.8) and (6.9) and determines the relations between the mechanical quantities in the beam and in the plate. This follows from the equality of deformations of the beam and the plate at the contact line. The equations considered are derived from the Eqs. (2.18) describing the relations between the coordinates of the strain tensor and the mechanical quantities in the plate, and from the Eqs. (6.1), (6.2) expressing the mechanical quantities in the beam in function of the coordinates of the strain tensor at the edge of the plate.

The condition 2 is expressed by the equilibrium equations for the beam (4.6), (4.9) acted on by the plate and the external load.

In general, we obtain six equations (6.8) and (6.9), all the mechanical quantities of the beam being thus expressed in terms of those of the plate.

For an unequivocal statement of the problem, only four of these relations will be used. These are the relations between the axial force and the moments in the beam and the statical quantities in the plate.

Such a procedure is explained in Art. 8 and illustrated by an example of a rectangular beam. From the equations of equilibrium of the beam (8.8), and from the Eqs. (8.11), we can obtain the conditions for an edge stiffened with a beam. The mechanical quantities in the plate being described by means of two stress functions $\Theta(x, y)$ and $w(x, y)$, the conditions for an edge stiffened with a beam (8.14) are expressed in terms of these two functions.

They comprise such particular cases as those of:

a) free edge (8.15),

b) clamped edge (8.18) and (8.19),

c) hinged support (8.17),

d) elastic support on a beam, as commonly used hitherto, (8.16).

The boundary conditions for a circular plate (9.11) are obtained in an analogous manner in Art. 9. They contain also the cases of free and damped edge.

Boundary conditions for any other particular case may be established in a similar manner.

The conditions for a stiffened edge are expressed in a differential form and do not depend on the way in which the beam is supported. Therefore, some support conditions should be assumed at the ends of the beam or at the points where the beam axis is broken (if the beam constitutes a broken line). These are established according to the principles of strength of materials for lattice structures.

The particular cases in Art. 10 illustrate the method presented, and concern a rectangular plate with two edges stiffened. The plane state of stress is considered in addition to that of bending. The influence of beam prestressing on the mechanical quantities of the plate is also calculated.

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 kwietnia 1957 r. .