

CZESŁAW EIMER

ZASTOSOWANIE TRANSFORMACJI LAPLACE'A
W OBLICZENIACH REOLOGICZNYCH KONSTRUKCJI
SPRĘŻONYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XCV

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Uwagi wstępne	183
2. Ustroje izostatyczne	184
3. Ustroje hiperstatyczne	188
4. Zastosowanie praktyczne teorii. Przykład obliczenia ramy prostokątnej dwuprzegubowej	190

1. Uwagi wstępne

W pracy [1] podaliśmy zarys teorii pełzania ustrojów hiperstatycznych wstępnie sprężonych w oparciu o ogólną teorię pełzania Volterry-Boltzmana, uwzględniającą wpływ dojrzałości (wieku) betonu. Teoria ta prowadzi do układów równań całkowych Volterry typu (2.21*)¹, których rozwiązanie może być przeprowadzone ogólnie metodą iteracji, co jednak wymaga na ogół znacznego nakładu pracy rachunkowej. Nakład ten jest zależny od postaci obranej funkcji pełzania, którą przyjmuje się przede wszystkim pod kątem widzenia uproszczeń obliczeniowych, nawet za cenę nieco gorszej aproksymacji doświadczalnych krzywych pełzania. Zbyt wielka dokładność nie byłaby tu uzasadniona, ponieważ sama teoria posiada charakter przybliżony, np. zakłada liniowość pełzania, pomija wpływ relaksacji armatury, wpływ naprężeń ścinających itd.

W pracy [1] naszkicowaliśmy ogólnie tok rozwiązania w przypadku, gdy funkcja pełzania ma postać sumy iloczynów funkcji parametrów: odpowiednio t (czasu obciążenia) i τ (wieku betonu), co jest założeniem bardzo ogólnym. Zagadnienie sprowadza się wówczas do rozwiązania układu równań różniczkowych odpowiedniego rzędu o zmiennych w ogólności współczynnikach, co nastęrcza również duże trudności rachunkowe.

W niniejszej pracy przedstawimy rozwiązanie w przypadku, gdy funkcja pełzania jest funkcją różnicy dwóch argumentów t i τ tj.

$$(1.1) \quad C(t, \tau) = C(t - \tau),$$

co jest równoznaczne z założeniem, że przebieg pełzania nie zależy od wieku betonu w chwili obciążenia. Natomiast teoria nie wymaga założenia *a priori* postaci samej funkcji C . Jeżeli obciążenie ma charakter okresowo stały (a tak bywa najczęściej), można dla kolejnych okresów wprowadzić odmienne funkcje pełzania (np. różniące się stałym parametrem) i w ten sposób zmniejszyć błędy wynikające z nieuwzględnienia dojrzałości betonu.

¹ W dalszym ciągu oznaczamy gwiazdką wzory odnoszące się do pracy [1].

Korzyści płynące z powyższego założenia polegają na możliwości zastosowania metody operatorowej opartej na transformacji Laplace'a do rozwiązania układu równań całkowych pełzania (na co zwróciło już uwagę kilku autorów). Prowadzi to do daleko posuniętej «arytmetyzacji» obliczeń i pozwala na bezpośrednie wykorzystanie teorii w praktyce inżynierskiej w stopniu niemniejszym niż stosowana obecnie powszechnie jednoparametrowa teoria Dischingera².

Zastosowanie transformacji Laplace'a (jednostronnej)

$$\mathcal{L}[F(t)] = f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$$

do rozwiązania równań całkowych opiera się, jak wiadomo, na następującym twierdzeniu o składaniu transformacji.

Weźmy pod uwagę splot funkcji F_1 i F_2

$$F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t F_1(t - \tau) F_2(\tau) d\tau$$

i załóżmy absolutną zbieżność całek Laplace'a dla tych funkcji. Wówczas transformacja splotu funkcji jest równa iloczynowi transformacji funkcji składowych, tzn.

$$\mathcal{L}[F_1(t) * F_2(t)] = \mathcal{L}[F_1(t)] \mathcal{L}[F_2(t)].$$

Wykorzystanie tego twierdzenia pozwala na wprowadzenie bardzo przejrzystej symboliki rachunku.

2. Ustroje izostatyczne

Rozważmy najpierw ustrój izostatyczny (tzn. tylko wewnętrznie statycznie niewyznaczalny) i zwróćmy uwagę na układ równań całkowych (2.13*), którego jądra mają postać

$$K(t, \tau) = E(t) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau},$$

gdzie $\delta(t, \tau)$ oznacza odkształcenia właściwe (przy naprężeniu jednostkowym) z uwzględnieniem pełzania,

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau).$$

² Teoria ta prowadzi do układów równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach, które zresztą również mogą być rozwiązywane z korzyścią metodą operatorową.

Załóżmy $E(\tau) = \text{const}$ oraz $C(t, \tau)$ w postaci (1.1). Wówczas

$$(2.1) \quad K(t, \tau) = E \frac{\partial C(t - \tau)}{\partial \tau} = -E \frac{\partial C(t - \tau)}{\partial (t - \tau)} = K(t - \tau).$$

Na tej podstawie układ (2.13*) w przypadku ustroju izostatycznego zapisujemy w postaci

$$(2.2) \quad \begin{cases} \eta_0(t) = F_\eta + \lambda_{\eta\eta} \eta_0 * K + \lambda_{\eta\omega} \omega * K, \\ \omega(t) = F_\omega + \lambda_{\omega\eta} \eta_0 * K + \lambda_{\omega\omega} \omega * K, \end{cases}$$

gdzie (por. [1], str. 435)

$$\begin{aligned} F_\eta(t) &= \Theta_N(N_0^* + N_\varepsilon + S_0^*) - \Theta(M_0^* + M_\varepsilon + M_{S_0}^*), \\ F_\omega(t) &= \Theta_M(M_0^* + M_\varepsilon + M_{S_0}^*) - \Theta(N_0^* + N_\varepsilon + S_0^*) \end{aligned}$$

(wprowadzono tutaj, jak również w dalszym ciągu, uproszczoną symbolikę w porównaniu z [1], mianowicie: $\Theta_{\eta N} = \Theta_N$, $\Theta_{\omega M} = \Theta_M$, $\Theta_{\eta M} = \Theta_{\omega N} = \Theta$).

Do obu stron równań (2.2) stosujemy transformację Laplace'a korzystając z twierdzenia o transformacji spłotu funkcji. Funkcje przetransformowane (transformaty funkcji) będziemy oznaczali w dalszym ciągu małymi literami, a więc ogólnie $\mathcal{L}[F(t)] = f(p)$, $\mathcal{L}[K(t)] = k(p)$.

Przy zastosowaniu tych oznaczeń układ przetransformowany ma postać

$$(2.3) \quad \begin{cases} \mathcal{L}[\eta_0] = f_\eta + \lambda_{\eta\eta} k \mathcal{L}[\eta_0] + \lambda_{\eta\omega} k \mathcal{L}[\omega], \\ \mathcal{L}[\omega] = f_\omega + \lambda_{\omega\eta} k \mathcal{L}[\eta_0] + \lambda_{\omega\omega} k \mathcal{L}[\omega]. \end{cases}$$

Powyższy układ równań algebraicznych liniowych rozwiązujemy ze względu na niewiadome $\mathcal{L}[\eta_0]$ i $\mathcal{L}[\omega]$. Otrzymamy

$$(2.4) \quad \begin{cases} \mathcal{L}[\eta_0] = \frac{f_\eta(1 - \lambda_{\omega\omega} k) + f_\omega \lambda_{\eta\omega} k}{(\lambda_{\eta\eta} \lambda_{\omega\omega} - \lambda_{\eta\omega} \lambda_{\omega\eta}) k^2 - (\lambda_{\eta\eta} + \lambda_{\omega\omega}) k + 1}, \\ \mathcal{L}[\omega] = \frac{f_\omega(1 - \lambda_{\eta\eta} k) + f_\eta \lambda_{\omega\eta} k}{(\lambda_{\eta\eta} \lambda_{\omega\omega} - \lambda_{\eta\omega} \lambda_{\omega\eta}) k^2 + (\lambda_{\eta\eta} + \lambda_{\omega\omega}) k + 1}. \end{cases}$$

Wstawiając te wyrażenia w prawą stronę równań (2.3) i wprowadzając oznaczenia (charakteryzujące cechy geometryczne przekroju)

$$(2.5) \quad \begin{cases} a = \lambda_{\eta\eta} \lambda_{\omega\omega} - \lambda_{\eta\omega} \lambda_{\omega\eta}, \\ \beta = \lambda_{\eta\eta} + \lambda_{\omega\omega}, \end{cases}$$

sprowadzamy, po nietrudnych przekształceniach, otrzymane rozwiązanie do postaci

$$(2.6) \quad \begin{cases} \mathcal{L}[\eta_0] = f_\eta + f_\eta r_{\eta\eta} + f_\omega r_{\eta\omega}, \\ \mathcal{L}[\omega] = f_\omega + f_\eta r_{\omega\eta} + f_\omega r_{\omega\omega}, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.7) \quad \begin{cases} r_{\eta\eta}(p) = \frac{\lambda_{\eta\eta}k - ak^2}{ak^2 - \beta k + 1}, \\ r_{\eta\omega}(p) = \frac{\lambda_{\eta\omega}k}{ak^2 - \beta k + 1}, \\ r_{\omega\eta}(p) = \frac{\lambda_{\omega\eta}k}{ak^2 - \beta k + 1}, \\ r_{\omega\omega}(p) = \frac{\lambda_{\omega\omega}k - ak^2}{ak^2 - \beta k + 1}. \end{cases}$$

Funkcje $r(p)$ są wynikiem przekształcenia Laplace'a rezolwentów składowych układu równań całkowych (2.13*), występujących w rozwiązaniu (2.14*). Stosując do równań (2.6) transformację odwrotną i oznaczając ogólnie $\mathcal{L}^{-1}[r(p)] = R(t)$ otrzymamy bowiem

$$(2.8) \quad \begin{cases} \eta_0(t) = F_\eta(t) + \int_0^t F_\eta(\tau) R_{\eta\eta}(t-\tau) d\tau + \int_0^t F_\omega(\tau) R_{\eta\omega}(t-\tau) d\tau, \\ \omega(t) = F_\omega(t) + \int_0^t F_\eta(\tau) R_{\omega\eta}(t-\tau) d\tau + \int_0^t F_\omega(\tau) R_{\omega\omega}(t-\tau) d\tau. \end{cases}$$

Wyrażenia (2.8) stanowią rozwiązanie układu (2.13*) lub (2.2), zaś odpowiednie wyrażenia $R(t-\tau)$ są jego rezolwentami składowymi. Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się zatem do przekształcenia odwrotnego funkcji $r(p)$ danych wyrażeniami (2.7), tzn. znalezienia ich funkcji pierwotnych, będących rezolwentami układu.

Korzystając z addytywności transformacji Laplace'a, dokonujemy powyższego przekształcenia rozkładając wyrażenia (2.7) na ułamki częściowe. Znajdując pierwiastki równania kwadratowego

$$ak^2 - \beta k + 1 = 0,$$

przedstawiamy funkcje $r(p)$ w postaci sum ułamków typu ³

$$(2.9) \quad \frac{Ak(p)}{k(p) - B},$$

³ Wyróżnik powyższego równania ma postać [por. (25) oraz [1], s. 435].

$$D = (\lambda_{\eta\eta} - \lambda_{\omega\omega})^2 + 4\lambda_{\eta\omega}\lambda_{\omega\eta} = \frac{n^2\mu^2[(1-\nu_i)^2 + 4\nu_e]}{[(1+n\mu)(1+n\mu\nu_i) - n^2\mu^2\nu_e]^2}$$

i jest dodatni (gdyż ν_e jest dodatnie), zatem równanie ma tylko pierwiastki rzeczywiste i jednokrotne.

gdzie A i B są pewnymi stałymi. Przekształcenie do obszaru pierwotnego⁴ powyższych wyrażeń zależy od postaci funkcji $k(p)$. Jeżeli np. funkcja pełzania ma postać

$$C(t - \tau) = C_0(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}),$$

a zatem [por. (2.1)]

$$K(t - \tau) = -EC_0 e^{-\gamma(t-\tau)},$$

wówczas

$$k(p) = \mathcal{L}[K] = -EC_0 \gamma \frac{1}{p + \gamma}.$$

Wstawiając $k(p)$ do wyrażeń (2.9) dojdziemy w tym przypadku do sum ułamków formy

$$\frac{D_1}{p + D_2}$$

(gdzie D są pewnymi stałymi), których funkcje pierwotne mają postać

$$D_1 e^{-D_2 t}.$$

Wывód powyższy można rozszerzyć bez trudności na przypadek, gdy $K(t - \tau)$ jest sumą kilku funkcji wykładniczych. Przy rozwiązywaniu praktycznych zagadnień korzystamy z wszelkich twierdzeń rachunku operatorowego, przy czym w tablicach transformacji są również z reguły podane warunki zbieżności całek.

W przypadku armatury skoncentrowanej, tzn. przy $\nu_e = \nu_i$, (por. [1], s. 443), jak łatwo stwierdzić, $\alpha = 0$ i funkcje $r(p)$ dane wzorami (2.7) stają się równe sobie z dokładnością do stałego współczynnika. Oznaczając

$$(2.10) \quad r(p) = \frac{k}{1 - \beta k}$$

sprowadzamy równania (2.6) do postaci

$$(2.11) \quad \begin{cases} \mathcal{L}[\eta_0] = f_\eta + (\lambda_{\eta\eta} f_\eta + \lambda_{\eta\omega} f_\omega) r, \\ \mathcal{L}[\omega] = f_\omega + (\lambda_{\omega\eta} f_\eta + \lambda_{\omega\omega} f_\omega) r. \end{cases}$$

⁴ Jak wiadomo, transformacja odwrotna funkcji $f(p)$ ma w ogólności postać

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{tp} f(p) dp,$$

gdzie $p = \sigma + \tau i$, a całkowanie dokonuje się po prostej równoległej do osi urojonej. W praktyce oczywiście stosowanie tego ogólnego wzoru nie jest konieczne i korzysta się z gotowych tablic całek Laplace'a.

wobec czego

$$x^* = x - kx = x(1 - k).$$

Na tej podstawie możemy przejść od razu do układu (przetransformowanego) dla wielkości niezredukowanych (nie wyróżnionych gwiazdkami) dzieląc obustronnie przez $(1 - k)$; otrzymamy

$$(3.1) \quad \begin{cases} \delta_{aa} x_a + \delta_{ba} x_b + \dots + \delta_{na} x_n = q_a - \Delta_{aa} x_a - \Delta_{ba} x_b - \dots - \Delta_{na} x_n, \\ \delta_{ab} x_a + \delta_{bb} x_b + \dots + \delta_{nb} x_n = q_b - \Delta_{ab} x_a - \Delta_{bb} x_b - \dots - \Delta_{nb} x_n, \\ \dots \\ \delta_{an} x_a + \delta_{bn} x_b + \dots + \delta_{nn} x_n = q_n - \Delta_{an} x_a - \Delta_{bn} x_b - \dots - \Delta_{nn} x_n, \end{cases}$$

gdzie ogólnie

$$q = \frac{\mathcal{L}[x]}{1 - k}$$

oznacza wyraz obciążeniowy lub po przeniesieniu wszystkich niewiadomych na lewą stronę i wyraźnym wypisaniu funkcji p

$$(3.2) \quad \begin{cases} [\delta_{aa} + \Delta_{aa}(p)] x_a(p) + [\delta_{ba} + \Delta_{ba}(p)] x_b(p) + \dots + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + [\delta_{na} + \Delta_{na}(p)] x_n(p) = q_a(p), \\ \dots \\ [\delta_{an} + \Delta_{an}(p)] x_a(p) + [\delta_{bn} + \Delta_{bn}(p)] x_b(p) + \dots + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + [\delta_{nn} + \Delta_{nn}(p)] x_n(p) = q_n(p). \end{cases}$$

Jądra przetransformowane $\Delta(p)$ mają oczywiście postać (por. [1], s. 439)

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Delta_{km}(p) = & \int_s (\Theta_N N_k - \Theta M_k) N_m r_{\eta\eta}(p, \lambda) ds + \\ & + \int_s (\Theta_M M_k - \Theta N_k) N_m r_{\eta\omega}(p, \lambda) ds + \\ & + \int_s (\Theta_N N_k - \Theta M_k) M_m r_{\omega\eta}(p, \lambda) ds + \\ & + \int_s (\Theta_M M_k - \Theta N_k) M_m r_{\omega\omega}(p, \lambda) ds, \end{aligned}$$

gdzie wyrażenia $r(p, \lambda)$ dane są wzorami (2.7) z uwzględnieniem (2.5). Oczywiście wszystkie współczynniki Θ , λ oraz wielkości N_k i M_k , charakteryzujące konfigurację geometryczną ustroju, są tu w ogólności funkcjami s , tj. położenia rozpatrywanego przekroju. W przypadku armatury skoncentrowanej wyrażenie (3.3) przybiera postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \Delta_{km}(p) = & \int_s [(\Theta_N N_k - \Theta M_k) N_m \lambda_{\eta\eta} + (\Theta_M M_k - \Theta N_k) N_m \lambda_{\eta\omega} + \\ & + (\Theta_N N_k - \Theta M_k) M_m \lambda_{\omega\eta} + (\Theta_M M_k - \Theta N_k) M_m \lambda_{\omega\omega}] r(p, \lambda) ds, \end{aligned}$$

gdzie $r(p)$ należy wstawić ze wzoru (2.10).

Z powyższych wywodów widzimy, że problem został sprowadzony do rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych (3.2), które przybiera formę

$$(3.5) \quad x_a(p) = \frac{W_a}{W} = \frac{\begin{vmatrix} q_a(p), [\delta_{ba} + \Delta_{ba}(p)], \dots, [\delta_{na} + \Delta_{na}(p)] \\ q_b(p), [\delta_{bb} + \Delta_{bb}(p)], \dots, [\delta_{nb} + \Delta_{nb}(p)] \\ \dots \dots \dots \\ q_n(p), [\delta_{bn} + \Delta_{bn}(p)], \dots, [\delta_{nn} + \Delta_{nn}(p)] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [\delta_{aa} + \Delta_{aa}(p)], [\delta_{ba} + \Delta_{ba}(p)], \dots, [\delta_{na} + \Delta_{na}(p)] \\ [\delta_{ab} + \Delta_{ab}(p)], [\delta_{bb} + \Delta_{bb}(p)], \dots, [\delta_{nb} + \Delta_{nb}(p)] \\ \dots \dots \dots \\ [\delta_{an} + \Delta_{an}(p)], [\delta_{bn} + \Delta_{bn}(p)], \dots, [\delta_{nn} + \Delta_{nn}(p)] \end{vmatrix}}$$

i analogicznie dla $x_b(p)$, $x_c(p)$, ..., $x_n(p)$.

Rozwiązanie zagadnienia polega na przejściu do obszaru pierwotnego z powyższymi wyrażeniami, przy czym w miarę możliwości stosujemy ich rozkład na ułamki częściowe.

4. Zastosowanie praktyczne teorii. Przykład obliczenia ramy prostokątnej dwuprzegubowej

Efektywność rozwiązania, tzn. przejścia do obszaru pierwotnego z wyrażeniami (3.5) zależy od przyjętej funkcji pełzania, od konfiguracji geometrycznej ustroju (zmienności cech geometrycznych przekroju wzdłuż elementu) i stopnia jego statycznej niewyznaczalności. Występują tu zwłaszcza trudności dwojakiego rodzaju:

(1) przy zmiennym przekroju lub przy krzywoliniowej trasie kabla całkowanie we wzorach (3.3) lub (3.4) [z uwzględnieniem (2.7) lub (2.9)] prowadzi na ogół do skomplikowanych funkcji k , których transformacja odwrotna nastęrcza niekiedy poważne trudności;

(2) rozkład wyrażen typu (3.5) na ułamki częściowe wymaga rozwiązywania równań odpowiedniego stopnia (w celu wyznaczenia pierwiastków mianownika).

Trudności te zmuszają do poszukiwania metod przybliżonych.

Pierwszą trudność omijamy dzieląc element na odcinki, dla których przyjmujemy stały przekrój betonu i armatury i stały mimośród kabla. Wówczas funkcje $r(s)$ są odcinkowo stałe $[\alpha, \beta = \text{const}(s)]$ i mogą być wyłączone przed całki w wyrażeniach (3.3) lub (3.4). Podział na takie odcinki jest równoznaczny z aproksymacją linii ugięcia ustroju zastępczego pod wpływem (samych) sił sprężających linią złożoną z łuków kołowych.

Drugą trudność pokonujemy uwzględniając w sposób przybliżony (zresztą z dowolną dokładnością) wpływ armatury. Zauważmy mianowicie, że wyrażenia $\Delta(p)$ wchodzące w (3.5) są w porównaniu z δ wielkościami-

mi małymi (rzędu $n\mu$), gdyż zgodnie z (3.4) lub (3.3) w połączeniu z (2.7) wchodzi do nich małe współczynniki λ . Przy rozwinięciu wyrażeń typu (3.5) można więc pominąć, zależnie od żądanej dokładności, iloczyny Δ odpowiedniego stopnia.

W skrajnym przypadku możemy w ogóle pominąć wpływ armatury zakładając $n\mu=0$ (co prowadzi do $\Delta=0$), tzn. przejść do ustroju jednorodnego (por. [1], p. 3.3). Jest to uzasadnione w tych przypadkach, gdy rolę decydującą grają odkształcenia narzucone, takie jak osładanie podpór, odkształcenia termiczne, skurcz betonu⁵.

Współczynniki Θ i λ podane w pracy [1], s. 435 wystarczy przyjmować w sposób przybliżony (z błędem nie przekraczającym z reguły 2 do 3‰); odpowiednie wyrażenia otrzymujemy rozwijając ułamki według wzoru dwumianowego Newtona i zatrzymując pierwsze dwa wyrazy rozwinięcia oraz pomijając iloczyny zawierające $(n\mu)^2$:

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_N = \frac{1}{E_b A_b} (1 - n\mu) = \frac{i_b^2}{E_b I_b} (1 - n\mu), \\ \Theta = \frac{e_a}{E_b I_b} n\mu, \\ \Theta_M = \frac{1}{E_b I_b} (1 - \nu_i n\mu), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lambda_{\eta\eta} = n\mu, \\ \lambda_{\eta\omega} = e_a n\mu, \\ \lambda_{\omega\eta} = \frac{1}{e_a} \nu_e n\mu, \\ \lambda_{\omega\omega} = \nu_i n\mu, \end{array}$$

$$a = (\nu_i - \nu_e) (n\mu)^2,$$

$$\beta = (1 + \nu_i) n\mu.$$

W przypadku armatury skoncentrowanej jest oczywiście $\nu_i = \nu_e = \nu$.

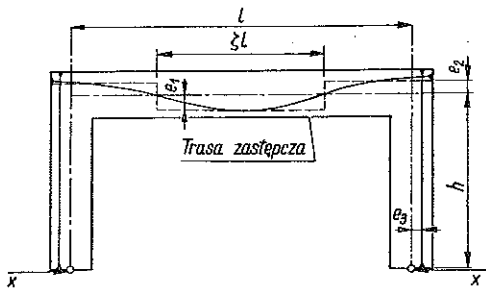
Praktyczne stosowanie omówionych uproszczeń wyjaśnimy na przykładzie.

Weźmy pod uwagę ramę prostokątną dwuprzegubową (jednokrotnie statycznie niewyznaczalną) o stałym przekroju odpowiednio rygla i słupów, o armaturze skoncentrowanej, również o stałym przekroju (rys. 1). Trasa kabla jest prostoliniowa w słupach i krzywoliniowa w ryglu; tę ostatnią zastępujemy dwoma odcinkami prostoliniowymi o stałych mimośrodkach e_1 i e_2 (liczonych algebraicznie) występujących na długościach

⁵ Jeżeli przy obliczeniach ustrojów izostatycznych uwzględniamy wpływ zmian sił sprężających na odkształcenia pełzania, wówczas w ustrojach hiperstatycznych (przy obliczeniach równie dokładnych) nie można pomijać $n\mu$. Jeżeli natomiast w ustrojach izostatycznych określamy straty sprężenia szacunkowo, wówczas w ustrojach hiperstatycznych można założyć jednorodność, a następnie uwzględniając wyniki obliczenia określić straty szacunkowo.

Wzory podane w polskiej normie PN-57/B-03320 (oparte na teorii Dischinger'a) sugerują uwzględnienie wpływu zmienności sił sprężających, przy projektowaniu jednak zadowalamy się z reguły szacunkowym określeniem strat.

odpowiednio ζl i $(1-\zeta)l$ (linia kreskowana na rys. 1). Za dodatnie będziemy uważali siły wywołujące ściskanie betonu i momenty wywołujące rozciąganie we włóknie zewnętrznym ustroju zastępczego.



Rys. 1

Momenty i siły podłużne wzbudzone przez reakcję $X=1$ w ustroju zastępczym (izostaticznym) mają odpowiednio wartości: w ryglu $N_1=1$, $M_1=1 \cdot h$, w słupach: $N_1=0$, $M_1=1 \cdot s$.

W dalszym ciągu będziemy korzystali z następujących wskaźników⁶:

$$\vartheta_h = \frac{h}{l}, \quad \vartheta_l = \frac{I_r}{I_s}, \quad \vartheta_{ir} = \frac{i_r}{l}, \quad \vartheta_{is} = \frac{i_s}{h}, \quad \vartheta_\mu = \frac{\mu_r}{\mu_s}$$

Obliczenie rozpoczynamy od wyznaczenia wielkości $\Delta(p)$ według (3.4) korzystając ze wzorów (4.1). Pomijając wyrazy zawierające $(n\mu)^2$ otrzymamy po przeprowadzeniu całkowań (z uwzględnieniem rozbitcia elementu na odcinki) i elementarnych obliczeń

$$\Delta(p) = r_1(p) \frac{\zeta l^3}{EI_r} n_{\mu r} \vartheta_1 + r_2(p) \frac{(1-\zeta) l^3}{EI_r} n_{\mu r} \vartheta_2 + r_3(p) \frac{2}{3} \frac{h^3}{EI_s} n_{\mu s} \vartheta_3,$$

gdzie

$$\vartheta_1 = \vartheta_{ir}^2 + 2 \vartheta_{ir} \vartheta_h \sqrt{v_1} + \vartheta_h^2 v_1, \quad \vartheta_2 = \vartheta_{ir}^2 - 2 \vartheta_{ir} \vartheta_h \sqrt{v_2} + \vartheta_h^2 v_2.$$

Poszczególne składniki w wyrażeniu na $\Delta(p)$ odnoszą się do kolejnych odcinków.

W podobny sposób obliczamy $\delta = \delta_{11}$ ze wzoru (por. [1], s. 439)

$$\delta = \int_s \Theta_N N_1^2 ds - 2 \int_s \Theta_{N_1} M_1 ds + \int_s \Theta_M M_1^2 ds.$$

Pomijając wyrażenia zawierające $n\mu$ i wprowadzając jak wyżej wskaźniki ϑ_h i ϑ_{ir} otrzymamy

$$\delta = \frac{l^3}{EI_r} (\vartheta_{ir}^2 + \vartheta_h^2) + \frac{2}{3} \frac{h^3}{EI_s}$$

⁶ Wskaźniki a i b (odnoszące się do armatury i betonu) będziemy pomijali jako oczywiste, natomiast wprowadzamy wskaźniki r i s odpowiednio dla rygla i dla słupów oraz wskaźniki 1, 2, 3 odpowiednio dla odcinków o mimośrodkach e_1 , e_2 i e_3 . Ponadto dla ujednocnienia postaci zapisów zastąpimy A przez I korzystając z zależności $I = i^2 A$.

Obliczymy wyrażenie $\Delta(p)/\delta$, które będzie nam potrzebne w dalszym ciągu:

$$\frac{\Delta(p)}{\delta} = \varphi_1 r_1(p) + \varphi_2 r_2(p) + \varphi_3 r_3(p),$$

gdzie

$$\varphi_1 = \frac{n_{\mu r} \xi \vartheta_1}{\vartheta_{ir}^2 + \vartheta_h^2 + \frac{2}{3} \vartheta_l \vartheta_h^3},$$

$$\varphi_2 = \frac{n_{\mu r} (1 - \xi) \vartheta_2}{\vartheta_{ir}^2 + \vartheta_h^2 + \frac{2}{3} \vartheta_l \vartheta_h^3},$$

$$\varphi_3 = \frac{\frac{2}{3} n_{\mu s} \nu_3 \vartheta_l \vartheta_h^3}{\vartheta_{ir}^2 + \vartheta_h^2 + \frac{2}{3} \vartheta_l \vartheta_h^3}.$$

Wreszcie należy obliczyć wyraz swobodny $q(p)$ wchodzący do równań statycznej niewyznaczalności. Opierając się na oznaczeniach pracy [1], s. 438 i 439, i przeprowadzając transformację Laplace'a (przy czym funkcje przetransformowane oznaczamy, jak wyżej, małymi literami) otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\bar{\delta}_{0m}] = & \int_s (n_0^* + n_\epsilon + s_0^*) (\Theta_N N_m - \Theta M_m) ds + \\ & + \int_s (m_0^* + m_\epsilon + m_{s_0}^*) (\Theta_M M_m - \Theta N_m) ds + \\ & + \int_s (n_0^* + n_\epsilon + s_0^*) [(\Theta_N \lambda_{\eta\eta} - \Theta \lambda_{\eta\omega}) N_m + (\Theta_N \lambda_{\omega\eta} - \Theta \lambda_{\omega\omega}) M_m] r ds + \\ & + \int_s (m_0^* + m_\epsilon + m_{s_0}^*) [(\Theta_M \lambda_{\omega\omega} - \Theta \lambda_{\omega\eta}) M_m + (\Theta_M \lambda_{\eta\omega} - \Theta \lambda_{\eta\eta}) N_m] r ds. \end{aligned}$$

Wstawiając do powyższego wyrażenia współczynniki według (4.1) i pomijając wyrazy z $(n\mu)^2$, ponadto oznaczając

$$\mathcal{L}[\delta_m(t) + \Sigma C_m c(t)] = \bar{c}(p),$$

dochodzimy do następującego wyrażenia na wyraz z obciążeniem dla odcińków o stałych cechach geometrycznych przekroju:

$$\begin{aligned} (4.2) \quad q = & \frac{\bar{c}}{1-k} - \frac{1}{EI} \left[\int_s \left(n_0 + s_0 + \frac{n_\epsilon}{1-k} \right) i^2 N_m ds + \right. \\ & + \int_s \left(m_0 + m_{s_0} + \frac{m_\epsilon}{1-k} \right) M_m ds \left. \right] + \frac{n\mu}{EI} (1-r) \left[\int_s \left(n_0 + s_0 + \frac{n_\epsilon}{1-k} \right) \times \right. \\ & \times (i^2 N_m + e M_m) ds + \int_s \left(m_0 + m_{s_0} + \frac{m_\epsilon}{1-k} \right) (v M_m + e N_m) ds \left. \right]. \end{aligned}$$

W powyższym wyrażeniu uwzględniono, że $n_0^* = n_0(1-k)$, itd.

Obecnie możemy przystąpić do rozwiązania równania układu ramowego (jednokrotnie statycznie niewyznaczalnego), które zgodnie z (3.1) ma postać

$$\delta x(p) = q(p) - \Delta(p) x(p).$$

Stąd znajdujemy

$$(4.3) \quad x = \frac{q}{\delta} - \frac{q}{\delta} \frac{\frac{\Delta}{\delta}}{1 + \frac{\Delta}{\delta}}.$$

Ponieważ Δ/δ jako zawierające współczynniki φ (a te z kolei zawierają $n\mu$) jest wielkością małą, możemy podstawić

$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta}{\delta}} = 1 - \frac{\Delta}{\delta} + \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^3 + \dots$$

Uwzględniając to otrzymamy następujący wzór w formie szeregu:

$$(4.4) \quad x = \frac{q}{\delta} - \frac{q}{\delta} \frac{\Delta}{\delta} + \frac{q}{\delta} \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2 - \dots$$

Dołączenie każdego następnego wyrazu zwiększa dokładność przybliżenia.

Rozbijając ustrój w ogólności na j odcinków o stałych cechach geometrycznych przekroju (w naszym przypadku $j=3$) możemy ogólnie napisać (por. wyżej)

$$(4.5) \quad \frac{\Delta}{\delta} = \sum_j \varphi_j r_j = \sum_j \frac{\varphi_j k}{1 - \beta_j k}.$$

Z uwzględnieniem powyższego kolejne wyrazy w szeregu (4.4) dadzą się przedstawić w formie sum ułamków o mianownikach typu $1 - \beta_n k$, a więc rozkład kolejnych wyrazów na ułamki częściowe nie przedstawia trudności. Należy jednak pamiętać, że ilość tych ułamków gwałtownie rośnie z każdym nowym przybliżeniem. Omówiona metoda przybliżenia przez coraz dokładniejsze uwzględnienie wpływu armatury jest w sposób naturalny związana z istotą ustroju.

Zatrzymajmy w szeregu (4.4) dwa wyrazy; wówczas uwzględniając (4.5) otrzymamy

$$(4.6) \quad x = \frac{q}{\delta} - \frac{q}{\delta} \sum_j \frac{\varphi_j k}{1 - \beta_j k}.$$

Podstawienie do powyższego wyrażenia członu obciążeniowego ze wzoru (4.2) rozwiązuje w ogólności zagadnienie w obszarze przetransformowanym. Od razu widać, że pierwsze dwa wyrazy (4.2) podstawione do pierwszego wyrazu (4.6) przedstawiają wpływ odkształceń sprężystych oraz wpływ odkształceń narzuconych (mianowicie osiadania podpór i skurczu betonu).

zmiennych w czasie. Te tylko odkształcenia wywołują reakcje hiperstatyczne tego samego «rzędu» wielkości co reakcje sprężyste. Dalsze wyrazy zawierające $n\mu$ lub φ przedstawiają zmiany «drugorzędne» (w stosunku do pierwszych), spowodowane zmianami sił w armaturze, jeszcze dalsze [zawierające $(n\mu)^2$ lub $n\mu\varphi$] — zmiany «trzeciego rzędu» itd.

Przejdźmy do rozpatrywanego przykładu. Pomijamy przesunięcia podpór oraz wyrazy zawierające $(n\mu)^2$ i podstawiamy (4.2) do (4.6) uwzględniając odpowiednie wartości N_m i M_m . Po odpowiednich obliczeniach otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (4.7) \quad x = & \frac{1}{\vartheta_{ir}^2 + \vartheta_h^2 + \frac{2}{3} \vartheta_I \vartheta_h^3} \left\{ \left(1 - \frac{\varphi_1 k}{1 - \beta_1 k} - \frac{\varphi_2 k}{1 - \beta_2 k} - \frac{\varphi_3 k}{1 - \beta_3 k} \right) \times \right. \\
 & \times \left[\vartheta_{ir}^2 \frac{1}{l} \int_{l_1} \left(n_0 + s_0 + \frac{n_\varepsilon}{1 - k} \right) ds + \vartheta_h \frac{1}{l^2} \int_l \left(m_0 + m_{s_0} + \frac{m_\varepsilon}{1 - k} \right) ds + \right. \\
 & \left. \left. + 2 \vartheta_I \frac{1}{l^3} \int_h \left(m_0 + m_{s_0} + \frac{m_\varepsilon}{1 - k} \right) s ds \right] - \right. \\
 & - n_{\mu r} \left[\vartheta_{ir} (\vartheta_{ir} + \vartheta_h \sqrt{v_1}) \left(1 - \frac{k}{1 - \beta_1 k} \right) \frac{1}{l} \int_{l_1} \left(n_0 + s_0 + \frac{n_\varepsilon}{1 - k} \right) ds + \right. \\
 & + \vartheta_{ir} (\vartheta_{ir} - \vartheta_h \sqrt{v_2}) \left(1 - \frac{k}{1 - \beta_2 k} \right) \frac{1}{l} \int_{l_2} \left(n_0 + s_0 + \frac{n_\varepsilon}{1 - k} \right) ds + \\
 & + (\vartheta_h v_1 + \vartheta_{ir} \sqrt{v_1}) \left(1 - \frac{k}{1 - \beta_1 k} \right) \frac{1}{l^2} \int_{l_1} \left(m_0 + m_{s_0} + \frac{m_\varepsilon}{1 - k} \right) ds + \\
 & + (\vartheta_h v_2 - \vartheta_{ir} \sqrt{v_2}) \left(1 - \frac{k}{1 - \beta_2 k} \right) \frac{1}{l^2} \int_{l_2} \left(m_0 + m_{s_0} + \frac{m_\varepsilon}{1 - k} \right) ds - \\
 & - 2 \frac{\vartheta_I}{\vartheta_\mu} \vartheta_{is} \vartheta_h \sqrt{v_3} \left(1 - \frac{k}{1 - \beta_3 k} \right) \frac{1}{l^2} \int_h \left(n_0 + s_0 + \frac{n_\varepsilon}{1 - k} \right) s ds + \\
 & \left. \left. + 2 \frac{\vartheta_I}{\vartheta_\mu} v_3 \left(1 - \frac{k}{1 - \beta_3 k} \right) \frac{1}{l^3} \int_h \left(m_0 + m_{s_0} + \frac{m_\varepsilon}{1 - k} \right) s ds \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Reakcję wywołaną odkształceniem sprężystym (z uwzględnieniem wpływu armatury) otrzymamy podstawiając $k=0$ we wzorze (4.7), tzn. $r=0$ w (4.2). Jeżeli reakcja ta znika (np. w przypadku samego sprężenia kablami o trasach współbieżnych), wówczas pozostają tylko człony przy k (lub przy r); w ogólnym przypadku reakcja ta pojawi się zatem z biegiem czasu, jednak — jak widać z (4.7) lub (4.2) — będzie to reakcja «drugorzędna» (rzędu $n\mu$).

Trasę zastępczą kabla, tzn. ζ można obrać w ten sposób, aby reakcja X w fazie sprężystej odpowiadała reakcji rzeczywistej (por. rys. 1).

Przejsięcie do naprężeń w danym przekroju odbywa się na podstawie wzoru (2.12) z uwzględnieniem (2.11) oraz (2.10), z tym że funkcje obciążeń obejmują w tym przypadku wpływ reakcji hiperstatycznych, tzn. ogólnie

$$(4.8) \quad \mathcal{L}[\sigma] = E_b \left\{ \left[\Theta_N \left(n_0 + s_0 + \frac{n_e}{1-k} + N_a x_a + N_b x_b + \dots \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \Theta \left(m_0 + m_{s_0} + \frac{m_e}{1-k} + M_a x_a + M_b x_b + \dots \right) \right] \left[1 + (\lambda_{\eta\eta} + z\lambda_{\omega\omega}) \frac{k}{1-\beta k} \right] + \right. \\ \left. + \left[\Theta_M \left(m_0 + m_{s_0} + \frac{m_e}{1-k} + M_a x_a + M_b x_b + \dots \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \Theta \left(n_0 + s_0 + \frac{n_e}{1-k} + N_a x_a + N_b x_b + \dots \right) \right] \right\} \times \\ \times \left[z + (\lambda_{\eta\omega} + z\lambda_{\omega\omega}) \frac{k}{1-\beta k} \right] - \frac{\mathcal{L}[\varepsilon]}{1-k}.$$

Powyższy wzór jest ważny w przypadku armatury skoncentrowanej i uwzględnia już redukcję wyrazów oznaczonych gwiazdką. Wartości β oraz $N_a, M_a \dots$ (dla $X_a = 1, \dots$) odnoszą się do rozpatrywanego przekroju.

Dzięki liniowości teorii można stosować zasadę superpozycji, tzn. obliczać oddzielnie poszczególne wyrazy we wzorach ogólnych (4.7) lub (4.8), odpowiadające poszczególnym wpływom. Dodawaniu wyrazów odpowiada w obszarze pierwotnym dodawanie krzywych będących funkcjami czasu. Obliczenia upraszczają się znacznie, gdy możemy pominąć poszczególne wpływy (jak z reguły przyjmuje się w dotychczasowych teoriach), a zwłaszcza przy operowaniu od razu wartościami liczbowymi zamiast wyrażeniami ogólnymi.

Przejsięcie do konkretnych rozwiązań wymaga określenia funkcji pełzania oraz sposobu obciążenia konstrukcji. Przyjmiemy funkcję pełzania w postaci

$$C(t-\tau) = C_0(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}),$$

skąd (por. p. 2)

$$k(p) = -\frac{\psi}{p+\gamma},$$

gdzie $\psi = EC_0\gamma$. Na tej podstawie otrzymamy ogólnie

$$\frac{1}{1-k} = \frac{p+\gamma}{p+(\gamma+\psi)}, \quad \frac{k}{1-\beta k} = \frac{-\psi}{p+(\gamma+\beta\psi)}.$$

⁷ C_0 oznacza wartość ostateczną odkształcenia pełzania, tj. dla $t-\tau \rightarrow \infty$; wyrażenie EC_0 jest znanym z teorii elementarnej współczynnikiem pełzania; γ jest miarą szybkości pełzania.

Dla przykładu zbadamy zmienność reakcji X w czasie pod wpływem sił sprężających S , traktowanych jako obciążenie izolowane (tzn. dla ramy nieważkiej i nieobciążonej siłami zewnętrznymi)⁸. Oczywiście $S_0 = \text{const}(t)$, a zatem

$$s_0 = \mathcal{L}[S_0] = \frac{S_0}{p}$$

Załóżmy, że S_0 odpowiada sile sprężającej w ryglu, natomiast siła sprężająca w słupach jest równa $1/2 S_0$; przyjmijmy $\mu_r = 2\mu_s$, tj. $\vartheta_\mu = 2$. Ponadto załóżmy (por. rys. 1), że $\zeta = 1/2$ i $e_1 = -e_2$, a więc $\nu_1 = \nu_2 = \nu_r$ (wówczas kabel w ryglu nie wywoła reakcji podporowych w fazie sprężystej, jeśli pominiemy wpływ sił podłużnych). Ponadto podstawmy $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_r$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_r$ i analogicznie zamiast wskaźnika «3» wprowadźmy wskaźnik «s» (słupy). Obliczając całki we wzorze (4.7) i podstawiając przyjętą funkcję pełzania oraz wyżej podane wyrażenia otrzymamy po odpowiednich redukcjach

$$\begin{aligned} \frac{x(p)}{S_0} = & - \frac{1}{\vartheta_{ir}^2 + \vartheta_h^2 + \frac{2}{3} \vartheta_l \vartheta_h^3} \left\{ (\vartheta_{ir}^2 - \frac{1}{2} \vartheta_l \vartheta_h^3 \vartheta_{is} \sqrt{\nu_s}) \times \right. \\ & \times \left(\frac{1}{p} + \frac{\varphi_r \psi}{p[p + (\gamma + \beta_r \psi)]} + \frac{\varphi_s \psi}{p[p + (\gamma + \beta_s \psi)]} \right) - \\ & - n \mu_r \left[\vartheta_{ir}^2 (1 + \nu_r) \left(\frac{1}{p} + \frac{\psi}{p[p + (\gamma + \beta_r \psi)]} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4} \vartheta_l \vartheta_{is} \vartheta_h^3 \sqrt{\nu_s} (1 + \nu_s) \left(\frac{1}{p} + \frac{\psi}{p[p + (\gamma + \beta_s \psi)]} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Uwzględniając rozkład funkcji na ułamki częściowe możemy bez trudności przejść do obszaru pierwotnego i znajdziemy rozwiązanie następujące:

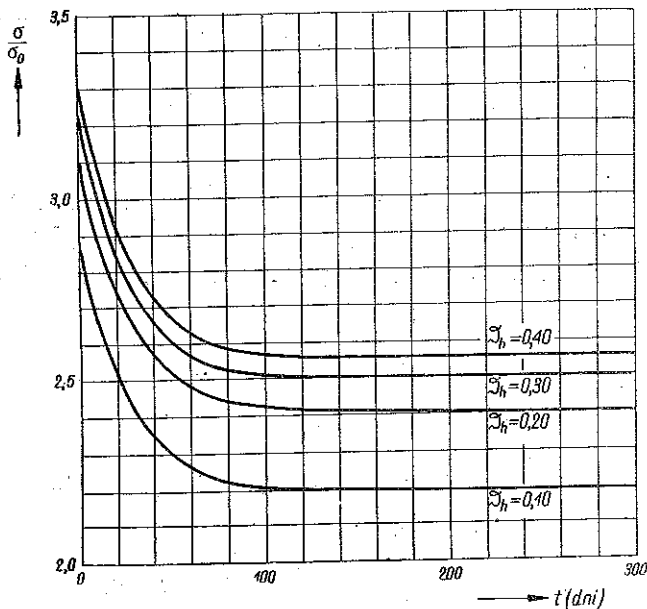
$$\begin{aligned} \frac{X(t)}{S_0} = & - \frac{1}{\vartheta_{ir}^2 + \vartheta_h^2 + \frac{2}{3} \vartheta_l \vartheta_h^3} \left\{ (\vartheta_{ir}^2 - \frac{1}{2} \vartheta_l \vartheta_h^3 \vartheta_{is} \sqrt{\nu_s}) \times \right. \\ & \times \left[1 - \frac{\varphi_r \psi}{\gamma + \beta_r \psi} (1 - e^{-(\gamma + \beta_r \psi)t}) + \frac{\varphi_s \psi}{\gamma + \beta_s \psi} (1 - e^{-(\gamma + \beta_s \psi)t}) \right] - \\ & - n \mu_r \vartheta_{ir}^2 (1 + \nu_r) \left[1 + \frac{\psi}{\gamma + \beta_r \psi} (1 - e^{-(\gamma + \beta_r \psi)t}) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{4} n \mu_r \vartheta_l \vartheta_{is} \vartheta_h^3 \sqrt{\nu_s} (1 + \nu_s) \left[1 + \frac{\psi}{\gamma + \beta_s \psi} (1 - e^{-(\gamma + \beta_s \psi)t}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

⁸ Przypominamy, że S_0 jest siłą naciągu armatury przed obciążeniem konstrukcji, którą należy wyznaczyć na bazie teorii elementarnej. W przybliżeniu można oczywiście przyjąć, że jest ona równa sile odczytanej na manometrze naciągarki.

W podobny sposób obliczamy wyrażenia dla naprężeń korzystając ze wzoru (4.8). Weźmy pod uwagę np. przekrój środkowy w ryglu i określmy zmienność naprężeń w skrajnym dolnym włóknie betonu. Po odpowiednich obliczeniach otrzymamy w obszarze przetransformowanym

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sigma] = & \frac{s_0}{A_r} \left\{ 1 - (1 + \nu_r) n_{\mu r} + \frac{x}{s_0} \left[1 - \left(1 + \frac{\partial_h}{\partial_{ir}} \sqrt{\nu_r} \right) n_{\mu r} \right] \right\} \times \\ & \times \left[1 - (1 + \sqrt{3} \nu_r) n_{\mu r} \frac{\psi}{p + (\gamma + \beta_r \psi)} \right] + \\ & + \frac{s_0}{A_r} \left\{ \sqrt{\nu_r} - \sqrt{\nu_r} (1 + \nu_r) n_{\mu r} + \frac{x}{s_0} \left[\frac{\partial_h}{\partial_{ir}} - \left(\sqrt{\nu_r} + \frac{\partial_h}{\partial_{ir}} \nu_r \right) n_{\mu r} \right] \right\} \times \\ & \times \left[\sqrt{3} - \left(\sqrt{\nu_r} + \nu_r \sqrt{3} \right) n_{\mu r} \frac{\psi}{p + (\gamma + \beta_r \psi)} \right]. \end{aligned}$$

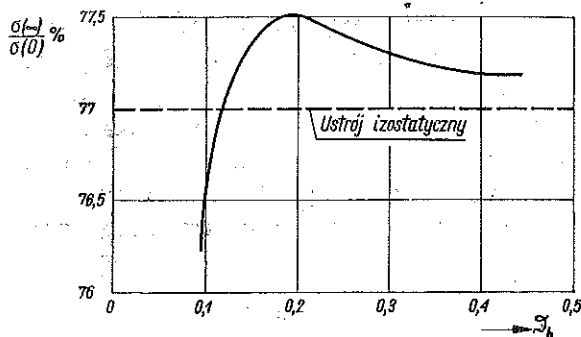
Przechodząc do obszaru pierwotnego [po uwzględnieniu wyżej znalezione-go wyrażenia na $x(p)/S_0$] obliczymy stosunek σ/σ_0 , gdzie $\sigma_0 = S_0/A_r$ oznacza średnie naprężenie (fikcyjne) w przekroju, odpowiadające sile spręż



Rys. 2

zającej nieuszczupionej przez straty sprężyste i reologiczne. Zadanie rozwiążemy w konkretnych wartościach liczbowych przyjmując przekroje prostokątne o wysokości d_r dla ryglu i $d_s = 2/3 d_r$ dla słupów. Określimy

zmienność w czasie wyrażenia σ/σ_0 dla różnych parametrów⁹ $\vartheta_h = h/l$. Od razu obliczamy $\vartheta_{ts} = \frac{2}{3} \vartheta_{ir}/\vartheta_h$, $\vartheta_I = d_r^3/d_h^3 = 3,38$; ponadto przyjmiemy: $\nu_r = 2$, $\nu_s = 1,5$, $\vartheta_{ir} = 0,02$, $\mu_r = 0,01$, $n = 5$, a stąd według (4.1) $\beta_r = 0,15$, $\beta_s = 0,0625$; wreszcie założymy, że $\gamma = 0,03$, $\psi = 0,06$ (γ i ψ mają wymiar T^{-1} ; czas wyraża się w dniach).



Rys. 3

Nie przeprowadzamy na tym miejscu dość żmudnych wyliczeń i podajemy wyniki na wykresach (rys. 2 i rys. 3). Rys. 3 podaje zmiany stosunku naprężeń dla $t = \infty$ i dla $t = 0$ (tzn. gdy zachodzą tylko odkształcenia sprężyste) przy różnych ϑ_h , przy czym dla porównania podano wartość tego stosunku dla analogicznego ustroju izostatycznego (rama wolnopodparta o tych samych wymiarach). Wpływ reakcji hiperstatycznych jest w danym przypadku niewielki, gdyż trasa kabla w ryglu jest współbieżna i reakcje podporowe znikome. Wpływ ten rośnie przy małych ϑ_h , ponieważ wtedy dominujący staje się wpływ sił podłużnych i reakcje podporowe wywołane sprężeniem rosną (zmieniając przy tym znak). Zmiany naprężeń wstępnych są procentowo znaczne (por. rys. 2); należy jednak mieć na uwadze, że zmiany rzeczywiste będą mniejsze wskutek współdziałania ciężaru własnego.

Literatura cytowana w tekście

[1] C. Eimer, *Podstawy teorii pełzania ustrojów hiperstatycznych wstępnie sprężonych*, Rozpr. Inż. 3 (1957).

⁹ Przykład ten ma znaczenie tylko teoretyczne, gdyż w należycie zaprojektowanej ramie przy zmianie ϑ_h zmieniają się również inne parametry. Ponadto nie zajmujemy się tutaj sprawą ewentualnego przekroczenia naprężeń dopuszczalnych.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕОЛОГИЧЕСКИМ РАСЧЕТАМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе даются основы практического исчисления изменения статических величин в предварительно напряженных статически неопределимых конструкциях, опираясь на общей теории, приведенной в работе [1]. Функция ползучести принимается в форме (1.1) и решение производится операционным методом при использовании преобразования Лапласа. Даются приближенные методы, позволяющие учесть с произвольной точностью влияние напрягающей арматуры. В качестве примера приводится решение прямоугольной двущарнирной рамы при учете влияния моментов равно как и продольных сил.

Summary

APPLICATION OF THE LAPLACE TRANSFORMATION TO RHEOLOGICAL COMPUTATIONS OF PRESTRESSED STRUCTURES

Establishment of principles of practical computation of the variation of mechanical quantities in function of time in prestressed statically indeterminate structures on the basis of the general theory described in the Ref. [1]. The creep function is assumed in the form (1.1). The solution is obtained by means of the operational method using the Laplace transformation.

Approximate methods are proposed enabling us to determine with a desired degree of accuracy the influence of the prestressing reinforcement. As an example, a rectangular doubly hinged frame is considered, taking into account the influence of both the moments and the longitudinal forces.

ZARŁAD MECHANIKI OSRODKOW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 października 1957 r.