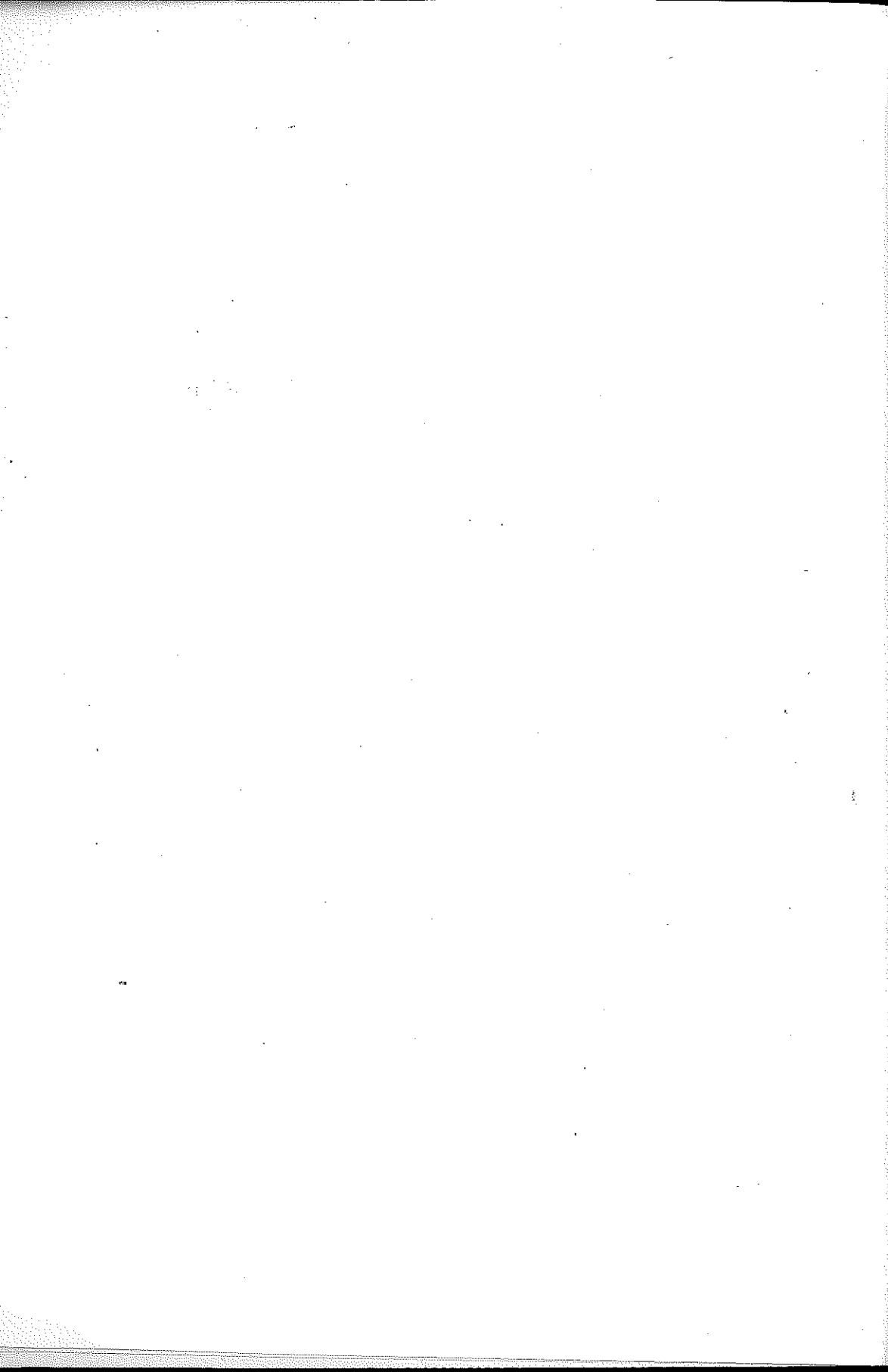


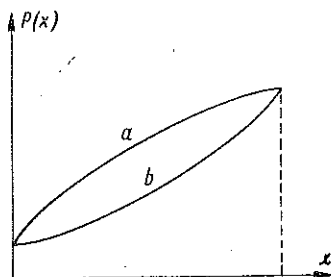
JANISŁAW SKOWROŃSKI

LINIOWE TŁUMIENIE NIELINIOWEJ AMORTYZACJI  
POJEDYNCZEGO IMPULSU

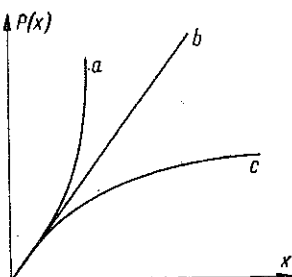
ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XCII



W szeregu zagadnień dotyczących zawieszenia i amortyzacji pojazdów bezszynowych, podwozi pojazdów drogowych lub samolotów nieliniowość w charakterystyce amortyzacji układu drgającego jest z góry przewidziana przez konstruktora jako założenie celowe ze względu na rodzaj pracy konstrukcji. Charakterystyki zawieszenia przedstawić można w formie wykresu  $P = f(x)$ , gdzie  $P$  jest obciążeniem zmiennym w czasie pracy amortyzacji, zaś  $x$  odkształceniem amortyzatora. Stąd zmieniającą się razem z obciążeniem sztywność układu określa się jako pochodną  $dP/dx$ , która ilustruje znane typy charakterystyk sprężystych amortyzacji: amor-



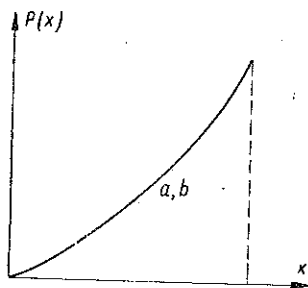
Rys. 1



Rys. 2

tyzację «sztywną», «liniową» i «miękką» (krzywe  $a$ ,  $b$  i  $c$  na rys. 1). Konstruktor zależnie od potrzeb dobiera właściwe kombinacje wyżej wymienionych typów amortyzacji dla różnych wartości obciążeń. Dla wzmocnienia efektu silnego wzrostu lub zmniejszenia sztywności przy pewnych obciążeniach stosuje się niekiedy także nieciągłą charakterystykę sprężystą, np. połączenie działania pneumatyka i amortyzatora podwozia, resory wielowiązkowe itp. Na rys. 2 przedstawiono typową charakterystykę amortyzatora olejowo-sprężynowego stosowanego np. w podwoziach samolotów, rys. 3 przedstawia zaś ten sam wykres dla koła ogumionego. Krzywe  $a$  podają przebieg sił obciążających podczas skoku roboczego, krzywe  $b$  są wykresami siły amortyzatora przy skoku powrotnym. Wobec adiabatycznego procesu sprężania powietrza w pneumatyku krzywe  $a$  i  $b$  na rys. 3 pokrywają się. Pola pod odpowiednimi krzywymi reprezentują pracę poszczególnych skoków amortyzacji. Jest ona dobrana tak, aby przewyższała energię układu amortyzacyjnego, pochodzącą do impulsu obciążenia.

Układy zawieszenia nie są z natury rzeczami układami zachowawczymi dzięki dysypacji energii w czasie pracy amortyzacji (dławienie przepływu cieczy w amortyzatorze). W charakterystyce amortyzacji stosunek pola powierzchni ograniczonej krzywymi obciążenia i odciążenia  $a$  i  $b$  do pola powierzchni całkowitej pod krzywą obciążenia  $a$  stanowi miarę współczynnika tłumienia. Zdolność tłumienia wahań amortyzatora określona przez ten współczynnik odgrywa bardzo ważną rolę przy toczeniu się pojazdu po nierównym terenie. Jeśli amortyzacja nie ma zdolności do pochłaniania energii w sposób nieodwracalny



Rys. 3

(przykładem braku tych zdolności jest pneumatyk na rys. 3), układ amortyzowany, np. lądujący samolot, może być przy toczeniu się «dynamicznie niedostateczny». «Podskoki» samolotu znikają dopiero po bardzo długim czasie pod wpływem innych czynników tłumiących. To uzasadnia potrzebę dokładnej analizy wpływu tłumienia w obliczeniach konstrukcyjnych, szczególnie gdy eksploatacja pojazdu ma następować na gruncie nierównym i działanie

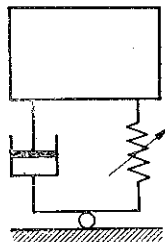
impulsów obciążenia może się na siebie nakładać. Amortyzator nawet przy największym tłumieniu powinien mieć zdolność szybkiego powrotu do położenia początkowego po zmniejszeniu obciążenia. Interesuje nas przy tym zwykle zachowanie się układu amortyzującego tylko w zakresie pewnej skończonej ilości wahań. W rozważaniach naszych pozwala to ograniczyć zagadnienie do rozważania drgań swobodnych układu amortyzowanego. Przy połączeniu równoległym tłumienia wiskotycznego i amortyzacji sprężystej w naszym typie amortyzatora im silniejsze mamy tłumienie, tym przy wzrastającej prędkości jazdy tłumik przejmuje na siebie większe obciążenia odciążając jednocześnie układ sprężynowy. To powoduje «usztynwienie» amortyzacji i przekazywanie pojazdowi amortyzowanemu tym większego przyspieszenia. Warunkiem zaś prawidłowej eksploatacji takiego pojazdu jest maksymalna chłonność amortyzacji, tzn. otrzymywanie przy dużych stosunkowo ugięciach małych przyspieszeń. Dla konstruktora zatem warunek  $|\ddot{x}| \leq kg$ , gdzie  $x$  jest, jak już zaznaczyliśmy, odkształceniem amortyzatora,  $g$  przyspieszeniem ziemskim,  $k$  współczynnikiem stałym, określa zakres dopuszczalnych wartości współczynników tłumienia. Ogranicza to również zakres naszych badań do «słabego» tłumienia, tzn. do ruchu naprzemiennego. Ponadto, wobec konieczności wzrastania sztywności  $dP/dx$  wraz z obciążeniem we wszystkich przypadkach technicznych zastosowań naszej amortyzacji, ograniczymy badanie do przypadku «twardej» amortyzacji. Dla jednoznaczności analizy wpływ współczynnika tłumienia (wobec fizykalnego założenia «słabości»

tłumienia) równocześnie linearyzujemy. Zakładamy także rozdzielanie sił dysypacji od sił zachowawczych, co wynika z omówionego przykładu amortyzatora olejowo-sprężystego. Przy tych zastrzeżeniach przedstawimy model naszego układu amortyzującego o jednym stopniu swobody na rys. 4. Przyjęty model odpowiada równaniu ruchu drgającego układu o jednym stopniu swobody, przy nieliniowej charakterystyce sprężystej i liniowym tłumieniu, które można napisać w postaci

$$(1) \quad m\ddot{x} + l\dot{x} + F(x) = 0,$$

oraz warunkom początkowym  $x(0) = x_0$ ,  $v(x_0) = v_0$ , gdzie  $m$  jest masą układu amortyzującego,  $l$  współczynnikiem stałym tłumienia wiskotycznego oraz  $F(x)$  charakterystyką sprężystą. Rozwiązanie równania tego typu, zwłaszcza w oparciu o jego analizę jakościową, nie jest już w tej chwili zagadnieniem oryginalnym. Jednakże autor nie spotkał w dostępnej literaturze technicznej pełnej interpretacji inżynierskiej, konstrukcyjno-obliczeniowej tego równania. Podstawiając w ogólnie znany sposób do równania (1) wartości  $l/m = 2h$  i  $F(x)/m = f(x)$  można napisać

$$(2) \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + f(x) = 0.$$



Rys. 4

Charakterystyka sprężysta układu  $f(x)$  wymaga ze względów fizycznych oraz analitycznych pewnych założeń. Siły określone charakterystyką sprężystą mają zawsze potencjał, wobec tego funkcja  $f(x)$  powinna być jednoznaczna. Przy dodatniej energii potencjalnej układu spełniony jest warunek  $v(x) > 0$ ; mamy ponadto  $f(x)x \geq 0$ , co odpowiada zachowaniu stałego zwrotu siły sprężystej (ku położeniu równowagi), oraz  $f(0) = 0$ , co wynika z symetrii charakterystyki  $f(x)$  względem początku osi  $x$ . Przy jednym stopniu swobody  $f(x)$  jest miarą gradientu. Gradient jest skierowany stale ku środkowi krzywizny krzywej  $f(x)$  wobec założenia, że funkcja jest stale dodatnia. Ponadto przyjmujemy, że  $f(x)$  jest funkcją analityczną, rosnącą, określoną w przedziale  $(-\infty, +\infty)$ . Z tego wynika warunek  $1 < f'(x) < \infty$  oraz to, że charakterystyka sprężysta jest «sztywna» lub «miękką» dla prawie wszystkich  $x$ , tzn. dla wszystkich z wyjątkiem otoczenia  $x=0$ . Ponadto  $f(x)$  spełnia warunek Lipschitza. Można zatem w analizie techniczno-obliczeniowej dokonać rozwinięcia

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots = ax + \beta x^3 + \dots$$

Z dokładnością wystarczającą dla praktyki przyjmiemy  $f(x) = ax + \beta x^3$ , gdzie wobec uwag poprzednich  $a > 0$ ,  $\beta \geq 0$ . Dla dysypacji warunki fizy-

kalne prowadzą do założenia  $\dot{x}\varphi(\dot{x}) \geq 0$ , gdzie  $\varphi(\dot{x})$  jest pewną analityczną funkcją prędkości. W naszym przypadku warunek powyższy ma postać  $h \geq 0$ .

Równanie nasze przyjmie zatem postać

$$(3) \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + ax + \beta x^3 = 0.$$

Dowód istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania (3) został już przeprowadzony, [1]. Ponadto równanie to możemy nazwać «jednorodnym» równaniem Duffinga, [1], który rozważając je w postaci

$$\ddot{x} + l\dot{x} + x + \beta x^3 = 0$$

udowodnił dla przypadku  $l=0$ , że istnieje całka okresowa, aharmoniczna, dla której okres jest jednoznaczną funkcją amplitudy (wyłączając oczywiście przypadek  $\beta=0$ ). Dla przypadku  $l \neq 0$  wykazał on istnienie jedynie okresowego rozwiązania banalnego  $x \equiv 0$ .

Została również wykazana naprzemiennosc rozwiązań równania (2) dla określonych wartości parametrów w ograniczonych obszarach  $x$ . Analizę tej naprzemiennosci przeprowadził R. Gutowski, [2], wykazując, że równanie typu (2) posiada rozwiązanie naprzemienne dla przypadków  $h/\sqrt{a} > 1$  (według naszych oznaczeń), w czym mieści się warunek tzw. «słabego» tłumienia (odpowiada to warunkowi  $h/b < 1$  dla drgań liniowych). Konieczne jest ponadto istnienie prostej  $y = (h^2/a)x$  stycznej w punkcie przegięcia do charakterystyki  $f(x)$  (tzn. mającej z funkcją  $f(x)$  tylko jeden punkt wspólny  $x=0$ ), w stosunku do której wykres funkcji  $f(x)$  przebiega górą dla  $x > 0$ , zaś dołem dla  $x < 0$ . Można wykazać, że dla charakterystyki «twardej» prosta taka istnieje zawsze, zaś dla «miękkiej» tylko dla  $x < x_{min}$ , gdzie  $x_{min}$  jest najmniejszym pierwiastkiem równania

$$(4) \quad (ax + \beta x^3) - \frac{h^2}{a} x = 0$$

albo

$$(5) \quad x^2 = \frac{h^2 - a^2}{\beta}.$$

Rozwiązanie równania (2) może zatem mieć charakter naprzemienny (interesujący nas przede wszystkim), wykazano jednakże, że nie jest ono w przypadku ogólnym okresowe (por. [3]).

Dla wszystkich technicznie ważnych przypadków przyjmujemy  $a > 0$ . Wprowadzając więc analogicznie jak w drganiach liniowych oznaczenie  $\gamma = h/\sqrt{a}$ , ograniczymy nasze badania do przypadku  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Pozostały parametr  $\beta$  rozważymy również w przedziale  $(0, \infty)$ . Badanie ruchu naszego amortyzatora przeprowadzimy na płaszczyźnie fazowej  $vx$ .

Dotychczas nie ma metody na znalezienie ścisłego rozwiązania równania (3). Istnieje natomiast szereg metod przybliżonych, analitycznych i graficznych interesujących nas z technicznego punktu widzenia.

Zanim przejdziemy do omówienia tych rozwiązań, zestawmy dane, jakie otrzymano z analizy jakościowej naszego przypadku. Określimy wektory pola kierunków. Równanie (3) można sprowadzić do układu

$$(6) \quad \dot{v} = -2hv - ax - \beta x^3, \quad \dot{x} = v,$$

skąd

$$(7) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{-2hv - ax - \beta x^3}{v}.$$

Z (6) wynika przy  $v > 0$ , że  $x$  rośnie wraz z  $t$  oraz że przy wzroście  $t$  punkt trajektorii fazowej  $[x(t), v(t)]$  przemieszcza się w kierunku ruchu wskazówek zegara w okolicy położenia równowagi  $v=0, x=0$ . Na podstawie (7) napiszemy wprost równanie rodziny izoklin trajektorii fazowej naszego ruchu:

$$(8) \quad \frac{-2hv - ax - \beta x^3}{v} = C = \text{const.}$$

Rozważmy kilka grup izoklin zależnie od wartości parametru rodziny  $C$ . Przebieg izokliny zależy ponadto od wzajemnego stosunku  $C$  i  $h$ , czyli od typu dysypacji. Przyjawszy  $h \geq 0$ , możemy omówić wpływ parametru  $C$ .

Opierając się na równaniu (8) dla poszczególnych  $C$  możemy zestawić typy izoklin dla naszego przypadku (dla rozważanych zakresów zmienności  $a, \beta$  i  $h$ ) według rys. 5. Izokliny, dla których tangens kąta nachylenia trajektorii do osi  $x$  będzie dodatni ( $C > 0$ ), będą krzywymi zgodnie z równaniem

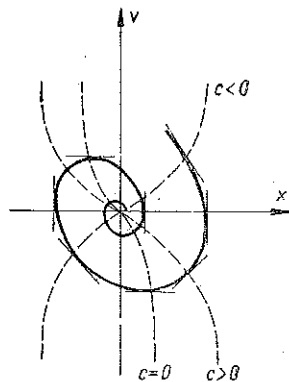
$$v = -\frac{ax + \beta x^3}{C_1} \quad (C_1 = 2h + C).$$

Równania izoklin o tym samym tangensie ujemnym mają postać

$$v = \frac{ax + \beta x^3}{C_1},$$

jeśli  $|C| > 2h$ , a izoklina stycznych poziomych trajektorii

$$v = -\frac{ax + \beta x^3}{2h}.$$



Rys. 5

Wszystkie omówione izokliny mają styczne w punktach przecięcia w początku układu  $(0,0)$ , którymi są odpowiednie izokliny drgań liniowych

(przy  $\beta = 0$ ); tylko gdy  $C \rightarrow \infty$  (tj. gdy mamy izokliny  $v = 0$ ) oba przypadki  $\beta = 0$  i  $\beta > 0$  pokrywają się. W przypadku  $\beta < 0$  łatwo wykazać, że izokliny odginałyby się od stycznych ( $\beta = 0$ ) w kierunku przeciwnym. Wpisawszy odcinki trajektorii fazowych w dowolnie gęsto wyznaczone styczne do nich za pomocą rodziny izoklin, które w przypadkach szczególnych znajdujemy dla całego zakresu parametrów  $C$ , można w przybliżeniu zorientować się w przebiegu trajektorii: będą one otaczać w pewien sposób początek współrzędnych płaszczyzny fazowej.

Dla przypadku  $h = 0$  (brak dysypacji) otrzymamy zamiast równania (3) prosty oscylator nieliniowy:

$$(9) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{-ax - \beta x^3}{v},$$

którego trajektorie fazowe będą określone równaniem

$$(10) \quad v^2 + ax^2 + \beta x^4/2 = 2H_i,$$

gdzie jednoznaczna funkcja  $H_i(x, v)$  jest całkowitą, w danym przypadku stałą energią układu. Będzie to rodzina elips ze środkiem w początku układu  $x, v$  o parametrze  $2H_i$ . Łatwo wykazać, [4], że początek układu jest obecnie położeniem równowagi statecznej oraz punktem osobliwym ze względu na jednoczesne znikanie w tym punkcie licznika i mianownika równania (9). O charakterze trajektorii można również wnioskować na podstawie analizy punktów osobliwych Poincarégo w naszym przypadku, gdy  $h = 0$ ; będzie to tzw. stateczny punkt wirowy.

Wektory pola kierunkowego będą tutaj styczne do opisanych elips. Jeśli wykreślimy je na tych samych izoklinach, co dla omawianego wyżej przypadku ( $h > 0$ ), łatwo wykażemy, że wektory pola  $h > 0$  będą skierowane w stosunku do wektorów pola dla  $h = 0$  w stronę obszaru wewnątrz zamkniętych krzywych stałej energii (z wyjątkiem punktów  $v = 0$ ,  $x \neq 0$ , gdzie oba wymienione typy wektorów są styczne). Zatem punkt wędrujący trajektorii fazowej dla ruchu  $h > 0$  w kolejnych określonych czasach  $t_i$  przechodziłby przez określone poziomy energii  $H(x, \dot{x}, t_i)$  (przy czym  $H$  jest funkcją jednoznaczną zmiennych  $x$  i  $\dot{x}$ , zaś  $t_i$  gra tylko rolę chwilowego parametru). Istotnie, początek układu współrzędnych jest teraz (analogicznie do ruchu  $h = 0$ ) także położeniem równowagi statecznej, co wykażemy później. Zmieniając parametr  $t_i$  możemy znaleźć prędkość znikania  $H$  w kierunku początku układu współrzędnych, którą określa funkcja dysypacji  $\Phi$ :

$$(11) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} = -2\Phi.$$



Przyjmijmy  $x = V_x$  i  $v = V_v$  za składowe wektora prędkości znikania energii, czyli składowe «wektora tłumienia» na płaszczyźnie fazowej, oraz

$$\Delta_1 H = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2} = |\text{grad } H|.$$

Odpowiednie cosinusy kierunkowe omawianego wektora będą

$$a_1 = \frac{\partial H}{\partial x} / \Delta_1 H, \quad a_2 = \frac{\partial H}{\partial v} / \Delta_1 H$$

i wzór (11) można napisać w postaci

$$(12) \quad \frac{dH}{dt} = |\text{grad } H| V_n,$$

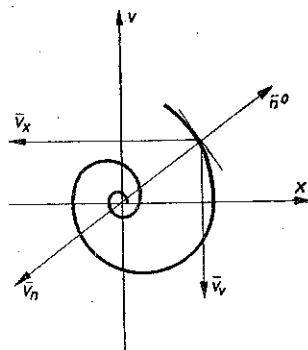
gdzie  $V_n$  jest wektorem prędkości tłumienia skierowanym wzdłuż osi normalnej do trajektorii (rys. 6), przechodzącej przez początek współrzędnych. Wersor  $n^0$  tej osi skierowano w stronę zgodną ze wzrostem energii układu. Na podstawie (11) i (12) otrzymamy

$$V_n = -\frac{2}{|\text{grad } H|} \Phi,$$

co określa kierunek  $V_n$  względem osi  $n^0$ . Trajektorie fazowe przecinają zatem krzywe  $H = \text{const}$  w kierunku wykazanym.

Mając pole kierunków trajektorii fazowych dla przypadku  $h > 0$  oraz trajektorie  $h = 0$ , wobec faktu przecinania tych ostatnich przez poszukiwane trajektorie  $h > 0$ , możemy określić ich przebieg w kierunku zmniejszania się energii całkowitej układu. Traktujemy przy tym trajektorie  $h = 0$  (czyli  $H = \text{const}$ ) jak rodzinę pewnych kolejnych poziomów położenia punktów trajektorii poszukiwanej, dla której mamy kolejno  $H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow H_n \rightarrow 0$ , przy czym zmianę energii określi jej wielkość gradientu

$$\delta H = |\text{grad } H| dx.$$



Rys. 6

Fakt ten potwierdza poprzednią uwagę o nieokresowości rozważanego ruchu — w przypadku ogólnym gdy  $h > 0, \beta > 0$  oraz  $a > 0$ . Dla ruchu naprzemiennego możemy jednakże również oszacować ogólnie położenie równowagi.

Z jednoznaczności funkcji  $H$  w pewnym otoczeniu początku układu współrzędnych płaszczyzny  $xv$  wynika, że układ amortyzowany dąży dla

$t \rightarrow \infty$  do początku układu współrzędnych, tzn.  $x \rightarrow 0$  i  $v \rightarrow 0$ , przy czym  $H \rightarrow 0$ . Z równań zaś

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{v} = -2hv - ax - \beta x^3 = 0, \\ \dot{x} = v = 0, \end{cases}$$

określających położenie równowagi, wynika, że jest nim dla ruchu naprzemiennego w granicach wartości przyjętych dla  $a$ ,  $\beta$  i  $h$  właśnie omawiany początek współrzędnych  $x=0$ ,  $v=0$ . Wynika to także wprost z charakteru ruchu wobec wykazania jego naprzemienności wokół punktu równowagi, [2], dla  $x(t)$  oraz  $\dot{x}(t)$ . Wobec zależności (13) omawiany punkt (0,0) jest również w tym ruchu punktem osobliwym i rodzaj tego punktu określi nam charakter trajektorii w jego okolicy. Według Poincarégo rozwiązanie równania.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Q(x, v)}{P(x, v)} = \frac{ax + bv + Q_2(x, v)}{cx + dv + P_2(x, v)}$$

ma w otoczeniu punktu (0,0) taki sam charakter jak rozwiązanie równania

$$\frac{dv}{dx} = \frac{ax + bv}{cx + dv}$$

(gdzie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  są współczynnikami stałymi), jeśli tylko spełnione będą warunki następujące:

$$ad - bc \neq 0, \quad Q_2(0, 0) = 0, \quad P_2(0, 0) = 0.$$

W naszym zaś przypadku  $ad - bc = -a$ ,  $Q_2(0) = 0$ ,  $P_2 = 0$ , a zatem warunki stosowalności twierdzenia Poincarégo w otoczeniu punktu (0,0) zostały spełnione. O rodzaju punktu osobliwego decyduje, jak wiadomo, wyróżnik  $\Delta = (b - c)^2 + 4ad = 4(h^2 - a)$ . Gdy  $0 < h < \sqrt{a}$  dla  $a > 0$ , mamy  $\Delta < 0$ , tzn. że wobec  $b + c = -2h < 0$  mamy punkt ogniskowy stateczny (rys. 5). Trajektorja zawija się spiralnie w kierunku punktu (0,0). Można wykazać, że zbliżenie punktu wodzącego trajektorii do punktu (0,0) ma charakter asymptotyczny.

Ponieważ trajektorja ma styczną poziomą prostopadłą do osi  $v$  i pionową prostopadłą do osi  $x$ , to musi istnieć taki punkt  $(v_1, x_1)$ , aby  $v_1 > 0$  oraz  $x_1 > 0$ , czyli punkt leżący w I ćwiartce układu  $xv$ . Ze znanego warunku nieosiągalności przez trajektorję punktu (0,0) w czasie skończonym, który ma postać  $P^2(x_1, v_1) + Q^2(x_1, v_1) > 0$ , wnioskujemy o asymptotycznym zbliżaniu się naszej trajektorii do położenia równowagi, ponieważ dla naszego przypadku ujętego w postaci najogólniejszej mamy

$$P^2(x_1, v_1) + Q^2(x_1, v_1) = v_1^2 + [-2hv_1 - f(x_1)]^2 = (1 + 4h^2)v_1^2 + 2hv_1f(x_1) + [f(x_1)]^2 > 0.$$

Wynika to z kolei z nierówności

$$(1 + 4h^2)v_1^2 > 0, \quad 2hv_1f(x_1) > 0$$

wobec  $x_1 > 0$ ,  $2hv_1 > 0$ ,  $f(x_1)x_1 > 0$ .

Widzimy więc, że na podstawie badań jakościowych można stosunkowo dokładnie określić charakter krzywych całkowych  $v(x)$  dla naszego przykładu. Ułatwia to bardzo obliczenia inżynierskie, dając sprawdzian dokładności tych obliczeń oraz wykluczając w zasadzie duże pomyłki w rachunku liczbowym. W praktyce inżynierskiej potrzebne są jednak rozwiązania ilościowe. Z szeregu metod przybliżonych analitycznych i graficznych stosowanych do rozwiązania równania amortyzatora można wybrać kilka stosunkowo prostych i dających wystarczającą technicznie dokładność dla różnych zakresów wartości parametrów  $\beta$  i  $h$ .

1. **Metoda rozwinięcia rozwiązania na szereg potęgowy.** Ponieważ funkcje  $f(x)$  i  $\varphi(v)$  są analityczne w badanym obszarze płaszczyzny  $xv$ , możliwe jest dla małych  $x$  poszukiwanie rozwiązania  $v(x)$  w postaci szeregu potęgowego, zbieżnego w pewnym otoczeniu punktu początkowego. Uproszczenie nasze dla całego zakresu parametrów  $h$  polega tylko na zwięźeniu obszaru badania  $x(t)$  przy pozostawieniu warunku silnej nieliniowości charakterystyki amortyzacji, co (w odróżnieniu od stosowanego osłabienia nieliniowości w metodzie małego parametru lub ograniczenia czasu ruchu przy szukaniu wprost  $x(t)$  w postaci analogicznego szeregu) daje nam znacznie ogólniejsze rozwiązanie. Zależnie od potrzeby w przypadkach szczególnych przyjmujemy  $v(x)$  w postaci szeregu potęg parzystych lub nieparzystych zmiennej  $x$  oraz wprowadzamy dodatkowe ograniczenia. Dla  $h > \sqrt{a}$ , tzn. w przypadku ruchu nienaprzemiennego, przy amortyzacji twardej przyjmujemy rozwinięcie  $v(x) = a_0 + a_1x + a_3x^3 + \dots$  bez żadnych dalszych ograniczeń. Jednakże dla interesującego nas przypadku  $h < \sqrt{a}$  tylko dla miękkiej amortyzacji  $\beta < 0$  moglibyśmy przyjąć  $v(x) = a_0 + a_1x - a_2x^2 + \dots$ , przy czym współczynnikami są liczby rzeczywiste. Dla  $\beta > 0$  wprowadzamy dalsze uproszczenia zakładając chwilowo, że  $v(-x) = -v(x)$  dla  $h \rightarrow 0$  i  $h = \sqrt{a}$ . W pozostałych przedziałach  $0 < h < \sqrt{a}$  znajdziemy funkcję  $v(x)$  w postaci szeregu o wyrazach zespolonych.

Omówimy w dalszym ciągu poszczególne warianty tej metody.

Dla wartości granicznych tłumienia  $h \rightarrow 0$  ( $\beta > 0$ ,  $a > 0$ ) równanie (5) można napisać w postaci

$$(14) \quad v \left( \frac{dv}{dx} + 2h \right) = -f(x)$$

lub wobec poprzednich założeń dotyczących funkcji  $f(x)$  i  $v(x)$ , podstawivszy  $z = -x$ , mamy

$$(15) \quad v(z) \left( \frac{dv}{dz} - 2h \right) = f(z).$$

Przyjmując  $v(x)$  w postaci  $v(z) = a_0 + a_1 z + a_3 z^3$  otrzymamy z równania (15) stosując metodę nieoznaczonych współczynników

$$(16) \quad v(x) = \pm \left[ v_0 + (h + \sqrt{h^2 + a})(x_0 - x) + \frac{\beta}{2h + 4\sqrt{h^2 + a}}(x_0^3 - x^3) \right].$$

Jest to równanie trajektorii rozwikłane względem zmiennej zależnej  $v$ . Zależnie od obszaru płaszczyzny fazowej  $xv$  dobrać trzeba kolejno dla  $x > 0$  lub  $x < 0$  znak plus lub minus przed nawiasem prawej strony wzoru (16). Ciągłą krzywą  $v(x)$  «zszyjemy» z czterech oddzielnych gałęzi, odpowiednio do czterech miejsc zerowych wielomianów, jakie otrzymalibyśmy z całkowania równania na  $v$  w sposób ścisły. W poszczególnych kolejnych obszarach  $\{v > 0, x > 0\}$ ,  $\{v < 0, x > 0\}$ ,  $\{v < 0, x < 0\}$ ,  $\{v > 0, x < 0\}$  itd. podstawiamy coraz to inne wartości początkowe  $v_{0i}(x_{i0})$ , co decyduje o maleniu promienia wodzącego trajektorii  $\varrho^2 = v^2 + x^2$ . Kolejne zatem równania dla poszczególnych odcinków trajektorii fazowej będą następujące:

dla  $v > 0, x_1 > 0$

$$(17) \quad v(x_1) = v_{01} + a_1(x_{01} - x_1) + a_3(x_{01}^3 - x_1^3),$$

dla  $v < 0, x_2 > 0$

$$(18) \quad v(x_2) = -[v_{02} + a_1(x_{02} - x_2) + a_3(x_{02}^3 - x_2^3)],$$

dla  $v < 0, x_3 < 0$

$$(19) \quad v(x_3) = v_{03} + a_1(x_{03} - x_3) + a_3(x_{03}^3 - x_3^3)$$

itd., przy czym  $x_{02}$  znajdujemy z warunku znikania prawej strony wzoru (17),  $x_{03}$  z warunku znikania prawej strony (18) itd. Są to kolejne malejące amplitudy ruchu, czyli odpowiednio  $x_{02} = x_{1max}$ ,  $x_{03} = x_{2max}$  itd., jeśli przez  $x_1, \dots, x_n$  oznaczyć bieżące współrzędne w poszczególnych obszarach płaszczyzny  $xv$ . Stałe kolejne są odpowiednio równe  $v_{02} = 0, v_{03} = [v(x_2)]_{x_2=0}, v_{04} = 0, v_{05} = [v(x_4)]_{x_4=0}$  itd. Stałe  $x_{01} = x_0$  oraz  $v_{01} = x_0$  są danymi dla naszego ruchu ogólnymi warunkami początkowymi.

Sprawdzianem mogą być warunki

$$v_{01} > v_{03} > v_{05} > \dots > v_{0n}, \quad x_{02} \geq x_{04} > x_{06} \geq \dots > x_{0(n+1)},$$

odpowiadające kolejnym naprzemiennie zmniejszającym się maksimum energii kinetycznej w położeniach równowagi i potencjalnej w położeniach wychyleń maksymalnych.

Przytoczmy przykład liczbowy dla  $a = 2, \beta = 1, h = 0,2, x_0 = 0,2$  i  $v_0 = 25$ .

Obliczmy kolejno:

$$a_1 = 0,2 + \sqrt{2,04} = 1,63, \quad a_3 = \frac{1}{0,4 + 4 \cdot 1,43} = 0,2;$$

$$v(x_1) = 25,33 - 1,63x - 0,2x^3,$$

$$\begin{array}{lll} v(0,2) = 25, & v(2) = 20,47, & v(4) = 6,03, & x_{02} = 4,45, \\ v(1) = 23,5, & v(3) = 15,04, & v(4,45) = 0, & v_{02} = 0; \end{array}$$

$$v(x_2) = -(24,85 - 1,63x - 0,2x^3),$$

$$\begin{array}{lll} v(4) = -5,55, & v(2) = -20, & v(0) = -24,85, & x_{03} = 0, \\ v(3) = -14,56, & v(1) = -23, & & v_{03} = -24,85; \end{array}$$

$$v(x_3) = -24,85 - 1,63x - 0,2x^3,$$

$$\begin{array}{lll} v(-1) = -23, & v(-3) = -14,56, & v(-4,45) = 0, & x_{04} = -4,45, \\ v(-2) = -20, & v(-4) = -5,55, & & v_{04} = 0; \end{array}$$

$$v(x_4) = (24,85 + 1,63x + 0,2x^3),$$

$$\begin{array}{lll} v(-4) = 5,55, & v(-2) = 20, & v(0) = 24,85, & x_{05} = 0, \\ v(-3) = 14,56, & v(-1) = 23, & & v_{05} = 24,85. \end{array}$$

Na rysunku 9 przedstawiono trajektorię dla tego przykładu znalezionej graficznie metodą Liénarda. Porównanie wyników obu metod wykazuje rozbieżność nie przekraczającą 10%.

Dla wartości granicznych  $h = \sqrt{a}$  stosujemy postępowanie analogiczne. Tutaj stałe wynoszą:  $a_1 = 2,41 \sqrt{a}$  oraz  $a_3 = \beta/7,66 \sqrt{a}$ .

Wzór (16) przybiera więc postać

$$(20) \quad v(x) = \pm \left[ v_0 + 2,41 \sqrt{a} (x_0 - x) + \frac{\beta}{7,66 \sqrt{a}} (x_0^3 - x^3) \right].$$

Wzory (17) - (19) mają zastosowanie bez zmian.

Dla przedziału  $0 < h < \sqrt{a}$  rozwiniemy funkcję  $v(x)$  w szereg Taylora w otoczeniu punktu  $(a_0, v_0)$  ograniczając się do trzech wyrazów:

$$(21) \quad v(x) = v_0 + v'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} v''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Zwiększając liczbę wyrazów przy zachowaniu poniżej przedstawionej procedury można określić  $v(x)$  z dowolną dokładnością.

Współrzędne trajektorii obliczamy według poprzednio przyjętej metody pisząc wzór na  $v(x)$  w formie

$$(22) \quad v(x_i) = \pm \left\{ v_{0i} - \frac{1}{v_{0i}} (2hv_{0i} + ax_{0i} + \beta x_{0i}^3) (x - x_{0i}) + \right. \\ \left. - \frac{1}{2v_{0i}} \left[ a + 3\beta x_{0i}^2 + \frac{1}{v_{0i}} (ax_{0i} + \beta x_{0i}^3) (2hv_{0i} + ax_{0i} + \beta x_{0i}^3) \right] (x - x_{0i})^2 \right\}$$

i przyjąwszy oczywiście, że  $x_{01} = x_0$ ,  $v_{01} = v_0$ .

Ponieważ dla rozpatrywanego ruchu istnieje zawsze przynajmniej jedno zerowe rozwiązanie, możemy założyć dla ułatwienia obliczeń, że  $x_0 = 0$ . Wtedy dla wszystkich nieparzystych obszarów płaszczyzny fazowej ( $i = 2n + 1$ ;  $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) wzór (21) uprości się odpowiednio.

2. Metoda kolejnych przybliżeń Picarda. Nie jest ona na ogół używana do efektywnego rozwiązywania równań, gdyż wymaga dużego nakładu pracy, jednakże przy ograniczeniu się tylko do pierwszego przybliżenia uzyskuje się dobre rozwiązanie orientacyjne.

Wychodząc z równania

$$v \frac{dv}{dx} = -2hv - ax - \beta x^3$$

i przyjętych warunków brzegowych otrzymujemy jako pierwsze przybliżenie

$$(23) \quad v_1^2 = v_0^2 + 4hv_0(x_0 - x) + a(x_0^2 - x^2) + \frac{\beta}{2}(x_0^4 - x^4).$$

Równanie to można rozwikłać względem zmiennej  $v$ :

$$(24) \quad v(x) \approx \pm \sqrt{v_1^2(x)}.$$

Znaki  $\pm$  przed pierwiastkiem interpretujemy jak poprzednio. Dalsze postępowanie i tzw. «zszywanie» odcinków trajektorii jest analogiczne do przedstawionego w metodzie poprzedniej. Drugie przybliżenie równania (23) wymaga dość skomplikowanych obliczeń, w których wyniku otrzymujemy

$$v_2^2 \approx v_0^2 + 2a(x_0^2 - x^2) + \beta(x_0^4 - x^4) + 4h(x_0 - x) \times \\ \times \left[ v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4hv_0(x_0 - x) + a(x_0^2 - x^2) + \frac{\beta}{2}(x_0^4 - x^4)} \right].$$

3. Zmodyfikowana metoda graficzna Liénarda. Metoda ta w zastosowaniu do naszego przypadku sprowadza się (por. [5]) — po pewnej zmianie — do konstrukcji następującej (rys. 7).

Kreślmy na płaszczyźnie  $vx$  krzywą  $2hv - ax - \beta x^3 = 0$ . Punkt  $P_0$  (związany z warunkami początkowymi) rzutujemy równoległe do prostej  $x = 0$  (punkt  $A$ ). Prostopadle do kierunku rzutowania odkładamy odcinek  $AB = v_0/2h$ . Łącząc  $P_0$  i  $B$  otrzymujemy odcinek stycznej do trajektorii, na której obieramy dowolnie bliski punkt  $P_1$ , powtarzając dla niego tę samą konstrukcję itd. Postępowanie takie można uzasadnić mając na uwadze, że

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-2hv - ax - \beta x^3}{v} = \frac{v + \frac{ax + \beta x^3}{2h}}{\frac{v}{2h}} = -\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} (180 - \varepsilon) = \operatorname{tg} \varphi,$$

zaś kąt  $\varphi$  jest właśnie kątem pochylenia trajektorii  $v(x)$ .

Parametry  $a, \beta$  i  $h$  spełniają określoną rolę techniczną, dlatego jest konieczna odpowiednia dyskusja przy wyborze typu konstrukcji amortyzatora. Wpływ parametru  $a$  jest zwykle mały, stąd po ustaleniu  $h \leq \sqrt{a}$  główny ciężar analizy obejmuje parametry  $\beta$  i  $h$ . Wartość  $\beta$  określa stopień nierówności jezdni, zaś wartość  $h$  jest związana z szybkością zaniku amplitudy i takiego tłumienia, które by umożliwiło optymalne wytracenie przyspieszeń układu, tzn. możliwie spokojną jazdę bez wstrząsów.

Wszystkie omówione rozwiązania przybliżone mają ogólną postać

$$v(x) = \pm \left[ a_0 + \sum_1^n a_i x^i \right] \quad (i = 1, \dots, n)$$

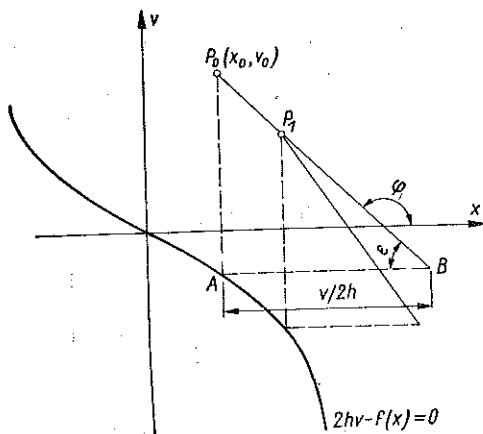
dla każdego z łuków trajektorii, przy czym współczynniki  $a_i$  zależą od  $h$  i  $\beta$  na ogół w taki sposób, że  $a_1$  rośnie ze wzrostem  $h$ ;  $a_i$  ( $i > 1$ ) maleje ze wzrostem  $h$ , zaś rośnie ze wzrostem  $\beta$ . Ponieważ jednak dla małych  $x$  (w rozpatrywanym przez nas obszarze),  $a_1$  rośnie szybciej wraz z  $h$  niż  $a_i$  ( $i > 1$ ) maleje, można przyjąć, że ze wzrostem  $h$  i  $\beta$  prędkość  $v(x)$  szybko maleje. Wynika to zresztą wprost z zależności

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2hv + ax + \beta x^3}{v}$$

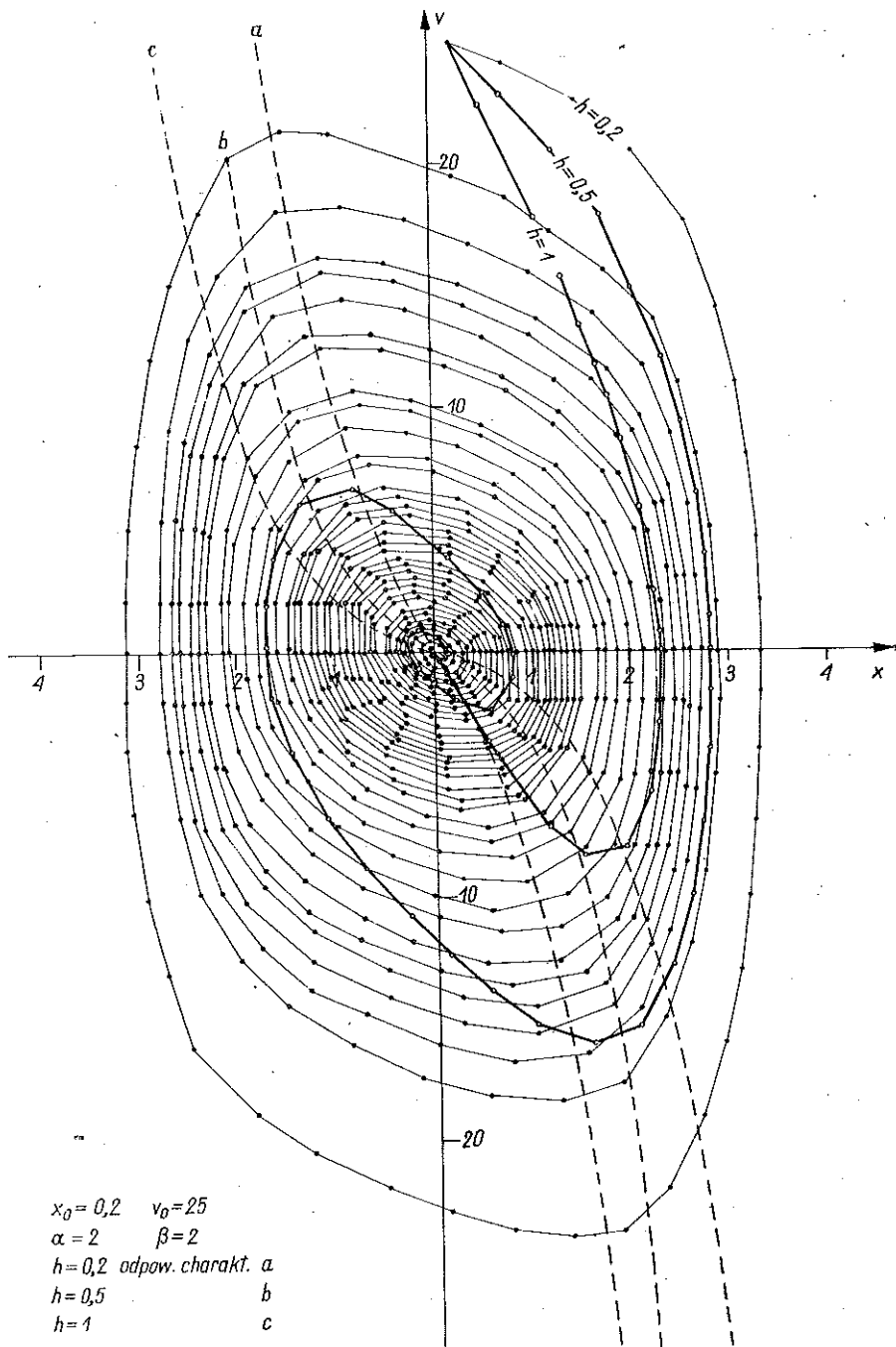
przedstawiającej kąt pochylenia trajektorii fazowej. Zatem ze wzrostem zarówno  $h$ , jak i  $\beta$  maleją również kolejne amplitudy ruchu i ruch jest szybciej tłumiony.

Zauważmy również, że przy stałym  $h$  wzrost  $\beta$  wpływa na zwiększenie dysypacji. A zatem im twardsza charakterystyka amortyzacji, tym szybciej ruch amortyzatora ulega tłumieniu. Dla tłumienia wiskotycznego teoretycznie amplituda powinna zaniknąć po nieskończonej ilości odkształceń, nas jednak interesuje praktycznie stopień zanikania amplitud tylko do pewnych określonych ich wartości, które możemy w każdym przypadku technicznym ustalić na podstawie zależności energetycznych

$$x_{min} = \frac{1}{a} \tilde{x}_0,$$



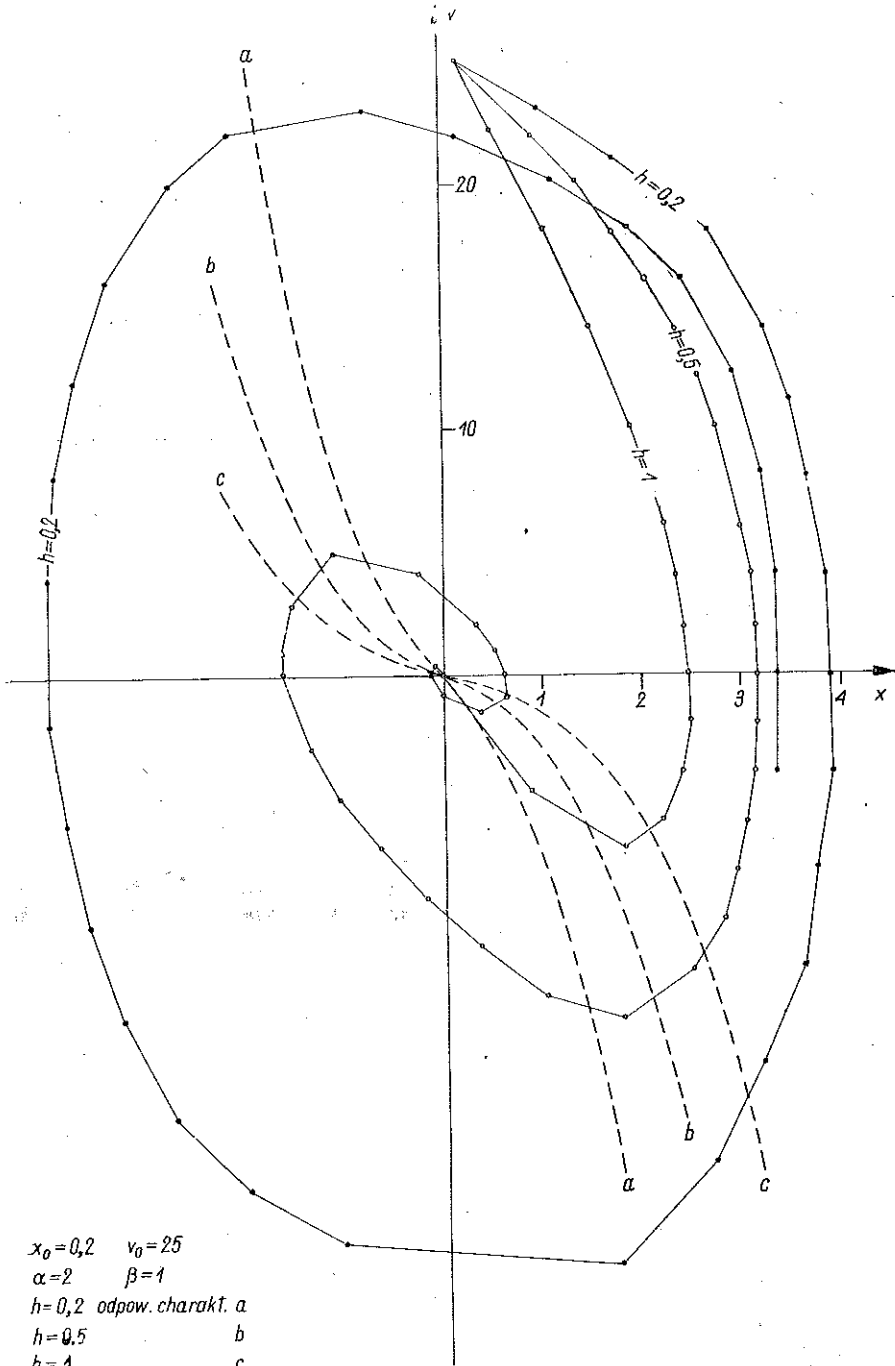
Rys. 7



$x_0 = 0,2$      $v_0 = 25$   
 $\alpha = 2$      $\beta = 2$   
 $h = 0,2$  odpow. charakt. a  
 $h = 0,5$     b  
 $h = 1$     c

Rys. 8





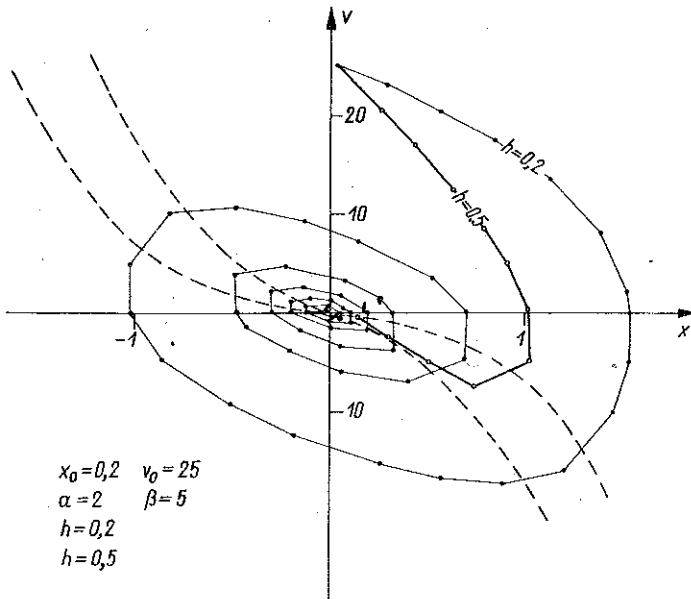
Rys. 9

gdzie

$$\frac{1}{2} a \tilde{x}_0^2 = \frac{1}{2} a x_0^2 + h v_0^2.$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika ponadto, że przy ustalonym  $\beta = \text{const}$  dla  $h \rightarrow 0$  układ upodabnia się do nietłumionego oscylatora nieliniowego związanego z równaniem (10), które wynika wprost z równania (23) dla  $h = 0$ . Zaś dla  $h \rightarrow \sqrt{a}$  ruch zatracza charakter oscylacyjny, trajektorie stają się krzywymi trzeciego stopnia zgodnie z równaniem przybliżonym (20).

Dla tej samej zatem charakterystyki sprężystej, przy tych samych warunkach początkowych, wraz ze wzrostem dysypacji położenie równowagi, wokół którego odbywają się drgania, zmienia charakter: z punktu osobliwego ogniskowego staje się punktem osobliwym węzłowym, trajektorie przecinają coraz rzadziej oś  $x$ .



Rys. 10

Uwagi powyższe ilustruje przykład liczbowy dla następujących wartości:  $\alpha = 2$ ,  $x_0 = 0,2$ ,  $v_0 = 25$ . Odpowiednie wyniki podano dla różnych wartości  $\beta$  i  $h$  w tabelicy 1 oraz na rys. 8, 9 i 10 (wykreślone metodą Liénarda).

W obliczeniach technicznych badanie omawianego charakteru naprzemienności ruchu amortyzacji, tzn. kolejno zanikających amplitud ruchu,

oraz odcinków czasu  $\Delta t_i$  pomiędzy pojawieniem się tych amplitud, można przeprowadzić drogą dyskusji na liczbach szczegółowych:

$$(25) \quad \kappa_i = \left| \frac{x_{0i}}{x_{0i+1}} \right| = f(i, \beta/a, h)$$

oraz

$$(26) \quad \Delta t_i = \int_{x_{0i}}^{x_{0i+1}} \frac{dx}{v(x_i, i, \beta/a, h)},$$

gdzie  $i, \beta/a$  i  $h$  są parametrami danego ruchu. Daje to konstruktorowi możliwość takiego doboru parametrów  $\beta/a$  i  $h$  (materiału i kształtu sprężyn oraz oleju tłumiącego), by otrzymać wymagane dla eksploatacji pojazdu stosunki  $x_{0i}/x_{0i+1}$  oraz  $\Delta t_i/\Delta t_{i-1}$  dla danych  $i$ .

Omówimy przykład obliczenia konstrukcyjnego na tle podanej teorii.

Na podstawie równania (16) można napisać dla poszczególnych amplitud  $x_{i\max}$  oraz  $x_{(i+1)\max}$  następujące równania

$$(27) \quad \begin{cases} a_{0i} - a_1 x_{0i+1} - a_3 x_{0i+1}^3 = 0, \\ a_{0i+1} - a_1 x_{0i+2} - a_3 x_{0i+2}^3 = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_{0i} &= v_{0i} + a_1 a_{0i} + a_3 x_{0i+1}^3, \\ a_{0i+1} &= v_{0i+1} + a_1 x_{0i+1} + a_3 x_{0i+1}^3, \end{aligned}$$

czyli

$$(28) \quad \begin{cases} v_{0i} + a_1 (x_{0i} - x_{0i+1}) - a_3 (x_{0i}^3 - x_{0i+1}^3) = 0, \\ v_{0i+1} + a_1 (x_{0i+1} - x_{0i+2}) - a_3 (x_{0i+1}^3 - x_{0i+2}^3) = 0. \end{cases}$$

Z równań (28) widać, że przy zachowaniu stałego  $\beta$  i  $h$  (tzn. stałych  $a_1$  i  $a_3$ ) oraz niezależnie od zachowania się tych parametrów w kolejnych obszarach — wobec  $v_{0i} > v_{0i+1}$  maleją kolejno różnice  $x_{0i} - x_{0i+1}$ , a co za tym idzie, mamy  $\kappa_i > \kappa_{i+1}$ . Znaczy to, że przy obranym przez konstruktora stałym  $h$  efekt tłumienia amortyzatora w czasie ruchu (na skutek nieliniowej sprężystej amortyzacji) maleje. Efekt powyższy zneutralizować można wzrostem  $h$  i  $\beta$ . Sięgnijmy po ilustrację znów do naszego przykładu liczbowego:  $a = 2$ ,  $x_0 = 0,2$ ,  $v_0 = 25$ . Dla poszczególnych  $\beta$  i  $h$  kolejne stosunki amplitud  $\kappa_i$  podane zostały w tablicy 1.

Tablica 1

$\beta$	$h$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\kappa_3$	$\kappa_4$	$\kappa_5$	$\kappa_6$	$\kappa_7$
1	0,2	1,08	1,06	1,05	1,02	1,04	1,02	1,00
	1	23	5	1	—	—	—	—
5	0,2	1,55	1,43	1,4	1,4	1,2	1,15	—

Szybkość malenia  $x_i$  bardzo wzrasta wraz z  $h$ , nie zmienia się prawie pod wpływem zmiany  $\beta$ . Wynika to wprost z omówionego poprzednio większego tempa wzrostu  $a_1$  oraz  $h$ , od tempa malenia  $a_3$ , oraz z niezależności  $a_1$  od  $\beta$ . Natomiast wpływ  $\beta$  jest widoczny na kolejnych przyrostach  $\Delta t_i$ .

Dla omawianej przez nas metody rozwinięcia w szereg mamy np.

$$(29) \quad \Delta t_i = \int_{x_{0i}}^{x_{0i+1}} \frac{dx}{v(x_i)}$$

Jeśli obliczane poprzednio współczynniki rozwinięcia przyjąć na razie dla uproszczenia za stałe

$$a_0(i, \alpha, \beta, h) = v_{0i} + a_1 x_{0i} + a_3 x_{0i}^3,$$

$$a_1 = f_1(\alpha, \beta, h),$$

$$a_3 = f_3(\alpha, \beta, h),$$

to otrzymamy

$$\Delta t_i = \int_{x_{0i}}^{x_{0i+1}} \frac{dx}{a_0 - a_1 x_i - a_3 x_i^3} = \int_{x_{0i}}^{x_{0i+1}} \frac{dx}{(x - x_{0i})(-a_3 x^2 - a_3 x_{0i+1} x - a_1 - a_3 x_{0i+1}^2)}$$

Podstawiając dalej dla uproszczenia

$$A = a_1 + a_3 x_{0i+1}^2, \quad B = a_3 x_{0i+1}, \quad C = a_3,$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta t_i &= \left\{ \frac{1}{A + Bx_{0i+1} + Cx_{0i+1}^2} \left[ \frac{B + 2Cx_{0i+1}}{\sqrt{4AC - B^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{B + 2Cx}{\sqrt{4AC - B^2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \ln \frac{(x_{0i+1} - x)^2}{A + Bx + Cx^2} \right] \right\}_{x_{0i}}^{x_{0i+1}} = \\ &= \left\{ \frac{1}{a_1 + 3a_3 x_{0i+1}^2} \left[ \frac{3x_{0i+1}}{\sqrt{4\frac{a_1}{a_3} + 3x_{0i+1}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x_{0i+1} + 2x}{\sqrt{4\frac{a_1}{a_3} + 3x_{0i+1}}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \ln \frac{(x_{0i+1} - x)^2}{a_3(x_{0i+1}^2 + x_{0i+1}x + x^2) + a_1} \right] \right\}_{x_{0i}}^{x_{0i+1}} \end{aligned}$$

Z zachowania się stosunku  $a_1/a_3$ , gdy wzrasta  $\beta$ , widać że przy rosnącym  $\beta$  przyrosty  $\Delta t_i$  wzrastają szybciej, gdy wzrasta  $x_i$ . Np. dla naszego przykładu, gdy  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $h = 0,2$ ,  $x_0 = 0,2$  oraz  $v_0 = 25$ , dla którego znaleźliśmy  $a_1 = 1,63$ ,  $a_3 = 0,2$ ,  $x_{01} = 0,2$ ,  $x_{02} = 4,45$ ,  $x_{03} = 0$ , otrzymamy

dla odcinka czasu potrzebnego do osiągnięcia przez układ pierwszej amplitudy następujący wzór:

$$\Delta t_1 = \int_{0,2}^{4,45} \frac{dx}{-0,2x^3 - 1,63x + 25,33} = \left[ 0,104 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (0,46 - 0,21x) - 0,037 \ln \left( \frac{20 - 8,9x + x^2}{5,59 + 0,89x + 0,2x^2} \right) \right]_{0,2}^{4,45}$$

skąd po wyliczeniu  $\Delta t_1 = 0,07$ .

Nie zawsze jednak konieczne jest dla pozostałych obliczeń lub dla spełnienia wymagań technicznych określenie trajektorii fazowej układu amortyzacji metodami analitycznymi. Określenie odcinków czasu  $\Delta t_i$ , a co za tym idzie wszystkich technicznie ważnych elementów ruchu  $x(t)$ , można uzyskać też za pomocą metod graficznych. Jeśli przyjąć ogólną postać trajektorii fazowej w formie

$$v(x) = a_0 - a_1x - a_3x^3,$$

to mając określone graficznie amplitudy  $x_{0i}$ ,  $x_{0i+1}$ ,  $x_{0i+2}$  oraz  $v_{0i}$ ,  $v_{0i+1}$  łatwo na podstawie równań (28) określić współczynniki  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_{0i}$  i  $a_{0i+1}$ , po czym jak poprzednio obliczyć

$$\Delta t_i = \int_{x_{0i}}^{x_{0i+1}} \frac{dx}{a_{0i} - a_1x_i - a_3x_i^3}.$$

W przypadkach orientacyjnych obliczeń konstrukcyjnych układu amortyzacyjnego potrzebnych do ustalenia geometrycznych parametrów konstrukcji, np. skoku amortyzatora, interesować nas będzie tylko pierwsza amplituda ruchu naszego układu oraz czas jej osiągnięcia. Większe zapewnienie bezpieczeństwa oczywiście taka metoda, której dokładność wpłynie na realizację urządzenia o dużej amplitudzie. Tak np. dla omawianego przez nas przykładu przyjmiemy raczej wynik znaleziony na podstawie metody rozwinięcia na szereg, tj.  $x_{02} = 4,45$  (metoda Liénarda dała  $x_{02} = 4$ ).

Każda z opisanych metod może być wykorzystana w pełnym zakresie  $a$ ,  $\beta$  i  $h$ . Najszybciej daje wynik metoda graficzna Liénarda. Nie ma tu jednak możliwości rozważenia kolejnych wartości  $\Delta t_i$ ; uzupełnienie można otrzymać za pomocą niezbyt uciążliwych obliczeń w oparciu o wzory (28). Zachowanie dokładności wyników w otoczeniu punktu (0,0) wymaga przyjęcia dużej skali na obu osiach  $v(x)$ , co dla  $\beta > 2$  stwarza już duże trudności techniczne w kreśleniu ze względu na konieczną bardzo dużą powierzchnię rozkładu punktów trójkąta na rys. 7. Nieskomplikowana jest metoda rozwinięcia na szereg potęgowy o niewiadomych współ-

czynnikach. Przy zachowaniu 2 wyrazu rozwinięcia błąd przybliżenia nie przekracza 5%. Rozbieżność wyników obu tych metod przybliżonych, jak już wykazaliśmy, nie powinna przekraczać 10%, co mniej więcej pokrywa się z sumą błędów przybliżeń. Pozostałe metody rozwinięcia rozwiązania na szereg kolejnych przybliżeń wymagają kłopotliwych obliczeń. Były także próby, [6], stosowania metody częściowej linearyzacji odcinków charakterystyki nieliniowej (tzw. metoda «zszywania»). Mogłaby ona znaleźć zastosowanie w przypadku charakterystyk w postaci krzywej łamanej, w ogólnym jednak przypadku ze względu na to, że wymaga dużego nakładu pracy, metoda ta nie wydaje się praktyczna.

#### Literatura cytowana w tekście

[1] G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz*, Braunschweig 1918.

[2] R. Gutowski, *Free Vibration of a System of One Degree of Freedom with Non-Linear Elastic Characteristic, Taking Into Consideration Linear Viscous Damping* [Drgania swobodne układu o jednym stopniu swobody z nieliniową charakterystyką sprężystą z uwzględnieniem liniowego tłumienia], Arch. Mech. Stos. 6 (1957).

[3] I. Stocker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, New York 1950.

[4] Capro Vincenzo, *Sulle vibrazioni libere di un sistema meccanico ad un grado di liberta*, Rend. Semin. Mat. Univ. e Politecn, Torino 13 (1954).

[5] S. Ziemia, *Graficzne metody wykreślenia trajektorii fazowych*, Biul. WAT 1957.

[6] Пархиловский, *Основы теории проектирования подвески автомобиля*, Авт. Тракт. Пром. 2 (1955).

#### Резюме

#### ЛИНЕЙНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ АМОРТИЗАЦИИ ОДИНАРНОГО ИМПУЛЬСА

После обсуждения конструкционной стороны исследуемой амортизации, физических предположений и области исследований составлена модель системы и соответствующее уравнение движения  $m\ddot{x} + l\dot{x} + F(x) = 0$ . Излагается кратко, разработанный ранее, качественный анализ, как предварительная мера к инженерным качественным исследованиям. Далее, ограничиваясь исследованием переменного движения с жесткой упругой характеристикой, автор описывает приближенные методы количественного анализа наиболее удобных для отдельных интегралов изменчивостей параметров демпфирования и упругой характеристики. Исчисления пополнены числовыми примерами. На основании приближенных теорий фазных траекторий про-

водится дискуссия характера демпфирования и изменчивости направления движения амортизационной системы, в зависимости от значений параметров демпфирования и упругой характеристики; при этом приводится числовой пример такого движения для различных вариантов параметров. Указывается необходимость проведения дискуссии конструктором амортизационной системы, в каждом случае конкретного конструкционного решения, с целью подбора оптимальных значений обсужденных параметров.

#### Summary

#### LINEAR DAMPING OF A SINGLE IMPULSE BY A NON-LINEAR SHOCK ABSORBING SYSTEM

After discussing the design problems of the shock-absorbing system considered, and also physical assumptions and the scope of investigation, a model of the system is established with the corresponding equation of motion. The existing results of qualitative analysis of the case under consideration are summarized. Then, the author passes to a description of approximate methods of quantitative analysis for each particular range of damping parameters and elastic characteristic, confining his investigation to alternating motion with elastic characteristic of the rigid type. The calculations are accompanied by numerical examples. On the basis of approximate equations of phase trajectories, a discussion is entered into on the character of damping and the alternating motion of the shock-absorbing system, depending on various damping parameters and elastic characteristic. A numerical example of such a motion for various values of these parameters is included. Attention is drawn to the necessity of such an analysis for the designer of the shock-absorbing system in every case of design. This is necessary for selecting the optimum values of parameters.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 kwietnia 1957 r.*

---