

ALEKSANDER LISOWSKI

**STATECZNOŚĆ I DRGANIA POWŁOK  
W OPARCIU O WYNIKI BADAŃ MODELOWYCH**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
LXXXIX**

## SPIS TREŚCI

	Str.
Wstęp	25
1. Określenie praw modelowych dla powłok	28
1.1. Obliczenie ugięć powłoki	29
1.2. Ustalenie praw budowy modelu	31
1.3. Ustalenie praw modelowych powłok w przypadku badania stateczności	34
1.4. Ustalenie praw dla modelowania powłok w przypadku badania drgań	36
2. Wyboczenie powłok cienkościennych	38
2.1. Przyjęcie czynnika wybozczającego układ	38
2.2. Analiza znanych rozwiązań określających wartość obciążenia krytycznego w kopułach	40
2.3. Zastosowanie badań modelowych do określenia wyboczenia dowolnej powłoki	42
3. Drgania powłok cienkościennych	47
3.1. Określenie podstawowej postaci drgań układu	47
3.2. Drgania powłok cylindrycznych	48
3.3. Określenie postaci oraz częstotliwości drgań własnych powłoki za pomocą metody sił	50
3.4. Porównanie drgań powłoki z drganiami płyty	65
3.5. Odpowiedniość modelowa drgań powłok	67
3.6. Zastosowanie odpowiedniości modelowej do dowolnych powłok	68
4. Metody pomiarowe	70
4.1. Optyczna metoda mierzenia odkształceń sprężystych układów przestrzennych na modelach	72
4.2. Metoda elektroakustyczna pomiaru drgań	77
4.3. Czujnik pojemnościowy do pomiarów drgań	79
4.4. Akustyczna metoda określania częstotliwości drgań własnych	83
5. Wykonanie modeli	83
5.1. Nadanie powłoce żadanego kształtu	83
5.2. Modele z celuloidu i plexiglasu	84
5.3. Modele z metali	85
5.4. Obrabiarki do wykonywania modeli	87

## WSTĘP

Cienkościenne pokrycia powierzchniowe są od kilkudziesięciu lat (około czterdziestu) coraz powszechniej stosowane w budownictwie w ogóle, a zwłaszcza w budownictwie przemysłowym. Fakt, że cienka powłoka żelbetowa, której krzywizna jest stała lub zmienia się w sposób ciągły, pod obciążeniem rozłożonym w sposób ciągły (ciężar własny, śnieg, wiatr) przenosi zasadniczo tylko siły osiowe, pozwolił na niespotykane poprzednio przykrycie dużych rozpiętości za pomocą cienkich powłok.

Z typowych przykryć cienkościennych wymienić można wszelkiego rodzaju kopuły oraz sklepienia cylindryczne, konoidalne, beczkowe i siodłowe. Pierwsze służą najczęściej do przykrycia powierzchni kołowej czy eliptycznej, drugie oparte są na prostokątach.

Istnieją dwie teorie obliczeń: bezmomentowa oraz momentowa teoria powłok. Momenty w powłoce występują (od typowych obciążeń) zasadniczo wskutek utwierdzenia w sztywnych elementach brzegowych, natomiast w częściach oddalonych od elementów brzegowych panuje w przybliżeniu stan błonowy. Jednak nawet przy uwzględnieniu wpływu momentów zginających i skręcających w powłoce otrzymujemy maksymalne naprężenia w żelbecie w granicach kilku, kilkunastu, a najwyżej dwudziestu kilku  $\text{kg/cm}^2$ . Widzimy zatem, że naprężenia te są jeszcze bardzo dalekie od występujących normalnie w elementach konstrukcji żelbetowych, gdzie o zniszczeniu decyduje wytrzymałość materiału.

Istnieje zatem niezwykle ważne pytanie, czy wykonane dotychczas sklepienia są już na granicy ich stosowalności, a jeżeli nie, to jaka jest spodziewana maksymalna rozpiętość powłoki oraz jakie zmiany konstrukcyjne należy poczynić, aby granicę tę dla poszczególnych typów sklepień jeszcze bardziej powiększyć.

Rozwój konstrukcji powierzchniowych można przedstawić chyba najlepiej na kopułach, które stosowane już były w starożytności (np. Pantheon, którego kopuła ma rozpiętość 43,20 m). W okresie nowożytnym wybudowano w 1542 r. kopułę katedry św. Piotra w Rzymie o rozpiętości 42,52 m, [1].

Zastosowanie żelbetu pozwoliło na konstrukcję cienkich powłok o znacznych rozpiętościach i to wpłynęło na ich rozpowszechnienie. I tak

w 1913 r. powstaje Hala Ludowa we Wrocławiu o rozpiętości 65 m, w 1929 r. Hala Targów w Lipsku o rozpiętości 65,80 m, a w 1935 r. hangar w Orly o rozpiętości 97,00 m. Spośród kopuł o większej rozpiętości wymienić można kopułę teatru w Nowosybirsku o średnicy 55,5 m (wybudowana w 1934 r.) oraz kopułę u nas w Zasławicach pod Krakowem o rozpiętości 56,00 m przy grubości powłoki 15 cm i promieniu krzywizny 41,14 m.

Interesującą rzeczą będzie informacja, jak kolejno malał ciężar własny pokrycia na 1 m<sup>2</sup> rzutu. Konstrukcja kopuły katedry Św. Piotra wynosi 6800 kG/m<sup>2</sup>, ciężar konstrukcji nad halą we Wrocławiu 2030 kG/m<sup>2</sup>, a nad halą w Lipsku 700 kG/m<sup>2</sup>. Ciężar konstrukcji przesklepienia hali w Algierias o rozpiętości 47,62 m wynosi tylko 260 kG/m<sup>2</sup>, tzn. 1/30 ciężaru konstrukcji katedry Św. Piotra.

Z zestawienia widzimy, jaką oszczędność w materiale pokrycia uzyskano przez stosowanie bardzo cienkich (w granicach 4-12 cm) powłok żelbetowych. Dalsza oszczędność związana bezpośrednio z konstrukcją sklepienia zależy od zmniejszenia przekroju słupów lub murów nośnych oraz fundamentów.

Analizując wartości naprężeń w powłokach widzimy, że dotychczas budowane sklepienia są jeszcze bardzo dalekie od granicy ich bezpieczeństwa, obliczonej z warunku przekroczenia wytrzymałości materiału. Dlatego też w tych właśnie konstrukcjach, gdzie elementem nośnym jest cienka powłoka, niezwykle ważne znaczenie ma warunek stateczności. Możliwość wyboczenia sklepienia jest tym czynnikiem spodziewanym, który ogranicza stosowalność sklepień cienkościennych.

Pierwsze prace teoretyczne o zagadnieniu stateczności powłok (zgodnie zresztą z historycznym rozwojem sklepień) dotyczyły kopuł. I tak Zoelly, [4], obliczył wyboczenie kopuły kulistej przy założeniu obrotowo-symetrycznej postaci odkształcenia. E. Schwerin, [3], rozważył przypadek ogólniejszy udowadniając, że obie postaci wyboczenia, tj. obrotowo-symetryczna i niesymetryczna względem równika, dają identyczną wartość siły krytycznej, a więc obie są równoważne pod względem wytrzymałości.

Najmniejsze obciążenie krytyczne rozłożone równomiernie na całej powierzchni kopuły kulistej i działające w kierunku jej środka według obliczeń Zoelly'ego wynosi

$$(p_{kr})_{min} = E \frac{h^2}{R^2} \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \approx 1,155 E \frac{h^2}{R^2}$$

We wzorze tym  $E$  oznacza współczynnik sprężystości podłużnej,  $h$  grubość powłoki,  $R$  promień krzywizny kuli oraz  $\nu$  współczynnik Poissona.

Jednak obserwacje konstrukcji oraz modeli wykazały, że wyboczenie następuje już przy znacznie mniejszym obciążeniu. Dało to podstawę do szeregu dalszych prac oraz do przyjęcia założenia miejscowego wyboczenia powłoki (por. prace [7]-[14]).

W 1952 r. autor podjął próbę obliczenia obciążenia krytycznego płaskiej kopuły kulistej, [2]. Za schemat wyboczenia przyjęto analogicznie do odpowiedniego schematu w teorii łuków płaskich postać odkształcenia osiowo-symetryczną i antysymetryczną. Brak jednak danych doświadczalnych nie pozwolił wówczas ustalić, dla jakiej wyniosłości kopuł założenia te są słuszne.

Zagadnieniem stateczności pokryć cienkościennych zajmuje się Pracownia Teorii Konstrukcji, Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN (por. [15]). Z inicjatywy W. Wierzbickiego, kierownika pracowni, podjęta została przez autora praca nad rozwiązaniem zagadnienia dotyczącego określenia postaci wyboczenia powłok. Praca powyższa została oparta na wynikach badań modelowych.

W tym celu zorganizowane zostało w latach 1954-56 Laboratorium Modelowe Pracowni na terenie Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. Prace doświadczalne Laboratorium objęły również związane ściśle z wybočeniami zagadnienie drgań powłok cienkościennych. Wyniki te zostaną przedstawione w trzecim rozdziale niniejszej pracy.

Już to krótkie zestawienie prac teoretycznych i doświadczalnych dotyczących zagadnienia stateczności kopuły kulistej wskazuje, jak ważne dla praktyki jest właściwe określenie bezpieczeństwa budowli ze względu na możliwość jej wyboczenia oraz że zagadnienie to jeszcze w dalszym ciągu jest aktualne.

W pracy niniejszej na podstawie kilkuletnich doświadczeń poczynionych na modelach sformułowano założenia, które ściśle uzależniają zagadnienie wyboczenia i drgań danej powłoki od postaci jej odkształcenia.

W oparciu o te założenia przedstawiono metodę, która pozwala (wprawdzie w przybliżeniu) w prosty sposób określić wartość obciążenia krytycznego oraz częstotliwość podstawową drgań powłoki.

Celem tej pracy opartej na wynikach badań modelowych jest:

(1) zbadanie pracy powłok różnych typów (kopuł obrotowych i sklepień cylindrycznych oraz trudniejszych do matematycznego ujęcia powłok konoidalnych),

(2) postawienie prostego założenia umożliwiającego określenie postaci wyboczenia oraz obliczenia obciążenia krytycznego w powłokach, dla których potrafimy obliczyć odkształcenia wywołane dowolnym obciążeniem,

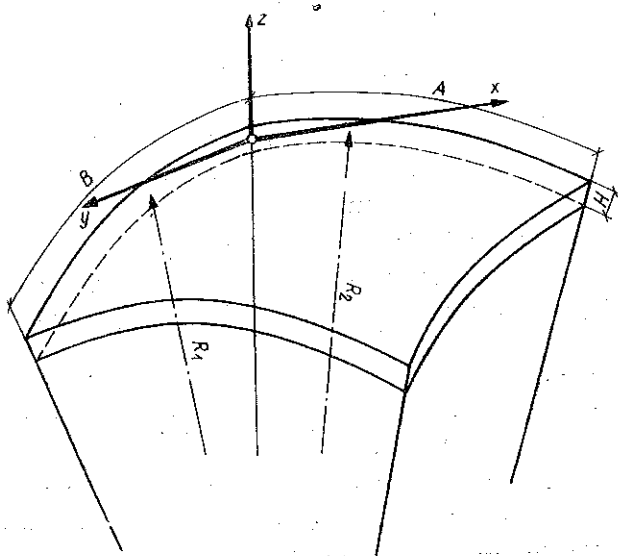
(3) określenie praw modelowych w celu przeniesienia wyników otrzymanych przy użyciu obiektów wielokrotnie zmniejszonych (modeli) i wykonanych z innego materiału na konstrukcje rzeczywiste,

(4) omówienie zagadnienia drgań własnych powłok ściśle związane go z wyboczeniem.

### 1. OKREŚLENIE PRAW MODELOWYCH DLA POWŁOK

Zanim przejdziemy do badań powłok, należy ustalić warunki, jakie powinien spełniać model obiektu rzeczywistego, którego własności chcielibyśmy poznać na podstawie badań modelu. Następnie wyprowadzimy związki określające pracę modelu, aby za ich pomocą odpowiednie wielkości pomierzone na modelu można było przenieść na obiekt rzeczywisty.

Łatwo przewidzieć, że wielkości, o których mówimy dalej (ugięcia, siły i odkształcenia), zależą od wymiarów modelu, cech materiałowych, obciążenia i warunków brzegowych.



Rys. 1

Rozważmy element powłoki o stałej grubości  $H$  podany na rys. 1. Wymiary elementu określają następujące wielkości:  $A$  jest szerokością,  $B$  długością,  $H$  grubością oraz  $R_1$  i  $R_2$  głównymi promieniami krzywizny powłoki.

Do rozważań przyjmiemy, że materiał powłoki jest jednorodny, izotropowy i liniowo sprężysty, a więc że określają go tylko dwie stałe materiałowe:  $E$  współczynnik sprężystości podłużnej oraz  $\nu$  współczynnik Poissona.

Znajdziemy ogólną zależność ugięcia powłoki  $F$  od parametrów podanych wyżej oraz od wielkości obciążenia statycznego  $Q$  obciążającego układ. Będzie to funkcja

$$(1.1) \quad F = \Phi(A, B, H, R_1, R_2, E, \nu, Q).$$

Ugięcie  $F$  jest więc funkcją ośmiu wielkości, których wymiar możemy wyrazić za pomocą dwóch jednostek: siły kG oraz wymiaru długości  $m$ .

Ponieważ w naszym przypadku chodzi o ustalenie ogólnego związku, a nie o konkretne rozwiązanie pewnego przykładu, najwygodniej będzie posłużyć się zasadami analizy wymiarowej. Opierać się będziemy na następującym zasadniczym twierdzeniu sformułowanym przez E. Buckingham'a (twierdzenie  $(\pi)$ , [6]).

Jeżeli w wymiarowo niezmienniczej i jednorodnej funkcji  $\Phi(A_1, \dots, A_m; P_1, \dots, P_q)$  argumenty  $A_1, \dots, A_m$  są wymiarowo niezależne, a argumenty  $P_1, \dots, P_q$  są od  $A_1, \dots, A_m$  wymiarowo zależne, to znaczy, jeżeli wyrażają się w następujący sposób:

$$(1.2) \quad P_1 = \pi_1 A_1^{r_{11}}, \dots, A_m^{r_{m1}}, \quad P_q = \pi_q A_1^{r_{q1}}, \dots, A_m^{r_{mq}},$$

gdzie  $\pi_1, \dots, \pi_q$  są wielkościami bezwymiarowymi (liczbami), a wykładniki  $r_{11}, \dots, r_{mq}$  są liczbami rzeczywistymi, to funkcja  $\Phi$  musi mieć postać

$$(1.3) \quad \Phi(A_1, \dots, A_m; P_1, \dots, P_q) = \varphi(\pi_1, \dots, \pi_q) A_1^{f_1}, \dots, A_m^{f_m},$$

gdzie  $\varphi(\pi_1, \dots, \pi_q)$  jest zwykłą funkcją liczbową argumentów bezwymiarowych (liczbowych)  $\pi_1, \dots, \pi_q$  i nie zależy od  $A_1, \dots, A_m$ , a wykładniki  $f_1, \dots, f_m$  (rzeczywiste) nie zależą od  $\pi_1, \dots, \pi_q$  ani od  $A_1, \dots, A_m$ .

### 1.1. Obliczenie ugięć powłoki

Aby móc wyznaczyć kształt funkcji ugięcia  $F$  trzeba założyć, że

- (1) wszystkie wymienione wielkości  $A, B, H, R_1, R_2, E, \nu$  i  $Q$  są wielkościami wymiarowymi, elementami pewnej przestrzeni  $\Pi$ ,
- (2) funkcja  $F$  jest wymiarowo niezmiennicza i jednorodna,
- (3) funkcja  $F$  zależy od wielkości już wymienionych  $A, B, H, R_1, R_2, E, \nu$  i  $Q$  i tylko od tych wielkości.

Widzimy zatem, jak istotną rzeczą jest określenie wielkości, od których zależy poszukiwana funkcja. Przyjęcie innego założenia może powodować w konsekwencji uzyskanie innego wyniku.

Ponieważ wszystkie wielkości, od których uzależniona jest funkcja  $F$ , można wyrazić za pomocą dwóch jednostek kG i  $m$ , zatem mogą wystąpić najwyżej dwie wielkości wymiarowo niezależne.

Jako wielkości wymiarowo niezależne przyjmiemy  $E$  ( $\text{kG}^1 \text{m}^{-2}$ ) oraz  $H$  ( $\text{m}^1$ ). Sprawdzamy, czy rzeczywiście  $E$  i  $H$  są wymiarowo niezależne;

	kG	m
$E$	1	-2
$H$	0	1

Wyznacznik utworzony z wykładników przy wymiarach tych wielkości powinien być różny od zera, co, jak łatwo stwierdzić, rzeczywiście ma miejsce.

Funkcję (1.1) przepiszemy zgodnie z lewą stroną równania (1.3):

$$(1.4) \quad F = \Phi(E, H; A, B, R_1, R_2, \nu, Q),$$

gdzie  $E$  i  $H$  są wielkościami wymiarowo niezależnymi, a pozostałe  $A, B, R_1, R_2, \nu$  i  $Q$  są od nich wymiarowo zależne.

Wyraźmy kolejno wielkości wymiarowo zależne za pomocą wielkości wymiarowo niezależnych według (1.2). Mamy więc

$$(1.5) \quad A = \pi_1 E^{e_1} H^{h_1}.$$

Wyrażając  $A$  w układzie jednostek kG i m napiszemy

$$[\text{kG}^0 \text{m}^1] = [\text{kG}^{1e_1} \text{m}^{-2e_1} \text{m}^{1h_1}].$$

Z warunku wymagającego po obu stronach równania tych samych mian otrzymujemy

$$0 = 1e_1, \quad 1 = -2e_1 + 1h_1.$$

Rozwiązując ten układ dwóch równań otrzymujemy  $e_1 = 0$  oraz  $h_1 = 1$ . Uwzględniając obliczone wartości w wyrażeniu (1.5) mamy

$$(1.5.1) \quad \pi_1 = \frac{A}{H}.$$

Analogicznie otrzymamy

$$(1.5.2) \quad \pi_2 = \frac{B}{H}, \quad \pi_3 = \frac{R_1}{H}, \quad \pi_4 = \frac{R_2}{H}.$$

Dla wielkości  $\nu$  odpowiednio otrzymamy

$$\nu = \pi_5 E^{e_5} H^{h_5}, \quad [\text{kG}^0 \text{m}^0] = [\text{kG}^{e_5} \text{m}^{-2e_5} \text{m}^{h_5}].$$

Z porównania współczynników przy jednostkach znajdziemy

$$0 = e_5, \quad 0 = -2e_5 + h_5$$

i otrzymujemy  $e_5 = h_5 = 0$ , a stąd ostatecznie

$$(1.5.3) \quad \pi_5 = \nu.$$



Dla wielkości  $Q$  otrzymamy podobnie

$$Q = \pi_6 E^{e_6} H^{h_6}, \quad [kG^1 m^0] = [kG^{e_6} m^{-2e_6} m^{h_6}]$$

oraz układ równań

$$1 = e_6, \quad 0 = -2e_6 + h_6$$

i rozwiązanie  $e_6 = 1$  oraz  $h_6 = 2$ .

Po uwzględnieniu tego wyniku otrzymujemy

$$(1.5.4) \quad \pi_6 = \frac{Q}{EH^2}$$

Stosując twierdzenie Buckingham'a do funkcji (1.4) otrzymamy

$$F = \Phi(E, H; A, B, R_1, R_2, \nu, Q) = \varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) E^e H^h$$

Uwzględniając wcześniej obliczone wartości  $\pi_i$  znajdujemy, że

$$(1.6) \quad F = \varphi\left(\frac{A}{H}, \frac{B}{H}, \frac{R_1}{H}, \frac{R_2}{H}, \nu, \frac{Q}{EH^2}\right) E^e H^h$$

W wyrażeniu (1.6) wielkość  $\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_6)$  jest zwykłą funkcją liczbowa argumentów bezwymiarowych i nie zależy od  $E$  i  $H$ , a rzeczywiste wykładniki potęgowe  $e$  i  $h$  nie zależą od  $\pi_i$  ani od  $E$  i  $H$ . Po przedstawieniu funkcji  $F$  w postaci (1.6) i porównaniu stronami wykładników potęg przy jednostkach (wielkości  $F$ ,  $E$  i  $H$ ) otrzymamy wartości  $e$  i  $h$ :

$$[kG^0 m^1] = [kG^e m^{-2e} m^h],$$

skąd  $e = 0$  oraz  $h = 1$ . Uwzględniając obliczone wartości na  $e$  i  $h$  w (1.6) otrzymamy ostatecznie ogólny wzór na ugięcie

$$(1.7) \quad F = \varphi\left(\frac{A}{H}, \frac{B}{H}, \frac{R_1}{H}, \frac{R_2}{H}, \nu, \frac{Q}{EH^2}\right) H.$$

W analogiczny sposób można by za pomocą analizy wymiarowej znaleźć ogólne wzory np. na wartość naprężeń czy odkształceń w powłoce.

## 1.2. Ustalenie praw budowy modelu

Bezpośrednie korzystanie ze wzoru (1.7) jest utrudnione, gdyż nie jest znana w ogólnym przypadku postać wyrażenia zawartego w nawiasie ani wartość funkcji  $\varphi$ . Wzór ten będzie natomiast punktem wyjściowym przy ustaleniu praw dla modelowania powłok.

Rozpatrzmy dwa różne układy powłok. Układ pierwszy oznaczamy przez odpowiednie wielkości z jednym wskaźnikiem, a więc określony wielkościami

$$\varphi', E', H', A', B', R_1', R_2', \nu', Q', F',$$

układ drugi oznaczony będzie przez odpowiednie wielkości z dwoma wskaźnikami

$$\varphi'', E'', H'', A'', B'', R_1'', R_2'', \nu'', Q'', F''.$$

Zgodnie ze wzorem (1.7) otrzymamy dla pierwszego układu wartości ugięć

$$(1.8.1) \quad F' = \varphi' \left( \frac{A'}{H'}, \frac{B'}{H'}, \frac{R_1'}{H'}, \frac{R_2'}{H'}, \nu', \frac{Q'}{E'(H')^2} \right) H'$$

oraz dla drugiego układu

$$(1.8.2) \quad F'' = \varphi'' \left( \frac{A''}{H''}, \frac{B''}{H''}, \frac{R_1''}{H''}, \frac{R_2''}{H''}, \nu'', \frac{Q''}{E''(H'')^2} \right) H''.$$

Dążyć powinniśmy do tego, aby model (np. układ pierwszy) możliwie najbardziej zbliżał się swymi własnościami do obiektu (układ drugi), który ma odzwierciedlać. Analitycznie warunek ten spełniony będzie wówczas, gdy będziemy mogli obliczać odpowiednie wielkości (ugięcia, odkształcenia i naprężenia) w jednym i drugim obiekcie za pomocą tych samych wzorów. Uzyskamy to wówczas, gdy argumenty bezwymiarowe we wzorach (1.8.1) i (1.8.2) będą sobie odpowiednio równe

$$(1.9) \quad \frac{A'}{H'} = \frac{A''}{H''}, \quad \frac{B'}{H'} = \frac{B''}{H''}, \quad \frac{R_1'}{H'} = \frac{R_1''}{H''}, \quad \frac{R_2'}{H'} = \frac{R_2''}{H''}$$

oraz gdy

$$(1.10) \quad \nu' = \nu'', \quad \frac{Q'}{E'(H')^2} = \frac{Q''}{E''(H'')^2}.$$

Gdyby się udało spełnić wszystkie te związki, wówczas otrzymalibyśmy

$$(1.11) \quad \varphi' = \varphi''$$

i ugięcia w obu obiektach spełniałyby warunek

$$\frac{F'}{F''} = \frac{H'}{H''}.$$

Spełnienie jednak wszystkich związków (1.9) i (1.10) może okazać się w praktyce laboratoryjnej wręcz niemożliwe i zresztą dla otrzymania poszukiwanego rezultatu nie potrzebne.

Przeprowadzimy analizę związków (1.9) i (1.10). Cztery pierwsze zależności (1.9) wskazują na to, że powinno być zachowane geometryczne podobieństwo modelu do obiektu. Warunki te mogą być napisane w postaci

$$(1.12) \quad \frac{H'}{H''} = \frac{A'}{A''} = \frac{B'}{B''} = \frac{R_1'}{R_1''} = \frac{R_2'}{R_2''}.$$

Warunek następny przedstawia się w postaci

$$\nu' = \nu'',$$

przy zastosowaniu różnych materiałów w obiekcie rzeczywistym i modelu będzie z reguły niespełniony. W praktyce, aby móc w prosty sposób przenieść pomierzone wartości z modelu o dowolnym kształcie na obiekt rzeczywisty, pomija się zwykle wpływ współczynnika Poissona na wielkości statyczne (siły, odkształcenia) przyjmując

$$(1.13) \quad \nu = 0.$$

Założenie (1.13) przyjmować musimy z konieczności przy powłokach, których teoretycznie rozwiązać nie jesteśmy w stanie, natomiast przy powłokach prostych jak np. przy kopułach obrotowych lub sklepieniach cylindrycznych wpływ współczynnika Poissona może być uwzględniony.

Założenie geometrycznego podobieństwa modelu do obiektu upoważnia do redukcji ilości parametrów wpływających na pracę modelu. I tak zamiast ośmiu wielkości wpływających na odkształcenia modelu (1.4) otrzymamy tylko cztery

$$(1.14) \quad F = \Phi(EL; \nu, Q),$$

gdzie wymiar  $L$  wyraża wielkości geometryczne modelu. Przy uwzględnieniu czterech parametrów  $E$ ,  $L$ ,  $\nu$  i  $Q$  wzór (1.7) przyjmie postać

$$(1.15.1) \quad F = \varphi\left(\nu, \frac{Q}{EL^2}\right)L,$$

a przy pominięciu współczynnika Poissona uprości się jeszcze bardziej

$$(1.15.2) \quad F = \varphi\left(\frac{Q}{EL^2}\right)L.$$

Stosowanie wzoru (1.15.2) do przeniesienia pomiarów ugięć otrzymanych z modelu na obiekt rzeczywisty jest już bardzo proste.

Wykorzystując (1.11) otrzymamy

$$(1.16) \quad \frac{F'}{F''} = \frac{\varphi'\left(\frac{Q'}{E'(L')^2}\right) L'}{\varphi''\left(\frac{Q''}{E''(L'')^2}\right) L''},$$

skąd  $F'' = k_1 F'$ , gdzie

$$k_1 = \frac{\varphi'\left(\frac{Q'}{E'(L')^2}\right) L'}{\varphi''\left(\frac{Q''}{E''(L'')^2}\right) L''}.$$

W analogiczny sposób możemy obliczyć wskaźniki  $k_i$ , dzięki którym można znaleźć wprost wielkości statyczne w obiekcie rzeczywistym na podstawie znalezionych wcześniej na modelu (por. [5]).

Przy wykonaniu modelu sklepienia mogą powstać techniczne trudności w uzyskaniu całkowitej zgodności geometrycznej. Chodzi przede wszystkim o wykonanie modelu powłoki  $H$  o grubości w tej samej skali co i pozostałe wymiary, które ogólnie oznaczamy jedną wielkością  $L$ . Może to mieć miejsce przy wykonywaniu cienkiej powłoki z gipsu lub betonu albo przy zastosowaniu materiałów w arkuszach, gdy liczyć się należy z asortymentem wykonanym fabrycznie (np. różnego rodzaju blachy, celuloid i plexiglas w arkuszach itp.). Wtedy będziemy mieli dwie wielkości określające wymiary powłoki: powierzchnię środkową, którą określa wielkość  $L$  oraz grubość powłoki  $H$ .

Odpowiednio funkcja określająca ugięcia będzie miała postać

$$(1.17) \quad F = \Phi(E, L; \nu, Q, H) = \varphi \left( \nu, \frac{Q}{EL^2}, \frac{H}{L} \right) L.$$

Zastosowanie przeniesienia modelowego napotyka oczywiście w tym ostatnim przypadku na większe trudności.

### 1.3. Ustalenie praw modelowych powłok w przypadku badania stateczności

1.3.1. Przypadek pręta prostego. Na wstępie wyprowadźmy ogólny wzór na wielkość siły krytycznej dla pręta prostego przyrządkowego ściskającego osiowo (rys. 2a). Wielkość siły krytycznej  $P_{kr}$  zależy od długości pręta  $L$ , momentu bezwładności jego przekroju poprzecznego  $J$ , współczynnika sprężystości podłużnej  $E$ , współczynnika Poissona  $\nu$  oraz warunków podparcia. Wartość zatem siły krytycznej określa funkcja

$$(1.18) \quad P_{kr} = \Theta(E, L; \nu, J),$$

gdzie przyjęliśmy jako wielkości wymiarowo niezależne  $E$  i  $L$  oraz wymiarowo zależne  $J$  i  $\nu$ . Wyrażając wielkości  $\nu$  i  $J$  przez wymiarowo niezależne  $E$  i  $L$  otrzymamy

$$(1.18.1) \quad \pi_1 = \nu, \quad \pi_2 = \frac{J}{L^4}.$$

Korzystając z twierdzenia  $(\pi)$  otrzymujemy po uwzględnieniu (1.18.1)

$$(1.18.2) \quad P_{kr} = \vartheta(\pi_1, \pi_2) E^e L^l = \vartheta \left( \nu, \frac{J}{L^4} \right) E^e L^l.$$

Uwzględniając warunek takiego samego miana po obu stronach równania otrzymujemy

$$[kG^1] = [kG^e m^{-2e} m^l],$$

a stąd znajdujemy, że  $e = 1$  oraz  $l = 2$ . Ostatecznie zatem wartość siły krytycznej określa wzór

$$(1.19) \quad P_{kr} = \vartheta \left( \nu, \frac{J}{L^4} \right) E L^2.$$

Przy pominięciu współczynnika Poissona wzór (1.19) sprowadza się do podstawowego wzoru Eulera dla pręta pryzmatycznego ściskanego osiowo

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E J}{(\mu L)^2},$$

gdzie  $\mu$  określa warunki podparcia pręta.

Rozumowanie to możemy powtórzyć dla przykładu, gdy pręt pryzmatyczny obciążony jest na końcach w sposób ciągły i równomierny siłami działającymi równoległe do osi pręta (rys. 2b). Wartość obciążenia krytycznego zależy od tych samych parametrów, jakie były rozważane poprzednio:

$$(1.20) \quad \sigma_{kr} = v(E, L; \nu, L) = v \left( \nu, \frac{J}{L^4} \right) E^e L^l.$$

Stąd otrzymujemy  $e = 1$  oraz  $l = 0$ .

Ostatecznie zatem obciążenie krytyczne określa wzór

$$(1.21) \quad \sigma_{kr} = v \left( \nu, \frac{J}{L^4} \right) E.$$

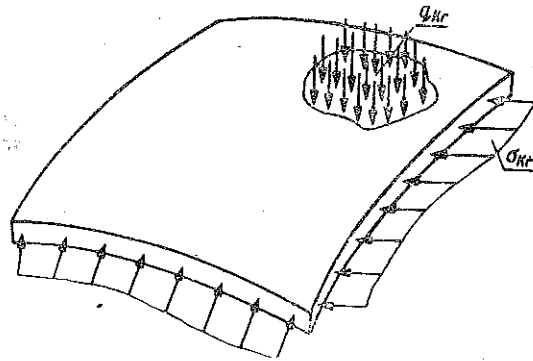
### 1.3.2. Przypadek powłoki.

W celu uzyskania prostego wyniku, który będzie wykorzystany dalej, przyjmiemy, że wymiary modelu określa jedna wielkość  $L$ . Parametrami, od których zależy wartość obciążenia krytycznego  $q_{kr}$  rozłożonego ciągle i równomiernie po powierzchni powłoki, będą  $E$ ,  $L$  i  $\nu$ :

$$(1.22.1) \quad q_{kr} = \Psi(E, L; \nu) = \psi(\nu) E^e L^l.$$

Ostatecznie otrzymujemy prostą zależność  $e = 1$  oraz  $l = 0$

$$(1.22.2) \quad q_{kr} = \psi(\nu) E.$$



Rys. 3

Przy zachowaniu podobieństwa geometrycznego oraz pominięciu wpływu współczynnika Poissona przeniesienie modelowe dla określenia obciążenia krytycznego dla powłoki ma postać

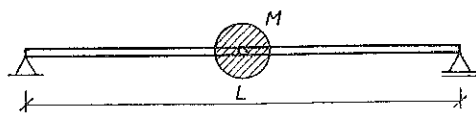
$$(1.23) \quad q''_{kr} = q'_{kr} \frac{E''}{E'}$$

gdzie jak w p. 1.2 odpowiednie wielkości określające model oznaczone są pojedynczym, a określające obiekt podwójnym wskaźnikiem. Ze wzoru (1.23) wynika, że przy zastosowaniu tego samego materiału oraz zachowaniu podobieństwa geometrycznego obciążenie krytyczne działające na jednostkę powierzchni powłoki  $q_{kr}$  ma stałą wartość bez względu na wielkość obiektu.

#### 1.4. Ustalenie praw dla modelowania powłok w przypadku badania drgań

1.4.1. Przypadek pręta prostego. Rozważymy na wstępie przypadek pręta statycznie wyznaczalnego opartego na dwóch podporach i obciążonego masą  $M$  (rys. 4).

Wymiar długości pręta oraz położenie masy określa wielkość  $L$ , przekrój (moment bezwładności)  $J$  oraz stałe materiałowe  $E$  i  $\nu$ . Przyjmuje-



Rys. 4

my, że na częstotliwość drgań własnych układu  $n$  mają wpływ parametry  $E$ ,  $L$ ,  $J$ ,  $\nu$  i  $M$ , czyli że

$$(1.24) \quad n = \mathcal{H}(E, L, J, \nu, M).$$

Wielkości te wyrazimy w układzie jednostek C G S, czyli

$$(1.24.1) \quad \begin{cases} E = [g^1 \text{ cm}^{-1} \text{ sek}^{-2}], & L = [\text{cm}^1], & J = [\text{cm}^4], \\ \nu = [g^0 \text{ cm}^0 \text{ sek}^0], & M = [g^1], & n = [\text{sek}^{-1}]. \end{cases}$$

Jako wielkości wymiarowo niezależne przyjmiemy  $E$ ,  $L$  i  $M$ .

Wyznacznik utworzony z wykładników przy miarach tych jednostek nie równa się zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Wzór (1.24) przepiszemy w postaci

$$n = \mathcal{H}(E, L, M; \nu, J).$$

Wyrażając wielkości wymiarowo zależne  $\nu$  i  $J$  przez wymiarowo niezależne otrzymamy

$$\pi_1 = \nu, \quad \pi_2 = \frac{J}{L^4}.$$

Stosując twierdzenie ( $\pi$ ) otrzymamy

$$(1.24.2) \quad n = \varkappa c \left( \nu, \frac{J}{L^4} \right) E^e L^l M^m.$$

Z warunku zachowania tego samego miana po obu stronach równania otrzymamy

$$[\text{sek}^{-1}] = [\text{g}^e \text{cm}^{-e} \text{sek}^{-2e} \text{cm}^l \text{g}^m],$$

co prowadzi do układu równań

$$0 = e + m, \quad 0 = -e + l, \quad -1 = -2e,$$

którego rozwiązaniem jest

$$(1.24.3) \quad e = 1/2, \quad m = -1/2, \quad l = 1/2.$$

Uwzględniając (1.24.3) we wzorze (1.24.2) znajdziemy postać równania (1.24):

$$(1.25.1) \quad n = \varkappa c \left( \nu, \frac{J}{L^4} \right) \sqrt{\frac{EL}{M}}.$$

W przypadku gdyby wszystkie wymiary geometryczne określała wielkość  $L$ , wzór (1.25.1) uprości się do postaci

$$(1.26) \quad n = \varkappa c(\nu) \sqrt{\frac{EL}{M}}.$$

Porównując znany wzór określający częstotliwość drgań własnych pręta obciążonego masą  $M$  po środku (w jednostce czasu)

$$(1.27) \quad n^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48EJ}{ML^3}}$$

widzimy, że wzór (1.25.1) można sprowadzić do postaci (1.27) przy pominięciu współczynnika Poissona ( $\nu = 0$ ) oraz przy podniesieniu wielkości bezwymiarowej w nawiasie do potęgi  $1/2$ .

Otrzymamy wówczas

$$(1.25.2) \quad n = \varkappa c \left( \frac{J}{L^4} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{EL}{M}} = \varkappa c \sqrt{\frac{EJ}{ML^3}}.$$

Wzór (1.25.1) jest uogólnieniem (1.27).

**1.4.2. Przypadek powłoki.** W przypadku powłoki, która nie ma żadnego innego obciążenia tylko ciężar własny, obliczymy częstotliwość drgań własnych w zależności od masy przypadającej na jednostkę objętości powłoki  $\mu = [\text{g}^1 \text{cm}^{-3}]$ . Wtedy

$$n = \Theta(E, L, \mu; \nu).$$

Przyjmując jak wyżej za wielkości wymiarowe niezależne  $E$ ,  $L$  i  $\mu$  otrzymamy

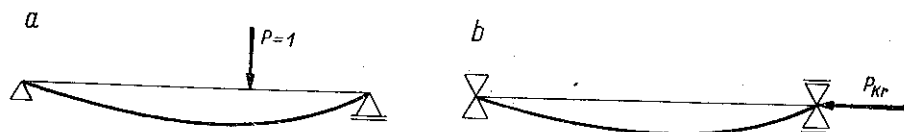
$$(1.28) \quad n = \vartheta(\nu) \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

Analizując (1.28) widzimy, że częstotliwość drgań dwóch różnych modeli powłok wykonanych z tego samego materiału przy zachowaniu podobieństwa postaci jest odwrotnie proporcjonalna do wymiarów liniowych.

## 2. WYBOCZENIE POWŁOK CIENKOŚCIENNYCH

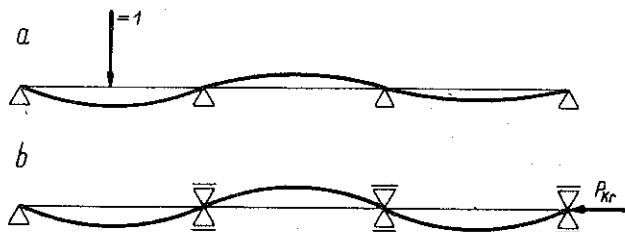
### 2.1. Przyjęcie czynnika wybozczającego układ

Wobec trudności obliczeń projektowanie pokryć cienkościennych w ogromnej większości odbywa się na podstawie teorii błonowej, wykluczającej powstawanie momentów zginających w powłoce. Założenie takie niezwykle upraszczające rachunek stawia pod znakiem zapytania otrzymane wyniki, tym bardziej że obliczone w ten sposób naprężenia w skle-



Rys. 5

pieniach żelbetowych mieszczą się przeważnie w granicach 5 - 10 kG/cm<sup>2</sup>, skąd wynika, że bezpieczeństwo konstrukcji nie zależy od warunku wytrzymałości i że decydującym czynnikiem powinien być warunek stateczności.

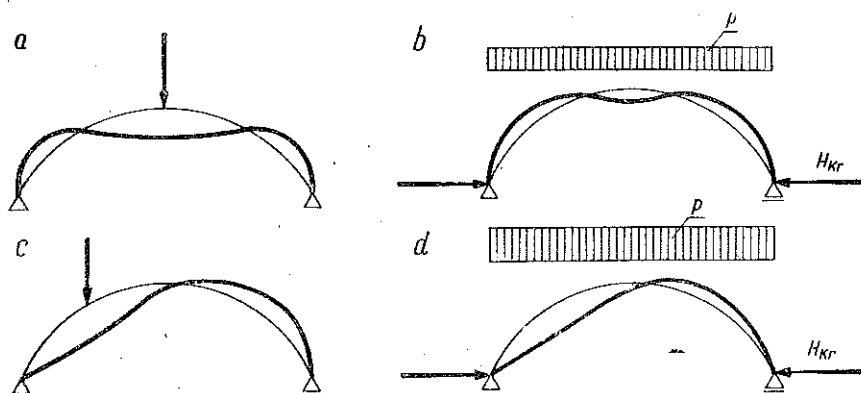


Rys. 6

Aby obliczyć obciążenie krytyczne powłoki, trzeba znać rozkład naprężeń przed wybočeniem w stanie membranowym oraz postać wyboczenia. W celu uproszczenia przyjmuje się bowiem zwykle, że przy obciążeniu zewnętrznym mniejszym od krytycznego nie powstają w powłoce zginania, a dopiero wskutek przekroczenia przez obciążenie wartości krytycznej poszczególne punkty powłoki doznają przesunięć.



Ponieważ teoretycznie w elemencie ściskanym osiowo nie ma przyczyn do jego wygięcia, uwzględnić trzeba działanie pewnego czynnika zakrzywiającego.



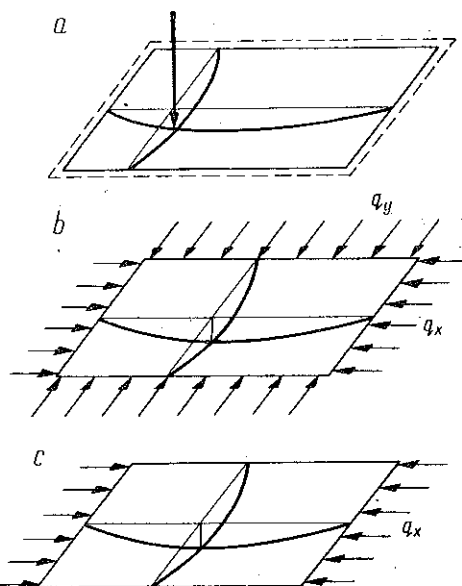
Rys. 7

Przy dalszych rozważaniach jako chwilową przyczynę zakrzywiającą oberzemy działanie siły skupionej.

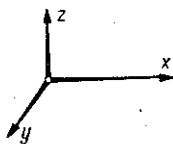
Rozważmy swobodnie podparty pręt prosty obciążony prostopadłą siłą skupioną (rys. 5a). Charakter odkształcenia pręta jest zbliżony do postaci utraty stateczności (rys. 5b).

Wygięcie pręta prostego opartego na kilku podporach pod działaniem siły w lewym przęśle podaje rys. 6a. Charakter odkształcenia jest znowu podobny do postaci utraty stateczności (rys. 6b).

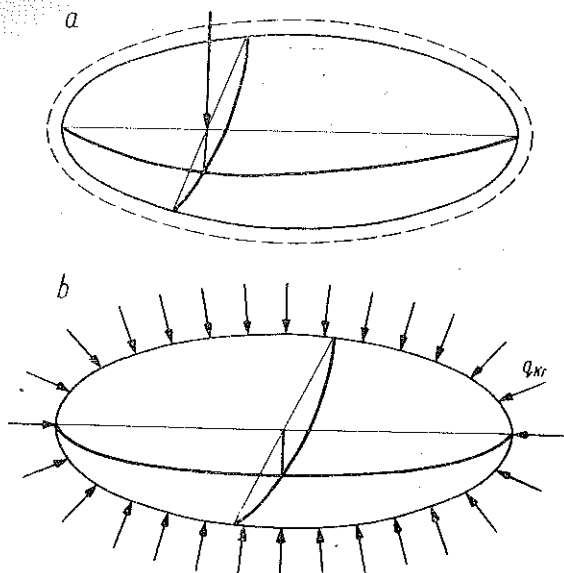
W łukach płaskich odróżnimy dwie różne postaci odkształcenia: symetryczną i antysymetryczną względem zwrotnika. Otrzymamy je obciążając łuk siłą skupioną w zwrotniku oraz na części bocznej łuku (np. w 1/4 rozpiętości łuku). Charakter odkształcenia oraz odpowiednie postacie wyboczenia podane są na rys. 7.



Rys. 8



Obciążmy płytę prostokątną (o niezbyt wielkiej różnicy długości pomiędzy bokami  $a$  i  $b$ ) prostopadłą do jej powierzchni siłą skupioną (rys. 8a). Charakter odkształcenia odpowiada postaci wybożenia płyty obciążonej siłami normalnymi zaczepionymi na obwodzie (rys. 8b i 8c). Odpowiednie



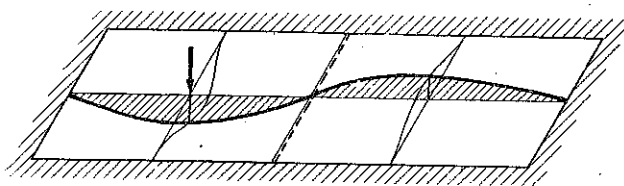
Rys. 9

postacie odkształcenia dla płyty okrągłej podano na rys. 9. Postać wybożenia dla płyty ciągłej utwierdzonej na obwodzie przedstawia rys. 10.

Na podstawie powyższej analizy układów prostych (belek, łuków i płyt), których postać wybożenia jest dobrze znana, oraz wyników badań modelowych nad powłokami przyjął autor założenie, że postać wybożenia układu ma charakter podobny do odkształcenia tego układu pod działaniem siły skupionej. Miejsce zaczepienia

siły skupionej jest zasadniczo dowolne. W przypadkach wątpliwych należy rozważyć odkształcenia układu pod działaniem siły zaczepionej w charakterystycznych punktach (rys. 7a i 7c).

Odkształceń sklepień cylindrycznych i kopuł obrotowych oraz ich postaci wybożenia nie będziemy rozważali w tej pracy. Zagadnienia te były tematem oddzielnych prac autora (por. [17]).



Rys. 10

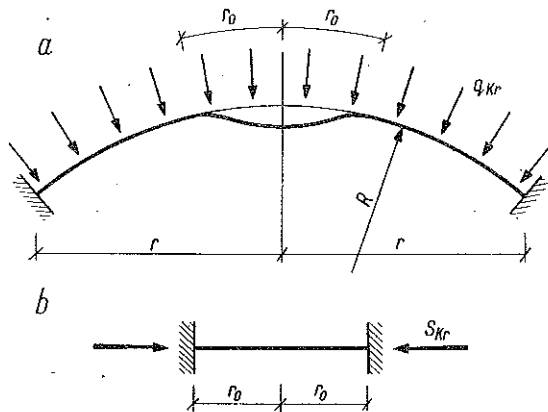
## 2.2. Analiza znanych rozwiązań określających wartość obciążenia krytycznego w kopułach

Wybożenie kopuły kulistej występuje zgodnie z naszym założeniem w postaci niecki ograniczonej promieniem  $r_0$  (rys. 11). Wielkość promienia  $r_0$  znaleziona na podstawie obliczenia ugięć kopuły obciążonej siłą skupioną wynosi, [17],

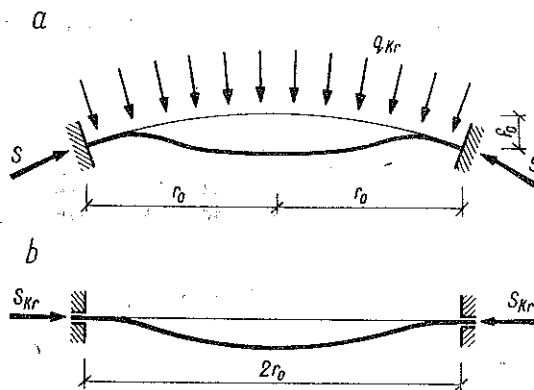
$$(2.1) \quad r_0 = 5 \sqrt[4]{\frac{h^2 R^2}{12(1-\nu^2)}}$$

Zagadnienie sprowadzimy w celu uproszczenia do rozważenia płyty okrągłej utwierdzonej na obwodzie, poddanej obciążeniu  $S$  skierowanemu radialnie do środka płyty (rys. 12). Obciążenie  $S_{kr}$  obliczymy ze wzoru

$$S_{kr} = \frac{14,68 D}{r_0^2}.$$



Rys. 11



Rys. 12

Znając wartość sił wewnętrznych wyznaczmy wielkość obciążenia krytycznego w kopule:

$$(2.2) \quad q_{kr} = \frac{S_{kr}}{0,5R} = \frac{14,68 D}{0,5 R r_0^2} = E \frac{h^2}{R^2} \frac{0,587}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}.$$

Przy pominięciu współczynnika Poissona wzór uprości się

$$(2.3) \quad q_{kr} = 0,339 E \frac{h^2}{R^2}.$$

Porównując go ze znanym wzorem Zoelly'ego, [4],

$$(2.4) \quad q_{kr} = E \frac{h^2}{R^2} \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \approx 1,155 E \frac{h^2}{R^2}$$

widzimy, że różnicę wartości obliczoną na podstawie obu wzorów określa stosunek  $2 : 0,587 = 3,4$ . Rezultat ten zgadza się z wynikami doświadczeń radzieckich, które stwierdzają, że rzeczywiste obserwowane obciążenie krytyczne jest 2 do 4 razy mniejsze od obliczonego według Zoelly'ego.

Th. Kármán i Hsue-Shen-Tsien, [10], pierwsi podali wartość obciążenia krytycznego dla kopuły wychodząc z miejscowej utraty stateczności i otrzymali współczynnik niemianowany we wzorze (2.4) równy 0,366.

Współczynnik uzyskany we wzorze (2.3) zgadza się z obliczeniami H. M. Musztariego i R. G. Surkina, [13], którzy określają go na 0,33. Wychodząc z niecki zagłębienia (a więc postępując podobnie jak autor) W. M. Fieodosiew obliczył wielkość obciążenia krytycznego, [9], i określił wartość współczynnika na 0,26 (różnica wynika wskutek zastosowania innej metody obliczeń; wartość promienia  $r_0$  została obliczona metodą różnic skończonych). W tej samej pracy Fieodosiew podaje, że w warunkach laboratoryjnych osiąga się wartości obciążenia krytycznego określonego współczynnikiem 0,32 (a więc bliskim naszego wyniku). W produkcji natomiast w warunkach eksploatacji otrzymujemy tylko 0,20.

Należy pamiętać, że obliczona (na podstawie rozważań teoretycznych) wielkość obciążenia krytycznego powoduje wyboczenie kopuły, dlatego przy projektowaniu trzeba uwzględnić odpowiedni zapas bezpieczeństwa.

Dla żelbetowych kopuł cienkościennych E. Torroja określa wartość współczynnika we wzorze tylko na 0,069, a P. Csonka na 0,05, [8]. Dwie ostatnio wymienione prace wskazują, że w stosunku do żelbetowych przykryć cienkościennych należy zachować bardzo dużą ostrożność i stosować wysokie współczynniki bezpieczeństwa. Autor nie ma jednak obserwacji własnych dla wypowiedzenia się, czy rzeczywiście żelbetowa powłoka wyboczyć się może przy tylokrotnie niższym obciążeniu niż uzyskanym w laboratorium (wprawdzie przy użyciu materiałów elastycznych).

### 2.3. Zastosowanie badań modelowych do określenia wyboczenia dowolnej powłoki

Potwierdzenie się naszego założenia, że postać wyboczenia układu występuje zgodnie z charakterem odkształceń tego układu pod działaniem siły skupionej, upoważnia do przypuszczeń, że jest ono słuszne nie tylko dla rozważanych dotychczas powłok cylindrycznych i kopuł kulistych, ale i dla sklepień konoidalnych, siodłowych, kopuł eliptycznych itp. Są-

dzimy, że na tym założeniu będzie można oprzeć badania postaci wyboczenia, a po jej określeniu przejść do obliczenia obciążenia krytycznego wychodząc z naprężeń obliczonych według stanu błonowego.

W przypadku rozważania powłoki, której ugięcia nie potrafimy obliczyć na drodze teoretycznej, posłużyć się możemy badaniami modelowymi oraz określić doświadczalnie charakter odkształcenia. Po ustaleniu niecki wgłębienia pod działaniem siły skupionej, zaczepionej kolejno w charakterystycznych punktach, należy następnie przejść do obliczenia sił wewnętrznych według stanu błonowego. Rozkład sił wewnętrznych pozwoli ustalić, w jakim miejscu należy spodziewać się najprędzej utraty stateczności powłoki i dla niego należy rozważyć warunek stateczności.

W przypadku powłok, dla których obliczenie sił wewnętrznych nawet w stanie błonowym napotyka na trudności, znaleźć możemy wartość obciążenia krytycznego wyłącznie na podstawie badań modelowych.

Oprzemy się tutaj na prawach wyprowadzonych w rozdziale pierwszym dla modeli. Dla uzyskania możliwie prostych zależności jako zasadę przyjmiemy, że model będzie wykonany z zachowaniem podobieństwa geometrycznego oraz warunków brzegowych (tzn. w rozumieniu analizy wymiarowej wymiary ustroju określać będzie tylko jedna wielkość  $L$ ), a cechy materiałowe określać będzie tylko jedna wielkość  $E$  (przy pominięciu współczynnika Poissona  $\nu$ ).

**2.3.1. Odpowiedniość modelowa dotycząca ugięć.** Za pomocą analizy wymiarowej znaleźliśmy w p. 1.2 związek (1.16) dotyczący ugięć  $F$ .

We wzorze tym pojedynczym indeksem oznaczono odpowiednie wielkości określające układ pierwszy (np. model), a dwoma indeksami układ drugi (np. obiekt rzeczywisty).

Ograniczając się do obciążeń, które powodują odkształcenia wyłącznie sprężyste, oraz zakładając liniową sprężystość materiału, przyjąć można, że ugięcie  $F$  zależy w sposób liniowy od wielkości działającego obciążenia  $Q$ , czyli że wykładnik potęgi w nawiasie przy  $Q$  musi być równy 1. Zależność ta pozwoli na uproszczenie wzoru (1.15.2):

$$(2.5) \quad F = \varphi \left( \frac{Q}{EL^2} \right) L = \varphi \left( \frac{Q}{EL} \right) L$$

Zatem stosunek ugięć układu pierwszego do drugiego (wykonanych według zasad wyżej określonych) określi na podstawie (2.5) zależność

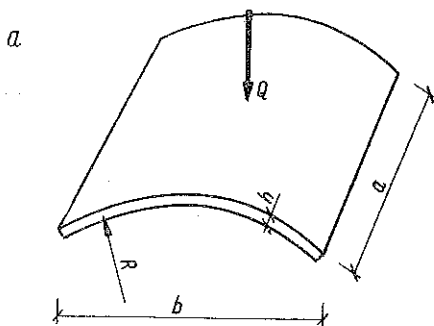
$$(2.6) \quad \frac{F'}{F''} = \frac{Q'}{Q''} \frac{E'' L''}{E' L'}$$

W celu sprawdzenia zależności (2.6) wykonano trzy modele powłoki cylindrycznej (oznaczenia podano na rys. 13).

Tablica 1

Układ	Materiał	$E$ (kG/cm <sup>2</sup> )	$a$ (cm)	$b$ (cm)	$h$ (cm)	$R$ (cm)	$Q$ (kG)
I	celuloid	27 000	14	28	0,08	10	1
II	celuloid	27 000	28	56	0,15	20	1
III	plexiglas	41 000	14	28	0,08	10	1

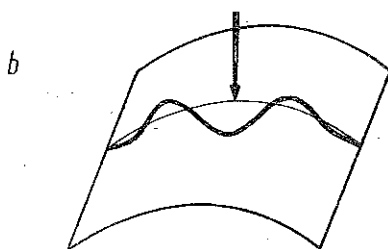
Na podstawie wzoru (2.6) znajdziemy stosunki ugięć



$$\frac{F'}{F''} = \frac{Q'}{Q''} \frac{E'' L''}{E' L'} = 2$$

oraz

$$\frac{F'}{F'''} = \frac{Q'}{Q'''} \frac{E''' L'''}{E' L'} = 1,52.$$



Rys. 13

Pomiary odkształceń wykonano metodą optyczną, [25], oraz precyzyjnym czujnikiem zegarowym TESA (podziałka 0,002 mm). Doświadczalnie stwierdzono, że charakter odkształcenia we wszystkich trzech modelach był taki sam (uformowało się 5 półfal według rys. 13b). Średnie stosunki ugięć odpowiednich modeli wynosiły  $F'/F'' = 2,2$  oraz  $F'/F''' = 1,4$ , co jest potwierdzeniem wartości otrzymanych teoretycznie w granicach 10%.  
 Pomiary odkształceń wykonano metodą optyczną, [25], oraz precyzyjnym czujnikiem zegarowym TESA (podziałka 0,002 mm). Doświadczalnie stwierdzono, że charakter odkształcenia we wszystkich trzech modelach był taki sam (uformowało się 5 półfal według rys. 13b). Średnie stosunki ugięć odpowiednich modeli wynosiły  $F'/F'' = 2,2$  oraz  $F'/F''' = 1,4$ , co jest potwierdzeniem wartości otrzymanych teoretycznie w granicach 10%.

2.3.2. Odpowiedniość modelowa dotycząca wybożenia. Przyjmując że model określają wielkości  $E$ ,  $L$  i  $\nu$  otrzymaliśmy w części pierwszej zależność (1.22.2) na wartość obciążenia krytycznego działającego na jednostkę powierzchni  $q_{kr} = \psi(\nu)E$ . Przy pominięciu współczynnika Poissona  $\nu$  otrzymujemy bardzo proste przeniesienie modelowe

$$(2.7) \quad \frac{q'_{kr}}{q''_{kr}} = \frac{E'}{E''}.$$

W celu sprawdzenia zależności (2.7) wykonano trzy modele powłoki cylindrycznej (rys. 14) w kształcie walca zamkniętego. Obciążenie stanowiła różnica ciśnień powietrza.

Walec wybacza się, przy czym tworzy się czternaście półfal. Zmierzone ciśnienie krytyczne (w cm słupa rtęci) podane zostało w ostatniej rubryce tablicy 2.

Tablica 2

Układ	Materiał	$E$ (kG/cm <sup>2</sup> )	$a$ (cm)	$h$ (cm)	$R$ (cm)	Ilość fal	$q_{kr}$
I	celuloid	27 000	20	0,15	15	7	17 cm*
II	celuloid	27 000	13,3	0,10	10	7	20 cm
III	plexiglas	41 000	13,3	0,10	10	7	28 cm

\* cm słupa rtęci

Podstawiając otrzymane dane do (2.7) otrzymujemy stosunki obciążeń

$$\frac{q'_{kr}}{q''_{kr}} = 0,85, \quad \frac{q'_{kr}}{q'''_{kr}} = 0,61.$$

Doświadczalnie otrzymane różnice mieszczą się więc w granicach 15%.

Znając postać wybożenia powłoki cylindrycznej obliczmy w przybliżeniu wartość obciążenia krytycznego, zastępując powłokę schematem płyty o podobnych warunkach brzegowych. Wymiary płyty określają  $h$  i  $a$  oraz długość półfali  $L$ . Cylinder na rys. 14a ograniczają sztywne tarcze, które przeciwstawiają się odkształceniom powłoki nie przenosząc natomiast sił osiowych działających wzdłuż tworzącej powłoki. Zastępczym schematem będzie zatem płyta prostokątna o wymiarach  $a \times L$  i grubości  $h$  utwierdzona wzdłuż krawędzi  $L$  oraz podparta przegubowo i obciążona siłami osiowymi  $S_{kr}$  na krawędzi  $a$  (rys. 15).

*Przykład 1.* Obliczyć wartość obciążenia krytycznego  $q_{kr}$  dla powłoki cylindrycznej według zastępczego schematu płyty prostokątnej podanej na rys. 15.

Przyjęto dane według układu pierwszego, podanego w tablicy 2:

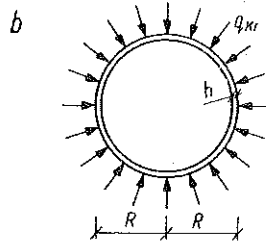
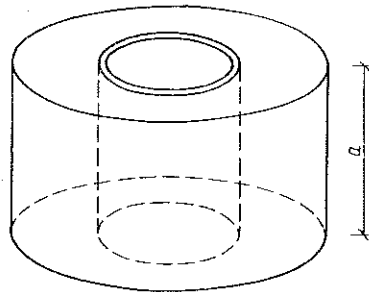
$$a = 20 \text{ cm}, \quad L = \frac{2\pi R}{2.7} = 6,72 \text{ cm}, \quad h = 0,15 \text{ cm}, \quad E = 27\,000 \text{ kG/cm}^2.$$

Skorzystamy ze wzoru podanego dla płyty opartej na wszystkich krawędziach przegubowo (por. [18]):

$$(2.8) \quad S_{kr} = \frac{\pi^2 D}{L^2} \left( 1 + \frac{L^2}{a^2} \right)^2.$$

Przyjmując  $\nu = 0,2$  otrzymujemy, że sztywność płyty  $D = 7,93 \text{ kGcm}$ . Ze wzoru (2.8) otrzymamy, że

$$S_{kr} = \frac{3,14^2 \cdot 7,93}{6,72^2} \left( 1 + \frac{6,72^2}{20^2} \right)^2 = 2,14 \text{ kG/cm}.$$

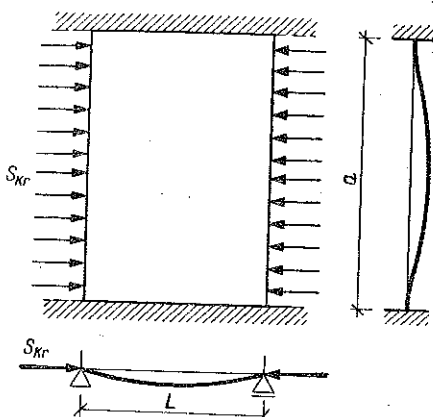


Rys. 14

Wartość obciążenia krytycznego  $q_{kr}$  działającego normalnie na powierzchnię powłoki (rys. 14b) znajdziemy w przybliżeniu, tak jak dla pierścienia kolistego o szerokości  $a = 1$  cm:

$$q_{hr} = \frac{S'_{kr}}{R} = \frac{2,14}{15} = 0,143 \text{ kG/cm}^2.$$

Porównując powyższe z wynikiem doświadczenia (17 cm słupa rżęci odpowiada 0,258 at) widzimy, że rzeczywista wartość obciążenia krytycz-



Rys. 15

nego jest wprawdzie o 80% większa, jest jednak wynikiem przyjęcia do obliczeń schematu płyty opartej przegubowo, a nie sztywno utwierdzonej na dwóch krótszych krawędziach, co bardziej odpowiada wykonanemu modelowi powłoki.

Po sprawdzeniu doświadczalnym przeniesienia modelowego ugięć (2.6) oraz obciążenia krytycznego (2.7) dla przypadku powłok cylindrycznych będziemy mogli przejść do rozpatrzenia powłok bardziej skomplikowanych.

**2.3.3. Odpowiedniość modelowa wyboczenia (wartości obciążenia krytycznego).** Skorzystamy tu ze wzoru autora (2.3) określającego wartość obciążenia krytycznego dla kopuł kulistych

$$q_{hr} = 0,339 E \frac{h^2}{R^2}.$$

Oznaczając odpowiednio układ pierwszy jednym indeksem, a układ drugi dwoma otrzymamy stosunki obciążeń

$$(2.9) \quad \frac{q'_{kr}}{q_{kr}} = \frac{E''}{E'} \frac{(h'')^2 (R')^2}{(h')^2 (R'')^2},$$

gdzie  $h$  oznacza grubość powłoki, a  $R$  promień krzywizny.

Przy zachowaniu podobieństwa geometrycznego obu obiektów otrzymamy w przypadku kopuł kulistych warunek

$$(2.9.1) \quad h''/h' = R''/R'.$$

Uwzględniając (2.9.1) we wzorze (2.9) otrzymujemy niezwykle prostą zależność

$$(2.10) \quad q'_{kr}/q_{kr} = E''/E'.$$

Wynik ten jest zgodny z zależnością otrzymaną za pomocą analizy wymiarowej (1.23).



### 3. DRGANIA POWŁOK CIENKOCIENNYCH

Jak już nadmieniliśmy, zagadnienie drgań układów przestrzennych: ram, płyt, rusztów i powłok nabiera w budownictwie, zwłaszcza przemysłowym, szczególnego znaczenia. Możliwość określenia maksymalnych wychyleń i częstotliwości rezonansowych układu pozwala lepiej zaprojektować konstrukcję w celu zabezpieczenia jej od bezpośrednich czy też pośrednich wpływów uderzeń dynamicznych (np. za pośrednictwem fundamentów). Czynnikiem wzbudzającym drgania będzie najczęściej nie-zrównoważona praca maszyn oraz wpływ wstrząsów wywołanych przez pojazdy mechaniczne.

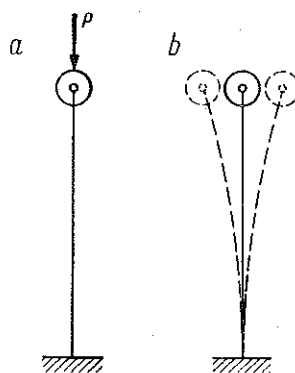
Pierwsze prace autora dotyczące drgań rozpoczęte były w roku 1952 w Zakładzie Elektroakustyki Politechniki Warszawskiej, [19], a następnie prowadzone w Zakładzie Badania Drgań Instytutu Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk w Warszawie oraz w Laboratorium Modelowym Pracowni Teorii Konstrukcji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych Polskiej Akademii Nauk w Krakowie, [20].

Celem naszym będzie określenie postaci oraz częstotliwości drgań własnych powłok w oparciu o wyniki badań modeli.

Drgania układu są ściśle związane z jego postacią wyboczenia. Wydaje się, że *S o m m e r f e l d* był pierwszym uczonym, który w roku 1905 powiązał praktycznie wyboczenie układu z drganiami i obliczał wielkość obciążenia krytycznego pręta (rys. 16) wychodząc z częstotliwości jego drgań własnych. W miarę wzrostu obciążenia (siły  $P$ ) częstotliwość drgań maleje i dąży do zera, gdy siła zbliża się do obciążenia krytycznego, [22]. W dalszym ciągu uczynimy pewne założenie wiążące ze sobą postacie drgań układu z jego postacią wyboczenia i opierać się będziemy na materiale przedstawionym w p. 1 i 2.

#### 3.1. Określenie podstawowej postaci drgań układu

Na podstawie rozważań teoretycznych nad układami belkowymi, ramowymi i płytami oraz pomiarów drgań na modelach powłok autor sformułował założenie wiążące wyboczenie układu z jego postacią drgań. Według tego założenia *pierwsza najniższa (podstawowa) postać drgań układu jest zgodna z postacią wyboczenia tego układu*. Jeżeli uzupełnimy drugie założenie pierwszym (podanym w p. 2.1), to dojdziemy do wniosku, że jeżeli potrafimy określić odkształcenie układu pod działaniem siły skupionej, to znana będzie zarazem podstawowa postać drgań tego układu.

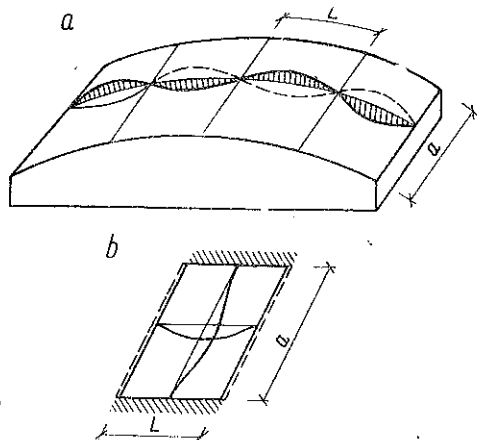


Rys. 16

Nie będziemy tutaj powtarzali rozważań przytoczonych w p. 2.1 przy omawianiu zagadnienia wybożenia, podkreślimy tylko, że rys. 5 i 6 charakteryzują zarazem postać drgań podstawowych belek, rys. 7 łuków oraz rys. 8 i 9 postać płyt. Obecnie przejdziemy do rozważenia drgań powłok.

### 3.2. Drgania powłok cylindrycznych

Drgania krótkich sklepień cylindrycznych występują w postaci fal rozłożonych wzdłuż krzywizny powłoki (rys. 17). Linie węzłowe formują



Rys. 17

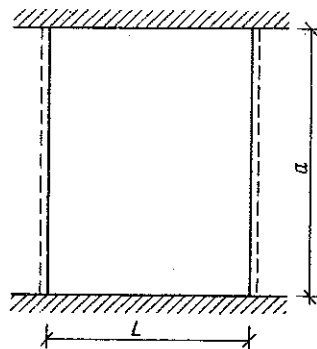
się wzdłuż tworzących powłoki w odstępach  $L$ . Pomiary drgań na modelach wykazały, że nie w każdym modelu sklepienia cylindrycznego obserwujemy podział na równe pola ograniczone liniami węzłowymi (linie zerowych ugięć powłoki). Zależy to od tego, czy długość półfali  $L$ , która jest charakterystyczna dla danej powłoki, ułoży się całkowitą ilość razy wzdłuż krzywizny sklepienia.

**3.2.1. Podstawowe drgania powłoki cylindrycznej.** Ograniczymy się do rozważenia tylko drgań podsta-

wowych (najistotniejszych przeważnie ze względów technicznych). Wyższe harmoniczne drgań powłoki cylindrycznej omówione zostaną w p. 3.2.2.

W przypadku sklepień cylindrycznych możemy znaleźć rachunkowo odkształcenie powłoki pod działaniem siły skupionej i w ten sposób określić postać odkształcenia przy drganiach. Jeżeli znana jest postać drgań, to dla danej postaci odkształcenia obliczyć można częstotliwość drgań własnych powłoki. W ten sposób drgania całej powłoki cylindrycznej sprowadzić można (dla uproszczenia) do drgań jej elementu o wymiarach  $L \times a$  (rys. 18).

**3.2.2. Określenie wyższych harmonicznych drgań powłok cylindrycznych.** Stwierdziliśmy już, że podstawowe drgania krótkiej powłoki cylindrycznej mają postać  $n$  półfal w kierunku krzywizny powłoki (rys. 19a). Długość półfal  $L$  jest charakterystyczna dla danej powłoki. W dalszym ciągu określić należy następne (wyższe) postacie drgań oraz związane z nimi częstotliwości rezonansowe. Prace doświadczalne prowadzone



Rys. 18

nad modelami powłok wykazały, że należy się spodziewać wyższych postaci drgań przez formowanie się pewnej (większej od podstawowej  $n$ ) ilości półfal w kierunku krzywizny powłoki (rys. 19b i 19c), czyli np. przy  $n+1$ ,  $n+2$ , ... półfal.

Oprócz formowania się krótszych półfal nastąpić może podział wzdłuż długości powłoki (na rys. 19d linie węzłowe oznaczono kreskami przerywanymi).

Powłokę dzielić można również na pola o charakterze szachownicy w obu kierunkach (w kierunku długości i szerokości sklepienia, rys. 19e). Każdej postaci drgań odpowiadać będzie określona częstotliwość. W przybliżeniu częstotliwość drgań obliczymy przyjmując do rozważań element powłoki ograniczony liniami węzłowymi.

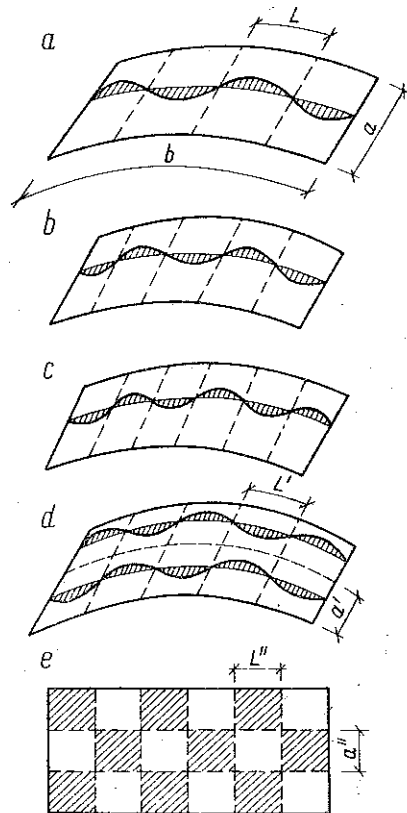
Wprawienie powłoki w drgania odpowiadające wyższej postaci odkształcenia otrzymuje się w praktyce coraz trudniej. Drgania posiadają poza tym coraz mniejszą amplitudę oraz wymagają coraz lepszego dostrojenia czynnika pobudzającego do drgań o częstotliwości rezonansowej powłoki.

Na podstawie pomiarów dokonanych na kilkunastu modelach krótkich sklepień cylindrycznych stwierdzić można, co następuje:

(1) Podstawowa postać drgań powłoki zgodna jest z pierwszym i drugim założeniem autora; charakteryzuje ją  $n$  półfal o długości  $L$  (lub nieco mniejszej) w kierunku krzywizny powłoki oraz jedna półfala w kierunku długości sklepienia.

(2) W dalszym przebiegu doświadczenia następował podział w kierunku krzywizny powłoki na pola o mniejszej szerokości niż  $L$ , występowała przy tym skończona ilość półfal (np.  $n+1$ ,  $n+2$ , ...).

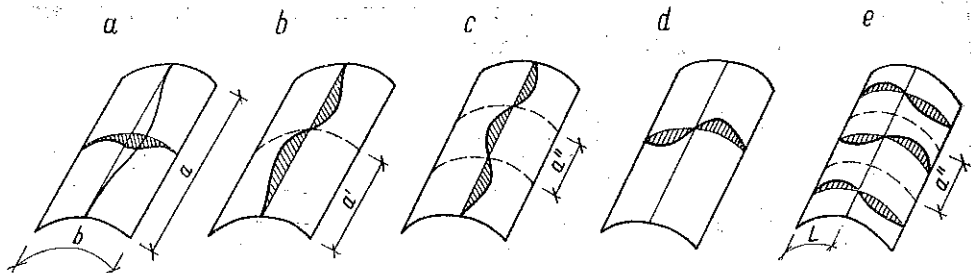
(3) Zaobserwowano formowanie się linii węzłowej w połowie lub  $1/3$  długości sklepienia z tym jednak, że ilość półfal uformowanych w kierunku krzywizny powłoki była we wszystkich zaobserwowanych przypadkach większa niż przy drganiach podstawowych.



Rys. 19

Sklepienia długie charakteryzuje podstawowa postać drgań przy uformowaniu się jednej półfali w obu kierunkach (rys. 20a). Wyższe postacie drgań występują przez podział długości  $a$  oraz szerokości  $b$  sklepienia na pewną ilość odcinków (rys. 20b - 20e).

Z obserwacji wynika, że przy wielkości  $a$  przewyższającej kilkakrotnie szerokość sklepienia  $b$  następuje łatwiej podział długości sklepienia na odcinki  $a$ . Podział w kierunku szerokości sklepienia następował w praktyce łatwiej, gdy w efekcie uzyskiwało się pola prostokątne o niezbyt wielkiej różnicy długości (rys. 20e) niż przy bardzo wydłużonych prostokątach (rys. 20d).



Rys. 20

Wyszczególnione wyżej własności drgań sklepień cylindrycznych są uzyskane na podstawie badań na modelach powłok. Z punktu widzenia teorii w sklepieniach długich mogą wystąpić zasadniczo wszystkie postacie drgań powłoki charakteryzujące się dowolnym podziałem pola na  $m$  i  $n$  półfal w obu kierunkach.

### 3.3. Określenie postaci oraz częstotliwości drgań własnych powłoki za pomocą metody sił<sup>1</sup>

Zajmiemy się teraz obliczeniem częstotliwości rezonansowych drgań własnych powłoki oraz kolejno odpowiadających im postaciom drgań. Zasadniczym dążeniem naszym będzie wykazanie drogą teoretyczną, że w krótkich powłokach podstawowa (najniższa) postać drgań może być związana z wyższą postacią odkształcenia (najprostsze możliwe postacie drgań układu w ogóle mogą nie występować).

Następnie odpowiemy na pytanie, czy otrzymany rezultat będzie się pokrywał z drugim założeniem autora dotyczącym postaci podstawowej drgań układu. W przypadku zgodności założenie to przyjęte na podstawie badań doświadczalnych nad modelami powłok uzyskałoby teoretyczne uzasadnienie.

<sup>1</sup> Zastosowanie metody sił do obliczenia drgań układów prętowych podał autor w pracy [21].

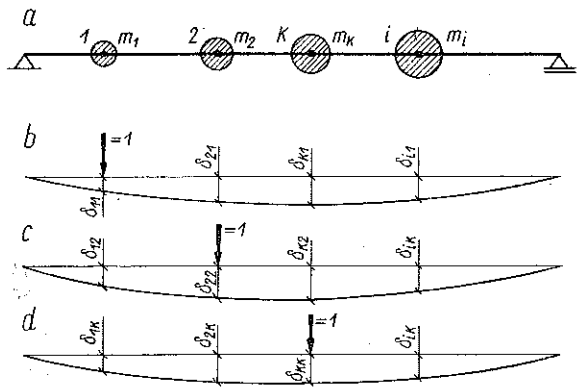
Do obliczeń zastosujemy metodę sił. Ponieważ sprowadzić musimy drgania powłoki obciążonej w sposób ciągły do drgań powłoki obciążonej kilkoma masami skupionymi, dlatego rezultat otrzymany będzie tylko przybliżony. Stopień dokładności zależeć będzie od ilości przyjętych do obliczeń mas zastępczych.

**3.3.1. Opis metody.** Obliczenie częstotliwości drgań własnych sprowadzić można przez wprowadzenie obciążeń siłami bezwładności do zagadnień statyki. W metodzie tej przemieszczenia mas wyrażamy za pomocą sił. Sposób obliczeń objaśnimy na przykładzie drgań poprzecznych pręta prostego obciążonego szeregiem mas skupionych (rys. 21). Rozpatrzmy układ złożony z szeregu mas oznaczonych kolejno  $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_i$ . Przesunięcie masy pierwszej zależy w ogólnym przypadku od wszystkich sił działających na układ. Zgodnie z oznaczeniami podanymi na rys. 21a - 21d otrzymamy

$$\eta_1 = r_1 \delta_{11} + r_2 \delta_{12} + \dots + r_k \delta_{1k} + \dots + r_i \delta_{1i},$$

gdzie  $r_i$  oznacza siłę bezwładności masy  $i$ ,  $\eta_i$  przemieszczenie punktu  $i$ ,  $\delta_{ik}$  przemieszczenie punktu  $i$  pod działaniem jednostkowej siły zaczepionej w punkcie  $k$ . Np.

$\delta_{21}$  przedstawia przesunięcie punktu zaczepienia masy drugiej od jednostkowej siły przyłożonej w punkcie 1 (rys. 21b). Przyjęliśmy zatem oznaczenia indeksami w ten sposób, że pierwszy znaczek określa, którego punktu dane przesunięcie dotyczy, drugi znaczek wskazuje na położenie siły jednostkowej, która dane przesunięcie wywołała.



Rys. 21

Wyrażając odpowiednio przesunięcia pozostałych punktów otrzymamy układ równań

$$(3.1) \quad \begin{cases} \eta_1 = r_1 \delta_{11} + r_2 \delta_{12} + \dots + r_k \delta_{1k} + \dots + r_i \delta_{1i}, \\ \eta_2 = r_1 \delta_{21} + r_2 \delta_{22} + \dots + r_k \delta_{2k} + \dots + r_i \delta_{2i}, \\ \dots \\ \eta_i = r_1 \delta_{i1} + r_2 \delta_{i2} + \dots + r_k \delta_{ik} + \dots + r_i \delta_{ii}. \end{cases}$$

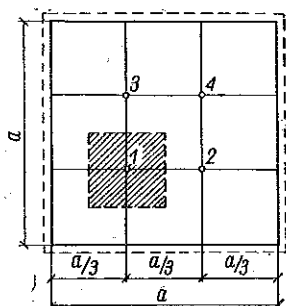
Na zasadzie twierdzenia Betti'ego o wzajemności przesunięć mamy (co łatwo sprawdzić)

$$(3.2) \quad \delta_{ik} = \delta_{ki}.$$



Podstawiając do różnicowego równania powierzchni odkształconej płyty kolejno dla punktów 1, 2, 3 i 4 otrzymano układ czterech równań

$$(3.6.1) \quad \begin{cases} 9w_1 - 4w_2 - 4w_3 + w_4 = \frac{q_1}{D} \frac{a^4}{162}, \\ -4w_1 + 9w_2 + w_3 - 4w_4 = \frac{q_2}{D} \frac{a^4}{162}, \\ -4w_1 + w_2 + 9w_3 - 4w_4 = \frac{q_3}{D} \frac{a^4}{162}, \\ w_1 - 4w_2 - 4w_3 + 9w_4 = \frac{q_4}{D} \frac{a^4}{162}. \end{cases}$$



Rys. 22

Układ równań rozwiązano przyjmując, że na pole zawierające punkt 1 działa obciążenie  $q_1 = 1$  rozłożone równomiernie na jednostkę powierzchni płyty. Otrzymaliśmy ugięcia

$$w_1 = 0,001243 \frac{q_1 a^4}{D}, \quad w_2 = w_3 = 0,000686 \frac{q_1 a^4}{D}, \quad w_4 = 0,000472 \frac{q_1 a^4}{D}.$$

Oznaczając przez  $\delta_{ik}$  przemieszczenie punktu  $i$  pod działaniem jednostkowego obciążenia rozłożonego w sposób ciągły i równomierny na pole zawierające punkt  $k$  otrzymamy na podstawie znanego już rozwiązania uwzględniając symetrię układu:

$$(3.6.2) \quad \begin{cases} \delta_{11} = 0,001243 \frac{a^4}{D}, & \delta_{21} = 0,000686 \frac{a^4}{D}, & \delta_{31} = 0,000686 \frac{a^4}{D}, & \delta_{41} = 0,000472 \frac{a^4}{D}, \\ \delta_{12} = 0,000686 \frac{a^4}{D}, & \delta_{22} = 0,001243 \frac{a^4}{D}, & \delta_{32} = 0,000472 \frac{a^4}{D}, & \delta_{42} = 0,000686 \frac{a^4}{D}, \\ \delta_{13} = 0,000686 \frac{a^4}{D}, & \delta_{23} = 0,000472 \frac{a^4}{D}, & \delta_{33} = 0,001243 \frac{a^4}{D}, & \delta_{43} = 0,000686 \frac{a^4}{D}, \\ \delta_{14} = 0,000472 \frac{a^4}{D}, & \delta_{24} = 0,000686 \frac{a^4}{D}, & \delta_{34} = 0,000686 \frac{a^4}{D}, & \delta_{44} = 0,001243 \frac{a^4}{D}. \end{cases}$$

Oznaczmy

$$(3.7) \quad k = \frac{a^4}{1000D}, \quad \kappa = kmn^2,$$

gdzie  $m$  przedstawia masę odnoszącą się do jednostki powierzchni środkowej płyty.

Podstawiając (3.7) i uwzględniając obliczone przemieszczenia punktów od obciążenia jednostkowego (3.6.2) do związków (3.5) otrzymamy układ czterech równań jednorodnych

$$(3.6.3) \quad \begin{cases} (1,243 \kappa - 1) C_1 + 0,686 \kappa C_2 + 0,686 \kappa C_3 + 0,472 \kappa C_4 = 0, \\ 0,686 \kappa C_1 + (1,243 \kappa - 1) C_2 + 0,472 \kappa C_3 + 0,686 \kappa C_4 = 0, \\ 0,686 \kappa C_1 + 0,472 \kappa C_2 + (1,243 \kappa - 1) C_3 + 0,686 \kappa C_4 = 0, \\ 0,472 \kappa C_1 + 0,686 \kappa C_2 + 0,686 \kappa C_3 + (1,243 \kappa - 1) C_4 = 0, \end{cases}$$

gdzie  $C_i$  przedstawia amplitudę drgań masy  $i$ . Wartość parametru  $\kappa$  spełniającego układ równań (3.6.3) obliczymy przyrównując wyznacznik charakterystyczny układu do zera.

Rozwijając wyznacznik dla układu czterech równań (3.6) przy uwzględnieniu równości mas:  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$  otrzymamy równanie

$$(3.8) \quad \begin{cases} m^4(\delta_{11} \delta_{22} \delta_{33} \delta_{44} - \delta_{12}^2 \delta_{33} \delta_{34} - \delta_{13}^2 \delta_{22} \delta_{44} - \delta_{14}^2 \delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23}^2 \delta_{11} \delta_{44} - \\ - \delta_{24}^2 \delta_{11} \delta_{33} - \delta_{34}^2 \delta_{11} \delta_{22} + \delta_{12}^2 \delta_{34}^2 + \delta_{13}^2 \delta_{24}^2 + \delta_{14}^2 \delta_{23}^2 + 2 \delta_{11} \delta_{23} \delta_{24} \delta_{34} + \\ + 2 \delta_{22} \delta_{13} \delta_{14} \delta_{34} + 2 \delta_{33} \delta_{12} \delta_{14} \delta_{24} + 2 \delta_{44} \delta_{12} \delta_{13} \delta_{23} - 2 \delta_{12} \delta_{13} \delta_{24} \delta_{34} - \\ - 2 \delta_{12} \delta_{14} \delta_{23} \delta_{34} - 2 \delta_{13} \delta_{14} \delta_{23} \delta_{24}) n^8 - m^3(\delta_{11} \delta_{22} \delta_{33} + \delta_{11} \delta_{22} \delta_{44} + \delta_{11} \delta_{33} \delta_{44} + \\ + \delta_{22} \delta_{33} \delta_{44} - \delta_{12}^2 \delta_{33} - \delta_{12}^2 \delta_{44} - \delta_{13}^2 \delta_{22} - \delta_{13}^2 \delta_{44} - \delta_{14}^2 \delta_{22} - \delta_{14}^2 \delta_{33} - \delta_{23}^2 \delta_{11} - \\ - \delta_{23}^2 \delta_{44} - \delta_{24}^2 \delta_{11} - \delta_{24}^2 \delta_{33} - \delta_{34}^2 \delta_{11} - \delta_{34}^2 \delta_{22} + 2 \delta_{12} \delta_{13} \delta_{23} + 2 \delta_{12} \delta_{14} \delta_{24} + \\ + 2 \delta_{13} \delta_{14} \delta_{34} + 2 \delta_{23} \delta_{24} \delta_{34}) n^6 + m^2(\delta_{11} \delta_{22} + \delta_{11} \delta_{33} + \delta_{11} \delta_{44} + \delta_{22} \delta_{33} + \delta_{22} \delta_{44} + \\ + \delta_{33} \delta_{44} - \delta_{12}^2 - \delta_{13}^2 - \delta_{14}^2 - \delta_{23}^2 - \delta_{24}^2 - \delta_{34}^2) n^4 - m(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{44}) n^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Podstawiając do (3.8) obliczone wartości  $\delta_{ik}$  według (3.6.2) oraz uwzględniając oznaczenia (3.7) otrzymamy równanie czwartego stopnia względem  $\kappa$ :

$$(3.8.1) \quad 0,640 \kappa^4 - 3,672 \kappa^3 + 6,962 \kappa^2 - 4,972 \kappa + 1 = 0.$$

Wykres funkcji  $y = f(\kappa)$  podany jest na rys. 23. W przybliżeniu rozwiązanie równania (3.8.1) znajdziemy biorąc z wykresu wartości  $\kappa$ , przy których krzywa  $y = f(\kappa)$  przecina oś  $\kappa$ . W danym przypadku otrzymamy np.  $\kappa_1 = 0,328$ ,  $\kappa_4 = 2,628$ . Natomiast dwa środkowe pierwiastki  $\kappa_2$  oraz  $\kappa_3$  trudno jest z wykresu dokładnie wyznaczyć, ponieważ ich wartości muszą być zbliżone do siebie. Ze względu na ograniczoną dokładność wykonanego obliczenia (na suwaku logarymicznym) nie można dać odpowiedzi, czy krzywa wykresu funkcji przecina w czterech punktach oś wykresu, czy też jest do niej styczna w jednym punkcie. W tym ostatnim przypadku  $\kappa_2$  równałoby się  $\kappa_3$ .



Po wyznaczeniu pierwiastków równania (3.8.1) częstotliwości drgań obliczymy już bez trudu z zależności (3.7).

I tak pierwsza częstotliwość drgań własnych wyniesie

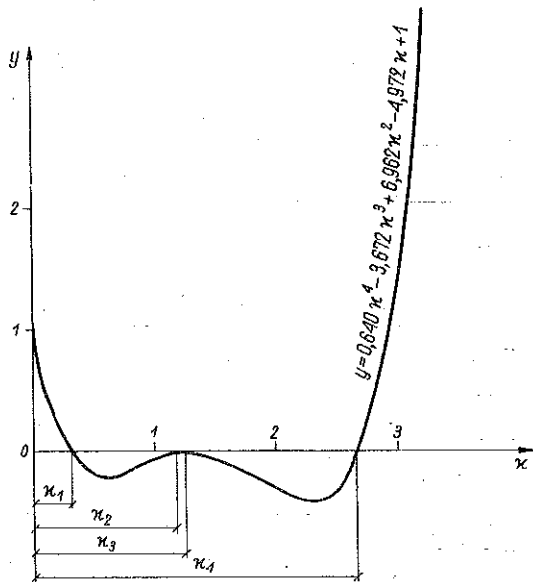
$$n_1 = \sqrt{\frac{\kappa_1}{k m}} = \sqrt{\frac{\kappa_1 1000 D}{a^4 m}} = \frac{18,1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

gdzie  $D$  oznacza sztywność płyty na zginanie, a  $m$  masę płyty na jednostkę powierzchni płyty.

Postać drgań płyty odpowiadającą danej częstotliwości znajdziemy uwzględniając w równaniach (3.6.3) wartość  $\kappa$ . Tak więc dla  $\kappa_1 = 0,328$  otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} -0,593 C_1 + 0,224 C_2 + 0,224 C_3 + 0,154 C_4 &= 0, \\ 0,224 C_1 - 0,593 C_2 + 0,154 C_3 + 0,224 C_4 &= 0, \\ 0,224 C_1 + 0,154 C_2 - 0,593 C_3 + 0,224 C_4 &= 0, \\ 0,154 C_1 + 0,224 C_2 + 0,224 C_3 - 0,593 C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Przyjmując amplitudę drgań pierwszej masy np.  $C_1 = 1$  otrzymamy z trzech pierwszych równań wychylenia pozostałych mas  $C_2 = 0,93$ ,  $C_3 = 1,07$ ,  $C_4 = 0,96$ . Uwzględniając małą dokładność obliczeń przyjmując można  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4$ , co odpowiada symetrycznej postaci odkształcenia przy wychyleniu wszystkich mas w jedną stronę. Spełnienie ostatniego równania służyć może jako kontrola prawidłowego rozwiązania. W analogiczny sposób określić można pozostałe postacie odkształcenia podstawiając następane wartości  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$  i  $\kappa_4$  do układu równań (3.6.3).



Rys. 23

**3.3.3. Uproszczenia w rozwiązywaniu równań kanonicznych.** Przy rozważaniu równań jednorodnych (3.6.3), których poszczególne wyrazy tworzą układ symetryczny względem obu przekątnych układu, przedstawione obliczenie można znacznie uprościć rozkładając dany układ równań na dwa różne układy z zachowaniem symetrii i antysymetrii rozwiązania.

Rozpatrzmy dla przykładu układ sześciu równań jednorodnych (tablica 3), których poszczególne wyrazy spełniają warunek symetrii, względem obu przekątnych układu (wyrazy położone na przekątnej zostały obwiedzione podwójną linią), np.  $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{56} = \delta_{65}$ . Załóżmy *a priori*, że wartości kolejnych niewiadomych układu parzystej ilości  $i$  równań tworzą układ symetryczny, tzn. że

$$(3.9.1) \quad X_1 = X_i, \quad X_2 = X_{i-1}, \dots$$

W rozważanym przypadku  $X_1 = X_6$ ,  $X_2 = X_5$  oraz  $X_3 = X_4$ .

Jeżeli znalezione zostało dowolne rozwiązanie spełniające równanie pierwsze, to automatycznie spełnione jest równanie ostatnie. W podobny

sposób stwierdzić można, że jeżeli rozwiązanie spełnia równanie drugie przy uwzględnieniu zależności (3.9.1), to równocześnie spełnione jest równanie przedostatnie itd.

Z poprzedniego rozwiązania wynika, że układ złożony z parzystej ilości równań, spełniający warunek symetrii krzyżowej, spełnia każde rozwiązanie uzyskane dla układu za-

Tablica 3

Równanie	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
1-sze	$\delta_{11}$	$\delta_{12}$	$\delta_{13}$	$\delta_{14}$	$\delta_{15}$	$\delta_{16}$
2-gie	$\delta_{21}$	$\delta_{22}$	$\delta_{23}$	$\delta_{24}$	$\delta_{25}$	$\delta_{26}$
3-cie	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{33}$	$\delta_{34}$	$\delta_{35}$	$\delta_{36}$
4-te	$\delta_{41}$	$\delta_{42}$	$\delta_{43}$	$\delta_{44}$	$\delta_{45}$	$\delta_{46}$
5-te	$\delta_{51}$	$\delta_{52}$	$\delta_{53}$	$\delta_{54}$	$\delta_{55}$	$\delta_{56}$
6-te	$\delta_{61}$	$\delta_{62}$	$\delta_{63}$	$\delta_{64}$	$\delta_{65}$	$\delta_{66}$

wierającego tylko połowę całkowitej ilości równań przy założonej symetryczności rozwiązania (3.9.1).

Podobnie łatwo można udowodnić, że powyższy układ równań będzie spełniony przy antysymetrycznej postaci rozwiązania określonej zależnością

$$(3.9.2) \quad X_1 = -X_i, \quad X_2 = -X_{i-1}, \dots$$

W ten sposób rozwiązanie układu parzystej ilości równań jednorodnych, spełniającego warunek symetrii krzyżowej, sprowadzić można do rozwiązania dwóch układów równań zawierających tylko połowę niewiadomych, uwzględniających warunek symetrii rozwiązania (3.9.1) oraz antysymetrii (3.9.2).

*Przykład 3.* Obliczyć częstotliwości oraz postacię drgań własnych płyty kwadratowej według przykładu 2 z uwzględnieniem symetrii krzyżowej układu równań.

Układ równań (3.6.3) z przykładu 2 rozłożyć można na dwa układy po dwie niewiadome z uwzględnieniem symetrii i antysymetrii rozwiązania.

Rozwiązanie symetryczne. Przyjmując  $C_1 = C_4$  oraz  $C_2 = C_3$  otrzymujemy układ równań

$$(1,715 \kappa - 1) C_1 + 1,372 \kappa C_2 = 0,$$

$$1,372 \kappa C_1 + (1,715 \kappa - 1) C_2 = 0.$$

Ponieważ powyższy układ równań spełnia warunek symetrii krzyżowej, rozłożyć go jeszcze można na dodatkowy układ symetryczny i antysymetryczny. Przyjmując  $C_1 = C_2$  otrzymamy tylko jedno równanie  $(3,073 \kappa - 1) C_1 = 0$ , które daje rozwiązanie  $\kappa_1 = 0,324$ . Przyjmując  $C_1 = -C_2 = 0$  otrzymujemy równanie  $(0,343 \kappa - 1) C_1 = 0$ , które daje rozwiązanie  $\kappa_4 = 2,915$ .

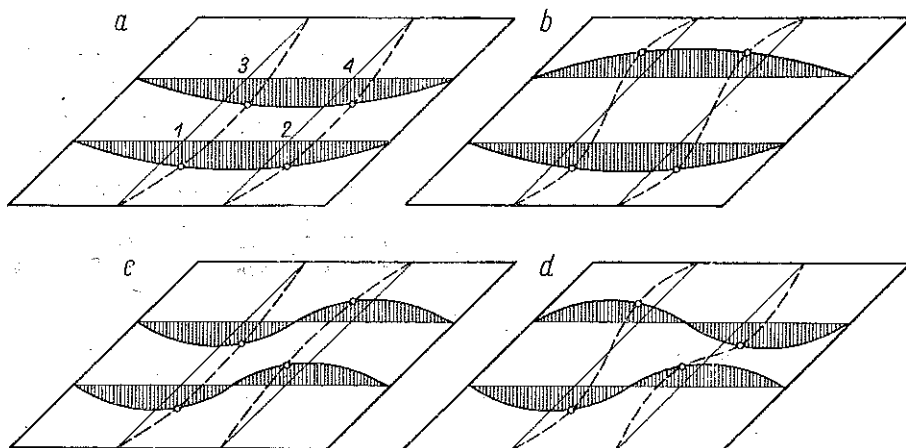
Rozwiązanie antysymetryczne. Przyjmując  $C_1 = -C_4$  oraz  $C_2 = -C_3$  otrzymamy układ równań

$$(0,771 \kappa - 1) C_1 - 0 \kappa C_2 = 0,$$

$$0 \kappa C_1 - (0,771 \kappa - 1) C_2 = 0,$$

który daje dla dodatkowej zależności  $C_1 = C_2$  oraz  $C_1 = -C_2$  takie samo rozwiązanie:  $\kappa_2 = \kappa_3 = 1,297$ .

Kolejne postacie drgań własnych dla  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  i  $\kappa_4$  podane są na rys. 24a - 24d.



Rys. 24

Sprawdzamy na zakończenie dokładność uzyskanego wyniku na częstotliwość podstawową w stosunku do wartości ujętej wzorem ścisłym dla płyty kwadratowej.

Częstotliwość drgań na minutę płyty kwadratowej opartej swobodnie na obwodzie wynosi, ([18], s. 126),

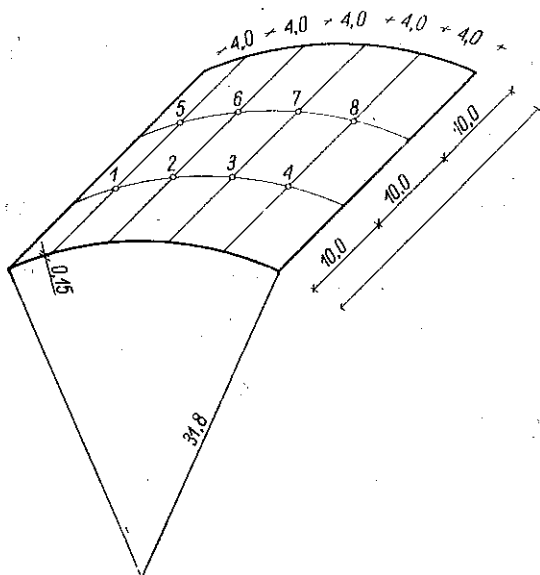
$$n^{(1)} = \frac{9,55 \cdot 2 \cdot 9,87}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{188,5}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Przeliczając powyższe na częstotliwość kołową (przy użyciu jednostek cm, g, sek) znajdziemy, że

$$n = \frac{2 \pi n^{(1)}}{60} = \frac{19,7}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Wynik zatem otrzymany w przykładzie 2 jest niższy o 8% od wartości ścisłej.

**3.3.4. Drgania powłoki cylindrycznej.** W celu porównania teoretycznych wyników wykonano model sklepienia cylindrycznego z celuloиду. Wartości przemieszczeń poszczególnych punktów  $\delta_{ik}$  pod działaniem jednostkowego obciążenia siłą skupioną zmierzone zostały wprost na modelu.



Rys. 25

**Przykład 4.** Obliczyć częstotliwości drgań własnych powłoki cylindrycznej z celuloиду podanej na rys. 25 przyjmując do obliczeń, że obciążenie rozłożone w rzeczywistości równomiernie po całej powierzchni powłoki skupione zostało w ośmiu punktach. Pod obciążeniem siłą skupioną 1 kG dokonano pomiarów przemieszczenia  $\delta_{ik}$ . Podajemy wartości średnie z kilku pomiarów w cm w tabl. 4.

Tablica 4

$\delta_{11} = 0,0440$	$\delta_{12} = 0,0045$	$\delta_{13} = -0,0085$	$\delta_{14} = -0,0020$	$\delta_{15} = 0,0090$	$\delta_{16} = 0,0040$	$\delta_{17} = -0,0020$	$\delta_{18} = -0,0013$
$\delta_{21} = 0,0045$	$\delta_{22} = 0,0530$	$\delta_{23} = 0,0060$	$\delta_{24} = -0,0085$	$\delta_{25} = 0,0040$	$\delta_{26} = 0,0110$	$\delta_{27} = 0,0040$	$\delta_{28} = -0,0020$
$\delta_{31} = -0,0085$	$\delta_{32} = 0,0060$	$\delta_{33} = 0,0530$	$\delta_{34} = 0,0045$	$\delta_{35} = -0,0020$	$\delta_{36} = 0,0040$	$\delta_{37} = 0,0110$	$\delta_{38} = 0,0040$
$\delta_{41} = -0,0020$	$\delta_{42} = -0,0085$	$\delta_{43} = 0,0045$	$\delta_{44} = 0,0440$	$\delta_{45} = -0,0013$	$\delta_{46} = -0,0020$	$\delta_{47} = 0,0040$	$\delta_{48} = 0,0090$
$\delta_{51} = 0,0090$	$\delta_{52} = 0,0040$	$\delta_{53} = -0,0020$	$\delta_{54} = -0,0013$	$\delta_{55} = 0,0440$	$\delta_{56} = 0,0045$	$\delta_{57} = -0,0085$	$\delta_{58} = -0,0020$
$\delta_{61} = 0,0040$	$\delta_{62} = 0,0110$	$\delta_{63} = 0,0040$	$\delta_{64} = -0,0020$	$\delta_{65} = 0,0045$	$\delta_{66} = 0,0530$	$\delta_{67} = 0,0060$	$\delta_{68} = -0,0085$
$\delta_{71} = -0,0020$	$\delta_{72} = 0,0040$	$\delta_{73} = 0,0110$	$\delta_{74} = 0,0040$	$\delta_{75} = -0,0085$	$\delta_{76} = 0,0060$	$\delta_{77} = 0,0530$	$\delta_{78} = 0,0045$
$\delta_{81} = -0,0013$	$\delta_{82} = -0,0020$	$\delta_{83} = 0,0040$	$\delta_{84} = -0,0020$	$\delta_{85} = -0,0020$	$\delta_{86} = -0,0085$	$\delta_{87} = 0,0045$	$\delta_{88} = 0,0440$

Podstawiając  $\kappa = kmn^2$ , gdzie  $k = 1/10$  otrzymano układ równań według wzoru (3.5):

$$(0,440 \kappa - 1) C_1 + 0,045 \kappa C_2 - 0,085 \kappa C_3 - 0,020 \kappa C_4 + 0,090 \kappa C_5 + \\ + 0,040 \kappa C_6 - 0,020 \kappa C_7 - 0,013 \kappa C_8 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& 0,045 \kappa C_1 + (0,530 \kappa - 1) C_2 + 0,060 \kappa C_3 - 0,085 \kappa C_4 + 0,040 \kappa C_5 + \\
& \quad + 0,110 \kappa C_6 + 0,040 \kappa C_7 - 0,020 \kappa C_8 = 0, \\
& - 0,085 \kappa C_1 + 0,060 \kappa C_2 + (0,530 \kappa - 1) C_3 - 0,045 \kappa C_4 - 0,020 \kappa C_5 + \\
& \quad + 0,040 \kappa C_6 + 0,110 \kappa C_7 + 0,040 \kappa C_8 = 0, \\
& - 0,020 \kappa C_1 - 0,085 \kappa C_2 + 0,045 \kappa C_3 + (0,440 \kappa - 1) C_4 - 0,013 \kappa C_5 - \\
& \quad - 0,020 \kappa C_6 + 0,040 \kappa C_7 + 0,090 \kappa C_8 = 0, \\
& 0,090 \kappa C_1 + 0,040 \kappa C_2 - 0,020 \kappa C_3 - 0,013 \kappa C_4 + (0,440 \kappa - 1) C_5 + \\
& \quad + 0,045 \kappa C_6 - 0,085 \kappa C_7 - 0,020 \kappa C_8 = 0, \\
& 0,040 \kappa C_1 + 0,110 \kappa C_2 + 0,040 \kappa C_3 - 0,020 \kappa C_4 + 0,045 \kappa C_5 + \\
& \quad + (0,530 \kappa - 1) C_6 + 0,060 \kappa C_7 - 0,085 \kappa C_8 = 0, \\
& - 0,020 \kappa C_1 + 0,040 \kappa C_2 + 0,110 \kappa C_3 + 0,040 \kappa C_4 - 0,085 \kappa C_5 + \\
& \quad + 0,060 \kappa C_6 + (0,530 \kappa - 1) C_7 + 0,045 \kappa C_8 = 0, \\
& - 0,013 \kappa C_1 - 0,020 \kappa C_2 + 0,040 \kappa C_3 + 0,090 \kappa C_4 - 0,020 \kappa C_5 - \\
& \quad - 0,085 \kappa C_6 + 0,045 \kappa C_7 + (0,440 \kappa - 1) C_8 = 0.
\end{aligned}$$

Układ ośmiu równań o krzyżowej symetrii można sprowadzić do dwóch układów po 4 równania.

Układ symetryczny. Przyjmując, że  $C_1 = C_8$ ,  $C_2 = C_7$ ,  $C_3 = C_6$  oraz  $C_4 = C_5$  otrzymamy

$$\begin{aligned}
& (0,427 \kappa - 1) C_1 + 0,025 \kappa C_2 - 0,045 \kappa C_3 + 0,070 \kappa C_4 = 0, \\
& 0,025 \kappa C_1 + (0,570 \kappa - 1) C_2 + 0,170 \kappa C_3 - 0,045 \kappa C_4 = 0, \\
& - 0,045 \kappa C_1 + 0,170 \kappa C_2 + (0,570 \kappa - 1) C_3 + 0,025 \kappa C_4 = 0, \\
& 0,070 \kappa C_1 - 0,045 \kappa C_2 + 0,025 \kappa C_3 + (0,427 \kappa - 1) C_4 = 0.
\end{aligned}$$

Wobec zachowania krzyżowej symetrii układu rozkładamy na dodatkowy układ symetryczny i antysymetryczny.

Przyjmując symetrię, tj.  $C_1 = C_4$  i  $C_2 = C_3$  otrzymujemy układ dwóch równań

$$(0,497 \kappa - 1) C_1 - 0,020 \kappa C_2 = 0, \quad - 0,020 \kappa C_1 + (0,740 \kappa - 1) C_2 = 0.$$

Wyznacznik układu przyrównany do zera daje równanie

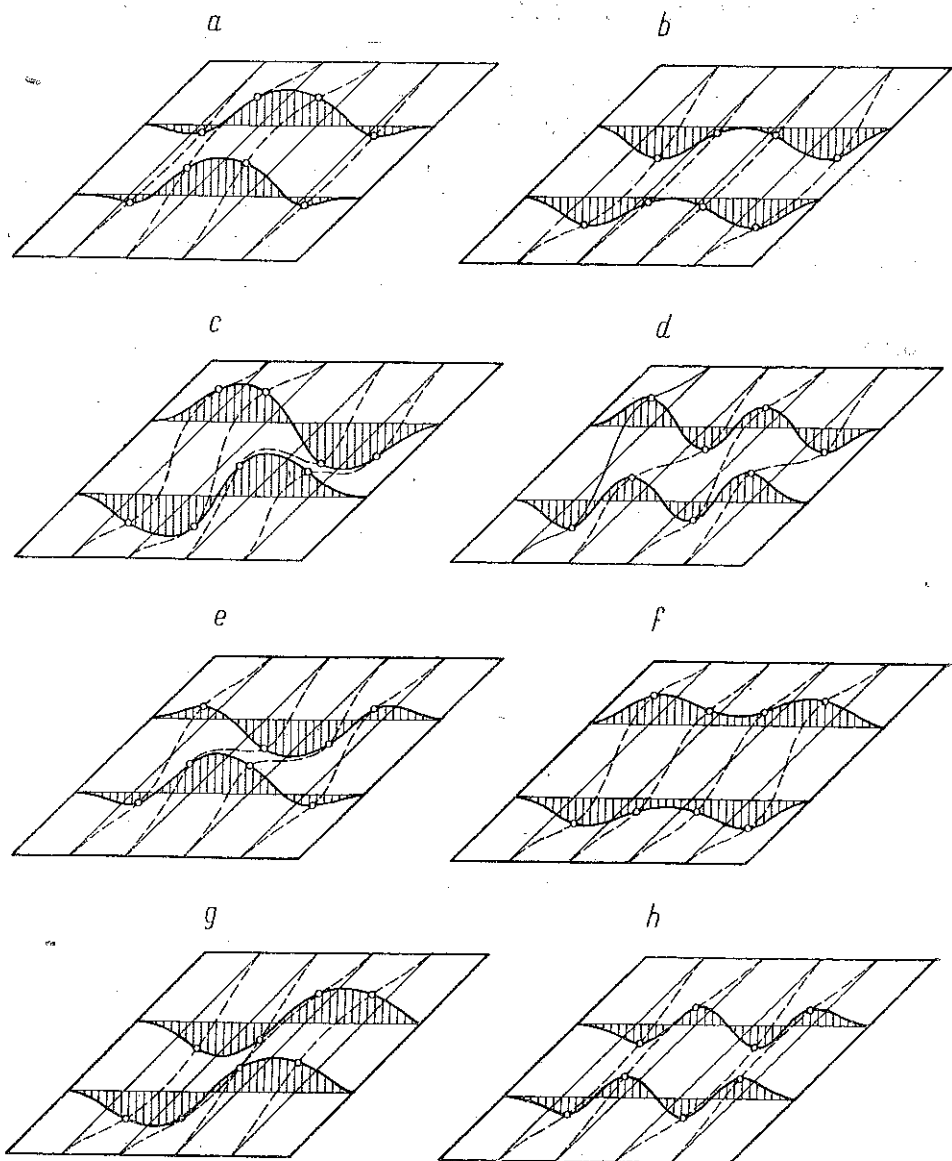
$$0,3674 \kappa^2 - 1,237 \kappa + 1 = 0,$$

którego pierwiastki wynoszą  $\kappa_1 = 1,3484$  oraz  $\kappa_2 = 2,0187$ . Uwzględniając wartość  $\kappa$  otrzymamy kolejno  $C_2 = -12,232 C_1$  oraz  $C_2 = 0,082 C_1$ . Odpowiednie postacie drgań układu (rzutowane na płaszczyznę) przedstawione są na rys. 26a i 26b.

Przyjmując antysymetrię, tj.  $C_1 = -C_4$  oraz  $C_2 = -C_3$  otrzymujemy  $\kappa_3 = 2,2137$  oraz  $\kappa_4 = 3,2758$ , a odpowiednie postacie odkształceń przedstawione są na rys. 26c i 26d.

Układ antysymetryczny. Przyjmując, że  $C_1 = -C_3$ ,  $C_2 = -C_4$ ,  
 $C_5 = -C_6$  oraz  $C_4 = -C_6$  otrzymamy układ

$$\begin{aligned} (0,453 \kappa - 1) C_1 + 0,065 \kappa C_2 - 0,125 \kappa C_3 - 0,110 \kappa C_4 &= 0, \\ 0,065 \kappa C_1 + (0,490 \kappa - 1) C_2 - 0,050 \kappa C_3 - 0,125 \kappa C_4 &= 0, \\ -0,125 \kappa C_1 - 0,050 \kappa C_2 + (0,490 \kappa - 1) C_3 + 0,065 \kappa C_4 &= 0, \\ -0,110 \kappa C_1 - 0,125 \kappa C_2 + 0,065 \kappa C_3 + (0,453 \kappa - 1) C_4 &= 0. \end{aligned}$$

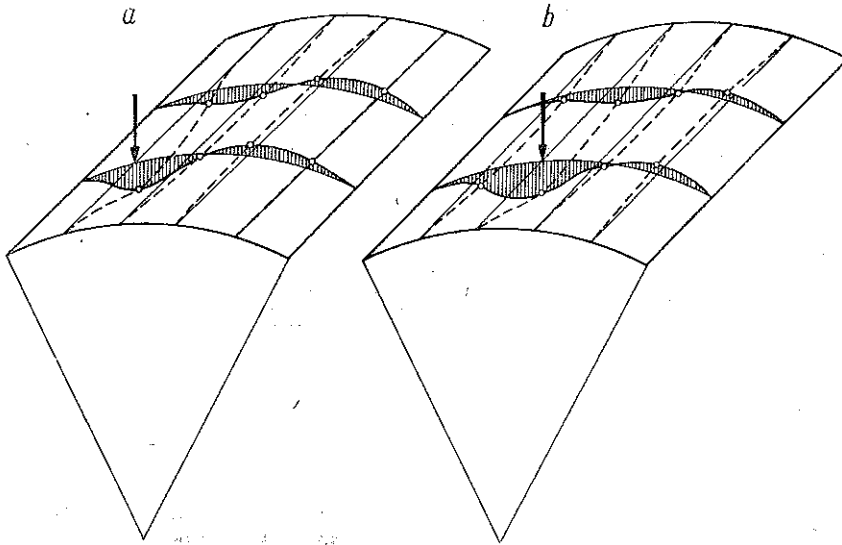


Rys. 26

Rozkładając ten układ na dwa układy przy założeniu  $C_1 = C_4$  i  $C_2 = C_3$  oraz  $C_1 = -C_4$  i  $C_2 = -C_3$ , otrzymaliśmy kolejno dalsze wartości pierwiastków  $\kappa_5 = 2,1338$  i  $\kappa_6 = 3,1812$  oraz  $\kappa_7 = 1,3479$  i  $\kappa_8 = 2,7689$ . Odpowiednie postacie drgań przedstawione są na rys. 26e i 26f.

Widzimy, że najmniejsza wartość  $\kappa$  wynosi  $\kappa_7 = 1,3479$ . Zatem antysymetryczna postać odkształcenia przy uformowaniu się dwóch półfal w kierunku krzywizny powłoki przedstawiona na rys. 26g jest podstawową postacią drgań powłoki.

Bardzo blisko do częstotliwości drgań podstawowych zbliża się częstotliwość  $\kappa_1 = 1,3484$ , której odpowiada symetryczna postać odkształcenia przedstawiona na rys. 26a.



Rys. 27

W celu porównania uzyskanego wyniku odkształceń powłoki na drodze teoretycznej z naszym założeniem zanalizujemy ugięcia powłoki pod działaniem siły skupionej. Na podstawie podanych wcześniej ugięć  $\delta_{ik}$  narysowano na rys. 27a i 27b odkształcenia powłoki pod działaniem siły skupionej, zaczepionej (normalnie do powłoki) kolejno w punkcie 1 i 2. Zgodnie z założeniem można przewidywać podstawową postać drgań przy założonej antysymetrycznej postaci odkształcenia o dwóch półfalach (rys. 27a) oraz postać symetryczną o lekko zaznaczonych półfalach przy belkach bocznych (rys. 27b). Rozpatrzony przykład potwierdza słuszność założenia dotyczącego związku pomiędzy odkształceniem powłoki pod działaniem siły skupionej a jej podstawową postacią drgań własnych.

Na zakończenie obliczymy częstotliwość drgań powłoki i porównajmy ten wynik z częstotliwością zmierzoną na modelu.

Uwzględniając założoną wielkość  $\kappa$  otrzymujemy częstotliwość kołową drgań podstawowych powłoki:  $n_7 = \sqrt{\kappa_7/km}$ .

Uwzględniając wymiary modelu oraz dane materiałowe (powłoka z celuloidu o grubości 0,15 cm) znajdziemy

$$m = \frac{Fh\gamma}{g} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 0,15 \cdot 0,001338}{981} = 0,00000817 \frac{\text{kG sek}^2}{\text{cm}}$$

gdzie  $F$  jest polem powierzchni przypadającej na jeden punkt zastosowanego podziału powłoki,  $h$  grubością powłoki,  $\gamma$  ciężarem właściwym celuloidu,  $g$  przyspieszeniem ziemskim.

Po podstawieniu otrzymamy

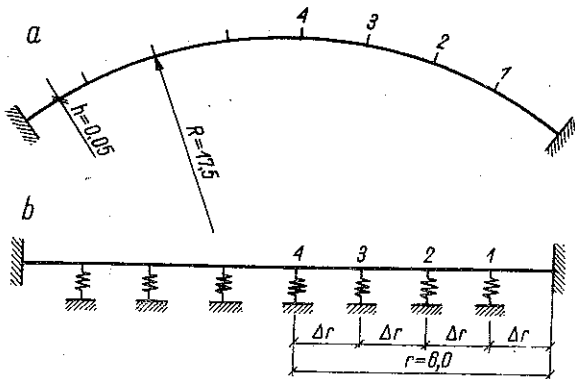
$$n_7 = \sqrt{\frac{1,3479 \cdot 10}{0,00000817}} = 1283 \frac{1}{\text{sek}}$$

Stąd otrzymujemy częstotliwość drgań w jednostce czasu

$$n^{(1)} = \frac{1283}{2\pi} = 204 \frac{1}{\text{sek}}$$

Na modelu określono podstawową postać drgań o częstotliwości 240 drgań na sekundę przy uformowaniu się postaci antysymetrycznej zgodnie z rys. 26g.

Przedstawiony rezultat (przykład 4) drgań powłoki udało się uzyskać bardzo prosto dzięki możliwości zastąpienia układu ośmiu równań przez



Rys. 28

cztery układy po dwa równania. W ten sposób sprowadziło się ostatecznie do rozwiązania czterech równań drugiego stopnia względem  $\kappa$ .

3.3.5. Drgania kopuły kulistej. Przykład 5. Obliczyć częstości drgań własnych kulistej kopuły z celuloidu przy założeniu osiowo symetrycznej postaci odkształcenia (rys. 28).

Zastosowano podział na 4 okręgi w odstępnie  $\Delta r = 1,5$  cm. Przyjmując  $E = 27\,000$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\gamma = 0,001338$  kG/cm<sup>3</sup>,  $\nu = 0,2$  oraz  $R = 17,5$  cm i  $h = 0,05$  cm otrzymano po podstawieniu do równań różnicowych powierzchni odkształconej kopuły, [11], układ czterech równań

$$\begin{aligned} 16,456792 w_1 - 0,658436 w_2 + 0,123456 w_3 &= 3,401361 q_1, \\ -0,987656 w_1 + 16,218109 w_2 - 0,592592 w_3 + 0,074073 w_4 &= 3,401361 q_2, \\ 0,370371 w_1 - 1,185186 w_2 + 16,407408 w_3 - 0,592593 w_4 &= 3,401361 q_3, \\ 0,395061 w_2 - 4,740736 w_3 + 19,345674 w_4 &= 3,401361 q_4. \end{aligned}$$



gdzie  $w_i$  oznacza normalne do powierzchni powłoki przemieszczenie punktu  $i$  oraz  $q_i$  obciążenie ciągle równomiernie rozłożone na jednostkę pola powierzchni zawierającej punkt  $i$ .

Rozwiązując kolejno układ równań przy kolejnym działaniu jednostkowego obciążenia  $q_i = 1$  otrzymano wartości  $\delta_{ik}$ :

$\delta_{11} = 0,207212$	$\delta_{12} = 0,008321$	$\delta_{13} = -0,001279$	$\delta_{14} = -0,000071$
$\delta_{21} = 0,012485$	$\delta_{22} = 0,210784$	$\delta_{23} = 0,007351$	$\delta_{24} = -0,000582$
$\delta_{31} = -0,003819$	$\delta_{32} = 0,015015$	$\delta_{33} = 0,209717$	$\delta_{34} = 0,006366$
$\delta_{41} = 0,001191$	$\delta_{42} = -0,000625$	$\delta_{43} = 0,051242$	$\delta_{44} = 0,177391$

Przyjmując  $\kappa = kmn^2$ , gdzie  $k = 1/10$  otrzymujemy układ równań według wzorów (3.5)

$$\begin{aligned} (1 - 2,07212 \kappa) C_1 - 0,08321 \kappa C_2 + 0,01279 \kappa C_3 + 0,00071 \kappa C_4 &= 0, \\ -0,12485 \kappa C_1 + (1 - 2,10784 \kappa) C_2 - 0,07351 \kappa C_3 + 0,00582 \kappa C_4 &= 0, \\ 0,03819 \kappa C_1 - 0,15015 \kappa C_2 + (1 - 2,09717 \kappa) C_3 - 0,06366 \kappa C_4 &= 0, \\ 0,01191 \kappa C_1 + 0,00625 \kappa C_2 - 0,51242 \kappa C_3 + (1 - 1,77391 \kappa) C_4 &= 0. \end{aligned}$$

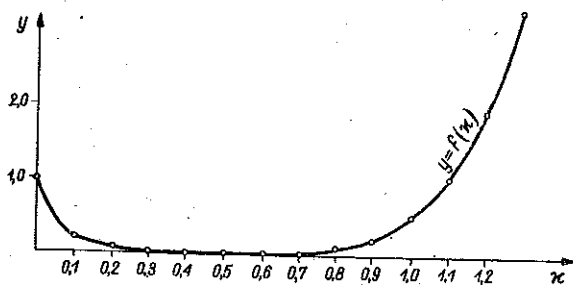
Równanie charakterystyczne układu 4 równań (3.5) przy założeniu  $m_1 = m_2 = \dots = m$  (gdzie  $m$  jest masą przypadającą na jednostkę pola powierzchni powłoki) jest następujące:

$$\begin{aligned} (3.10) \quad & m^4 (\delta_{11} \delta_{22} \delta_{33} \delta_{44} - \delta_{11} \delta_{22} \delta_{34} \delta_{43} - \delta_{11} \delta_{33} \delta_{24} \delta_{42} - \delta_{11} \delta_{44} \delta_{23} \delta_{32} - \\ & - \delta_{22} \delta_{33} \delta_{14} \delta_{41} - \delta_{22} \delta_{44} \delta_{13} \delta_{31} - \delta_{33} \delta_{44} \delta_{12} \delta_{21} + \delta_{12} \delta_{21} \delta_{34} \delta_{43} + \\ & + \delta_{13} \delta_{31} \delta_{24} \delta_{42} + \delta_{14} \delta_{41} \delta_{23} \delta_{32} + \delta_{11} \delta_{42} \delta_{34} \delta_{23} + \delta_{11} \delta_{24} \delta_{32} \delta_{43} + \\ & + \delta_{22} \delta_{13} \delta_{41} \delta_{34} + \delta_{22} \delta_{14} \delta_{31} \delta_{43} + \delta_{32} \delta_{12} \delta_{24} \delta_{41} + \delta_{33} \delta_{14} \delta_{21} \delta_{42} + \\ & + \delta_{44} \delta_{12} \delta_{23} \delta_{31} + \delta_{44} \delta_{13} \delta_{21} \delta_{32} - \delta_{12} \delta_{24} \delta_{31} \delta_{43} - \delta_{13} \delta_{21} \delta_{42} \delta_{34} - \\ & - \delta_{12} \delta_{23} \delta_{41} \delta_{34} - \delta_{14} \delta_{21} \delta_{32} \delta_{43} - \delta_{13} \delta_{24} \delta_{41} \delta_{32} - \delta_{14} \delta_{23} \delta_{31} \delta_{42}) n^8 - \\ & - m^3 (\delta_{11} \delta_{22} \delta_{33} + \delta_{11} \delta_{22} \delta_{44} + \delta_{11} \delta_{33} \delta_{44} + \delta_{22} \delta_{33} \delta_{44} - \delta_{33} \delta_{12} \delta_{21} - \\ & - \delta_{44} \delta_{12} \delta_{21} - \delta_{22} \delta_{13} \delta_{31} - \delta_{44} \delta_{13} \delta_{31} - \delta_{22} \delta_{14} \delta_{41} - \delta_{33} \delta_{14} \delta_{41} - \\ & - \delta_{11} \delta_{23} \delta_{32} - \delta_{44} \delta_{23} \delta_{32} - \delta_{11} \delta_{24} \delta_{42} - \delta_{33} \delta_{24} \delta_{42} - \delta_{11} \delta_{43} \delta_{34} - \\ & - \delta_{22} \delta_{43} \delta_{34} + \delta_{12} \delta_{23} \delta_{31} + \delta_{13} \delta_{21} \delta_{32} + \delta_{12} \delta_{24} \delta_{41} + \delta_{14} \delta_{21} \delta_{42} + \\ & + \delta_{13} \delta_{41} \delta_{34} + \delta_{14} \delta_{31} \delta_{43} + \delta_{42} \delta_{34} \delta_{23} + \delta_{24} \delta_{32} \delta_{43}) n^6 + m^2 (\delta_{11} \delta_{22} + \\ & + \delta_{11} \delta_{33} + \delta_{11} \delta_{44} + \delta_{22} \delta_{33} + \delta_{22} \delta_{44} + \delta_{33} \delta_{44} - \delta_{12} \delta_{21} - \delta_{13} \delta_{31} - \\ & - \delta_{14} \delta_{41} - \delta_{23} \delta_{32} - \delta_{24} \delta_{42} - \delta_{34} \delta_{43}) n^4 - \\ & - m (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{44}) n^4 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Podstawiając wartości  $\delta_{ik}$  do wzoru (3.10) oraz uwzględniając, że  $\kappa = 1/10 mn^2$ , otrzymano równanie czwartego stopnia względem  $\kappa$

$$(3.11) \quad 16,023620 \kappa^4 - 32,235932 \kappa^3 + 24,214267 \kappa^2 - 8,051040 \kappa + 1 = f(\kappa).$$

Wykres lewej strony równania (3.11) przedstawiony jest na rys. 29. Jest rzeczą charakterystyczną, że wykres przybliża się asymptotycznie do osi układu współrzędnych i dla  $x$  zawartego w granicach 0,4 - 0,65 równanie



Rys. 29

przybiera wartości bardzo bliskie zera. Można łatwo sprawdzić, że równanie posiada cztery różne, ale bardzo zbliżone pierwiastki.

Podstawiając na  $x$  przybliżoną wartość 0,44 oraz 0,50 do trzech pierwszych równań otrzymano postacie drgań kopuły kulistej przedstawione kolejno na rys. 30a i 30b.

Przyjmując jako pierwszy pierwiastek równania  $x_1 = 0,44$  obliczymy podstawową częstotliwość drgań kopuły z uwzględnieniem wyrażenia  $n_1 = \sqrt{x_1/km}$ . Uwzględniając dane dla naszego przykładu znajdziemy

$$m = \frac{Fh\gamma}{g} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 0,05 \cdot 0,001338}{981} = 0,0000000682.$$

Po podstawieniu otrzymamy

$$n_1 = \sqrt{\frac{0,44 \cdot 10}{0,0000000682}} = 8020.$$

Częstotliwość drgań wynosi (w jednostce czasu)

$$n_1^{(1)} = \frac{n_1}{2\pi} = 1275 \frac{1}{\text{sek}}.$$

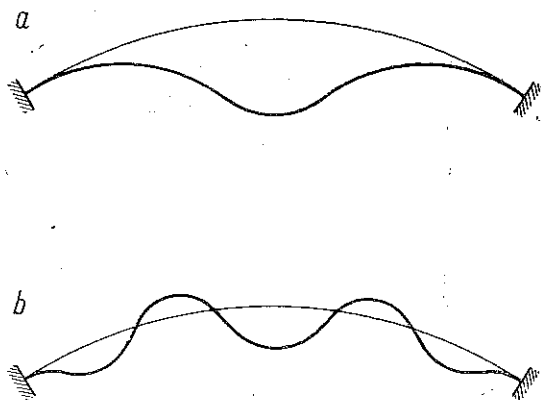
**Przykład 6.** Obliczyć drgania własne kopuły według danych dla przykładu 5 przy założeniu, że kopuła utwierdzona jest na okręgu oznaczonym na rys. 28 jak punkt 2. W ten sposób zadanie sprowadza się do obliczenia ugięć tylko w dwóch punktach (rys. 31).

Po ułożeniu dla punktów 1 i 2 równań różnicowych ugięć kopuły otrzymujemy układ dwóch równań

$$\begin{aligned} 16,780 w_1 - 0,593 w_2 &= 3,401 q_1, \\ -4,740 w_1 + 19,340 w_2 &= 3,401 q_2. \end{aligned}$$

Przyjmując obciążenie kolejno  $q_1 = 1$  oraz  $q_2 = 1$  otrzymujemy

$$\delta_{11} = 0,2046, \quad \delta_{12} = 0,0070, \quad \delta_{21} = 0,0502, \quad \delta_{22} = 0,1778.$$



Rys. 30

Podstawiając wartości na  $\delta_{ik}$  do wzoru (3.5) przy oznaczeniu  $\kappa = kmn^2$ , gdzie  $k = 1$ , otrzymujemy układ dwóch równań

$$(1 - 0,2046 \kappa) C_1 - 0,0070 \kappa C_2 = 0,$$

$$-0,0502 \kappa C_1 + (1 - 0,1778 \kappa) C_2 = 0.$$

Równanie charakterystyczne układu równań jest następujące:

$$0,036027 \kappa^2 - 0,3824 \kappa + 1 = 0.$$

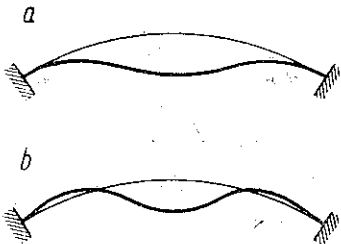
Pierwiastki równania wynoszą  $\kappa_1 = 4,640$  oraz  $\kappa_2 = 5,950$ . Uwzględniając wartość  $\kappa$  otrzymujemy po podstawieniu danych z przykładu 5

$$n_1^{(1)} = 1312 \frac{1}{\text{sek}}, \quad n_2^{(1)} = 1486 \frac{1}{\text{sek}}.$$

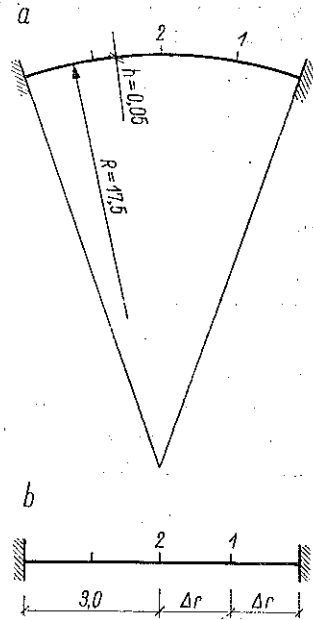
Odpowiednie postacie drgań przedstawione są na rys. 32a i 32b.

Na podstawie ostatnich przykładów można (1) przewidywać różne postacie drgań podstawowych kopuły od najprostszej, gdy tworzy się tylko jedna niecka (rys. 32a), do uformowania się kilku koncentrycznych fal (rys. 30b);

(2) stwierdzić, że częstotliwości drgań kopuły przy kilku pierwszych postaciach drgań mogą się różnić od siebie bardzo nieznacznie.



Rys. 32



Rys. 31

Wnioski powyższe potwierdziło doświadczenie na modelu przy pomiarach drgań wykonane równocześnie dwoma czujnikami. Obserwowano zmianę postaci drgań kopuły oraz przesunięcia fazowe drgań poszczególnych punktów powłoki przy bardzo nieznacznej różnicy częstotliwości drgań.

Dla kopuły według przykładu 5 obserwowano zakres rezonansu w granicach częstotliwości 1480 - 1800 drgań na 1 sekundę. Przy częstotliwości 1510 wystąpiła postać osiowo symetryczna podana na rys. 32b.

#### 3.4. Porównanie drgań powłoki z drganiami płyty

Po określeniu rodzaju odkształcenia powłoki przy drganiach porównajmy element powłoki ograniczony liniami węzłowymi z odpowiadającą mu płytą o podobnych warunkach brzegowych. Dla krótkiej powłoki cylindrycznej przedstawionej na rys. 17, odpowiednikiem będzie płyta

o wymiarach  $L \times a$ . Przyjmując, że utwierdzenie powłoki jest sztywne na ścianach szczytowych, otrzymamy schemat płyty opartej w sposób przegubowy na dwóch krawędziach (o długości  $a$ ) oraz utwierdzonej na dwóch pozostałych.

**3.4.1. Drgania płyty prostokątnej.** Drgania własne płyty prostokątnej (rys. 18) pod działaniem obciążenia  $q$  równomiernie rozłożonego na jednostkę pola powierzchni płyty przedstawia wzór, [18],

$$(3.12) \quad n^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \frac{9,87}{L^2} \sqrt{1 + 2,566 \frac{L^2}{a^2} + 5,138 \frac{L^4}{a^4}} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

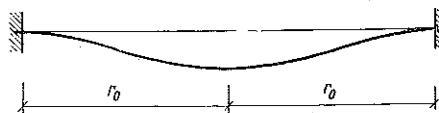
gdzie  $n^{(1)}$  oznacza częstotliwość drgań na sekundę,  $D$  sztywność płyty przy zginaniu oraz  $m$  masę przypadającą na jednostkę pola powierzchni płyty.

Podstawiając do wzoru (3.12) dane dla powłoki cylindrycznej (przykład 4)  $a = 30$  cm,  $L = 8$  cm,  $h = 0,15$  cm oraz  $E = 27\,000$  kG/cm<sup>2</sup> otrzymamy częstotliwość drgań własnych płyty

$$n^{(1)} = 126 \frac{1}{\text{sek}}.$$

Odpowiednia częstotliwość z przykładu 4 wynosi  $204 \cdot 1/\text{sek}$ .

**3.4.2. Drgania płyty okrągłej.** Nawiązując do drgań kopuł rozważmy płytę okrągłą utwierdzoną na obwodzie o promieniu  $r_0$  (rys. 33).



Rys. 33

Podstawową częstotliwość kołową drgań własnych płyty okrągłej utwierdzonej na obwodzie podaje wzór, [14],

$$(3.13) \quad n = \frac{10,21}{r_0^2} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Uwzględniając obliczony wcześniej promień  $r_0$  ograniczający nieckę wgłębienia pod działaniem siły skupionej dla kopuły kulistej [por. wzór (2.1)] znajdziemy, że

$$r_0 = 5 \sqrt[4]{\frac{h^3 R^2}{12(1-\nu^2)}}.$$

Wstawiając wartość  $r_0$  do wzoru (3.13) otrzymamy częstotliwość drgań własnych zastępczej płyty o promieniu  $r_0$  na sekundę

$$(3.14) \quad n^{(1)} = 0,065 \sqrt{\frac{E h}{m R^2}}.$$

Nawiązując do przykładu powłoki kulistej (przykład 5) i podstawiając  $E = 27\,000$  kG/cm<sup>2</sup>,  $h = 0,05$  cm,  $R = 17,5$  cm oraz  $m = 0,000000682$

do wzoru (3.14) otrzymamy częstotliwość drgań płyty okrągłej o promieniu  $r_0 = 2,54$  cm

$$n^{(1)} = 0,065 \sqrt{\frac{27\,000 \cdot 0,05}{0,0000000\,682 \cdot 17,5^2}} = 522 \frac{1}{\text{sek}}$$

Odpowiednia częstotliwość drgań kopuły wynosi 1275 [1/sek].

Te dwa krótkie przykłady sprowadzenia drgań elementu powłoki po określeniu postaci odkształcenia do drgań zastępczej płyty wskazują, że obliczone na tej podstawie częstotliwości są znacznie niższe od występujących w powłoce. Potwierdzają to pomiary na modelach, gdzie obserwowane częstotliwości drgań własnych powłok były wyższe o kilkadziesiąt do powyżej 100% od obliczonych w sposób przybliżony przez przyrównanie drgań elementu powłoki do drgań płyty.

Analizując wyniki przykładów 5 i 6 oraz częstotliwość drgań zastępczej płyty określonej wzorem (3.14) stwierdzić można, że nasze drugie założenie spełnione jest również i przy drganiach kopuł. Oznacza to, że:

(1) drgania kopuły kulistej charakteryzuje niecka ograniczona promieniem  $r_0$  [według wzoru (2.1)] powstała pod działaniem siły skupionej (same drgania wystąpić mogą według postaci niższej);

(2) zgodnie z wnioskiem pierwszym częstotliwość drgań podstawowych kopuły kulistej nie zależy od jej wyniosłości (z wykluczeniem kopuł bardzo płaskich);

(3) zastąpienie elementu powłoki przez zastępczy schemat płyty [wzór (3.14)] prowadzi do obliczenia częstotliwości niższej od rzeczywistych drgań powłoki.

### 3.5. Odpowiedniość modelowa drgań powłok

Przyjmując, że model określają wielkości  $E$ ,  $L$ ,  $\mu$  i  $\nu$ , otrzymaliśmy w części pierwszej wzór (1.28) na częstotliwość drgań własnych powłoki

$$n = \vartheta(\nu) \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

Przy pominięciu współczynnika Poissona otrzymujemy bardzo proste przeniesienie modelowe

$$(3.15) \quad \frac{n'}{n''} = \frac{L''}{L'} \sqrt{\frac{E' \mu''}{E'' \mu'}}$$

gdzie  $L$  określa wymiary modelu, a  $\mu$  masę przypadającą na jednostkę objętości powłoki.

W celu sprawdzenia wzoru (3.15) wykonano trzy modele sklepień cylindrycznych według rys. 34. Dane określające model podano w tabelicy 5.

Tablica 5

Układ	Material	$E(\text{kG/cm}^2)$	$\gamma(\text{g/cm}^3)$	$a(\text{cm})$	$\varphi_0(\text{cm})$	$h(\text{cm})$	$R(\text{cm})$	$L(\text{cm})$	Częstotliwość podstawowa (1/sek)
I	celuloid	27 000	1,34	14	$\pi/4$	0,075	10	5	460
II	plexiglas	41 000	1,19	14	$\pi/4$	0,075	10	5	550
III	celuloid	27 000	1,34	28	$\pi/4$	0,15	20	10	215

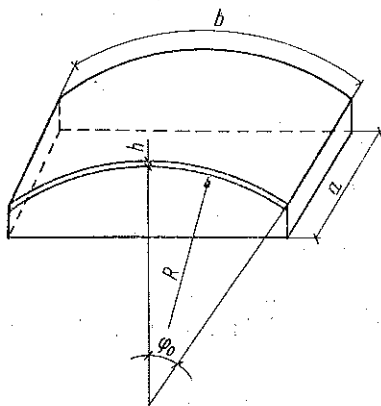
Analizując wyniki podane w tablicy 5 widzimy, że podobieństwo geometryczne odkształceń modeli (określa je wielkość  $a$  i  $L$ ) zostało spełnione całkowicie. Stosunek częstotliwości drgań modelu I i II obliczony ze wzoru (3.15) wynosi

$$\frac{n^I}{n^{II}} = \frac{L^{II}}{L^I} \sqrt{\frac{E^I \mathcal{M}^{II}}{E^{II} \mathcal{M}^I}} = \sqrt{\frac{27\,000}{41\,000} \frac{1,19}{1,34}} = 0,764,$$

a modelu I i III

$$\frac{n^I}{n^{III}} = \frac{L^{III}}{L^I} \sqrt{\frac{E^I \mathcal{M}^{III}}{E^{III} \mathcal{M}^I}} = 2.$$

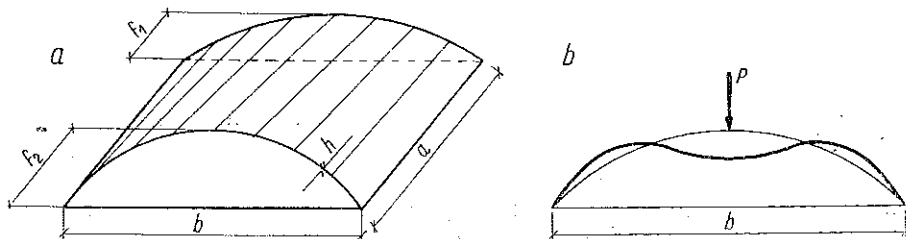
Odpowiednie stosunki znalezione na podstawie pomiarów wynoszą (por. ostatnia kolumna)  $460 : 550 = 0,837$  oraz  $460 : 215 = 2,14$ . Różnice uzyskane doświadczalnie mieszczą się w granicach 9%.



Rys. 34

### 3.6. Zastosowanie odpowiedniości modelowej do dowolnych powłok

Sprawdźmy na zakończenie, czy prawa modelowe ustalone drogą teoretyczną (za pomocą analizy wymiarowej w rozdziale pierwszym) mają zastosowanie do dowolnych powłok. Weźmiemy pod uwagę powłokę ko-



Rys. 35

noidalną, która ma duże zastosowanie w budownictwie przemysłowym. Sklepienie konoidalne jest przykładem powłoki, której nie potrafimy dotychczas (w stanie momentowym) obliczyć i dla określenia jej ugięć, ob-

ciężenia krytycznego oraz częstotliwości drgań własnych posłużyć się możemy prawami modelowymi, wyprowadzonymi w niniejszej pracy.

Dla sprawdzenia zależności dotyczącej ugięć (2.6), wybożenia (2.7) oraz drgań (3.15) zostały wykonane trzy modele sklepień konoidalnych (rys. 35a) z zachowaniem podobieństwa geometrycznego. Wymiary oraz dane materiałowe podaje tablica 6.

Tablica 6

Układ	Material	$E$ (kG, cm <sup>2</sup> )	$\gamma$ (g cm <sup>3</sup> )	$a$ (cm)	$b$ (cm)	$f_1$ (cm)	$f_2$ (cm)	$h$ (cm)	$y$ (mm)	$q_{kr}$ (at)	$n$ ( $\frac{1}{\text{sek}}$ )
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	celuloid	27 000	1,34	6,5	15,0	4,5	3,0	0,1	0,100	0,50	1200
II	celuloid	27 000	1,34	9,75	22,5	6,75	4,5	0,15	0,065	0,47	780
III	plexiglas	41 000	1,19	6,5	15,0	4,5	3,0	0,1	0,071	0,47	1350

Obciążano kolejno modele siłą  $P = 0,5$  kG zaczepioną pośrodku sklepienia. Charakter odkształceń we wszystkich trzech modelach był ten sam. Ugięcie pasma środkowego przedstawione jest na rys. 35b, a wartość ugięcia  $y$  w okolicy zaczepienia obciążenia podana jest w tablicy 6 (kolumna 10). Następnie powłoki (w hermetycznych obudowach) poddano działaniu ciśnienia gazu skierowanego do środka sklepienia. Wartość ciśnienia krytycznego  $q_{kr}$  została podana w tablicy 6 (kolumna 11). Charakter odkształcenia był symetryczny względem osi sklepienia i zgodny z powierzchnią ugięć pod działaniem siły skupionej w środku sklepienia (rys. 35b).

Zbadano następnie drgania odpowiednio zbudowanych modeli (według danych tablicy 6). Najniższe uzyskane częstotliwości rezonansowe podane są w tablicy 6 (kolumna 12). Postacie drgań w obu modelach z celuloиду były identyczne i potwierdziły nasze założenie (por. rys. 35b), natomiast w modelu z plexiglasu (układ III) wytworzona fala była o nieco szerszym zasięgu (licząc w kierunku krzywizny powłoki). Następne częstotliwości rezonansowe wynosiły odpowiednio 1800 cykli w modelu celuloidowym (układ I) oraz 2360 cykli w modelu z plexiglasu (układ III).

Przejdźmy teraz do obliczenia odpowiednich stosunków wielkości znalezionych doświadczalnie na modelach oraz obliczonych teoretycznie.

Ugięcia. Stosunki ugięć obliczone według wzoru (2.6) odpowiednio wynoszą

$$\frac{F'}{F''} = \frac{Q'}{Q''} \frac{E'' L''}{E' L'} = \frac{0,5 \cdot 27\,000 \cdot 1,5}{0,5 \cdot 27\,000 \cdot 1} = 1,5,$$

$$\frac{F'}{F'''} = \frac{Q'}{Q'''} \frac{E''' L'''}{E' L'} = \frac{0,5 \cdot 41\,000 \cdot 1}{0,5 \cdot 27\,000 \cdot 1} = 1,52.$$

Odpowiednie wielkości wyznaczone doświadczalnie wynoszą porównawczo 1,54 i 1,41.

Wyboczenie. Stosunki obciążeń krytycznych dwóch układów według wzoru (2.7) wynoszą

$$\frac{q'_{kr}}{q''_{kr}} = \frac{E'}{E''} = \frac{27\,000}{27\,000} = 1, \quad \frac{q'_{kr}}{q'''_{kr}} = \frac{E'}{E'''} = \frac{27\,000}{41\,000} = 0,66.$$

Odpowiednie wielkości wyznaczone doświadczalnie wynoszą porównawczo 1,54 i 1,41.

Drgania. Stosunki częstotliwości drgań (o tej samej postaci) dwóch układów według wzoru (3.15) wynoszą odpowiednio

$$\frac{n'}{n''} = \frac{L''}{L'} \sqrt{\frac{E'}{E''} \frac{M''}{M'}} = 1,5 \sqrt{\frac{27\,000}{27\,000} \frac{1,34}{1,34}} = 1,5,$$

$$\frac{n'}{n'''} = \frac{L'''}{L'} \sqrt{\frac{E'}{E'''} \frac{M'''}{M'}} = 1 \sqrt{\frac{27\,000}{41\,000} \frac{1,19}{1,34}} = 0,765.$$

Odpowiednie wielkości wyznaczone doświadczalnie wynoszą 1,54 i 0,89.

Porównując odpowiednie stosunki obliczone teoretycznie oraz zmierzone na modelach widzimy zadowalającą zgodność przy porównaniu ugięć (różnice wynoszą do 8%) oraz zadziwiająco zgodność, jeżeli chodzi o porównanie obciążeń krytycznych (różnice mieszczą się w granicach 6%)<sup>2</sup>. Największe stosunkowo różnice wystąpiły przy pomiarach częstotliwości drgań (do 16%) oraz pewne odchylenie w postaci drgań (model III).

W przypadku pomiarów drgań innych powłok (np. cylindrycznych i przy kopułach) autor obserwował również większe odchylenia niż miało to zwykle miejsce przy pomiarach odkształceń lub obciążenia krytycznego.

W świetle powyższego stwierdzić można, że wyprowadzone przez autora związki dotyczące postaci odkształcenia, obciążenia krytycznego i częstotliwości drgań własnych, oprócz rozważanych wcześniej sklepień cylindrycznych i kopuł kulistych, odnoszą się również do sklepienia koidalnego. Zgodność powyższa pozwala przypuścić, że prawa modelowe wyprowadzone w pracy niniejszej jak i dwie nasze hipotezy powinny mieć zastosowanie dla dowolnych powłok.

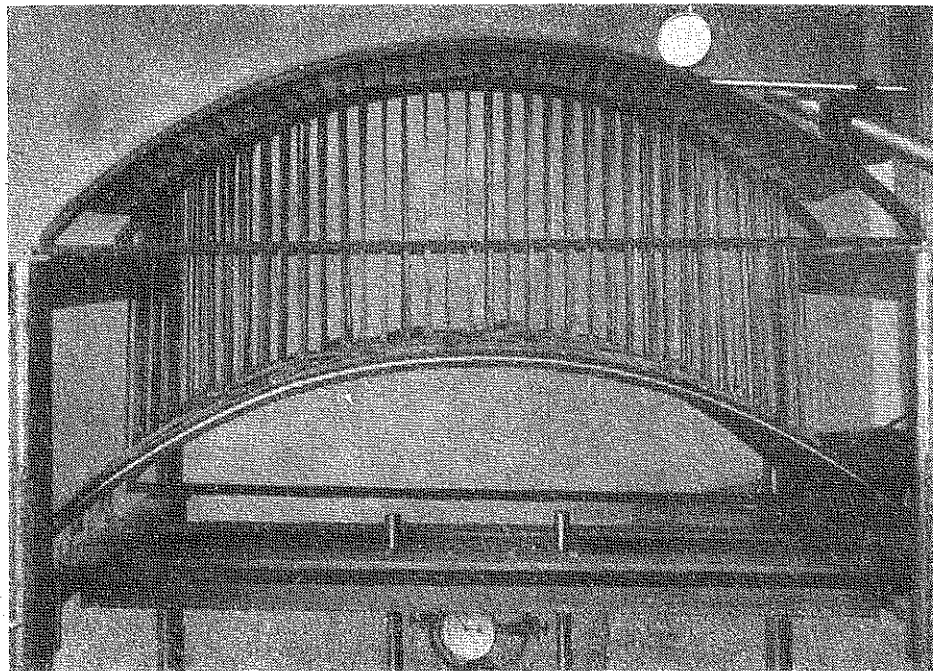
#### 4. METODY POMIAROWE

Przystąpimy obecnie do opisu metod pomiarowych służących do określenia przemieszczeń statycznych i dynamicznych w zastosowaniu do badań modelowych. Ograniczymy się do przedstawienia tylko tych sposo-

<sup>2</sup> Jest to zapewne dziełem przypadku.



bów pomiarów, które były wykorzystywane w pracy niniejszej z podkreśleniem metod opracowanych specjalnie przez autora do pomiarów modelowych. Będzie to metoda optyczna stosowana do pomiarów statycznych oraz pomiar przemieszczeń statycznych i dynamicznych wykonany za pomocą czujnika pojemnościowego.



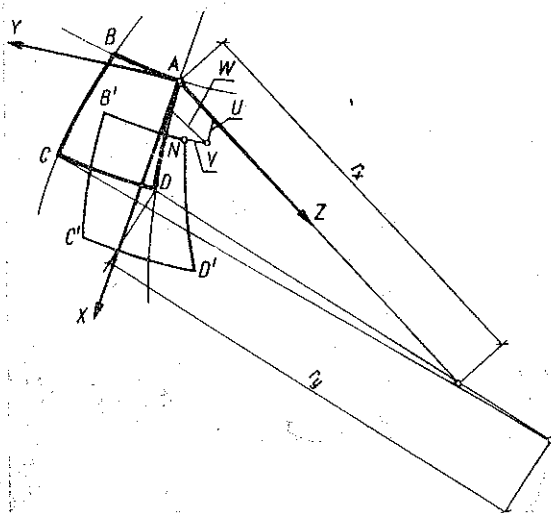
Rys. 36

Do pomiarów przemieszczeń statycznych (normalnych do powierzchni) stosowano zwykle czujniki zegarowe o dokładności do 0,01 mm oraz precyzyjne TESA o podziałce od 0,002 mm. Skonstruowano specjalne podstawy do czujników z ruchomymi wysięgnikami umożliwiającymi w granicach wielkości modeli ustawienie czujnika pod dowolnym kątem (por. rys. 36).

Do całkowitego określenia odkształceń powłoki nie wystarczy znać przemieszczenie poszczególnego punktu w jednym tylko kierunku (co daje np. pomiar czujnikiem zegarowym), ale wypadkowe przemieszczenia punktów w obranym układzie współrzędnych. Nowe położenie punktu będzie znane, jeżeli określone będą składowe przesunięcia w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach. Do pomiarów takich służyć może metoda optyczna.

#### 4.1. Optyczna metoda mierzenia odkształceń sprężystych układów przestrzennych na modelach, [25]

Rozpatrzmy elementarne pole  $ABCD$  wycięte z powłoki (rys. 37) przed i po odkształceniu. Prowadzimy przez punkt  $A$  leżący na środkowej powierzchni łupiny przed odkształceniem układ osi współrzędnych  $x, y, z$ . Pod wpływem obciążenia łupiny punkt  $A$  przesunął się do położenia  $A'$ .



Rys. 37

Nowe położenie punktu w przestrzeni wyrazić możemy przesunięciami  $u, v$  i  $w$  wzdłuż osi  $x, y$  i  $z$ .

Do pomiaru przemieszczeń zastosowano metodę optyczną. Oparto się tu na metodzie B e g g s a, [24], który obliczał linie wpływowe momentów zginających i sił poprzecznych przez dokonanie przecięć modelu, zastosowanie tak zwanych deformatarów i mierzenie odkształceń płaskich modeli celuloidowych. Metodę powyższą uprościł E. S z c z e p a n i a k w zastosowaniu do

ram płaskich nie wykonując przecięć modelu, [27]. W obu przypadkach wspomnianych metod mierzone były poziome przesunięcia punktów płaskiego poziomo ułożonego modelu za pomocą mikroskopu z zastosowaniem mikrookularu.

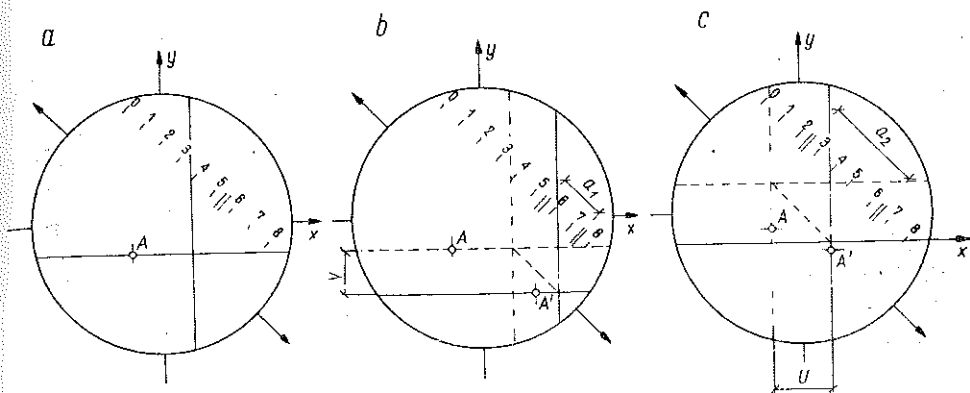
Optyczną metodę pomiarów przemieszczeń w zastosowaniu do modeli przestrzennych trzeba było zatem dostosować do pomiarów przesunięć w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach.

4.1.1. Pomiar w płaszczyźnie prostopadłej do osi mikroskopu. Pomiar przesunięć odbywa się jak w metodzie B e g g s a za pomocą mikrookularu. W mikrookularze jest widoczna stała podziałka, w danym przypadku 0, 1, 2, ..., 8 oraz przesuwany krzyż. Kierunek przesuwania jest równoległy do oznaczonej podziałki (rys. 38).

Pomiar wykonujemy w następujący sposób. Jeżeli chcemy obliczyć przesunięcie  $v$  wzdłuż osi  $y$  (rys. 38b), to nastawiamy poziomą nitkę krzyża na rozpatrywany punkt przed obciążeniem modelu. Odczytujemy liczby całkowite korzystając z dwóch równoległych kresek, które związane są z przesuwnym krzyżem i przesuwają się wzdłuż podziałki. Dalsze cyfry

odczytujemy na śrubie mikrometrycznej mikrookularu, która daje np. dokładność do 0,01 podziałki.

Następnie obciążamy model. Punkt  $A$  przesuwa się do położenia  $A'$ . Za pomocą śruby mikrometrycznej przesuamy poziomą nitkę krzyża do nowego położenia  $A'$ . Odczytujemy wynik. Różnica wyników daje przesunięcie wzdłuż osi podziałki, która jest ustawiona pod kątem  $45^\circ$  do linii krzyża.



Rys. 38

Oznaczając przesunięcie krzyża przez  $a_1$  otrzymamy wielkość przesunięcia wzdłuż osi  $y$ :

$$v = a_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Odpowiednio nastawiając oś pionową  $y$  na punkt  $A$  przed i po odkształceniu otrzymamy wielkość przesunięcia wzdłuż osi  $x$  (rys. 38c):

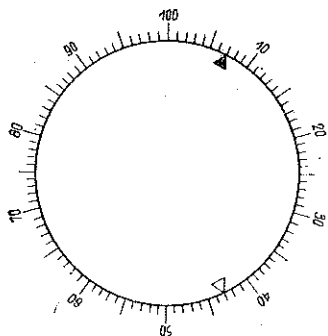
$$u = a_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Znając powiększenie mikroskopu możemy wielkość przesunięć wyrazić w mikronach.

**4.1.2. Pomiar wzdłuż osi mikroskopu.** Obliczenie przesunięcia wzdłuż osi mikroskopu odbywa się za pomocą śruby mikrometrycznej przesuwaną tubę mikroskopu. Obraz w mikroskopie jest dobrze widoczny, jeśli obiekt znajduje się w pewnej określonej odległości od obrazu.

Pracownik przeprowadzający pomiary nastawia mikroskop za pomocą śruby mikrometrycznej na najwyraźniejszy obraz badanego punktu. Po nastawieniu na optimum widoczności odczytujemy wynik na śrubie mikrometrycznej tuby mikroskopu, na której zastosowano np. podziałkę o dokładności do 0,01 całkowitego obrotu (rys. 39) np.  $n_1 = 7$

Po obciążeniu modelu następuje przesunięcie oglądanego punktu w kierunku równoległym do osi mikroskopu. Aby otrzymać powtórnie obraz w mikroskopie, przesuwamy tubę mikroskopu za pomocą śruby mikrometrycznej. Po nastawieniu na ostrość obrazu ponownie odczytujemy wynik np.  $n_2 = 43$ .



Rys. 39

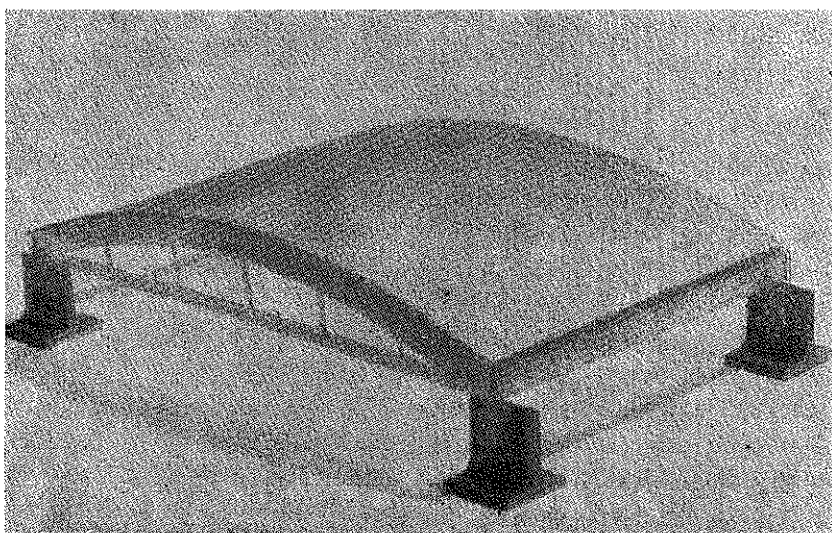
Określając różnicę wyników (z uwzględnieniem kierunku przesuwania tuby)

$$n = n_2 - n_1 = 43 - 7 = 36$$

otrzymujemy wielkość przesunięcia. Znając skok śruby mikrometrycznej oraz uwzględniając zastosowany podział obrotu śruby możemy obliczyć wielkość i kierunek rzeczywistego przesunięcia w mikronach. Oś pokrywająca się z osią mikroskopu oznaczamy przez  $z$ , a odpowiednie przesunięcie przez  $w$ .

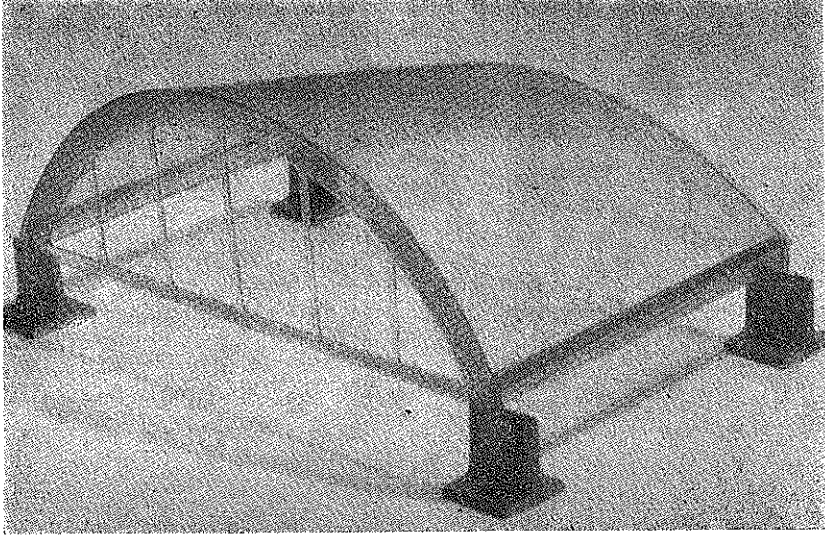
W ten sposób znajdziemy przesunięcia  $u$ ,  $v$  i  $w$ , a tym samym położenie punktu po odkształceniu.

4.1.3. Przystosowanie modelu do pomiarów. Modele powłok wykonywane były z arkuszy celuloidu lub plexiglasu. Fotografie modeli sklepienia cylindrycznego i konoidalnego przedstawione są na rys. 40a i 40b.

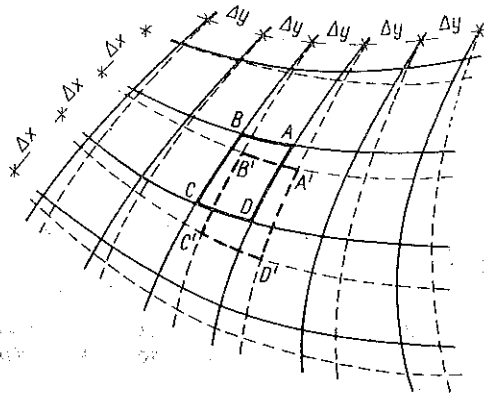


Rys. 40a

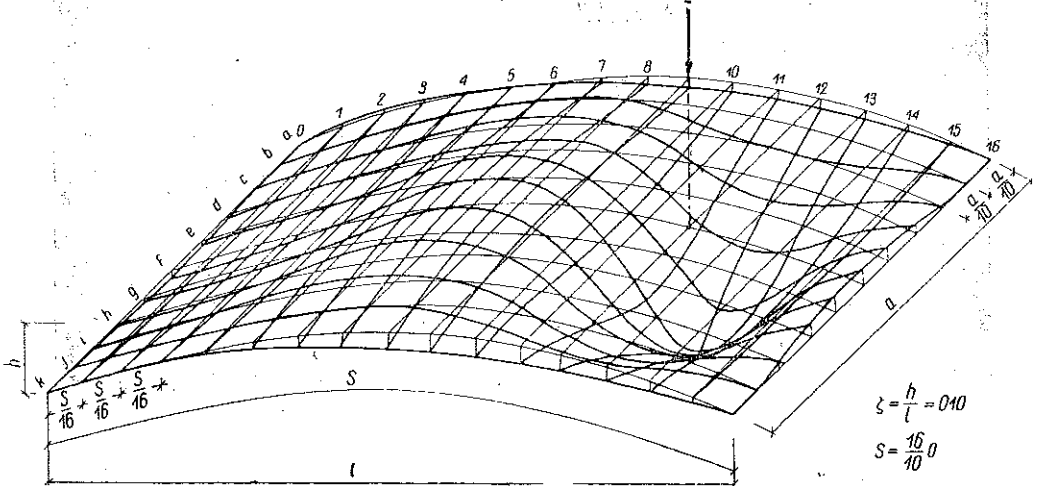
Przed dokonaniem pomiarów przemieszczeń tworzymy siatkę linii na rozpatrywanym sklepieniu (rys. 41) w odstępach  $\Delta x$  i  $\Delta y$  i znajdujemy przesunięcia punktów węzłowych siatki. Mając zmierzone przesu-



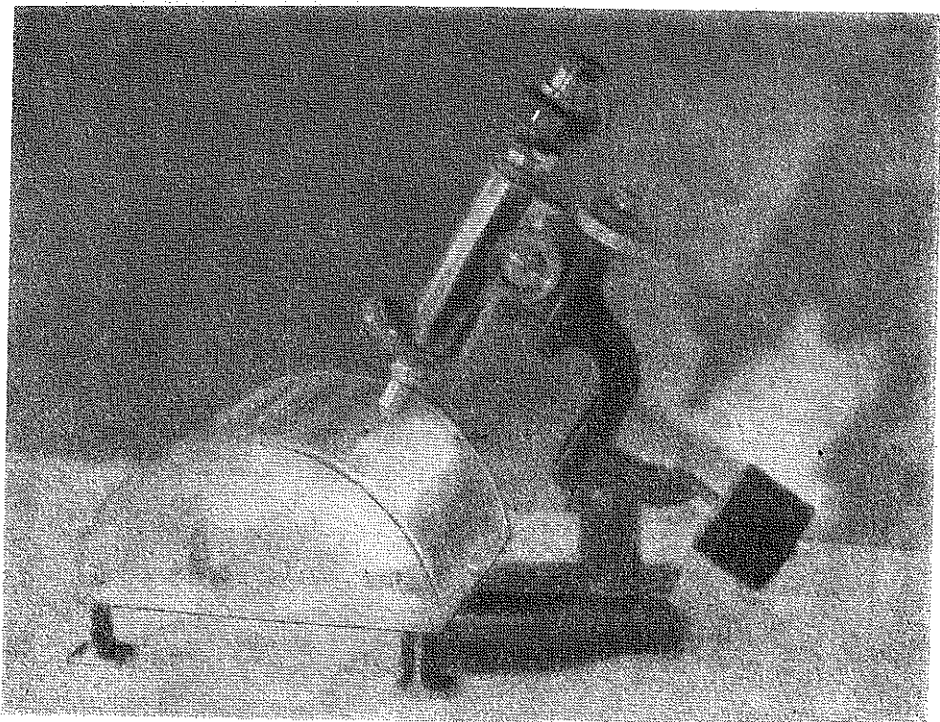
Rys. 40b



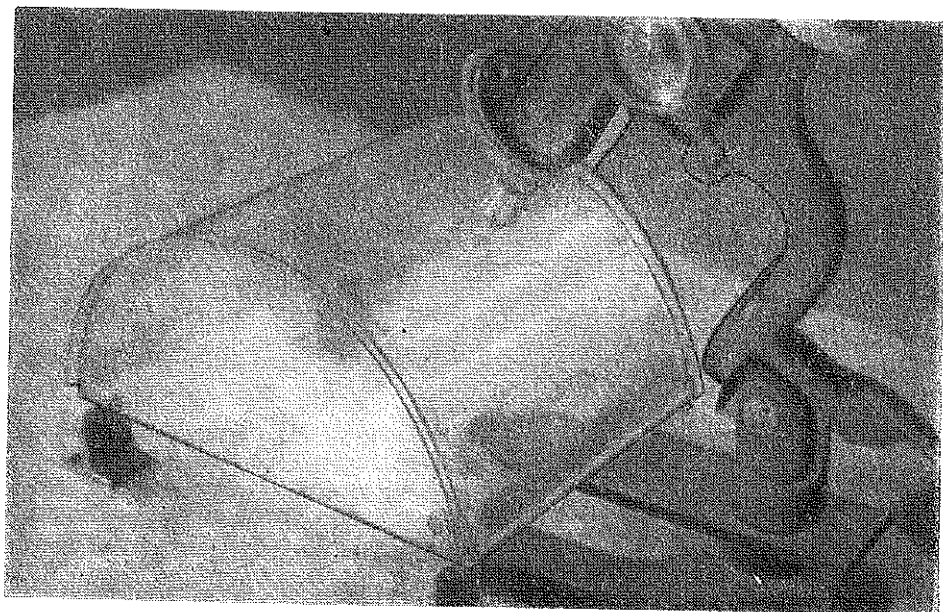
Rys. 41



Rys. 42



Rys. 43a



Rys. 43b

nięcia wszystkich punktów węzłowych siatki znamy charakter odkształcenia powłoki pod działaniem badanego obciążenia. Możemy też na podstawie znanych wzorów teorii sprężystości obliczyć odkształcenia oraz rozkład naprężeń w lupinie.

Dla przykładu pokazano na rys. 42 pionowe przesunięcie sklepienia cylindrycznego przedstawionego na rys. 40a, wywołane przez siłę skupioną zaczepioną pionowo na przecięciu linii 12 i f. Ustawienie mikroskopu z mikrookulem nad modelem sklepienia wraz z oświetleniem żarówką powłoki od spodu przedstawiono na rys. 43.

#### 4.2. Metoda elektroakustyczna pomiaru drgań

Przejdźmy na wstępie do krótkiego scharakteryzowania zasad działania przyrządów do badania drgań. Aparatura pomiarowa rozwinęła się w dwóch kierunkach. Jeden z nich dotyczy przyrządów rejestrujących drgania czysto mechaniczne, drugi przyrządów zamieniających drgania mechaniczne na elektryczne i rejestrujących drgania elektryczne. Metody czysto mechaniczne są w pewnych przypadkach wygodne, gdyż aparatura pomiarowa jest prosta i niezawodna (np. wibrograf Geigera). Jednak przenośne aparaty mechaniczne mają małą czułość i ograniczony zakres częstości ze względu na własną bezwładność.

Druga grupa metod pomiarowych, o wiele bardziej różnorodna, daje znacznie większe możliwości pomiarowe, lecz aparatura jest bardziej skomplikowana. Każde elektryczne urządzenie do pomiaru drgań składa się z trzech zasadniczych części:

- (1) urządzenia do zamiany wielkości mechanicznej na elektryczną,
- (2) wzmacniacza lub urządzenia wykrywającego (np. mostka),
- (3) wskaźnika lub rejestratora.

Ze względu na sposób zamiany wielkości mechanicznej na elektryczną rozróżniamy cały szereg czujników. Mamy czujniki oporowe, pojemnościowe i indukcyjne — zmiana wartości odpowiednich elementów pod wpływem drgań mechanicznych jest mierzona elektrycznie zazwyczaj przy użyciu urządzeń mostkowych. Druga grupa czujników — to przetworniki elektromechaniczne, czyli urządzenia zmieniające wprost energię mechaniczną na elektryczną. Są to czujniki elektromagnetyczne, dynamiczne, piezoelektryczne i magnetostrykcyjne.

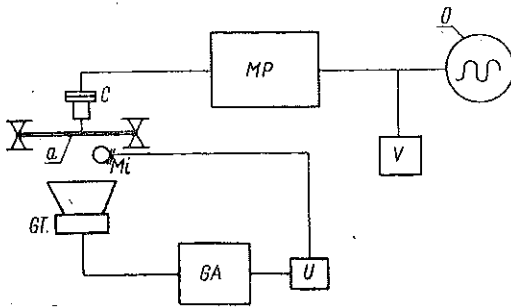
Dalszą częścią aparatury jest wzmacniacz lampowy, ewentualnie poprzedzony mostkiem zależnie od układu pomiarowego. Zadaniem jego jest wierne powiększanie amplitudy w celu uzyskania większej czułości.

Końcowy element aparatury — to urządzenie samopiszące, oscyloskop elektronowy lub przyrząd wskazówkowy.

Najważniejszym elementem jest prawidłowo działający i wycechowany czujnik. Czujniki typu przetworników elektromechanicznych, aczkol-

wiek bardzo wygodne w użyciu, wymagają cechowania wzorcowymi drganiami, co jest bardzo kłopotliwe i wymaga specjalnej aparatury. Czujniki pojemnościowe, oporowe i indukcyjne pozwalają zależnie od użytego układu pomiarowego mierzyć zmiany sił lub przemieszczeń zarówno stałych jak i zmiennych. Jeśli zastosuje się układ pomiarowy «uniwersalny», to znaczy działający zarówno przy odkształceniach stałych jak i zmiennych, otrzymujemy aparat do pomiaru drgań, który może być cechowany statycznie.

W dalszym ciągu przejdziemy do krótkiego opisu aparatury firmy Philipsa, z której korzystał autor w Zakładzie Badania Drgań IPP'T PAN. Zasada działania aparatury polega na przetwarzaniu mechanicznych drgań badanego przedmiotu na przebiegi elektryczne za pomocą



Rys. 44

czujnika indukcyjnego, przystawianego do powierzchni drgającej. Czujnik ten w połączeniu z mostkiem pomiarowym wytwarza napięcia elektryczne będące dokładnym odzwierciedleniem przebiegów dynamicznych (drgań) oraz statycznych (ugięć, odkształceń).

Analiza napięć mierzonych za pomocą mostka pozwala na dokładne określenie częstotli-

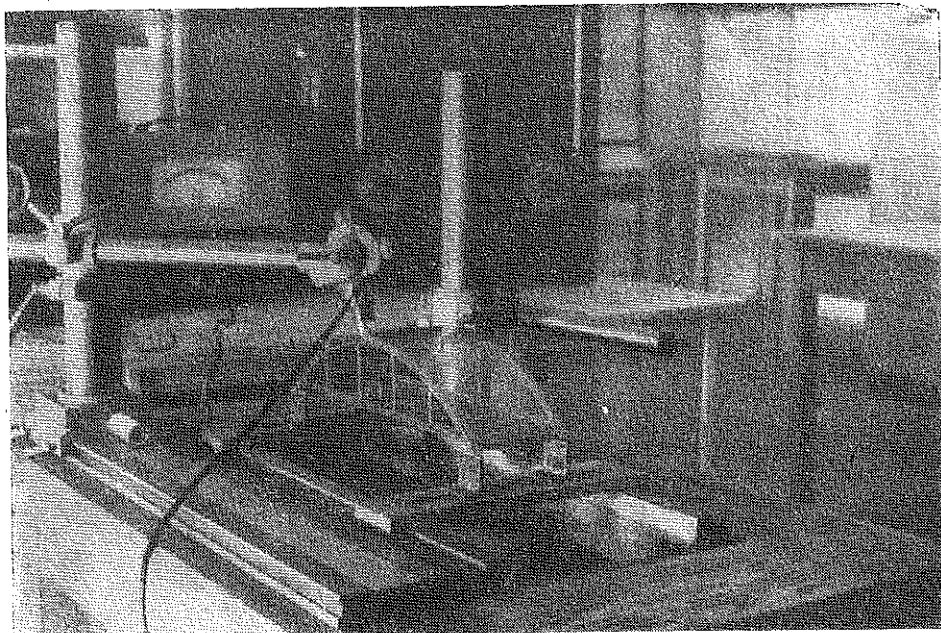
wości, amplitudy, fazy i charakteru badanych drgań. Czujnikiem pobudzającym drgania jest głośnik akustyczny umieszczony pod badanym modelem, wytwarzający ton o stałym ciśnieniu akustycznym. Schemat aparatury przedstawiono na rys. 44 (*a* oznacza badaną powierzchnię drgającą, *C* czujnik indukcyjny, *MP* mostek pomiarowy, *O* oscyloskop, *V* woltomierz lampowy, *Gł* głośnik, *GA* generator akustyczny, *Mi* mikrofon, *U* urządzenie samoregulujące stałe ciśnienie akustyczne).

Modele sklepień wykonano z celuloideu. Fragment pomiarów przedstawia rys. 45. W części środkowej jest widoczny model sklepienia cylindrycznego, do którego przystawiony jest czujnik indukcyjny. Sam czujnik mieści się w specjalnej oprawie z suportem. Za pomocą przesuwanej kolumny z wysięgnikiem; suportem i przegubami zapewniona jest swoboda dowolnego ustawienia czujnika. Na modelu naniesiono siatkę linii. Położenie ustawienia czujnika określają przecięcia krzyżujących się linii. Czujnik ustawiony był normalnie do powierzchni w danym punkcie.

Jako zalety tej aparatury wymienić można dużą wrażliwość i dość dużą liniową charakterystykę oraz łatwość dokładnego ustawienia nad



badanym punktem. Cewka indukcyjna czujnika zawieszona na sprężynkach zakończona jest cienkim sztyfcikiem, który łatwo jest dokładnie ustawić pod żądanym punktem powłoki. Zastosowanie specjalnie zbudowanej podstawy z przegubowo przesuwным umocowaniem czujnika pozwala na szybkie ustawienie i wyregulowanie czujnika.



Rys. 45

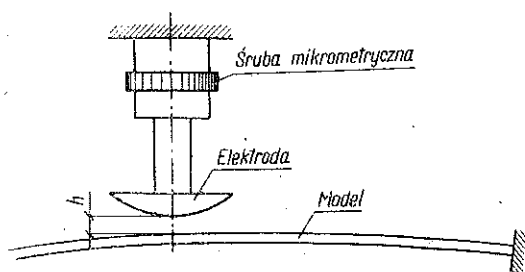
Z cech ujemnych aparatu przy badaniach modelowych wymienić można pewien nacisk na powłokę jaki wywiera czujnik przystawiony do modelu oraz ograniczony zakres pracy (do 500 cykli). Przy wyższych częstotliwościach praca jego jest już niepewna, a powyżej 1000-1500 cykli przestaje reagować na impulsy.

#### 4.3. Czujnik pojemnościowy do pomiarów drgań, [26]

W celu rozszerzenia zakresu badań na wyższe częstotliwości drgań, które występują zwłaszcza przy wyższych harmonicznych postaciach drgań modeli oraz przy powłokach bardziej sztywnych (np. wykonanych z metalu) został zaprojektowany i wykonany pod kierunkiem autora w Laboratorium Modelowym Pracowni Teorii Konstrukcji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Krakowie czujnik pojemnościowy do pomiaru drgań<sup>3</sup>.

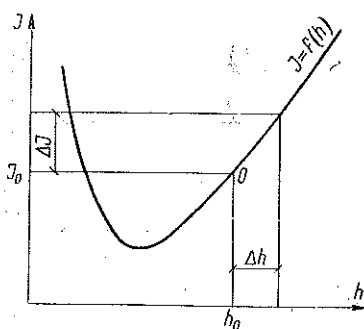
<sup>3</sup> Aparaturę wykonali A. Ormicki i B. Miąsik.

Przyrząd składa się z czujnika pojemnościowego utworzonego przez model i elektrodę zbliżaną do modelu za pomocą śruby mikrometrycznej, układu elektronowego, wykrywającego zmiany pojemności, utworzonego w ten sposób kondensatora oraz wskaźników. Kondensator po-

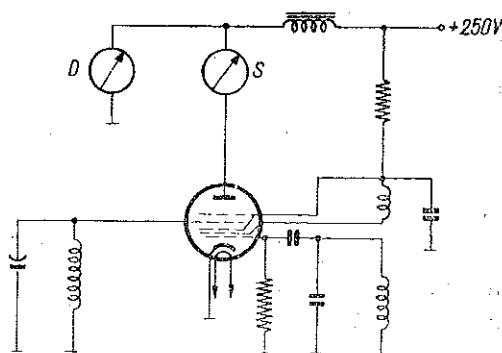


Rys. 46

miarowy przedstawiony na rys. 46 ustawia się zawsze normalnie do powierzchni powłoki modelu. Powierzchnia zbliżanej elektrody ma kształt czaszy kulistej w celu zmniejszenia wpływu błędu ustawienia osi elektrody względem powierzchni powłoki. Urządzeniem wykrywającym zmiany pojemności jest detektor fazowy, zwany niekiedy fazitronem. Omówieniem tego układu nie będziemy się tutaj szczegółowo zajmowali. Ograniczymy się tylko do podania jego charakterystyki, tj. prądu anodowego jako funkcji odległości pomiędzy elektrodami (rys. 47). Schemat układu podany jest na rys. 48. Użyta lampa jest lampą pięciosiatkową 6A8.



Rys. 47



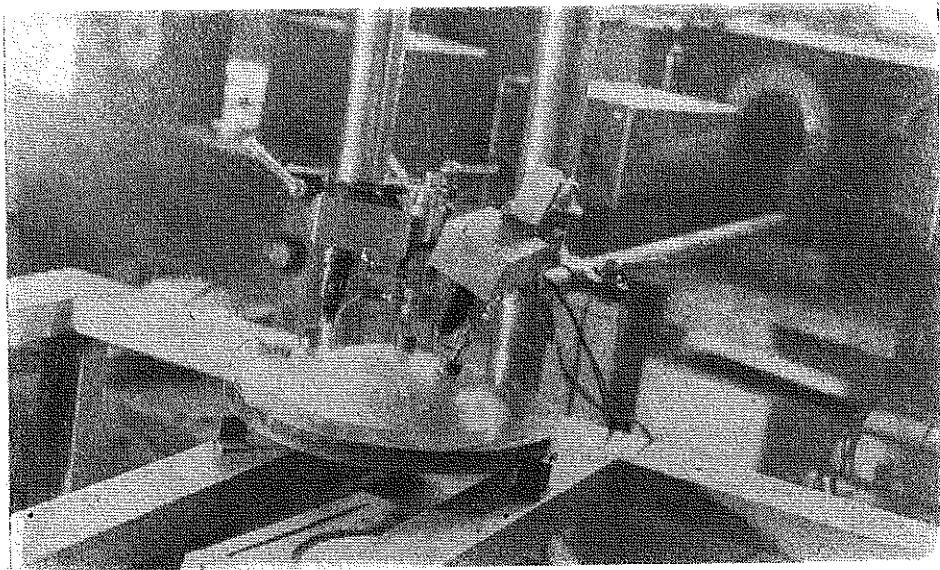
Rys. 48

W przewodzie anodowym tej lampy znajdują się dwa miliamperomierze o poborze 3 mA. Wskazania jednego z nich S są proporcjonalne do odległości pomiędzy elektrodami. Wskazania drugiego D są proporcjonalne do zmian tej odległości w czasie, czyli do amplitudy drgań. Przyrząd cechujemy za pomocą śruby mikrometrycznej sporządzając wyżej wspomnianą charakterystykę. Wartości prądu anodowego odczytujemy na miliamperomierzu S. Jak więc widzimy, cechowanie można przeprowadzić w każdej chwili bez użycia jakiegokolwiek aparatury dodatkowej.

Przystępując do pomiaru ustawiamy elektrodę w środku O prostoliniowej części charakterystyki posługując się dla znalezienia tego punktu

miliamperomierzem *S*. W przypadku pojawienia się drgań elektrody, wychylił się miliamperomierz *D*. Wychylenie jego jest proporcjonalne do średniej wartości zmian prądu anodowego. Znając zmiany prądu anodowego możemy znaleźć rachunkowo lub graficznie amplitudę drgań czyli zmiany odległości *h*.

W przypadku wykonania modelu z materiału, który nie może być drugą elektrodą czujnika pojemnościowego (np. ze szkła, celuloиду, gipsu itp.), należy model pokryć warstwą metalu. Uzyskano to przez posrebrzenie lub pokrycie modelu folią aluminiową. Czujnik pojemnościowy ustawiony nad modelem przedstawia rys. 49.



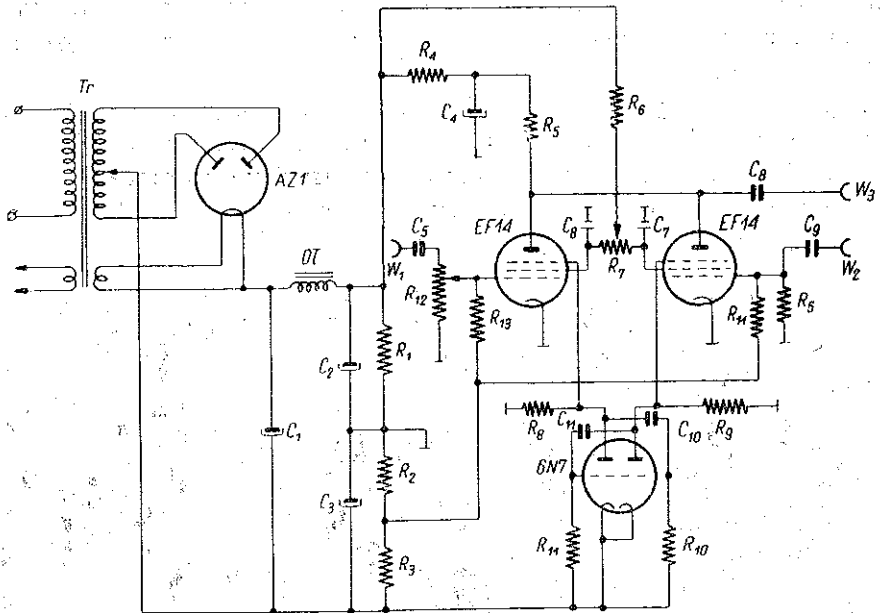
Rys. 49

Czynnikiem wymuszającym drgania jest podobnie jak przy aparaturze Philipsa głośnik akustyczny. Urządzenie wymuszające składa się z generatora napięcia zmiennego oraz wzmacniacza zasilającego głośnik umieszczony pod modelem. W pobliżu modelu znajduje się mikrofon, który steruje urządzenie do automatycznej regulacji wzmacniacza utrzymując w czasie pomiaru i szukania rezonansu modelu stały poziom mocy akustycznej oddawanej przez głośnik.

Jako zalety tego czujnika można wymienić jego wrażliwość nawet na bardzo małe wychylenia w granicach już kilku mikronów oraz możliwość dokonania pomiaru amplitud nawet przy wysokich częstotliwościach (kilka tysięcy cykli).

Ujemnymi cechami w stosunku do czujnika indukcyjnego jest mniej dokładne ustawienie czujnika nad badanym punktem (czujnik zakończony

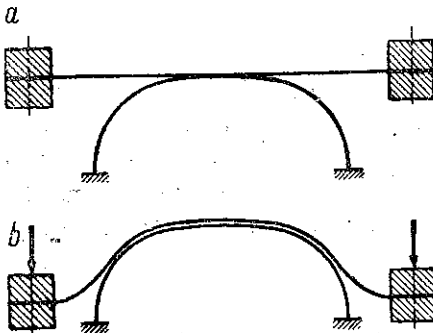
jest dość płaską elektrodą o średnicy 15 mm) oraz konieczność powlekania powłok modeli wykonanych z celuloidu i plexiglasu metalem.



$W_1$  - wejście I     $W_2$  - wejście II     $W_3$  - wyjście

Rys. 50

Ażeby powłoka niemetaliczna mogła być drugą okładką kondensatora, naklejano warstewkę cynfolii albo posrebrzano powłokę przez wytrącenie srebra z roztworu  $AgNO_3$ . W ten sposób uzyskiwano bardzo cienką i równomiernie rozłożoną warstwę metalu bez zmiany (praktycznie biorąc) sztywności powłoki.



Rys. 51

W celu równoczesnego pomiaru drgań dwóch różnych punktów powłoki zostały wykonane dwa czujniki (rys. 49), które za pomocą przerywacza elektronowego rzucają obraz na oscylograf. Układ wykonanego w Laboratorium przerywacza przedstawiony jest schematycznie na rys. 50.

W ten sposób oprócz doświadczalnego zbadania częstotliwości rezonansowych drgań powłoki i względnej amplitudy drgań poszczególnych punktów (co można określić za pomocą jednego czujnika) można było określić stosunki faz drgań dwóch punktów.

Operowanie dwoma czujnikami, z których jeden ustawiony był zwykle nad pewnym charakterystycznym punktem powłoki np. nad wierzchołkiem kopuły, pozwoliło nie tylko na szybsze i łatwiejsze określenie postaci drgań i ustalenia położenia linii węzłowych, ale i na dokładniejszą analizę drgań poszczególnych punktów powłoki. Miało to istotne znaczenie przy badaniu drgań układu, którego postać jest trudna do określenia, np. kopuły kulistej, gdzie (zgodnie z rezultatem obliczenia teoretycznego podanego w przykładzie 5) przy nieznaczonej zmianie częstotliwości nastąpić może zmiana postaci oraz może wystąpić względne przesunięcie fazowe poszczególnych punktów powłoki.

#### 4.4. Akustyczna metoda określania częstotliwości drgań własnych, [19]

W danym przypadku interesować nas będzie tylko wysokość dźwięku przedmiotu drgającego. Jeżeli ustalimy wysokość dźwięku wydawanego przez ustrój drgający np. przy uderzeniu, w skali muzycznej określić możemy częstotliwość drgań własnych układu.

Podany sposób określenia częstotliwości drgań uzależniony jest od czułości słuchu badacza i nie daje dostatecznej pewności ustalenia postaci drgań układu. Sposób ten może być z pożytkiem stosowany przy powłokach wykonanych z materiału dającego czysty dźwięk wyraźnej wysokości (np. miedź, brąz, stal czy szkło).

Ponieważ określenie częstotliwości drgań na podstawie słuchu traktowaliśmy tylko dla wstępnego określenia lub jako dodatkową kontrolę przy ustalaniu częstotliwości rezonansowych, na tym opis metody kończymy. Dokładniejszy opis podał autor w artykule [19].

### 5. WYKONANIE MODELI

#### 5.1. Nadanie powłoce żądanego kształtu

Modele powłok (o stałej grubości) wykonywane były z materiałów w arkuszach. Jako materiał służył przede wszystkim celuloid i plexiglas oraz rozmaitego rodzaju blachy z metali żelaznych i kolorowych.

Nadanie powłoce żądanego kształtu odbywało się dwoma sposobami:

(1) przez wygięcie i przymocowanie odpowiednio wyciętego elementu z arkusza płaskiego do sztywnych elementów ograniczających powłokę (powierzchnie rozwijalne) oraz

(2) przez wyrobienie odpowiedniego kształtu za pomocą prasy lub innego urządzenia z zastosowaniem obróbki cieplnej (dla powierzchni nierozwijalnych oraz powierzchni rozwijalnych ale o dużej krzywiznie).

## 5.2. Modele z celuloиду i plexiglasu

Dużą zaletą celuloиду a zwłaszcza plexiglasu przy badaniach modelowych jest łatwość formowania z płaskich arkuszy dowolnych kształtów powłok w podwyższonej temperaturze oraz możliwość klejenia poszczególnych elementów w jeden układ.

Formowanie sklepień cylindrycznych z cienkich arkuszy o grubości 0,5 - 2,0 mm przy stosunku grubości powłoki do promienia krzywizny w granicach 1:1000 - 1:200 nie nastęrczało technicznie żadnych trudności. Wykonywano uprzednio ze znacznie grubszych arkuszy (lub sklejało z kilku cieńszych warstw) sztywne łuki szczytowe oraz belki boczne, do których przyklejano następnie na zimno wygiętą cienką powłokę.

W przypadku większych krzywizn arkusze celuloиду lub plexiglasu należy wyginać w podwyższonej temperaturze, gdyż stają się wtedy wiotkie i bardzo podatne do formowania. Wygniatania odpowiedniej krzywizny trzeba wtedy dokonać na wcześniej wykonanej formie (np. z drewna). Celuloid staje się bardzo podatny na odkształcenia plastyczne już w temperaturze poniżej 100° i wyginać go można w gorącej wodzie; plexiglas wymaga temperatury wyższej, 120-140°C. Po nadaniu powłoce żądanego kształtu pozostawiamy ją na formie do ostygnięcia.

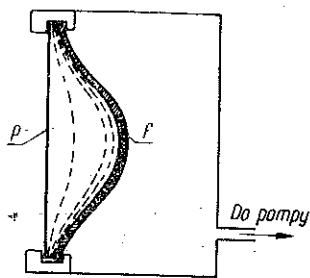
Po stwardnieniu możemy powłokę zdjąć z formy, odpowiednio przyciąć i umocować do sztywnych elementów brzegowych.

Znacznie trudniejsze jest uzyskanie z płaskiego arkusza celuloidu lub plexiglasu powierzchni nierozwijalnej. Dotyczy to np. wszelkiego rodzaju kopuł, sklepień siodłowych, beczkowych, konoidalnych itp. Kopułę osiowo-symetryczną uzyskiwano przez rozpięcie w sztywnym pierścieniu stalowym płaskiego arkusza materiału.

Po wstawieniu do suszarki (z automatyczną regulacją temperatury) celuloid i plexiglas staje się plastyczny i przy obciążeniu pierścienia do dołu materiał doznaje wydłużenia przyjmując w części środkowej kształt formy (rys. 51a i 52).

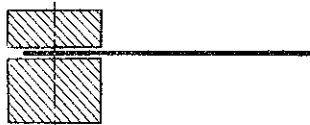
Bardziej dowolną powierzchnię uzyskać można przez wykonanie hermetycznie zamkniętego pudła (np. stalowego), którego jedną ze ścian stanowi płyta plexiglasu lub celuloidu (oznaczona literą p na rys. 52).

Wewnątrz znajduje się forma, jaką chcemy nadać powłoce z nawierconymi otworkami f. Przez wypompowanie powietrza większe ciśnienie zewnętrzne wgniata arkusz do środka. Jeżeli teraz umieścimy arkusz celuloidu lub plexiglasu w temperaturze płynięcia materiału, to pod wpływem obciążenia zewnętrznego przyjmie dokładnie kształt formy. Uzyskać możemy w ten sposób niemal dowolne kształty powłok.



Rys. 52

Trzeba podkreślić, że w obydwu omawianych przypadkach formowania powierzchni nierozwijalnych należy bardzo dbać o utrzymanie stałej temperatury w granicach lekkiego płynięcia, tak aby formowanie powłoki przebiegało powoli i równomiernie (w ciągu około 1-2 godzin). Przegrzanie może powodować nierównomierne wydłużenie a nawet zniszczenie materiału (zwłaszcza celuloidu), niedo-grzanie pęknięcia oraz zmianę struktury. Lepszym od celuloidu materiałem do wykonywania modeli jest plexiglas, który jest całkowicie przezroczysty, bardziej jednorodny, wykonany w gładkich i równych arkuszach, przy tym nie jest materiałem łatwopalnym.



Rys. 53

W przypadku wykonania powłoki przez wygniatanie w podwyższonej temperaturze liczyć się trzeba z naprężeniami wstępnymi, dlatego jest rzeczą celową użycie modelu do badań po pewnym czasie. Autor próbował wyciąć część powłoki cylindrycznej z modelu, który wykonano przez wygięcie arkusza celuloidu w temperaturze pokojowej. Powłoka po 3-4 tygodniach zachowała swój kształt, co świadczy o zniknięciu naprężeń od wygięcia powłoki.

Do innych czynników wpływających na występowanie naprężeń wstępnych w modelu należy zaliczyć występowanie pewnych naprężeń wewnętrznych w arkuszach wykonanych fabrycznie (zwłaszcza w pobliżu krawędzi) oraz powstawanie naprężeń obróbczych wynikających z niewłaściwej obróbki materiału, [28].

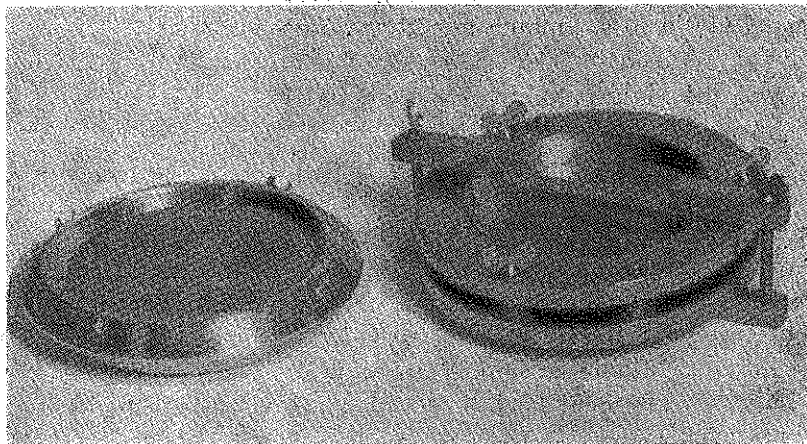
### 5.3. Modele z metali

Wykonano modele powłok z blachy stalowej, miedzianej, mosiężnej, cynkowej, aluminiowej i alupolonowej. Ze względu na trudniejsze warunki formowania powłok blachy używano przede wszystkim do powłok cylindrycznych. Powłokę przykręcono do sztywnych łuków wykonanych z grubego płaskownika (por. model do badania stateczności powłok, rys. 36). Przekrój przez utwierdzoną w sztywnych łukach powłokę wzdłuż tworzącej podaje rys. 53.

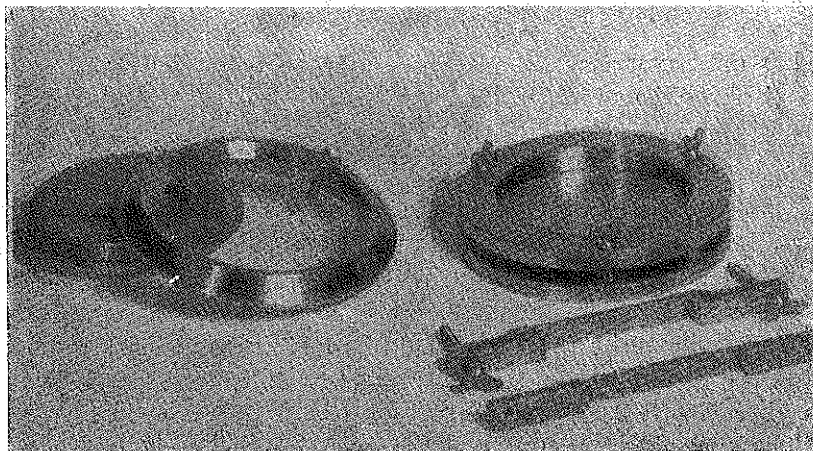
Model płyty okrągłej utwierdzonej na obwodzie przedstawia rys. 54a i 54b, gdzie płytka ściśnięta jest pomiędzy sztywnymi pierścieniami. Uzyskano w ten sposób warunki zbliżone do całkowitego utwierdzenia oraz możliwość szybkiej wymiany samej powłoki.

Wykonywanie całkowitych modeli sklepień z metalu napotyka na znaczne trudności. Oprócz wykonania samych usztywnień brzegowych dla powłoki (łuki szczytowe i belki boczne) zgodnie z przekrojami sklepień żelbetowych napotyka się również na trudności przy monolitycznym połączeniu elementów.

Spawanie czy lutowanie wywołuje zwłaszcza w cienkich powłokach duże naprężenia wstępne, miejscową zmianę struktury materiału oraz może powodować zmianę kształtu powłoki. Dlatego też wykonywano z metalu zasadniczo nie model odpowiadający sklepieniom żelbetowym, a tylko model powłoki z określonymi warunkami brzegowymi.



Rys. 54a



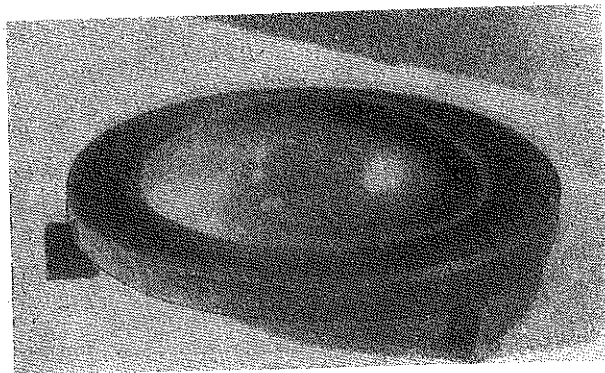
Rys. 54b

Wykonanie w płytach podparcia przegubowego napotyka już na bardzo znaczne trudności i sprowadza się zasadniczo do pewnego utwierdzenia.

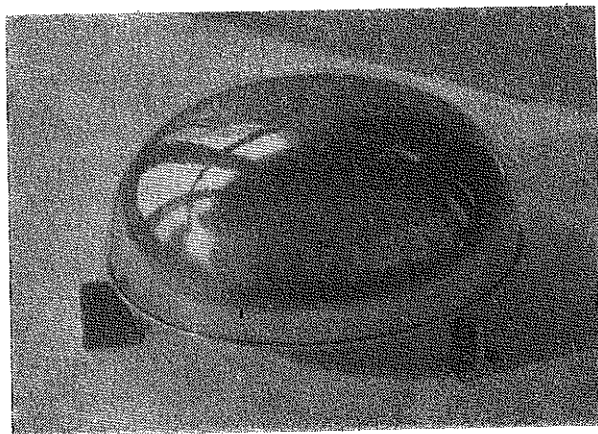
Tworzenie przegubu w powłokach po linii podparcia jest technicznie biorąc jeszcze trudniejsze i niepewne co do wyniku. Dlatego wykonywano przeważnie modele powłok utwierdzonych.



Oprócz powłok cylindrycznych wykonano z blach mosiężnych, miedzianych i aluminiowych kopuły osiowo symetryczne. Kształt kopuły kulistej otrzymywano przez wygniecenie go w prasie, ponadto dowolne zasadniczo kształty osiowo symetryczne uzyskiwano przez obróbkę dry-



Rys. 55a



Rys. 55b

kierską na formie drewnianej. Fotografie kopuły kulistej z pierścieniem oporowym przedstawia rys. 55a, a kopułę eliptyczną rys. 55b. W obu przypadkach przy wykonaniu powłoki kopuły panują w materiale znaczne naprężenia wstępne, które eliminowano przez wyżarzenie.

#### 5.4. Obrabiarki do wykonywania modeli

Badania doświadczalne na tak skomplikowanych układach, jakimi są zwłaszcza powłoki o podwójnej krzywiznie, nastęrczały poważne trudności przy wykonaniu samych modeli. Dlatego laboratorium należało wyposażać w dobry warsztat mechaniczny. Oprócz typowych obrabiarek do

metali, plastików i drzewa, a więc tokarni, strugarki, frezarki, szlifierki i wiertarki (z niektórych brakujących maszyn korzysta laboratorium z pomocy Zakładu Metali IPPT PAN) trzeba było wykonać kilka małych obrabiarek dostosowanych specjalnie do wykonywania modeli sklepień, np. piłki mechanicznej do wycinania oraz wycinarki do plastików.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] M. Ptic Borkowski, *Cienkościenne konstrukcje wchrowate*, Prace Nauk. Bad. IBB., Warszawa 1949.
- [2] A. Lisowski, *Wyboczenie kopuł obrotowych*, Arch. Mech. Stos. 4, Gdańsk 1952.
- [3] E. Schwerin, *Zeitschr., angew. Math. Mech.* 1922, s. 81.
- [4] R. Zoelly, *Dissertation*, Zurich 1915.
- [5] A. Borcz, *Wyniki badań na modelu łupiny konoidalnej*, Zesz. Nauk. Polit. Wr., Budownictwo 8, 1955.
- [6] S. Drobot, *O analizie wymiarowej*, Zast. Mat. tom 1, z. 4, Warszawa-Wrocław 1954.
- [7] В. З. Власов, *Общая теория оболочек и ее приложения в технике*, Москва-Leningrad 1949.
- [8] P. Csönka, *The Buckling of a Spheroidal Shell Curved in Two Directions*, Acta Techn. Acad. Sci., Hungariae, 1956.
- [9] В. М. Феодосиев, *Об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего распределенного давления*, Прикл. Мат. Мех. 1(1954).
- [10] Th. Kármán, H. S. Tsien, *The Buckling of Spherical Shells by External Pressure*, Journ. Aeronaut. Sci. 7 (1939), p. 43.
- [11] A. Lisowski, *Określenie postaci wyboczenia powłok cienkościennych*, Inżyn. Bud. 1956.
- [12] H. Marcus, *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten*, Berlin 1924.
- [13] Н. М. Муштари и Р. Г. Суркин, *О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия сферической оболочки под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления*, Прикл. Мат. Мех. 6(1950).
- [14] *Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении*, wyd. zbiorowe pod red. S. A. Ponomariewa, Maszgiz, 1952.
- [15] *Sesja naukowo-sprawozdawcza Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN*, Inżyn. Bud. 1955.
- [16] W. Wierzbicki, *Mechanika budowl*, PWN, Warszawa 1955.
- [17] A. Lisowski, *Wyboczenie kopuł kulistych w świetle badań modelowych*, Rozpr. Inżyn. 1 (1957).
- [18] Ю. Ю. Гольденблат и А. М. Сизов, *Справочник по расчету стержневых конструкций на устойчивость и колебания*, Москва 1952.
- [19] A. Lisowski, *Akustyczna metoda obliczania drgań własnych ustrojów sprężystych*, Inżyn. Bud. 1952.
- [20] A. Lisowski, *Drgania i stateczność powłok cylindrycznych*, Inżyn. Bud. 1955.
- [21] A. Lisowski, *Zastosowanie metody sił do obliczania częstotliwości drgań własnych ram płaskich i przestrzennych*, Inżyn. Bud. 1955.
- [22] A. Sommerfeld, *Eine einfache Vorrichtung zur Veranschaulichung des Knickungsvorganges*, Z. V. D. I., 1905, s. 1320.

[23] W. Wierzbicki, *Zadania z teorii naprężeń, wyboczenia i drgań*, PWN, Warszawa 1953.

[24] *Der Gebrauch von Modellen bei der Lösung von statisch unbestimmten System*, E. Georg, B. E. Beggs, 1927.

[25] A. Lisowski, *Optyczna metoda mierzenia odkształceń sprężystych układów przestrzennych na modelach*, Inżyn. Bud. 1952.

[26] A. Lisowski, A. Ormicki i B. Miąsik, *Czujnik pojemnościowy do pomiarów drgań*, Inżyn. Bud. 1956.

[27] E. Szczepaniak, *Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć*, Rozpr. Inżyn. (1953).

[28] J. T. Pindera, *Technika elastooptycznych badań płaskiego stanu naprężenia*, Rozpr. Inżyn. 1 (1955).

## Резюме

### УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В работе приводятся следующие предположения автора, дающие возможность определить вид деформации при потере устойчивости, а также основную форму колебаний оболочки: (1) форма выпучивания имеет характер подобный деформации данной системы под действием сосредоточенной силы; (2) основная форма колебаний системы согласуется с формой выпучивания этой системы.

Определив форму деформации, можно перейти к вычислению критической нагрузки или колебаний оболочки.

Рассматривается выпучивание цилиндрических оболочек и сферических куполов. В случае сферического купола получено, на основании первого предположения, следующее значение критической нагрузки (при местной потере устойчивости):

$$(1) \quad q_{kr} = E \frac{h^3}{R^3} \frac{0,587}{\sqrt{3(1-\nu^2)}};$$

здесь  $E$  коэффициент упругости,  $h$  толщина оболочки,  $R$  радиус кривизны купола,  $\nu$  коэффициент Пуассона. Для определения формы и частоты резонансных колебаний оболочки применен метод сил. Полученный результат подтверждает второе предположение автора.

В случае оболочек, деформации которых не могут быть вычислены теоретически, можно прибегать к исследованиям на моделях.

С этой целью автор, используя размерный анализ для вопросов устойчивости и колебаний, вывел формулы, определяющие модельные законы. При предположении геометрического подобия модели с объектом и пренебрегая коэффициентом Пуассона, были получены для оболочек следующие очень простые зависимости:

(а) модельное соответствие, касающееся выпучивания,

$$(2) \quad \frac{q_{kr}'}{q_{kr}''} = \frac{E'}{E''},$$

где  $q_{kr}$  критическая нагрузка, причем один индекс определяет модель, а два индекса объект;

(б) модельное соответствие, касающееся колебаний:

$$(3) \quad \frac{n'}{n''} = \frac{L''}{L'} \sqrt{\frac{E' M''}{E'' M'}},$$

где  $n$  обозначает частоту колебаний,  $L$  размеры модели, а  $M$  массу на единицу объема оболочки.

В качестве примера применения формул (2) и (3) рассматривается коноидная оболочка. В работе приводятся результаты и фотоснимки исследований.

#### Summary

#### INVESTIGATION OF SHELL VIBRATION AND STABILITY BY MEANS OF MODEL TESTS

The author introduces certain assumptions enabling the determination of the form of buckling and the fundamental mode of vibration of a shell. The first assumption is, that the form of buckling of the system is similar to its deflection under the action of a concentrated force. The second assumption is that the fundamental mode of vibration is similar to the form of buckling.

After the determination of the deflection, calculations of the critical load or the frequency of vibration of the given shell can be proceeded with.

Buckling of cylindrical and spherical shells is considered. In the case of a spherical shell the first assumption leads to the following value of critical load (or local stability loss):

$$(1) \quad q_{kr} = E \frac{h^2}{R^2} \frac{0,587}{\sqrt{3(1-\nu^2)}},$$

where  $E =$  Young's modulus,  $h =$  shell thickness,  $R =$  radius of curvature and  $\nu =$  Poisson's ratio.

The force method is used for the computation of the mode and frequency of resonance vibration of the shell. The result obtained confirms the second assumption.

In the case of shells the deformation of which cannot be computed theoretically recourse can be made to model tests.

For this purpose, equations determining similarity laws for problems of stability and vibration are derived by means of dimensional analysis. Assuming geometrical similarity between the model and the real body and disregarding Poisson's ratio, the following simple equations for shells are obtained:

(a) The similarity law for buckling,

$$(2) \quad \frac{q'_{kr}}{q''_{kr}} = \frac{E'}{E''},$$

where  $q$  is the critical load. One prime refers to the model, two primes to the real body.

(b) The similarity law for vibration,

$$(3) \quad \frac{n'}{n''} = \frac{L''}{L'} \sqrt{\frac{E' M''}{E'' M'}},$$

where  $n$  vibration frequency,  $L$  linear dimensions of model and  $M$  specific mass (per unit volume).

As an example of application of the Eqs. (2) and (3), a conoidal shell is discussed. Results of investigations and photographs of model tests by means of the author's method are included.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 marca 1957 r.*