

PIOTR WILDE

PEWNE ZAGADNIENIE TERMOSPŁĘZyste
DLA ORTOTROPOWEJ TARCZY PROSTOKĄTNEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXXXVIII

Tematem pracy jest zagadnienie wyznaczenia naprężeń termicznych w tarczy prostokątnej, której brzegi są wolne od naprężeń. Przyjęto, że płyta jest ortotropowa tak pod względem charakterystyk sprężystych jak i termicznych. Temperatura na brzegach jest znana i rozłożona w sposób dowolny. Założono, że ciepło odprowadzane jest z powierzchni płyty proporcjonalnie do różnicy temperatur płyty i otoczenia w danym miejscu. Rzeczywisty stan fizyczny jest bardziej skomplikowany; przy niezbyt dużych różnicach temperatur model ten daje dobre przybliżenie. W niniejszej pracy rozpatrzono przypadek ustalonego pola temperatur.

1. Przepływ ciepła przez ciało ortotropowe określony jest zależnościami:

$$(1.1) \quad f_x = k_{11} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad f_y = k_{22} \frac{\partial T}{\partial y},$$

gdzie symbole f_x i f_y oznaczają ilość ciepła przepływającego przez powierzchnie jednostkowe, k_{11} i k_{22} współczynniki przewodnictwa oraz x i y współrzędne układu prostokątnego. Niech strata ciepła z obu powierzchni będzie określona wzorem, [1]:

$$(1.2) \quad w(x, y) = 2h(T - \Theta),$$

gdzie T oznacza temperaturę tarczy w danym miejscu, Θ temperaturę otoczenia w danym miejscu (średnia arytmetyczna temperatur nad i pod tarczą) oraz h współczynnik proporcjonalności.

Równanie bilansu ciepła

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{w(x, y)}{\delta}$$

w omawianym przypadku ma postać

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - p^2 T = -p^2 \Theta,$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

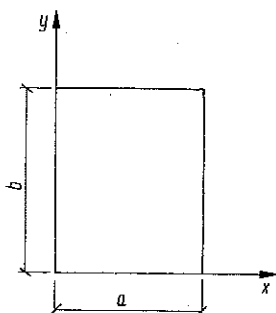
$$\eta^2 = \frac{k_{22}}{k_{11}}, \quad p^2 = \frac{2h}{\delta k_{11}}$$

(δ jest grubością tarczy).

Przyjmijmy, że dany na brzegach tarczy (rys. 1) rozkład temperatur można przedstawić następującymi szeregami Fouriera:

$$(1.4) \quad \begin{cases} T(0, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \beta_m y, & T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin a_n x, \\ T(a, y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \beta_m y, & T(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin a_n x, \end{cases}$$

gdzie oznaczono:



Rys. 1

$$a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$$

Oznaczając przez $S\{T(x, y)\}$ skończoną transformację Fouriera funkcji $T(x, y)$ określoną wzorem

$$S\{T(x, y)\} = \int_0^a \int_0^b T(x, y) \sin a_n x \sin \beta_m y dx dy,$$

znajdziemy ogólne rozwiązanie równania (1.3) przy danych warunkach brzegowych (1.4), [2]:

$$(1.5) \quad S\{T\} = \frac{1}{a_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2} \left\{ p^2 S\{\Theta\} + \frac{a_n b}{2} [A_m - (-1)^n B_m] + \frac{\beta_m a}{2} [C_n - (-1)^m D_n] \right\}.$$

Rozwiązanie wyrażone za pomocą podwójnego szeregu Fouriera ma postać

$$(1.6) \quad T = \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} S\{T\} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

W pewnych przypadkach wygodniej jest rozwiązanie (1.6) przedstawić w innej postaci.

Przyjęto, że pole temperatur określone jest za pomocą sumy dwóch funkcji:

$$(1.7) \quad T = \bar{T} + \bar{\bar{T}}.$$

Na jedną z tych funkcji można narzucić pewien warunek. Przyjęto, że funkcja \bar{T} spełnia równanie różniczkowe

$$(1.8) \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} = 0$$

przy danych warunkach brzegowych (1.4).

Transformata funkcji określona jest wzorem

$$(1.9) \quad S\{\bar{T}\} = \frac{1}{\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2} \left\{ \frac{\alpha_n b}{2} [A_m - (-1)^n B_m] + \frac{\beta_m a}{2} [C_n - (-1)^m D_n] \right\}.$$

Funkcja \bar{T} musi być tak dobrana, ażeby funkcja (1.7) spełniała równanie różniczkowe zagadnienia (1.3). Po podstawieniu (1.7) do równania (1.3) przy uwzględnieniu równania (1.8) otrzymano równanie

$$(1.10) \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} - p^2 \bar{T} = -p^2 (\Theta - \bar{T}).$$

Ponieważ funkcja \bar{T} spełnia warunki brzegowe (1.4), to funkcja \bar{T} musi być równa zero na brzegach. Przy danych warunkach brzegowych skończona transformata Fouriera ma postać

$$(1.11) \quad S\{\bar{T}\} = \frac{p^2}{\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2} S\{\Theta - \bar{T}\}.$$

Podstawiając do równania (1.7) funkcje (1.9) i (1.11) otrzymuje się po przekształceniach uprzednio otrzymaną zależność (1.5). Rozłożenie na dwie funkcje daje tę korzyść, że w pewnych przypadkach funkcja \bar{T} nie daje naprężeń, pozostaje więc obliczenie naprężeń związanych z polem temperatur określonym przez funkcję (1.11); pole to wyznacza na brzegach temperaturę równą zero. Rozpatrzono szczegółowo przypadek temperatury zmieniającej się liniowo na brzegach. W tym przypadku funkcja \bar{T} jest określona wzorem

$$(1.12) \quad \bar{T} = T(0, 0) + [T(a, 0) - T(0, 0)] \frac{x}{a} + [T(0, b) - T(0, 0)] \frac{y}{b} + [T(a, b) + T(0, 0) - T(0, b) - T(a, 0)] \frac{xy}{ab},$$

a jej transformata ma postać

$$(1.13) \quad S\{\bar{T}\} = \frac{1}{\alpha_n \beta_m} [T(0, 0) - (-1)^m T(0, b) - (-1)^n T(a, 0) + (-1)^{n+m} T(a, b)].$$

Transformatę funkcji \bar{T} otrzymamy bezpośrednio z podstawienia funkcji (1.13) do wzoru (1.11). Dla wykonania obliczeń wygodnie jest sprowadzić powyższy przypadek liniowej temperatury na brzegu do czterech przypadków, które pozwolą wykorzystać udogodnienia, jakie daje symetria i antysymetria. Funkcje określające pola temperatur w tych przypadkach

na podstawie wyprowadzonych zależności określone będą następującymi szeregami podwójnymi:

$$(a) \quad T(0, 0) = T(0, b) = T(a, 0) = T(a, b) = T_{ss},$$

$$(1.14.1) \quad T = T_{ss} + \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^2}{\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2} S\{\Theta\} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y - \\ - \frac{16T_{ss}}{ab} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{p^2}{\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2} \frac{1}{\alpha_n \beta_m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y;$$

$$(b) \quad T(0, 0) = T(0, b) = -T(a, 0) = -T(a, b) = T_{as}.$$

$$(1.14.2) \quad T = T_{as} \left(1 - 2 \frac{x}{a}\right) + \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^2}{\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2} S\{\Theta\} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y - \\ - \frac{16T_{as}}{ab} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{p^2}{\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2} \frac{1}{\alpha_n \beta_m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y;$$

$$(c) \quad T(0, 0) = T(a, 0) = -T(0, b) = -T(a, b) = T_{sa},$$

$$(1.14.3) \quad T = T_{sa} \left(1 - 2 \frac{y}{b}\right) + \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^2}{\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2} S\{\Theta\} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y - \\ - \frac{16T_{sa}}{ab} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{p^2}{\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2} \frac{1}{\alpha_n \beta_m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y;$$

$$(d) \quad T(0, 0) = -T(a, 0) = -T(0, b) = T(a, b) = T_{aa},$$

$$(1.14.4) \quad T = T_{aa} \left(1 - 2 \frac{x}{a} - 2 \frac{y}{b} + 4 \frac{xy}{ab}\right) + \\ + \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^2}{\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2} S\{\Theta\} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y - \\ - \frac{16T_{aa}}{ab} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{p^2}{\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2} \frac{1}{\alpha_n \beta_m} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

2. Odształcenia w ciele ortotropowym przy dwukierunkowym stanie naprężeń określone są następującymi wzorami, [3]:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{11} T, \\ \varepsilon_y = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{22} T, \end{cases} \quad \gamma_{xy} = a_{66} \tau_{xy}.$$

Przy przyjęciu, że naprężenia określone są za pomocą funkcji naprężeń wzorami

$$(2.2) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

równanie różniczkowe zagadnienia ma postać, [3],

$$(2.3) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{2a_{12} + a_{66}}{a_{11}} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{a_{22}}{a_{11}} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = -\frac{a_{11}}{a_{11}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{a_{22}}{a_{11}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Przyjmujemy oznaczenia

$$(2.4) \quad \varepsilon^4 = \frac{a_{22}}{a_{11}}, \quad \rho = \frac{2a_{12} + a_{66}}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}}, \quad \varphi = \frac{a_{22}}{a_{11}};$$

wtedy równanie (2.3) przyjmie następującą postać:

$$(2.5) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2\rho\varepsilon^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = -\frac{a_{11}}{a_{11}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right).$$

3. Dla uzyskania rozwiązania w omawianym przypadku należy rozwiązać równanie (2.5) przy założeniu, że naprężenia normalne i styczne na brzegach są równe zero. Powyższe warunki brzegowe równoważne są warunkom, że funkcja naprężeń F oraz jej pochodne cząstkowe w kierunku normalnym do brzegów są równe zero. Przyjęto, że odpowiednie drugie pochodne funkcji naprężeń na brzegach określone są za pomocą następujących szeregów Fouriera:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, y) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \beta_m y, & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin a_n x, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \sin \beta_m y, & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin a_n x. \end{cases}$$

Przy warunkach brzegowych typu (3.1) oraz $F=0$ na wszystkich brzegach funkcja naprężeń określona jest następującym podwójnym szeregiem Fouriera [otrzymanym za pomocą transformacji równania (2.5)]:

$$(3.2) \quad F(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn}} \left\{ -\frac{a_n b}{2} \varepsilon^4 [E_m - (-1)^n F_m] - \right. \\ \left. - \frac{\beta_m a}{2} [G_n - (-1)^m H_n] + \frac{a_{11}}{a_{11}} (\beta_m^2 + \varphi a_n^2) S[T] - \varphi \frac{a_{11}}{a_{11}} \frac{\beta_m a}{2} [C_n - (-1)^m D_n] - \right. \\ \left. - \frac{a_{11}}{a_{11}} \frac{a_n b}{2} [A_m - (-1)^n B_m] \right\} \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie

$$\Delta_{mn} = \beta_m^4 + 2\varepsilon^2 \rho a_n^2 \beta_m^2 + \varepsilon^4 a_n^4.$$

W przypadku liniowego rozkładu temperatur na brzegach pole temperatur określone za pomocą funkcji \bar{T} nie daje naprężeń. W tym przypadku funkcja (3.2) uprości się do postaci

$$(3.2.1) \quad F(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn}} \left\{ -\frac{a_n b}{2} \varepsilon^4 [E_m - (-1)^n F_m] - \right. \\ \left. - \frac{\beta_m a}{2} [G_n - (-1)^m H_n] + \frac{a_{11}}{a_{11}} (\beta_m^2 + \varphi a_n^2) S\{\bar{T}\} \right\} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Dla wykonania obliczeń numerycznych wygodnie jest sprowadzić ogólny przypadek liniowej temperatury do czterech przypadków, które umożliwią wykorzystanie udogodnień, jakie daje symetria i antysymetria. Na przykład w przypadku podwójnej symetrii funkcja naprężeń będzie określona wzorem:

$$(3.3) \quad F(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn}} \left[-a_n b \varepsilon^4 E_m - \beta_m a G_n + \right. \\ \left. + \frac{a_{11}}{a_{11}} (\beta_m^2 + \varphi a_n^2) S\{\bar{T}\} \right] \sin a_n x \sin \beta_m y$$

(patrz strona 8), gdzie $n = 1, 3, 5, \dots$, $m = 1, 3, 5, \dots$, a funkcją T określona jest wzorem (1.14.1). Pozostałe przypadki różnić się będą tylko wskaźnikami sumowania zgodnie ze wzorami (1.14). Współczynniki E_m i G_n we wzorze (3.3) należy dobrać tak, ażeby spełnione były warunki brzegowe zagadnienia. Pochodna funkcji naprężeń względem x określona jest na brzegu $x=0$ następującym pojedynczym szeregiem Fouriera:

$$(3.4) \quad \frac{\partial F(0, y)}{\partial x} = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \left(-b \varepsilon^4 E_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\Delta_{mn}} - \beta_m a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n G_n}{\Delta_{mn}} + \right. \\ \left. + \frac{a_{11}}{a_{11}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + \varphi a_n^2}{\Delta_{mn}} a_n S\{\bar{T}\} \right) \sin \beta_m y.$$

Pojedynczy szereg Fouriera (3.4) o współczynnikach określonych przez sumę szeregów pojedynczych jest równy tożsamościowo zero, jeżeli wszystkie współczynniki rozwinięcia są równe zero. Przyrównując do zera współczynniki rozwinięcia otrzymano układ równań (równania dla kolejnych $m = 1, 3, 5, \dots$):

$$(3.5.1) \quad b \varepsilon^4 E_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\Delta_{mn}} + \beta_m a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n G_n}{\Delta_{mn}} = \frac{a_{11}}{a_{11}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + \varphi a_n^2}{\Delta_{mn}} a_n S\{\bar{T}\}.$$

Analogicznie wykorzystując drugi warunek brzegowy (pochodna w kierunku y równa się zero) na brzegu $y=0$ otrzymano drugi układ równań (równania dla kolejnych $n = 1, 3, 5, \dots$):

$$(3.5.2) \quad a_n b \varepsilon^4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m E_m}{\Delta_{mn}} + a G_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{\Delta_{mn}} = \frac{a_{11}}{a_{11}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + \varphi a_n^2}{\Delta_{mn}} \beta_m S\{\bar{T}\}.$$

Przez podstawienie można oba układy równań (3.5.1) i (3.5.2) sprowadzić do dwóch układów równań niezależnych:

W przypadku $\Theta = \text{const.}$ prawe strony równań (3.5.1) i (3.5.2) mają postać

$$(3.6.1) \quad 4(\Theta - T_{ss}) \frac{a_{11}}{a_{11}} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + \varphi a_n^2}{\beta_m \Delta_{mn}} \frac{p^2}{a_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2},$$

$$(3.6.2) \quad 4(\Theta - T_{ss}) \frac{a_{11}}{a_{11}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + \varphi a_n^2}{\alpha_n \Delta_{mn}} \frac{p^2}{a_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2}.$$

W przypadku bardzo silnego odprowadzenia ciepła z powierzchni $p^2 \rightarrow \infty$ funkcje (3.6) dążą do granic

$$(3.7.1) \quad 4(\Theta - T_{ss}) \frac{a_{11}}{a_{11}} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + \varphi a_n^2}{\beta_m \Delta_{mn}},$$

$$(3.7.2) \quad 4(\Theta - T_{ss}) \frac{a_{11}}{a_{11}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + \varphi a_n^2}{\alpha_n \Delta_{mn}}.$$

Jak łatwo się przekonać, w tym przypadku niewiadome określone układami równań (3.5.1) i (3.5.2) wynoszą odpowiednio:

$$(3.8) \quad E_m = \frac{4}{\pi} \frac{a_{22}}{a_{22}} (\Theta - T_{ss}) \frac{1}{m}, \quad G_n = \frac{4}{\pi} \frac{a_{11}}{a_{11}} (\Theta - T_{ss}) \frac{1}{n}.$$

Podstawiając otrzymane współczynniki do wyrażenia (3.3) otrzymano, że funkcja naprężeń równa się w tym przypadku tożsamościowo zero. Stąd naprężenia będą równe zero w całej tarczy z wyjątkiem brzegów, gdzie naprężenia normalne równoległe do krawędzi zgodnie ze wzorami (3.1) przyjmują postać

$$(3.9) \quad \begin{cases} \sigma_{yy}\left(0, \frac{b}{2}\right) = \frac{a_{22}}{a_{22}} (\Theta - T_{ss}) \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \beta_m \frac{b}{2} = \frac{a_{22}}{a_{22}} (\Theta - T_{ss}), \\ \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \frac{a_{11}}{a_{11}} (\Theta - T_{ss}). \end{cases}$$

W przypadku tarczy izotropowej znajdziemy

$$(3.10) \quad \sigma = aE (\Theta - T_{ss}),$$

gdzie E jest modułem Younga.

Otrzymane rozwiązanie odpowiada rozwiązaniu analogicznego zadania dla półpłaszczyzny. Wzory (3.9) określają górną granicę naprężeń. W omawianym przypadku duży wpływ ma nieliniowość współczynnika h we wzorze (1.2). Istotnym znaczeniem rozwiązań (3.8) jest to, że stanowią one majorantę dla układu równań (3.5.1) i (3.5.2). W przypadku p skoń-

czonego wszystkie prawe strony równań (3.5.1) i (3.5.2) są mniejsze od odpowiednich wartości funkcji (3.7.1) i (3.7.2). Zgodnie z twierdzeniami o porównywaniu układów równań nieskończonych oraz z istnienia rozwiązania układu równań majoryzujących, posiadającego wszystkie niewiadome nieujemne, wynika istnienie i jednoznaczność rozwiązania układu równań. Ponadto można taki układ rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń, sprowadzając go kolejno do coraz większych skończonych układów równań; tym sposobem otrzymuje się ciąg rozwiązań, który dąży do rozwiązania właściwego, [4].

Drugim przypadkiem granicznym jest przypadek bardzo małego p^2 . W tym przypadku można pominąć p^2 w wyrażeniu $\alpha_n^2 + \eta^2 \beta_m^2 + p^2$. W tym przypadku dla tarczy izotropowej układy równań (3.5.1) i (3.5.2) będą analogiczne do odpowiednich równań dla płyty zamocowanej, poddanej działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego, [5] i [2]. W przypadku tarczy ortotropowej analogia będzie występować tylko w przypadku, gdy stosunek współczynników przepływu ciepła w kierunku osi układu współrzędnych będzie równy stosunkowi współczynników rozszerzalności liniowej. Z porównania układów równań wynika, że analogia będzie całkowita, jeżeli przyjmie się, że obciążenie równomiernie rozłożone określone jest wzorem:

$$(3.11) \quad q = -aEp^2(\Theta - T_{ss}),$$

gdzie przez q oznaczono obciążenie zastępcze. Stąd naprężenia można w tym przypadku obliczyć ze wzorów:

$$(3.12) \quad \sigma_{yy} = -M_x aEp^2(\Theta - T_{ss}), \quad \sigma_{xx} = -M_y aEp^2(\Theta - T_{ss}),$$

gdzie M_x i M_y są momentami dla płyty zamocowanej obciążonej równomiernie przy $\nu = 0$. Należy podkreślić, że powyższe wzory są prawdziwe tylko dla bardzo małych p^2 . W każdym razie z uwagi na (3.10) wielkości $M_x p^2$ i $M_y p^2$ muszą być znacznie mniejsze od jedności. Powyższe rozwiązania pozwalają wyciągnąć wniosek, że największe naprężenia występują na krawędzi tarczy.

Przykład. Dana jest tarcza izotropowa kwadratowa o boku a . Temperatura na brzegach i temperatura otoczenia jest stała. Układy równań (3.5.1) i (3.5.2) uproszczą się w tym przypadku po wykorzystaniu symetrii do postaci

$$E_m \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^2}{(m^2 + n^2)^2} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{nm}{(m^2 + n^2)^2} E_n = \\ = \frac{4aE}{\pi} (\Theta - T_{ss}) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\gamma^2}{m(n^2 + m^2)(n^2 + m^2 + \gamma^2)},$$

gdzie $\gamma = pa/\pi$.

Dla przypadku $\gamma^2 = 100$ po wykonaniu sumowań dla $n = 1, 3, 5, 7, 9$ układ równań zapisany w postaci dogodnej dla iteracji ma postać:

$$\bar{E}_1 = 1,02102 - 0,04826 \bar{E}_3 - 0,01190 \bar{E}_5 - 0,00450 \bar{E}_7,$$

$$\bar{E}_3 = 0,52702 - 0,26843 \bar{E}_1 - 0,11614 \bar{E}_5 - 0,05583 \bar{E}_7,$$

$$\bar{E}_5 = 0,34427 - 0,16289 \bar{E}_1 - 0,28571 \bar{E}_3 - 0,14066 \bar{E}_7,$$

$$\bar{E}_7 = 0,25663 - 0,12367 \bar{E}_1 - 0,27562 \bar{E}_3 - 0,28224 \bar{E}_5,$$

gdzie

$$E_i = E_i \frac{4}{\pi} \alpha E (\Theta - T_{ss}).$$

Po zsumowaniu naprężenia na środku brzegu będą równe

$$\sigma = 0,885 \alpha E (\Theta - T_{ss}).$$

Należy zwrócić uwagę, że rozwiązanie powyższego układu równań nie nastęrcza większych trudności. Pierwsze przybliżenie obliczone przy uwzględnieniu poprzednio otrzymanych danych jest bardzo dobre. Dokładność obliczenia zależy przede wszystkim od dokładności obliczenia współczynników. Sumę szeregu liczbowego przy A_m można obliczyć. Praktycznie jednak wygodniej jest obliczyć ją z pewną dokładnością. Współczynniki w równaniach należy obliczyć sumując po większej ilości wyrazów, niż to miało miejsce w przypadku skończonego układu równań.

Literatura cytowana w tekście

- [1] E. Melan, H. Parkus, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wien 1953.
- [2] P. Wilde, *The General Solution for a Rectangular Orthotropic Plate Expressed by Double Trigonometric Series*, Arch. Mech. stos., (1958).
- [3] J. Mossakowski, *The State of Stress and Displacement in a Thin Anisotropic Plate Due to a Concentrated Source of Heat*, Arch. Mech. stos., (1957).
- [4] Л. В. Канторович и В. Н. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Moskwa 1950, s. 31.
- [5] W. Nowacki, *Drgania własne i wyboczenie płyty prostokątnej na obwodzie całkowicie utwierdzonej*, Arch. Mech. stos., 4, 6 (1954).

Резюме

НЕКОТОРАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Рассматривается проблема определения термических напряжений в прямоугольной пластинке, края которой свободны от напряжений. Принимается, что пластинка ортотропна с точки зрения ее упругих и термических свойств. Температура на краях известна и распределена

произвольным образом. Принимается, что количество тепла, протекающего через поверхность пропорционально разнице температуры в пластинке и в пространстве в данной точке. Пользуясь конечным преобразованием Фурье, получено общее решение термической задачи (1.5) и (1.6). Подробно рассмотрен случай температуры линейно распределенной на краях. В данном случае расчет сводится к решению дифференциального уравнения (2.5) при условии обращения в нуль функции напряжений и ее нормальной производной на целом краю. Общее решение, полученное при помощи преобразования Фурье, имеет вид (3.2), где коэффициенты E_m , F_m , G_n , H_n в (3.1) определяются из краевых условий проблемы. В случае двойной симметрии, эти коэффициенты определяются из двух бесконечных систем уравнений (3.5.1) и (3.5.2).

Дано решение в случае очень большого отвода тепла (3.8). Это решение является мажорантой для остальных случаев и дает возможность получить корректные решения уравнений (3.5.1) и (3.5.2). В случае небольшого отвода тепла, рассматриваемый случай аналогичен расчету моментов в заземленной пластинке, равномерно нагруженной нагрузкой (3.5). В работе приводится один числовой пример.

S u m m a r y

A THERMOELASTIC PROBLEM FOR AN ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATE

The object of the present paper is to determine the thermal stresses in a rectangular plate whose edges are free from stresses. It is assumed that the plate is both elastically and thermally orthotropic. The temperature at the edges is known and distributed in an arbitrary manner. It is assumed that the heat flows across the surface of the plate at a rate proportional to the temperature difference between the plate and the ambient medium, at the point considered. Using the finite Fourier transformation, a general solution is obtained for the thermal problem (1.5) and (1.6). The case of linearly variable temperature along the edges is treated in detail. The calculation of the stress reduces in the case considered to solving the differential equation (2.5) assuming that the stress function and its derivatives in the normal direction are equal to zero along the entire edge. The general solution obtained by means of the Fourier transformation has the form determined by the Eq. (3.2), where the coefficients E_m , F_m , G_n , H_n in the Eqs. (3.1) should be determined from the boundary conditions of the problem. In the case of double symmetry, the calculation of these coefficients reduces to the solution of

two infinite systems of equations, (3.5.1) and (3.5.2). The solution is obtained in the case of very intense heat absorption (3.8). This solution is of for the remaining cases, and determines the possibility of obtaining the correct solution of the equations (3.5.1) and (3.5.2). In the case of weak heat absorption the argument is analogous to that of calculation of the bending moments for a clamped plate uniformly loaded, (3.13). A numerical example is given.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 czerwca 1959 r.
