

ZBIGNIEW PEŁKA

OBLICZANIE POWŁOK TRANSLACYJNYCH
METODĄ WIELOBOKU SZNUROWEGO

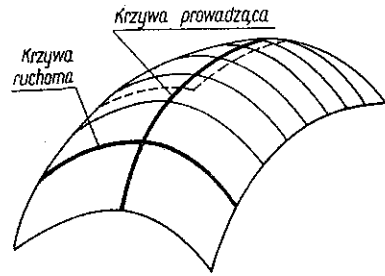
ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXXXIII

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	465
2. Zależności podstawowe	465
3. Metoda wieloboku sznurowego	467
4. Zastosowanie do powłok translacyjnych	469
5. Paraboloida eliptyczna	472
6. Uwagi końcowe	478

1. Wstęp

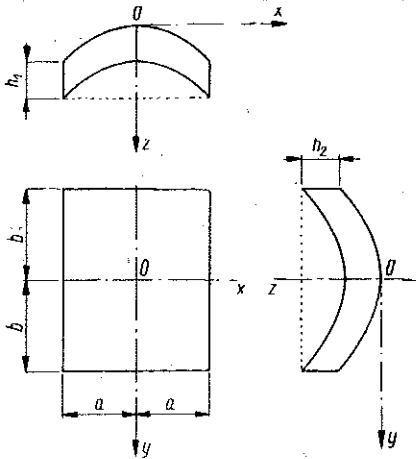
Powierzchnia środkowa, połowiąca grubość powłoki translacyjnej, powstaje (rys. 1) przez przesuwanie jednej krzywej (ruchomej) po innej krzywej (prowadzącej). W przypadku gdy krzywa prowadząca leży w jednej płaszczyźnie pionowej, zaś krzywa ruchoma również w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do pierwszej, otrzymujemy najbardziej celowe konstrukcje do przykrycia hal znacznych rozpiętości o rzucie prostokątnym. Idea zastosowania tego rodzaju powierzchni w budownictwie należy do Dischingera, [1].



Rys. 1

2. Zależności podstawowe

Rozpatrzmy powłokę rozpostartą nad rzutem prostokątnym i posiadającą dwie pionowe płaszczyzny symetrii (rys. 2). Na obwodzie powłoka jest podparta za pomocą przepon pełnych lub łukowych. Przyjmujemy, że powłoka znajduje się w błonowym stanie naprężeń, zaś podtrzymujące ją przepony są doskonale sztywne tylko w swej płaszczyźnie i nie są zdolne do przeciwstawienia się siłom do tej płaszczyzny prostopadłym.

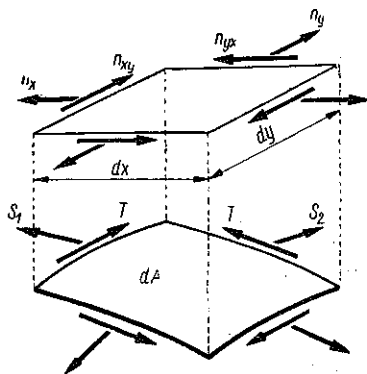


Rys. 2

Rozpatrywać będziemy powłoki translacyjne, których równania powierzchni środkowych w obranym układzie współrzędnych (rys. 2) mają postać:

$$(2.1) \quad z = f(x, y) = f_1(x) + f_2(y).$$

Przez $Z = Z(x, y)$ oznaczamy obciążenie pionowe powłoki odniesione do jednostki płaszczyzny rzutu (x, y) . Linie $x = \text{const}$ i $y = \text{const}$ tworzą układ współrzędnych na powierzchni; każde dwie pary sąsiednich linii ograniczają elementarną powierzchnię powłoki dA , której rzut na płaszczyznę xy tworzy prostokąt o polu $dx dy$ (rys. 3).



Rys. 3

Siły wewnętrzne działające na brzegach elementu powłoki dA rozkładamy równolegle do brzegów tego elementu na składowe S_1, S_2 i T odniesione do jednostki długości przekroju. Rzuty tych sił na płaszczyznę xy oznaczamy odpowiednio przez n_x, n_y i n_{yx} lub n_{xy} . Siły działające na przekrój dadzą się najprościej przedstawić za pośrednictwem swych rzutów. Równania równowagi dla tych ostatnich mogą być tak zapisane, [2]:

$$(2.2) \quad \begin{cases} n_{xy} - n_{yx} = 0, & \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0, & n_x \frac{d^2 f_1}{dx^2} + n_y \frac{d^2 f_2}{dy^2} + Z = 0. \end{cases}$$

Ponieważ $n_{xy} = n_{yx}$, więc w równaniach (2.2) występują tylko trzy niezależne funkcje. Jak wiadomo, rozwiązanie znacznie się uprości, jeśli wprowadzimy funkcję naprężeń $F(x, y)$, która określa rzuty sił w znany sposób:

$$(2.3) \quad n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad n_{xy} = n_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

W tym przypadku trzy pierwsze równania równowagi (2.2) są spełnione tożsamościowo, zaś czwarte prowadzi do następującego równania na funkcję F :

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} + Z = 0.$$

Oczywiście funkcja naprężeń musi spełniać warunki brzegowe. Jeśli podtrzymujące powłokę przepony mogą się przeciwstawić tylko siłom działającym w ich płaszczyźnie, to otrzymamy wzdłuż odpowiednich brzegów warunki następujące:

$$(2.5) \quad \begin{cases} y = \pm b, & n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \\ x = \pm a, & n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

Mając rzuty sił możemy wyznaczyć siły działające na przekrój S i T :

$$(2.6) \quad S_1 = n_x \sqrt{\frac{1 + (df_1/dx)^2}{1 + (df_2/dy)^2}}, \quad S_2 = n_y \sqrt{\frac{1 + (df_2/dy)^2}{1 + (df_1/dx)^2}}, \quad T = n_{xy}.$$

Rozwiązanie podstawowego równania różniczkowego (2.4) uzyskano w postaci zamkniętej lub też za pomocą szybko zbieżnych szeregów tylko dla niektórych szczególnych typów powłok i obciążenia. Dlatego też w wielu konkretnych przypadkach należy szukać rozwiązania na drodze obliczeń numerycznych.

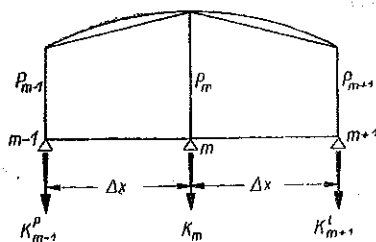
Metodę różnic skończonych do określenia błonowego stanu naprężeń w powłokach o podwójnej krzywiznie stosował Pucher, [3], i inni (Flügge, Soare, Salvadori, Rżanicyn).

W odniesieniu do powłok translacyjnych wydaje się rzeczą celową oprzeć rozwiązanie numeryczne na uogólnionej metodzie wieloboku sznurowego, którą Stüssi, [4], zastosował jako pierwszy do badania zagadnień stateczności, a następnie Dubas do obliczania płyt, gdzie okazała się ona bardzo przydatna. Zastosowaniem tej właśnie metody do obliczania powłok translacyjnych zajmujemy się poniżej.

3. Metoda wieloboku sznurowego

W zagadnieniach statyki stosowanej wystarcza często znajomość numerycznych wartości momentu zginającego w pewnej liczbie odpowiednio wybranych punktów, które nazywać będziemy węzłami. Aby otrzymać wartości momentów w tych punktach, zastąpić należy dane obciążenie rozłożone przez siły skupione, działające w węzłach (ciężary węzłowe).

Dla właściwego określenia ciężarów węzłowych trzeba znać charakter zmienności obciążenia. Ograniczając się do przypadku zmienności parabolicznej między trzema kolejnymi węzłami i równych odstępów między nimi otrzymamy przy zastosowaniu reguły Simpsona następujące wyrażenia dla ciężarów węzłowych (rys. 4):



Rys. 4

$$(3.1) \quad \begin{cases} K_m = \frac{\Delta x}{12} (p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}), \\ K_{m-1}^p = \frac{\Delta x}{24} (7p_{m-1} + 6p_m - p_{m+1}), \\ K_{m+1}^l = \frac{\Delta x}{24} (3p_{m-1} + 10p_m - p_{m+1}). \end{cases}$$

Ogólnie gdy $p = p(x)$, to

$$K_m [p(x)] = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{m-1}^m [p(x)(\Delta x + x) dx + \int_m^{m+1} p(x)(\Delta x - x) dx \right].$$

Znajomość ciężarów węzłowych pozwala przy dowolnym obciążeniu rozpatrywać tylko siły skupione w węzłach. Rozważmy zagadnienie równowagi wycinka tak obciążonej belki:

$$M_m = M_{m-1} + T_{m-1,m} \Delta x_{m-1,m},$$

$$T_{m-1,m} - T_{m,m+1} = K_m.$$

Natomiast dla odcinka następnego mamy

$$M_{m+1} = M_m + T_{m,m+1} \Delta x_{m,m+1}.$$

Eliminując siłę poprzeczną i zakładając $\Delta x_{m-1,m} = \Delta x_{m,m+1} = \Delta x$ otrzymamy następujący związek między trzema kolejnymi wartościami momentów w węzłach:

$$-M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1} = K_m \Delta x.$$

Jest to właśnie równanie wieloboku sznurowego, które umożliwia numeryczne rozwiązanie zagadnienia określenia wartości momentów przy danym obciążeniu.

Równanie wieloboku sznurowego jest równoważne związkowi analitycznemu $d^2M/dx^2 = -p$, przedstawia więc zależność różniczkową drugiego rzędu i w przypadku dowolnej funkcji F może być zastąpione równaniem różnicowym

$$(3.2) \quad F_{m-1} - 2F_m + F_{m+1} = \Delta x K_m (F'').$$

Podobnie dla wyznaczenia wartości pierwszej pochodnej $F' = T = dM/dx$ mamy:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \Delta x F'_{m-1} = F_m - F_{m-1} - \frac{\Delta x^2}{24} (7F''_{m-1} + 6F''_m - F''_{m+1}), \\ \Delta x F'_m = \frac{1}{2} (F_{m+1} - F_{m-1}) - \frac{\Delta x^2}{12} (F''_{m+1} - F''_{m-1}). \end{cases}$$

Jeśli założyć zmienność paraboliczną F' i zastosować regułę Simpsona, to można wyrazić pochodną F' tylko przez wartości funkcji F , przy czym otrzymane w ten sposób wzory będą mniej dokładne niż zależności (3.3):

$$(3.4) \quad \begin{cases} F'_m = \frac{1}{12\Delta x} (F_{m-2} - 8F_{m-1} + 8F_{m+1} - F_{m+2}), \\ F'_{m+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{F_{m+2} + 4F_{m+1} - 5F_m - F_{m-1}}{2\Delta x} - F'_m \right), \\ F'_{m+2} = \frac{5F_{m+2} - 4F_{m+1} - F_m - F_{m-1}}{2\Delta x} - 2F'_{m+1}. \end{cases}$$

4. Zastosowanie do powłok translacyjnych

Zastosujemy równanie wieloboku sznurowego (3.2) do numerycznego całkowania równania różniczkowego funkcji naprężeń. Wprowadzamy do wzoru (2.4) ciężary węzłowe:

$$(4.1) \quad \frac{d^2 f_2}{dy^2} K \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + \frac{d^2 f_1}{dx^2} K \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = -K(Z).$$

Całą powłokę pokrywamy siatką o równych odstępach oczek Δx w kierunku osi x oraz Δy w kierunku osi y .

Napiszemy równania $K(Z)$ dla kierunku m :

$$K_{m-1,n}^m(Z) = \frac{\Delta y}{12} (Z_{m-1,n+1} + 10Z_{m-1,n} + Z_{m-1,n-1}),$$

$$K_{m,n}^m(Z) = \frac{\Delta y}{12} (Z_{m,n+1} + 10Z_{m,n} + Z_{m,n-1}),$$

$$K_{m+1,n}^m(Z) = \frac{\Delta y}{12} (Z_{m+1,n+1} + 10Z_{m+1,n} + Z_{m+1,n-1}).$$

Stosujemy teraz to samo równanie dla kierunku n :

$$K_{m+1,m}^{nm}(Z) = \frac{\Delta x}{12} \frac{\Delta y}{12} (Z_{m-1,n+1} + 10Z_{m,n+1} + Z_{m+1,n+1}),$$

$$K_{n,m}^{nm}(Z) = \frac{\Delta x}{12} \frac{\Delta y}{12} (10Z_{m-1,n} + 100Z_{m,n} + 10Z_{m+1,n}),$$

$$K_{n-1,m}^{nm}(Z) = \frac{\Delta x}{12} \frac{\Delta y}{12} (Z_{m-1,n-1} + 10Z_{m,n-1} + Z_{m+1,n-1}).$$

Określenie ciężaru węzłowego dla punktu (m, n) siatki przy parabolicznej zmienności obciążenia, odniesionego do jednostki pola powierzchni rzutu powłoki, można przedstawić w schematycznym zapisie:

$$K(Z) = \frac{\Delta x \Delta y}{144} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z.$$

Stosując powyższy zapis nadamy równaniu (4.1) następującą postać

$$(4.2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{d^2 f_2}{dy^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{d^2 f_1}{dx^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = - \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z.$$

Aby wyrazić $\partial^2 F / \partial x^2$ i $\partial^2 F / \partial y^2$ przez F korzystamy ze wzorów (3.1) i (3.2) dla przypadku pochodnych cząstkowych:

$$F_{m-1} - 2F_m + F_{m+1} = \frac{\Delta x^2}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{m-1} + 10 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_m + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right],$$

$$F_{n-1} - 2F_n + F_{n+1} = \frac{\Delta y^2}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{n-1} + 10 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_n + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{n+1} \right].$$

Otrzymujemy dla kierunku m w schematycznym zapisie

$$[1, -2, 1] F = \frac{\Delta x^2}{12} [1, 10, 1] \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

a po pomnożeniu przez $d^2 f_2 / dy^2$ i podzieleniu przez $\Delta x^2 / 12$ znajdziemy

$$\frac{12}{\Delta x^2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} [1, -2, 1] F = \frac{d^2 f_2}{dy^2} [1, 10, 1] \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Teraz możemy przedstawić pierwszy wyraz lewej strony wzoru (4.2) w następującej postaci:

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{12}{\Delta x^2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 10 & -20 & 10 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} F.$$

Analogicznie postępując wyrazimy drugi wyraz lewej strony równania (4.2) przez wartości funkcji F :

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{12}{\Delta y^2} \frac{d^2 f_1}{dx^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} F,$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{12}{\Delta y^2} \frac{d^2 f_1}{dx^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ -2 & -20 & -2 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} F.$$

Uwzględniając otrzymane wyżej rezultaty doprowadzamy równanie (4.2) do takiej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{12}{\Delta x^2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 10 & -20 & 10 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} F + \frac{12}{\Delta y^2} \frac{d^2 f_1}{dx^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ -2 & -20 & -2 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} F = \\ = - \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z. \end{aligned}$$

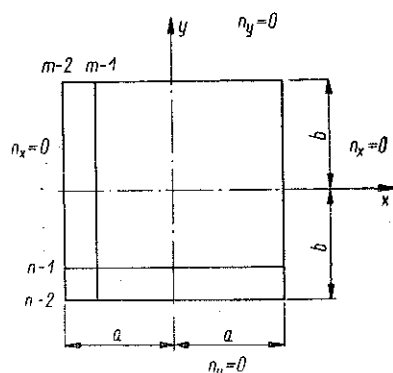
Mnożymy całe równanie przez $\Delta x \Delta y / 12$ i zmieniamy znaki:

$$(4.3) \quad \frac{d^2 f_2}{dy^2} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} F + \frac{d^2 f_1}{dx^2} \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} F = \\ = \frac{\Delta x \Delta y}{12} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z.$$

Otrzymany związek (4.3) między wartościami F pola powierzchni naprężeń a wielkością obciążenia Z na jednostkę powierzchni rzutu w węzłach siatki stosuje się dla wszystkich węzłów wewnętrznych.

Zagadnienie warunków brzegowych oraz ustalenie analogicznych wzorów dla punktów siatki leżących na liniach sąsiadujących z obwodem prostokąta, nad którym rozpostarta jest powłoka, rozpatrzeć musimy osobno. W omówionym już na początku przypadku podparcia statycznie wyznaczalnego warunki brzegowe wyrażone są wzorami (2.5).

Aby uwzględnić na sąsiadującej z brzegiem linii $m - 1$ siatki (rys. 5) warunek $\partial^2 F / \partial y^2 = 0$ dla $x = -a$, trzeba w ciężarze węzłowym



Rys. 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

odrzuć lewą skrajną kolumnę, czyli w ostatecznym wzorze (4.3) dodać (w sensie algebraicznym) wyraz

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -10 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} F.$$

Analogicznie dla punktów siatki na sąsiadującej z brzegiem linii $n - 1$ uwzględniamy warunek $\partial^2 F / \partial x^2 = 0$ dla $y = -b$, czyli we wzorze (4.3) dodajemy

$$[-1, -10, -1] \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = [-1, 2, -1] F.$$

Otrzymujemy w ten sposób dla punktów na linii pionowej $m-1$ równoległej do osi y związek

$$(4.4) \quad \frac{d^2 f_2}{dy^2} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} F + \frac{d^2 f_1}{dx^2} \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{bmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 0 & 20 & 2 \\ 0 & -10 & -1 \end{bmatrix} F = \frac{\Delta x \Delta y}{12} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z.$$

Dla punktów na linii poziomej $n-1$ równoległej do osi x mamy

$$(4.5) \quad \frac{d^2 f_2}{dy^2} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F + \frac{d^2 f_1}{dx^2} \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} F = \frac{\Delta x \Delta y}{12} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z,$$

oraz dla punktów na przecięciu linii $m-1$ i $n-1$

$$(4.6) \quad \frac{d^2 f_2}{dy^2} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F + \frac{d^2 f_1}{dx^2} \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{bmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 0 & 20 & 2 \\ 0 & -10 & -1 \end{bmatrix} F = \frac{\Delta x \Delta y}{12} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z.$$

Prawe strony równań (4.3) - (4.6) zawierają wartości obciążenia Z dla 9 sąsiadujących z sobą punktów siatki, wobec czego omówiony tu sposób postępowania może uwzględnić nawet znaczną zmienność obciążenia.

5. Paraboloida eliptyczna

Rozpatrzmy bliżej zastosowanie omówionej metody obliczeń do rozwiązania rozpostartej nad rzutem prostokątnym powłoki, której powierzchnię środkową stanowi paraboloida eliptyczna o równaniu

$$(5.1) \quad z = \frac{f}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right),$$

gdzie a i b oznaczają odpowiednio połowy boków prostokąta rzutu (rys. 2), $f = h_1 + h_2$ całkowite wzniesienie powłoki w kluczu (początku układu) w stosunku do naroży.

Na podstawie równania (5.1) mamy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 f_1}{dx^2} = \frac{f}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{d^2 f_2}{dy^2} = \frac{f}{b^2}.$$

Podstawiamy te wyrażenia do równania (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{f}{b^2} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} F + \frac{f}{a^2} \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} F = \\ = \frac{\Delta x \Delta y}{12} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z. \end{aligned}$$

Zakładając, że oba boki prostokąta $2a$ i $2b$ zostaną podzielone na jednakową ilość równych części n , możemy napisać:

$$\frac{2a}{n} = \Delta x, \quad \frac{2b}{n} = \Delta y.$$

Stąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2b}{n} \frac{n}{2a} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{a}{b}$$

oraz

$$\Delta x \Delta y = \frac{2a}{n} \frac{2b}{n} = \frac{4ab}{n^2}.$$

W ten sposób doprowadzamy równanie (4.3) do postaci

$$\begin{aligned} \frac{f}{b^2} \frac{b}{a} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} F + \frac{f}{a^2} \frac{a}{b} \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} F = \\ = \frac{4ab}{12n^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z, \end{aligned}$$

a po uproszczeniu

$$\frac{f}{ab} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} F + \frac{f}{ab} \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} F = \frac{ab}{3n^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z.$$

Mnożymy całe równanie przez ab/f :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} F = \frac{a^2 b^2}{3fn^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z.$$

Teraz możemy zsumować liczby w odpowiadających sobie miejscach obu wyrażeń po lewej stronie równania:

$$\begin{bmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -8 & 40 & -8 \\ -2 & -8 & -2 \end{bmatrix} F = \frac{a^2 b^2}{3fn^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z.$$

Dzielimy jeszcze obie strony przez 2,

$$(5.2) \quad \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} F = \frac{a^2 b^2}{6fn^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z,$$

i otrzymujemy bardzo prosty schemat dla ułożenia równań wiążących ze sobą wartości funkcji naprężeń $F_{m,n}$ z wartościami obciążenia na jednostkę pola powierzchni rzutu $Z_{m,n}$ w poszczególnych punktach (m, n) siatki, nałożonej na powłokę translacyjną o kształcie paraboloidy eliptycznej nad rzutem prostokątnym. Jak już zaznaczono wyżej, a i b oznaczają połowy boków prostokąta rzutu o wymiarach $2a$ i $2b$, f najwyższe wzniesienie powłoki w początku układu współrzędnych (kluczu) w stosunku do naroży, n — ilość równych części, na które został podzielony każdy z boków prostokąta.

6. Przykład liczbowy

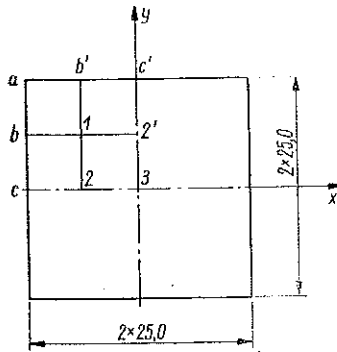
Paraboloida obrotowa rozpostarta jest nad kwadratem o wymiarach $2a = 2b = 50$ m, $h_1 = h_2 = 10$ m, $f = 20$ m. Grubość powłoki jest zmienna

$$(6.1) \quad \delta = \frac{\delta_0 \left[1 + 1,01 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right) \right]}{\sqrt{1 + 0,64 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right)}}$$

i waha się od δ_0 w początku układu (kluczu) do $2\delta_0$ w narożach. Obciążenie na jednostkę pola powierzchni rzutu

$$(6.2) \quad Z = g_0 \left[1 + 1,01 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right) \right],$$

gdzie g_0 oznacza obciążenie w kluczu.



Rys. 6

Punkt	Z
a	3,0200 g_0
b	2,2625 g_0
c	2,0100 g_0
1	1,5050 g_0
2	1,2525 g_0
3	1,0000 g_0

Dzielimy każdy z boków kwadratu na $n = 4$ części. Numerację punktów siatki pokazuje rys. 6, przy czym wobec symetrii względem obu osi obejmuje ona tylko czwartą część powierzchni kwadratu. Obliczone zgod-

nie z (6.2) wielkości obciążeń w poszczególnych punktach siatki są podane w tablicy na str. 474.

Ponieważ brzeg powierzchni naprężeń musi być linią prostą, więc dla zewnętrznych punktów siatki można przyjąć $F_a = F_b = F_c = 0$.

Wzór (5.2) przyjmie tu wobec $a = b = 25$ m, $n = 4$, $f = 20$ m postać:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} F = 8,13802 \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z a.$$

Stosując go do wewnętrznych punktów siatki otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix} 20 & -8 & -1 \\ -8 & 18 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 228,84 \\ 192,48 \\ 39,03 \end{bmatrix} 8,13802 g_0 a.$$

Rozwiązanie układu daje: $F_1 = 25,37549 c$, $F_2 = 30,20327 c$, $F_3 = 37,04372 c$, gdzie $c = 8,13802 g_0 a$. Czynniki c zachowano dla wygody.

Siły wewnętrzne $n_x = \partial^2 F / \partial y^2 = F_{yy}$ oraz $n_y = \partial^2 F / \partial x^2 = F_{xx}$ dla punktów brzegowych b i c obliczamy bezpośrednio z równania różniczkowego (2.4),

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{d^2 f_1}{dx^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = Z,$$

w którym dla $x = \pm a$ lub $y = \pm b$ jeden z wyrazów po lewej stronie staje się zerem, gdyż na podstawie (2.5) mamy dla $x = \pm a$, $n_x = 0$, a dla $y = \pm b$, $n_y = 0$.

Narozę powłoki (punkt a) jest punktem osobliwym i w jego sąsiedztwie występują pewne zaburzenia, na co zwrócił uwagę Flügge, [5]. Teoretycznie mamy tu $n_x = n_y = 0$ i $n_{xy} = -\infty$, jak to wykazują niektóre rozwiązania analityczne; jednak metoda numeryczna nie prowadzi do tego wyniku. Praktycznie zresztą fakt ten nie ma istotnego znaczenia, gdyż w rzeczywistości osobliwość w tym punkcie jest wyrazem tego, że powłoka w narożach nie może zrównoważyć obciążeń przez siły błonowe i muszą tu powstać momenty zginające.

W obliczeniach numerycznych możliwą do przyjęcia wartość n_{xy} w narożu można otrzymać (przy gęstszej siatce) z warunku równowagi całej powłoki w kierunku pionowym, sumując obliczone metodą Simpsona składowe pionowe n_{xy} na brzegach i przyrównując do ciężaru całej powłoki, jak to zaproponował Salvadori, [6].

Wartości n_x i n_y w punktach wewnętrznych siatki obliczamy na podstawie wzoru (3.2). Najwygodniej będzie uwzględnić z osobna wpływ $F_i=1$ w każdym węźle oraz $F'_i=1$ na brzegu. Po ułożeniu i rozwiązaniu równań z uwzględnieniem symetrii układu otrzymamy dla kierunku x (dla kierunku y będzie analogicznie z odpowiednią zamianą oznaczeń):

$$F'_1 = \frac{1}{(2a)^2} (19,591837F_b - 43,102041F_1 + 23,510204F_{y'}) - 0,10204082F'_b$$

$$F'_{y'} = \frac{1}{(2a)^2} (-3,918367F_b + 47,020408F_1 - 43,102041F_{y'}) + 0,02040816F'_b$$

Wartości n_{xy} uzyskujemy przez kolejne zastosowanie wzorów (3.3) i (3.4).

Aby umożliwić porównanie z rozwiązaniem tego samego przykładu liczbowego z otrzymanym przez Elfrydę Tungl, [7], doprowadzamy wyniki do znalezienia ilorazów sił przekrojowych S i T przez grubość powłoki δ . Korzystamy ze wzorów (2.6) i po podzieleniu obu stron przez δ mamy:

$$S_1 = \frac{1}{\delta} n_x \sqrt{\frac{1 + (df_1/dx)^2}{1 + (df_2/dy)^2}} = n_x \frac{\mu}{\delta}$$

$$S_2 = \frac{1}{\delta} n_y \sqrt{\frac{1 + (df_2/dy)^2}{1 + (df_1/dx)^2}} = n_y \frac{1}{\mu\delta}$$

$$\frac{T}{\delta} = \frac{n_{xy}}{\delta}, \quad \text{gdzie} \quad \mu = \sqrt{\frac{1 + (df_1/dx)^2}{1 + (df_2/dy)^2}}$$

Potrzebne do dalszych obliczeń wartości μ , uzyskane z powyższego wzoru, oraz δ ze wzoru (6.1) zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Punkt siatki	δ/δ_0	μ	Punkt siatki	δ/δ_0	μ
a	2,0	1,0	1	1,30994	1,0
b	1,68673	1,18900	2	1,16292	1,07703
b'	1,68673	0,84104	2'	1,16292	0,92848
c	1,56955	1,28062	3	1,0	1,0
c'	1,56955	0,78087			

Wartości S_1/δ , S_2/δ i T/δ otrzymane rozpatrywaną tu metodą numeryczną zestawiono wraz z wynikami Tungl, które uważać będziemy za ścisłe, w tablicach 2 i 3.

Ten sam przykład rozwiązano także metodą różnic skończonych. Biegu tego rozwiązania tu nie przytaczamy, podajemy tylko wyniki w zestawieniu poniżej (tablice 2 i 3). Pozwalają one na porównanie ścisłości obu metod numerycznych (metody wieloboku sznurowego i metody różnic skończonych) z metodą analityczną *Tungl*, przyjętą za ścisłą.

Przyjęliśmy oznaczenia: *T* metoda *Tungl*, *WS* metoda wieloboku sznurowego, *RS* metoda różnic skończonych.

Tablica 2. Wartości liczbowe sił w powłoce

	Punkt siatki	S_1/δ			S_2/δ			T/δ		
		<i>T</i>	<i>WS</i>	<i>RS</i>	<i>T</i>	<i>WS</i>	<i>RS</i>	<i>T</i>	<i>WS</i>	<i>RS</i>
$\frac{x}{a} = 1$	<i>c</i>	0	0	0	-1,250	-1,250	-1,250	0	0	0
	<i>b</i>	0	0	0	-1,410	-1,410	-1,410	-0,341	-0,497	-0,563
	<i>a</i>	0	0	0	-1,888	-1,888	-1,888	$-\infty$	-2,171	-2,513
$\frac{x}{a} = 0,5$	2	-0,396	-0,411	-0,434	-0,909	-0,915	-0,876	0	0	0
	1	-0,718	-0,733	-0,716	-0,718	-0,733	-0,716	-0,327	-0,324	-0,329
	<i>b'</i>	-1,410	-1,410	-1,410	0	0	0	-0,341	-0,433	-0,563
$\frac{x}{a} = 0$	3	-0,625	-0,658	-0,630	-0,625	-0,658	-0,630	0	0	0
	2'	-0,909	-0,915	-0,876	-0,396	-0,411	-0,434	0	0	0
	<i>c'</i>	-1,250	-1,250	-1,250	0	0	0	0	0	0

U w a g a : wszystkie wartości mnożone przez $g_0 a$

Tablica 3. Błąd procentowy metod numerycznych w stosunku do metody ścisłej

	Punkt siatki	S_1/δ		S_2/δ		T/δ	
		<i>WS</i>	<i>RS</i>	<i>WS</i>	<i>RS</i>	<i>WS</i>	<i>RS</i>
$\frac{x}{a} = 1$	<i>c</i>	—	—	—	—	—	—
	<i>b</i>	—	—	—	—	45,60	65,00
	<i>a</i>	—	—	—	—	—	—
$\frac{x}{a} = 0,5$	2	3,78	9,58	0,66	-3,63	—	—
	1	2,09	-0,28	2,09	-0,28	0,920	0,61
	<i>b'</i>	—	—	—	—	27,00	65,00
$\frac{x}{a} = 0$	3	5,01	0,79	5,01	0,79	—	—
	2'	0,66	-3,63	3,78	9,58	—	—
	<i>c'</i>	—	—	—	—	—	—

U w a g a : duży błąd procentowy w obliczeniu T/δ jest wynikiem wpływu osobliwości w punkcie narożnym i małej gęstości siatki.

6. Uwagi końcowe

W metodzie wieloboku sznurowego obliczanie wartości $\partial^2 F / \partial x \partial y = n_{xy}$ na brzegach powłoki przeprowadza się bezpośrednio ze wzorów (3.3) i (3.4), podczas gdy w metodzie różnic skończonych trzeba tu uciekać się do aproksymacji, [3], co jest bardziej żmudne i mniej dokładne.

Dla powłok o znacznej wyniosłości przy obliczaniu metodą różnic skończonych Pucher wprowadzał siatkę o różnej gęstości (większej przy brzegach, mniejszej w środku) lub siatkę, w której odstęp węzłów zmienia się w pewnym stałym stosunku, zmniejszając się od środka ku brzegom. Miało to na celu odpowiednie uwzględnienie silniejszej ku brzegom zmienności obciążenia powłoki ciężarem własnym. Wydaje się, że w metodzie wieloboku sznurowego tego rodzaju zabiegi komplikujące obliczenia nie byłyby potrzebne, gdyż we wzorze (4.3) prawa strona uwzględnia wartość obciążenia w dziewięciu sąsiadujących ze sobą punktach siatki.

Równanie wieloboku sznurowego w formie ogólnej (3.2) jest w zasadzie całkowicie dokładne, uproszczenie występuje tylko w obliczeniach $K_m(F'')$. Toteż we wszystkich dotychczasowych przypadkach jego zastosowanie prowadziło do większej dokładności obliczeń niż użycie metody różnic skończonych.

W przytoczonym wyżej przykładzie liczbowym największe błędy procentowe dla S i T wynoszą odpowiednio 9,58% i 65% w metodzie różnic skończonych oraz 5,01% i 45,6%, zatem w przybliżeniu dwukrotnie i półtorakrotnie mniej, w metodzie wieloboku sznurowego. Podział rozpiętości powłoki tylko na cztery części nie pozwolił w obliczeniach numerycznych uniknąć znacznego wpływu istnienia punktów osobliwych w narożach powłoki.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Dischinger, Finsterwalder, *Eisenbetonschalendächer System Zeiss-Dywidag*, Bauing., 9 (1928), s. 807.
- [2] B. Lafaille, *Mémoire sur l'étude générale des surfaces gauches minces*, Mém. Assoc. Intern. Ponts et Charpentes, 3 (1935), s. 295.
- [3] A. Pucher, *Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzgleichungen*, Bauing., 18 (1937), s. 118.
- [4] F. Stüssi, *Ausgewählte Kapitel aus der Theorie des Brückenbaues Taschenbuch für Bauingenieure*, Berlin 1955.
- [5] W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*, Berlin 1957.
- [6] M. Salvadori, *Analysis and Testing of Translational Shells*, J. Amer. Concr. Inst., Juni 1956.
- [7] E. Tungl, *Elliptisches Paraboloid über rechteckigen Grundriss*, Ost. Bauzeitschrift 1956.

РАСЧЕТ ТРАНСЛАЦИОННЫХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ ВЕРЕВОЧНОГО
МНОГОУГОЛЬНИКА

Решение основного дифференциального уравнения в замкнутом виде или при помощи быстросходящихся рядов получено только в некоторых случаях оболочек и нагрузки. В числовых решениях используется до сих пор метод конечных разностей.

Автор применил в данном случае метод веревочного многоугольника. После приведения основной формулы этого метода выводится уравнение, выражающее зависимость между значениями F функции напряжений и величины нагрузки Z в узлах сетки.

В правой стороне этого уравнения заключаются значения нагрузки до 9 соседующих с собой узлов сетки и поэтому при обсуждаемом здесь способе действия можно учесть значительную изменчивость Z . Для эллиптического параболоида это уравнение принимает совсем простую форму.

Затем с помощью обсуждаемого метода решается числовой пример. Полученные результаты сопоставляются с результатами полученными аналитическим путем, а также с помощью метода конечных разностей.

Метод веревочного многоугольника по сравнению с методом конечных разностей более точен. Приводится также общее сравнение возможности применения обеих числовых методов для расчета трансляционных оболочек.

Summary

COMPUTATION OF TRANSLATIONAL SHELLS BY MEANS OF THE METHOD
OF FUNICULAR POLYGON

The solution of the basic differential equation of a translational shell, in a closed form or by means of rapidly convergent series, has been obtained only in certain particular cases of shell and load. In numerical solutions the finite difference method has been the only method hitherto used.

The author uses the method of funicular polygon. After quoting the principal equations of this method the equation is derived expressing the relation between the stress-function F and the magnitude of the stress Z at the nodes of the net.

The right-hand member of this equation contains the values of the load at 9 neighbouring nodes, therefore the procedure described may take

into account even a marked variability of Z . For an elliptical parabola, this equation takes a very simple form.

The method described is used to solve a numerical problem. The results obtained are compared with those obtained by means of the analytical method and by the method of finite differences. The method of funicular polygon gives greater accuracy than that of finite differences. The possibility of application of the two numerical methods to the computation of translational shells is discussed in a general manner.

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1959 r.