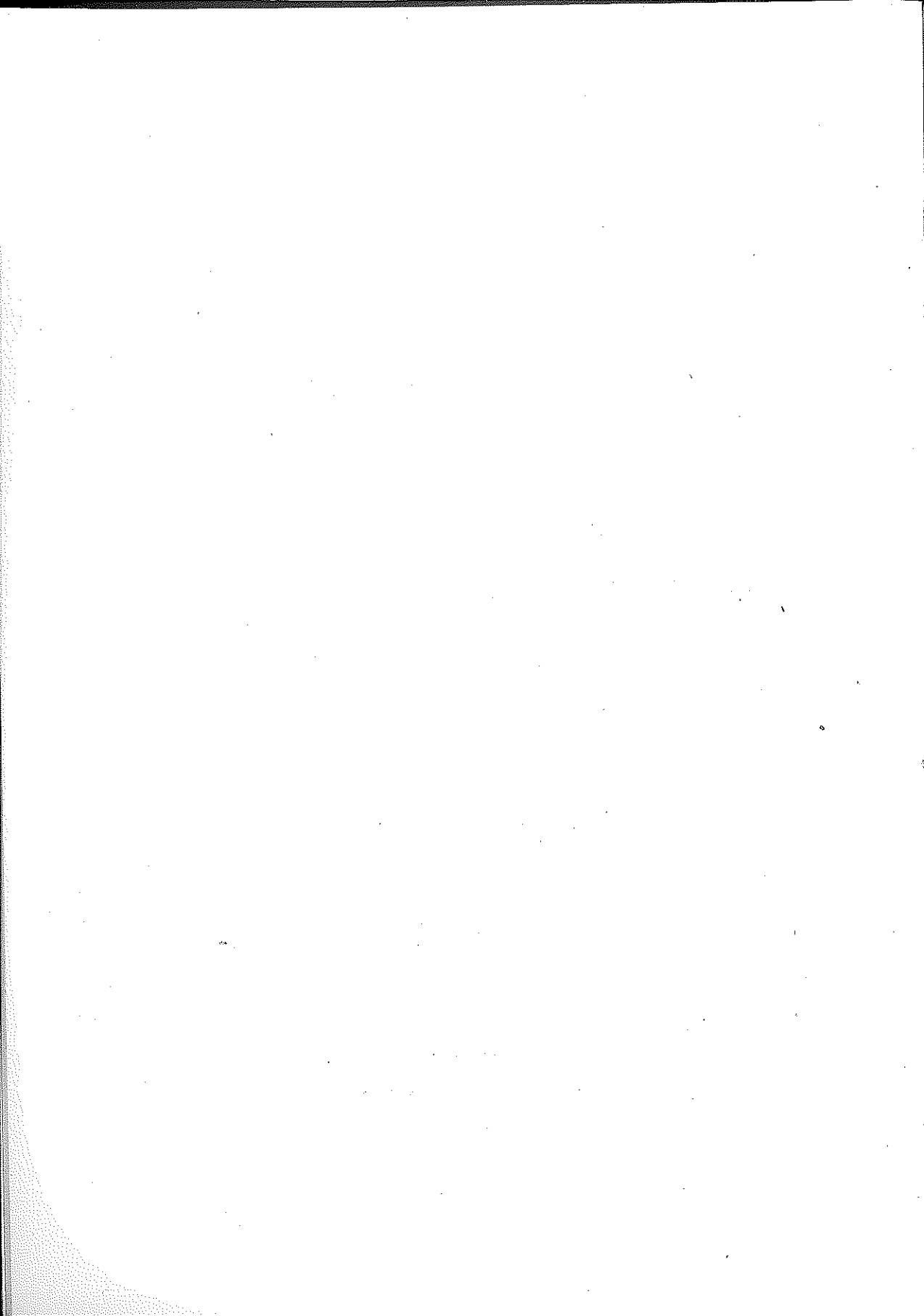


WŁADYSŁAW BOGUSZ

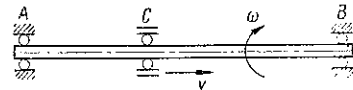
DRGANIA PRĘTÓW NA RUCHOMYCH PODPORACH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXXII



W pracy rozpatrywane są drgania poprzeczne pręta wirującego, wspartego na trzech podporach, z których środkowa przesuwa się ze stałą prędkością v wzdłuż osi pręta (rys. 1).

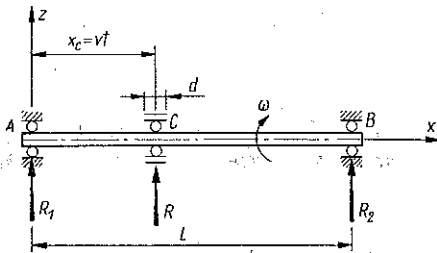
Równanie ruchu zostało wyprowadzone przy założeniu gładkości podpór i przy pominięciu oporu ośrodka i oporu wewnętrznego. W przypadku dwóch podpór A i B wirujący pręt ze stałą prędkością kątową ω i drgający poprzecznie jest obciążony ciągłym układem sił bezwładności w ruchu postępowym elementów pręta w kierunku prostopadłym do osi pręta oraz reakcjami na podporach. Ciężar pręta pomijamy.



Rys. 1

Układy tych sił leżą w jednej płaszczyźnie przechodzącej przez oś pręta i wirującej dookoła tej osi z prędkością kątową ω . Przy wprowadzeniu

trzeciej podpory gładkiej C wystąpi reakcja tej podpory i będzie działać w tej samej płaszczyźnie.



Rys. 2

Przyjmujemy, że długość podpory ruchomej d mierzona wzdłuż osi pręta jest mała. Przy tym założeniu można przyjąć, że oddziaływanie podpory ruchomej na pręt można zastąpić jedną siłą R skupioną w środku podpory.

Obieramy układ współrzędnych prostokątny x, z w płaszczyźnie obciążenia i reakcji (rys. 2).

Ustalmy warunki brzegowe i początkowe dla wirującego pręta: warunki brzegowe

$$(1.1) \quad z(0, t) = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0,$$

$$(1.2) \quad z(l, t) = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{x=l} = 0,$$

$$(1.3) \quad z(vt, t) = 0;$$

warunki początkowe

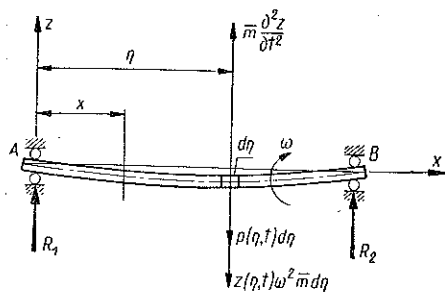
$$(2) \quad z(x, 0) = \varphi(x), \quad \left[\frac{\partial z}{\partial t} \right]_{t=0} = 0.$$

O funkcji $\varphi(x)$ założymy, że jest klasy C_4 , tzn. że jest czterokrotnie różniczkowalna, w sposób ciągły.

W celu ułożenia równania ruchu postępujemy w następujący sposób. Reakcja R na ruchomej podporze zależy od położenia podpory wzdłuż osi

wału (współrzędna x_c), od ugięcia pręta w poszczególnych punktach osi oraz od czasu t .

Ze względu na to, że x_c oraz ugięcia pręta zależne są od czasu, reakcja R jest funkcją złożoną funkcji zależnych od czasu i można ją przedstawić w postaci funkcji $R(t)$ zależnej tylko od czasu.



Rys. 3

wzdłuż pręta i prostopadle do niego. Obciążenie to oznaczymy przez $p(x, t)$ i określimy je w następujący sposób:

$$(3) \quad \begin{cases} \text{jeśli} & 0 \leq x < vt - \frac{d}{2}, & \text{to} & p(x, t) = 0; \\ \text{jeśli} & vt - \frac{d}{2} \leq x \leq vt + \frac{d}{2}, & \text{to} & p(x, t) = \frac{R(t)}{d}; \\ \text{jeśli} & vt + \frac{d}{2} < x \leq l, & \text{to} & p(x, t) = 0. \end{cases}$$

Reakcje na podporach stałych A i B są oczywiście funkcjami czasu. Przy tak określonym obciążeniu $p(x, t)$ na element pręta o długości $d\eta$ w odległości η od początku układu działają siły (rys. 3):

$$p(\eta, t) d\eta, \quad z(\eta, t) \omega^2 \bar{m} d\eta, \quad -\bar{m} (\partial^2 z / \partial t^2) d\eta$$

(\bar{m} jest masą jednostki długości pręta).

Moment zginający w dowolnym przekroju x wyraża się wzorem

$$(4) \quad M(x, t) = \int_x^l p(\eta, t) (\eta - x) d\eta + \int_x^l z(\eta, t) \omega^2 \bar{m} (\eta - x) d\eta - \int_x^l \bar{m} \frac{\partial^2 z(\eta, t)}{\partial t^2} (\eta - x) d\eta + R_2(t) (l - x).$$

Równanie linii ugięcia pręta przyjmujemy w postaci

$$(5) \quad EJ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} = -M(x, t),$$

gdzie EJ jest sztywnością pręta na zginanie.

Po dwukrotnym różniczkowaniu (4) względem x i podstawieniu do (5) otrzymamy równanie

$$(6) \quad EJ \frac{\partial^4 z(x, t)}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} - \bar{m} \omega^2 z(x, t) = p(x, t).$$

Równanie (6) napiszemy w postaci

$$(7) \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - b^2 z = F(x, t),$$

gdzie

$$a^2 = \frac{\bar{m}}{EJ}, \quad b^2 = \frac{\bar{m} \omega^2}{EJ}, \quad F(x, t) = \frac{p(x, t)}{EJ}.$$

Równanie (7) należy rozwiązać przy warunkach brzegowych (1) i warunkach początkowych (2).

Najpierw rozwiążemy równanie (7) przy warunkach brzegowych (1.1) i (1.2) i warunkach początkowych (2). W otrzymanym rozwiązaniu występować będzie funkcja $R(t)$, którą tak wyznaczymy, aby spełniony był warunek brzegowy (1.3).

Rozwiązania równania (7) przy warunkach brzegowych (1.1) i (1.2) i początkowych (2) szukamy w postaci

$$(8) \quad z(x, t) = z_1(x, t) + z_2(x, t),$$

gdzie $z_1(x, t)$ jest rozwiązaniem jednorodnego równania, tj. równania (7) przy $F(x, t) = 0$ i warunkach brzegowych (1.1) i (1.2) i początkowych (2), zaś $z_2(x, t)$ jest rozwiązaniem równania niejednorodnego (7) przy warunkach brzegowych (1.1) i (1.2) i zerowych warunkach początkowych.

Rozwiązania równania jednorodnego odpowiadającego równaniu (7)

$$(9) \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - b^2 z = 0$$

szukać będziemy w postaci, [3],

$$(10) \quad z_1 = X(x) T(t).$$

Po podstawieniu funkcji (10) do (9) otrzymamy dwa równania różniczkowe zwyczajne

$$(11) \quad \frac{d^4 X}{dx^4} - \lambda^4 X = 0, \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{\lambda^4 - b^2}{a^2} T = 0,$$

gdzie λ jest stałym parametrem.

Uwzględniając warunki brzegowe (1.1) i (1.2) otrzymamy warunki dla funkcji $X(x)$:

$$(12) \quad \begin{cases} X(0) = 0, & \left[\frac{d^2 X}{dx^2} \right]_{x=0} = 0, \\ X(l) = 0, & \left[\frac{d^2 X}{dx^2} \right]_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Przy tych warunkach równanie dla $X(x)$ posiada niezerowe rozwiązanie, jeżeli

$$(13) \quad \sin \lambda l = 0.$$

Stąd mamy wartości własne

$$(14) \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

oraz funkcje własne

$$(15) \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Po podstawieniu wartości λ_n do równania (11) otrzymamy równanie dla $T(t)$:

$$(16) \quad \frac{d^2 T_n}{dt^2} - k_n T_n = 0, \quad k_n = \left(\frac{n^4 \pi^4}{l^4} - b^2 \right) \frac{1}{a^2}.$$

Równanie (16) należy rozwiązać przy warunkach

$$(17) \quad T_n(0) = 1, \quad \left[\frac{dT_n}{dt} \right]_{t=0} = 0.$$

W zależności od znaku współczynnika k_n równanie (16) posiada różne rozwiązania. Rozróżnimy dwa przypadki: $k_n > 0$ dla każdego n i $k_n \leq 0$ dla pewnych początkowych wartości n , np. dla $n \leq N$. W przypadku $k_n > 0$ równanie (16) przy warunkach (17) posiada rozwiązanie

$$(18) \quad T_n = \cos \sqrt{k_n} t.$$

Podstawiając funkcje (18) i (15) do wzoru (10) otrzymamy rozwiązanie na z_1 spełniające warunki brzegowe (1.1) i (1.2). Należy jeszcze spełnić warunki początkowe (2). W tym celu utworzymy szereg

$$(19) \quad z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \sqrt{k_n} t.$$

Funkcja $\varphi(x)$ określona warunkami początkowymi da się przedstawić w postaci szeregu

$$(20) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds.$$

Po wykorzystaniu warunków początkowych (2) wyznaczmy współczynniki A_n :

$$(21) \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds.$$

Rozwiązania z_2 równania niejednorodnego (7) szukamy w postaci szeregu

$$(22) \quad z_2 = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Szereg (22) spełnia warunki brzegowe (1.1) i (1.2), zaś zerowe warunki początkowe określają warunki początkowe dla funkcji $S_n(t)$:

$$(23) \quad S_n(0) = 0, \quad \left[\frac{dS_n}{dt} \right]_{t=0} = 0.$$

Funkcję występującą po prawej stronie równania (7) przedstawimy w postaci szeregu

$$(24) \quad F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

gdzie funkcje $B_n(t)$ są określone za pomocą wzoru

$$(25) \quad B_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(s, t) \sin \frac{n\pi}{l} s ds.$$

Po wstawieniu funkcji (22) i (24) do wzoru (7) i po porównaniu współczynników przy $\sin(n\pi x/l)$ otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne na funkcję $S_n(t)$:

$$(26) \quad \frac{d^2 S_n(t)}{dt^2} + k_n S_n(t) = B_n(t).$$

Równanie to przy warunkach początkowych (23) posiada rozwiązanie

$$(27) \quad S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{k_n}} \int_0^t B_n(s) \sin \sqrt{k_n}(t-s) ds.$$

Korzystając z określenia funkcji $F(x, t)$ możemy obliczyć współczynniki $B_n(t)$:

$$(28) \quad B_n(t) = -\frac{4 \sin \frac{2\pi d}{2l}}{EJn\pi d} R(t) \sin \frac{n\pi v}{l} t.$$

Po podstawieniu funkcji (28) i (27) do (22) otrzymamy rozwiązanie z_2 :

$$(29) \quad z_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l} x \int_0^t R(s) \sin \frac{n\pi v}{l} s \sin \sqrt{k_n} (t-s) ds,$$

gdzie przez c_n oznaczono wyrażenie

$$(30) \quad c_n = -\frac{4 \sin \frac{n\pi d}{2l}}{EJd\pi n \sqrt{k_n}}.$$

Łącząc z_1 i z_2 zgodnie ze wzorem (8) otrzymamy rozwiązanie na z , spełniające warunki brzegowe (1.1) i (1.2) oraz warunki początkowe (2):

$$(31) \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \sqrt{k_n} t + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l} x \int_0^t R(s) \sin \frac{n\pi v}{l} s \sin \sqrt{k_n} (t-s) ds.$$

Pozostaje jeszcze do spełnienia warunków brzegowy (1.3). We wzorze (31) występuje niewiadoma funkcja $R(t)$ i warunek (1.3) wykorzystamy do wyznaczenia tej funkcji.

Z warunku (1.3) wynika, że dla $x = vt$ otrzymamy $z = 0$. Podstawiając do równania (31) $z = 0$ i $x = vt$ otrzymamy równanie całkowe

$$(32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \sin \sqrt{k_n} t + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \int_0^t R(s) \sin \frac{n\pi v}{l} s \sin \sqrt{k_n} (t-s) ds = 0.$$

W drugim szeregu po prawej stronie (32) całkę można wyciągnąć przed znak sumy ze względu na to, że współczynniki c_n są rzędu $o(1/n^3)$ i szereg ten jest jednostajnie zbieżny względem zmiennych s i t , [2]. Wprowadzimy oznaczenia:

$$(33) \quad \begin{cases} l(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \sin \sqrt{k_n} t, \\ K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \sin \frac{n\pi v}{l} s \sin \sqrt{k_n} (t-s). \end{cases}$$

Przy oznaczeniach (33) równanie (32) ma postać

$$(34) \quad l(t) = - \int_0^t R(s) K(s, t) ds.$$

Jest to równanie *Volterra* pierwszego rodzaju.

Równanie (34) można sprowadzić do równania całkowego *Volterra* drugiego rodzaju przez różniczkowanie obu stron względem t .

Po pierwszym różniczkowaniu otrzymujemy w naszym przypadku również równanie całkowe pierwszego rodzaju, ponieważ $K(t, t) = 0$. Należy więc różniczkowanie powtórzyć. Obliczenie drugiej pochodnej funkcji $K(s, t)$ względem t przez różniczkowanie szeregu trygonometrycznego (33) wyraz po wyrazie jest niemożliwe, gdyż prowadzi do szeregu rozbieżnego. Funkcja $K(s, t)$ może posiadać drugą pochodną względem t , lecz obliczenie jej w powyższy sposób jest niemożliwe.

Równanie (34) rozwiążemy w przedziale $[0, l/v]$ i przedstawimy funkcję $K(s, t)$ w postaci szeregu *Fouriera* dwu zmiennych w kwadracie

$$0 \leq t \leq \frac{l}{v}, \quad 0 \leq s \leq \frac{l}{v}.$$

Funkcję $K(s, t)$ można przedstawić w postaci szeregu złożonego z samych sinusów, [2]:

$$(35) \quad K(s, t) = \sum_{j, \nu=1}^{\infty} a_{j\nu} \sin \frac{j\pi v}{l} t \sin \frac{\nu\pi v}{l} s,$$

gdzie $a_{j\nu}$ są określone za pomocą wzoru

$$(36) \quad a_{j\nu} = \frac{4c_n k_n n^2 j\nu\pi^4 v^6 \sin \frac{l\sqrt{k_n}}{v} (-1)^n [(-1)^j - (-1)^\nu]}{\sum_{n=1}^{\infty} l^6 \left[k_n - \frac{\pi^2 \nu^2}{l^2} (n-j)^2 \right] \left[k_n - \frac{\pi^2 \nu^2}{l^2} (n+j)^2 \right] \left[k_n - \frac{\pi^2 \nu^2}{l^2} (n-\nu)^2 \right] \left[k_n - \frac{\pi^2 \nu^2}{l^2} (n+\nu)^2 \right]}$$

Ze wzoru (36) wynika, że $a_{j\nu} = 0$, gdy $j = \nu$ lub gdy j i ν są równocześnie parzyste, lub j i ν są równocześnie nieparzyste. Ogólnie można to wyrazić wzorem następującym

$$(37) \quad a_{j\nu} = 0, \quad \text{jeśli } (j + \nu)/2 = \mu,$$

gdzie μ jest liczbą całkowitą.

Również ze wzoru (36) wynika

$$(38) \quad a_{j\nu} = -a_{\nu j}.$$

Na podstawie (38) mamy

$$(39) \quad K(t, t) = \sum_{j, v=1}^{\infty} a_{jv} \sin \frac{j\pi v}{l} t \sin \frac{v\pi v}{l} t = 0.$$

Współczynniki a_{jv} są rzędu $o(1/j^3)$ i $o(1/v^3)$ i szereg (35) jest jednostajnie zbieżny względem obu zmiennych.

Po zróżniczkowaniu względem t otrzymujemy szereg o współczynnikach rzędu $o(1/j^2)$, a więc również jednostajnie zbieżny. Drugie różniczkowanie względem t daje szereg o współczynnikach rzędu $o(1/j)$. Szereg ten jest złożony z samych sinusów i jego majorantą jest szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{j\pi v}{l} t}{j},$$

który jak wiadomo przedstawia funkcję ciągłą w przedziale otwartym $(0, l/v)$.

W dalszym ciągu rozumowania pominiemy czas przejścia podpory ruchomej nad podporami nieruchomymi i rozpatrywać będziemy równanie (34) w przedziale $0 < t_0 \leq t \leq l/v - t_0$, gdzie t_0 jest czasem przejścia podpory ruchomej nad nieruchomą.

Po dwukrotnym różniczkowaniu równania (34) względem t otrzymujemy równanie Volterry drugiego rodzaju w postaci

$$(40) \quad l''(t) = -R(t)K'(t, t) - \int_0^t R(s)K''(s, t) ds,$$

gdzie

$$K'(t, t) = \left[\frac{\partial K(s, t)}{\partial t} \right]_{s=t} = \sum_{j, v=1}^{\infty} a_{jv} \frac{j\pi v}{l} \cos \frac{j\pi v}{l} t \sin \frac{v\pi v}{l} t,$$

$$K''(s, t) = \frac{\partial^2 K(s, t)}{\partial t^2} = - \sum_{j, v=1}^{\infty} a_{jv} \left(\frac{j\pi v}{l} \right)^2 \sin \frac{j\pi v}{l} t \sin \frac{v\pi v}{l} s.$$

Rozwiązanie równania (40) można napisać w postaci następującej:

$$(41) \quad R(t) = - \frac{l''(t)}{K'(t, t)} + \int_0^t \frac{l''(s)}{K'(s, s)} \Gamma(s, t) ds,$$

gdzie $\Gamma(s, t)$ jest rezolwentą jądra $K''(s, t)/K'(t, t)$.

Funkcja $K'(t, t)$ przyjmuje wartości zera na końcach przedziału $[0, l/v]$; końce te wykluczaliśmy, zaś funkcja $K''(s, t)$ jest ciągłą obu zmiennych i ograniczoną w przedziale $[t_0, l/v - t_0]$. Gdyby funkcja $K'(t, t)$ przyjmowała wartość zera wewnątrz przedziału $[t_0, l/v - t_0]$, to możemy podzielić

przedział $[t_0, l/v - t_0]$ na skończoną liczbę podprzedziałów, w których funkcja $K'(t, t)$ jest różna od zera, i równanie (40) rozwiązać w każdym podprzedziale.

Przy obliczaniu współczynników $a_{j\nu}$ przyjęto założenie, że mianowniki ułamków występujących w szeregu są różne od zera. W mianownikach występuje wyrażenie

$$k_n - \frac{\pi^2 v^2}{l^2} \mu^2,$$

o którym zakładaliśmy, że jest różne od zera dla każdej liczby całkowitej n i μ .

Przypuśćmy, że dla pewnych liczb całkowitych n i μ zachodzi równość

$$(42) \quad k_n - \frac{\pi^2 v^2}{l^2} \mu^2 = 0.$$

Po podstawieniu na k_n wartości (16) i wykorzystaniu oznaczeń (7) otrzymamy równanie

$$(43) \quad \left(\frac{n^4 \pi^4}{l^4} - \frac{\bar{m} \omega^2}{EJ} \right) \frac{EJ}{\bar{m}} - \frac{\pi^2 v^2}{l^2} \mu^2 = 0.$$

Rozwiązując równanie (43) na v^2 otrzymamy

$$(44) \quad v^2 = \frac{l^2}{\pi^2 \mu^2} \left(\frac{n^4 \pi^4 EJ}{l^4 \bar{m}} - \omega^2 \right).$$

Wzór (44) oznacza prędkość v , przy której ruch pręta staje się niestacynny i amplituda drgań rośnie proporcjonalnie do czasu. W rozpatrywanym przypadku czas zmienia się od 0 do l/v i wzrost amplitudy zależy od l/v .

Prędkość określona wzorem (44) można nazwać prędkością krytyczną przy przesuwaniu podpory wzdłuż pręta wirującego.

Jeżeli $\omega = 0$, tj. jeżeli pręt nie wykonuje ruchu obrotowego, wzór (44) określa prędkość krytyczną przesuwania siły skupionej po belce wspartej na dwóch podporach. Przy $\omega \neq 0$, jak wynika ze wzoru (44), prędkość ta się zmniejsza. Prędkość krytyczna kątowna pręta wirującego w dwóch łożyskach wyraża się wzorem

$$(45) \quad \omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4 EJ}{l^4 \bar{m}}.$$

Podstawiając (45) do (44) otrzymamy

$$(46) \quad v^2 = \frac{l^2}{\pi^2 \mu^2} \left(\omega_n^2 - \omega^2 \right).$$

Ze wzoru (46) wynika, że prędkość krytyczna jest tym mniejsza, im mniej różnią się obroty pręta od obrotów krytycznych, oraz dla każdej prędkości kątownej ω istnieje ciąg malejący prędkości krytycznych przesuwu.

Ze wzoru (43) możemy obliczyć ω^2 :

$$(47) \quad \omega^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{m} - \frac{\pi^2 v^2}{l^2} \mu^2.$$

Podstawiając do wzoru (47) funkcję (46) otrzymamy

$$(48) \quad \omega^2 = \omega_n^2 - \frac{\pi^2 v^2}{l^2} \mu^2.$$

Ze wzoru (48) wynika, że prędkość kątowna krytyczna przy przesuwaniu podpory jest mniejsza od prędkości krytycznej pręta wirującego w dwóch łożyskach.

Przesuwanie podpory po wirującym pręcie jest działaniem wymuszającym drgania. Przy prędkościach przesuwu określonych wzorem (44) następuje zjawisko o charakterze rezonansu. Powyższe wnioski oraz rozwiązania (31) otrzymano przy założeniu, że $k_n > 0$.

Rozpatrzmy obecnie drugi przypadek, gdy $k_n \leq 0$ dla pewnych $n \leq N$. Rozwiązania równań (16) i (26) mają postać:

$$(49) \quad \begin{cases} T_n(t) = \frac{1}{2} (e^{t\sqrt{-k_n}} + e^{-t\sqrt{-k_n}}), & \text{jeśli } n = 1, 2, \dots, N; \\ T_n(t) = \cos \sqrt{k_n} t, & \text{jeśli } n = N+1, N+2, \dots; \end{cases}$$

$$(50) \quad \begin{cases} S_n(t) = \frac{1}{2\sqrt{-k_n}} \int_0^t B_n(s) (e^{(t-s)\sqrt{-k_n}} - e^{-(t-s)\sqrt{-k_n}}) ds, & \text{jeśli } n = 1, 2, \dots, N; \\ S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{k_n}} \int_0^t B_n \sin \sqrt{k_n}(t-s) ds, & \text{jeśli } n = N+1, N+2, \dots. \end{cases}$$

Dalsze rozumowanie przebiega analogicznie do przeprowadzonego dla $k_n > 0$. Rozwiązanie (31) w tym przypadku ma postać

$$(51) \quad z = \sum_{n=1}^N A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \frac{1}{2} (e^{t\sqrt{-k_n}} + e^{-t\sqrt{-k_n}}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \sqrt{k_n} t + \\ + \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{2} \sin \frac{n\pi}{l} x \int_0^t R(s) \sin \frac{n\pi v}{l} s (e^{(t-s)\sqrt{-k_n}} - e^{-(t-s)\sqrt{-k_n}}) ds + \\ + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l} x \int_0^t R(s) \sin \frac{n\pi v}{l} s \sin \sqrt{k_n}(t-s) ds,$$

We wzorze (5) występują funkcje wykładnicze i niezależnie od innych parametrów ugięcie osi pręta rośnie z czasem, [1]. W tym przypadku pręt

wykonuje drgania określone szeregami we wzorze (51), w których nie występują funkcje wykładnicze. Przypadek $k_n \leq 0$ zachodzi, jeżeli spełniona jest nierówność

$$\omega^2 \geq \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 \frac{EJ}{m}, \quad \text{jeśli } n = 1, 2, \dots, N,$$

tj. jeżeli prędkość kątowna pręta jest większa od prędkości kątowej krytycznej pręta wirującego w dwóch łożyskach. Ruch pręta jest w tym przypadku niestateczny ze względu na prędkość kątową ponadkrytyczną, [1]. Wpływ prędkości przesuwu określonej wzorem (44) jest taki sam jak w przypadku $k_n > 0$.

We wzorze (30), określającym współczynniki c_n , występuje długość podpory ruchomej d , którą przyjmujemy jako małą. Możemy wykonać przejście do granicy $d \rightarrow 0$ i wówczas współczynniki c_n przyjmą wartość

$$(52) \quad c_n = -\frac{8l}{EJ\sqrt{k_n}}.$$

Rząd współczynników c zwiększa się i wynosi o $(1/n^2)$, co jednak nie wpływa na zbieżność szeregów otrzymanych we wzorach (31), (41) i (51).

Opisaną metodę rozwiązywania drgań prętów wirujących na ruchomych podporach można uogólnić na skończoną dowolną liczbę podpór, z których dwie skrajne są nieruchome. W tym przypadku otrzymujemy układ równań całkowitych typu (40) do wyznaczenia nieznanymi reakcji.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Поперечные колебания и критические скорости, Сборник, АН СССР, Москва 1951.
- [2] А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, Москва 1950.
- [3] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Москва 1951.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ НА ПОДВИЖНЫХ ОПОРАХ

Рассматриваются поперечные колебания стержня, вращающегося на трех опорах, из которых срединная опора перемещается с постоянной скоростью вдоль оси стержня. Решение уравнения колебаний получается путем определения собственных значений и собственных функций. В результате анализа решения уравнения колебаний получается уравнение для критических скоростей в зависимости от ско-

рости перемещения опоры. Из этого уравнения следует, что при перемещении серединной опоры, критические скорости меньше критических скоростей стержня, вращающегося на двух подшипниках.

Метод приведенный в работе можно обобщить на произвольное число опор, из которых две неподвижны.

Summary

VIBRATIONS OF BARS ON MOVABLE SUPPORTS

A consideration of transverse vibration of a bar rotating on three supports moving with constant velocity along the axis. The solution of the equation of vibration is obtained by finding the eigenvalues and the eigenfunctions. As a result of analysis of the equation of vibration, an equation is obtained for critical velocities depending on the velocity of support displacement. From this equation it follows that with a moving intermediate support the critical velocities are less than the critical velocities of a rotating bar on two supports.

The method described may be generalized to any number of supports of which the two extreme ones are immobile.

ZAKŁAD BADAŃ DRGAN
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 listopada 1958 r.