

ZBIGNIEW OSIŃSKI

WPLYW NIELINIOWEJ CHARAKTERYSTYKI TŁUMIENIA  
TARCIEM WEWNĘTRZNYM NA DRGANIA WYMUSZONE

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CXVIII

## SPIS TREŚCI

1. Wstęp	27
2. Rozwiązanie równania	28
3. Dyskusja rozwiązania	31
4. Wnioski	35

## 1. Wstęp

Metody badań tarcia wewnętrzznego ciał stałych polegają na badaniu drgań swobodnych lub wymuszonych, przy czym są stosowane wzory oparte na założeniu liniowych równań ruchu. W ogólnym równaniu ruchu układu drgającego o jednym stopniu swobody

$$m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = F(t)$$

przyjmuje się, że charakterystyki tłumienia i siły sprężystej są liniowe. Wyniki doświadczeń stoją jednak w niezgodzie z tym założeniem. Przyjęcie liniowej charakterystyki siły sprężystej powoduje dla większości materiałów nieznaczne różnice natury ilościowej, jeżeli oczywiście amplitudy odkształceń są tego rzędu, że nie zostanie przekroczona granica proporcjonalności odkształceń. Natomiast przyjęcie liniowej charakterystyki tłumienia prowadzi do poważnych różnic jakościowych, [1], [2] i [3]. Z tego powodu wyniki badań wykazują duże rozbieżności. Wyniki tych badań wskutek założeń liniowości nie dają podstaw do oceny charakterystyki tłumienia.

Praca niniejsza stanowi próbę znalezienia metody oceny nieliniowej charakterystyki tłumienia. W tym celu rozwiązujemy i przeprowadzamy dyskusję równania ruchu układu drgającego o jednym stopniu swobody z liniową charakterystyką sprężystą i nieliniową charakterystyką tłumienia. Weźmiemy przy tym pod uwagę ruch wymuszony siłą okresową sinusoidalnie zmienną. Sposób badania tarcia wewnętrzznego za pomocą drgań wymuszonych jest szeroko stosowany.

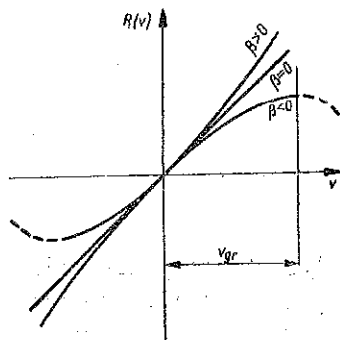
Charakterystyka tłumienia nie jest znana. Przyjmiemy więc jako przybliżenie charakterystykę nieliniową określoną za pomocą funkcji

$$(1.1) \quad R(v) = av + \beta v^3,$$

gdzie  $v = \dot{x}$  oznacza prędkość masy drgającej.

Założymy przy tym, że  $a > 0$ , a  $\beta$  może mieć wartość dodatnią lub ujemną. Tak określona charakterystyka może przedstawiać tłumienie «sztywne» przy  $\beta > 0$  lub «miękkie» przy  $\beta < 0$ . W odniesieniu do tłumienia miękkiego założymy, że wartość bezwzględna prędkości nie prze-

kracza pewnej prędkości granicznej  $|v| < v_{gr}$  dobranej tak, aby  $R(v)$  w całym zakresie badania była funkcją rosnącą przy wzroście  $v$ . Założenie to pozostaje w zgodzie z fizykalnymi cechami zjawiska.



Rys. 1

Uwzględniając powyższe uwagi napiszemy równanie ruchu w postaci

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \varepsilon\dot{x}^3 + kx = F \sin vt$$

lub po podzieleniu obustronnie przez  $m$

$$(1.2) \quad \ddot{x} + a\dot{x} + \beta\dot{x}^3 + \omega^2 x = q \sin vt$$

gdzie  $a = c/m$ ,  $\beta = \varepsilon/m$ ,  $\omega^2 = k/m$

oraz  $q = F/m$ .

## 2. Rozwiązanie równania

Rozwiązanie równania różniczkowego (1.2) nie jest znane, musimy więc równanie to rozwiązać metodą przybliżoną. Zastosujemy metodę małego parametru. Znane jest rozwiązanie metodą małego parametru, [4], [5], równania

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}, t)$$

lub

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t) + \mu G(x, \dot{x}),$$

gdzie  $\mu$  oznacza mały parametr. Rozwiązania asymptotyczne takich równań są słuszne tylko dla słabego tłumienia, natomiast mało dokładne przy tłumieniu silnym. Poza tym niedogodnością jest fakt, że w rozwiązaniu niektóre wyrazy przybierają wartości nieograniczenie wielkie w przypadku rezonansu odpowiedniego rzędu. Wartości takich układ nie może osiągnąć przy dodatnim tłumieniu. Zmusza to do oddzielnego traktowania ruchu w przypadku rezonansu i w strefie poza rezonansem. Dla uniknięcia tych trudności badamy równanie ogólniejsze

$$(2.1) \quad \ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x = F(t) + \mu G(x, \dot{x}).$$

Dopuszczamy więc, że liniowa część tłumienia może być duża. Założymy przy tym, że siła wymuszająca jest okresową funkcją czasu o częstotliwości  $\nu$ .

Przybliżonego rozwiązania równania szukamy w postaci szeregu

$$(2.2) \quad x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots,$$

przy czym  $x_0(t)$  jest rozwiązaniem równania przybliżenia zerowego, które otrzymamy z równania (2.1) przyjmując  $\mu=0$ . Różniczkujemy odpowiednio funkcję (2.2) i podstawiamy do równania różniczkowego (2.1).

Następnie przyrównujemy wyrazy przy tych samych potęgach parametru  $\mu$ . Otrzymujemy układ równań różniczkowych o postaci

$$(2.3) \quad \begin{cases} \ddot{x}_0 + a\dot{x}_0 + \omega^2 x_0 = F(t), \\ \ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = G_1(x_0, \dot{x}_0), \\ \dots \\ \ddot{x}_i + a\dot{x}_i + \omega^2 x_i = G_i(x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}), \\ \dots \end{cases}$$

Podstawiając kolejne rozwiązania  $x_{i-1}$  i  $\dot{x}_{i-1}$  do funkcji  $G_i(x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{i-1}, \dot{x}_{i-1})$  otrzymamy układ równań mających postać

$$(2.4) \quad \ddot{x}_i + a\dot{x}_i + \omega^2 x_i = f_i(t).$$

Są to równania liniowe niejednorodne o współczynnikach stałych. Rozwiązanie takiego równania składa się z dwóch funkcji: okresowej o częstotliwości siły wymuszającej (rozwiązanie szczególne) oraz gasnącej o amplitudzie zmierzającej do zera, gdy  $t \rightarrow \infty$  (rozwiązanie ogólne równania jednorodnego). Badanie tarcia opieramy na badaniu drgań okresowych, toteż szukać będziemy tylko okresowych rozwiązań równania (2.4) odrzucając rozwiązania gasnące.

Zastosujemy metodę powyższą do badanego równania (1.2). Przyjmujemy za mały parametr współczynnik tłumienia nieliniowego  $\beta$ . Poszukując rozwiązania przybliżonego zachowamy w naszym rozwiązaniu tylko wyrazy z  $\beta$  i  $\beta^2$ . Układ równań (2.3) ma dla równania (1.2) postać

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + a\dot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= q \sin \nu t, \\ \ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -\dot{x}_0^3, \\ \ddot{x}_2 + a\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= -3\dot{x}_0^2 \dot{x}_1. \end{aligned}$$

Rozwiązujemy pierwsze z tych równań znajdując jego rozwiązanie szczególne  $x_0$ . To rozwiązanie podstawiamy do prawej strony równania następnego. Rozwiązując z kolei to równanie znajdujemy jego rozwiązanie szczególne  $x_1$ . Podobnie wyznaczymy  $x_2$  po podstawieniu do prawej strony trzeciego równania rozwiązań  $x_0$  i  $x_1$ . Zgodnie ze wzorem (2.2) otrzymamy przybliżone rozwiązanie równania (1.2) w postaci

$$\begin{aligned} x = & c_{01} \sin \nu t + d_{01} \cos \nu t + \beta(c_{11} \sin \nu t + d_{11} \cos \nu t + c_{13} \sin 3\nu t + \\ & + d_{13} \cos 3\nu t) + \beta^2(c_{21} \sin \nu t + d_{21} \cos \nu t + c_{23} \sin 3\nu t + d_{23} \cos 3\nu t + \\ & + c_{25} \sin 5\nu t + d_{25} \cos 5\nu t). \end{aligned}$$

Wartości współczynników są następujące:

$$c_{01} = \frac{q(\omega^2 - \nu^2)}{A_1}, \quad d_{01} = \frac{-qav}{A_1},$$

$$c_{11} = \frac{3}{4} \frac{\nu^3}{A_1} [(c_{01}^2 d_{01} + d_{01}^3)(\omega^2 - \nu^2) - (c_{01}^3 + c_{01} d_{01}^2)av],$$

$$d_{11} = -\frac{3}{4} \frac{\nu^3}{A_1} [(c_{01}^2 d_{01} + d_{01}^3)av + (c_{01}^3 + c_{01} d_{01}^2)(\omega^2 - \nu^2)],$$

$$c_{13} = \frac{\nu^3}{4A_3} [(3c_{01}^2 d_{01} - d_{01}^3)(\omega^2 - 9\nu^2) + (-c_{01}^3 + 3c_{01} d_{01}^2)3av],$$

$$d_{13} = \frac{\nu^3}{4A_3} [(-3c_{01}^2 d_{01} + d_{01}^3)3av + (-c_{01}^3 + 3c_{01} d_{01}^2)(\omega^2 - 9\nu^2)],$$

$$c_{21} = \frac{3\nu^3}{2A_1} \left[ \left( \frac{1}{2} c_{01}^2 d_{11} + \frac{3}{2} c_{01}^2 d_{13} + c_{01} d_{01} c_{11} - 3c_{01} d_{01} d_{11} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{2} d_{01}^2 d_{11} - \frac{3}{2} d_{01}^2 d_{13} \right) (\omega^2 - \nu^2) + \left( -\frac{3}{2} c_{01}^2 c_{11} - \frac{3}{2} c_{01}^2 c_{13} - \right. \right. \\ \left. \left. - c_{02} d_{01} d_{11} - 3c_{01} d_{11} d_{13} - \frac{1}{2} d_{11}^2 c_{11} + \frac{3}{2} d_{11}^2 c_{13} \right) av \right],$$

$$d_{21} = \frac{3\nu^3}{2A_1} \left[ \left( -\frac{1}{2} c_{01}^2 c_{11} - \frac{3}{2} c_{01}^2 d_{13} - c_{01} d_{01} d_{01} c_{11} + 3c_{01} d_{01} c_{13} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} d_{01}^2 d_{11} + \frac{3}{2} d_{01}^2 d_{13} \right) av + \left( -\frac{3}{2} c_{01}^2 c_{11} - \frac{3}{2} c_{01}^2 c_{13} - \right. \right. \\ \left. \left. - c_{01} d_{01} d_{11} - 3c_{01} d_{01} d_{13} - \frac{1}{2} d_{01}^2 c_{11} + \frac{3}{2} d_{01}^2 c_{13} \right) (\omega^2 - \nu^2) \right],$$

$$c_{23} = \frac{3\nu^3}{2A_3} \left[ \left( \frac{1}{2} c_{01}^2 d_{11} + 3c_{01}^2 d_{13} + c_{01} d_{01} c_{11} - \frac{1}{2} d_{01}^2 d_{11} + 3d_{01}^2 d_{13} \right) (\omega^2 - 9\nu^2) + \right. \\ \left. + \left( -\frac{1}{2} c_{01}^2 c_{11} - 3c_{01}^2 c_{13} + c_{01} d_{01} d_{11} + \frac{1}{2} d_{01}^2 c_{11} - 3d_{01}^2 c_{13} \right) 3av \right],$$

$$d_{23} = \frac{3\nu^3}{2A_3} \left[ \left( -\frac{1}{2} c_{01}^2 d_{11} - 3c_{01}^2 d_{13} - c_{01} d_{01} c_{11} + \frac{1}{2} d_{01}^2 d_{11} - \right. \right. \\ \left. \left. - 3d_{01}^2 d_{13} \right) 3av + \left( -\frac{1}{2} c_{01}^2 c_{11} - 3c_{01}^2 c_{13} + c_{01} d_{01} d_{11} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} d_{01}^2 c_{11} - 3d_{01}^2 c_{13} \right) (\omega^2 - 9\nu^2) \right],$$

$$c_{25} = \frac{3\nu^3}{2A_5} \left[ \left( \frac{3}{2} c_{01}^2 d_{13} + 3c_{01} d_{01} c_{13} - \frac{3}{2} d_{01}^2 d_{13} \right) (\omega^2 - 25\nu^2) + \right. \\ \left. + \left( -\frac{3}{2} c_{01}^2 c_{13} + 3c_{01} d_{01} d_{13} + \frac{3}{2} d_{01}^2 c_{13} \right) 5av \right],$$

$$d_{25} = \frac{3\nu^3}{2A_5} \left[ \left( -\frac{3}{2} c_{01}^2 d_{13} - 3c_{01} d_{01} c_{13} + \frac{3}{2} d_{01}^2 d_{13} \right) 5a\nu + \right. \\ \left. + \left( -\frac{3}{2} c_{01}^2 c_{13} + 3c_{01} d_{01} d_{13} + \frac{3}{2} d_{01}^2 c_{13} \right) (\omega^2 - 25\nu^2) \right].$$

We wzorach powyższych przyjęliśmy oznaczenia:

$$A_1 = (\omega^2 - \nu^2)^2 + a^2 \nu^2, \quad A_3 = (\omega^2 - 9\nu^2)^2 + 9a^2 \nu^2, \quad A_5 = (\omega^2 - 25\nu^2)^2 + 25a^2 \nu^2.$$

Zbadamy w szczególności przypadek rezonansu amplitudy pierwszej harmonicznej, czyli tzw. rezonansu podstawowego, zakładając że  $\omega = \nu$ . Wtedy współczynniki występujące w rozwiązaniu mają postać:

$$c_{01} = 0, \quad d_{01} = -\frac{q}{a\nu^3}, \quad c_{11} = 0, \quad d_{11} = \frac{3}{4} \frac{q^3}{a^4 \nu},$$

$$c_{13} = 2\nu^2 \frac{q^3}{a^3} \frac{1}{A_3}, \quad d_{13} = -\frac{3}{4} \nu \frac{q^3}{a^2} \frac{1}{A_3},$$

$$c_{21} = -4,5\nu^3 \frac{q^5}{a^6} \frac{1}{A_3}, \quad d_{21} = 2,25 \frac{q^2}{a^3} (-d_{11} + d_{13}),$$

$$c_{23} = 3 \frac{\nu^2}{a^2} \frac{q^2}{A_3} (2d_{11} \nu - 1,33 d_{13} \nu - 4,5 c_{13} a),$$

$$d_{23} = 3 \frac{\nu^2}{a^2} \frac{q^2}{A_3} (0,75 d_{11} a - 4,5 d_{13} a + 12 c_{13} \nu),$$

$$c_{25} = 2,25 \frac{\nu^2}{a^2} \frac{q^2}{A_5} (24\nu d_{13} + 5a c_{13}),$$

$$d_{25} = 2,25 \frac{\nu^2}{a^2} \frac{q^2}{A_5} (5d_{13} a - 24c_{13} \nu),$$

$$A_1 = a^2 \nu^2, \quad A_3 = 64\nu^4 + 9a^2 \nu^2, \quad A_5 = 576\nu^4 + 25a^2 \nu^2.$$

### 3. Dyskusja rozwiązania

Ponieważ analiza rozwiązania wymaga dużej pracy, ograniczymy się do znalezienia uproszczonych wzorów dla pewnego zakresu wartości stałych. Załóżmy mianowicie, że

$$(3.1) \quad \frac{\nu}{a} > 10.$$

Założenie to jest na ogół spełnione przy drganiach mechanicznych. Amplitudy kolejnych harmonik dla funkcji  $x_i$  są następujące:

$$a_{in} = \sqrt{c_{in}^2 + d_{in}^2}.$$

Zbadamy przy tym ruch w strefie rezonansu podstawowego. Sprawdzamy, jakie są stosunki między amplitudami kolejnych harmonik. Porównując np. amplitudy  $a_{11}$  i  $a_{13}$  stwierdzamy, że rząd wielkości stosunku tych amplitud jest równy rzędowi wielkości stosunku współczynników  $|c_{13}|$  i  $|c_{11}|$ . Ten zaś

$$\frac{|c_{13}|}{|c_{11}|} = \frac{8}{3} \frac{1}{64 \frac{\nu}{\alpha} + 9 \frac{\alpha}{\nu}} < \frac{1}{240}.$$

Harmonika trzecia może być w rozwiązaniu  $x_1$  pominięta, tym bardziej, że rozwiązanie  $\beta x_1$  jest rzędu niższego niż  $x_0$  dzięki parametrowi  $\beta$ . Przeprowadzając podobne rozważania dla wszystkich amplitud dojdziemy do wniosku, że w zakresie określonym założeniem (3.1) (a nawet w znacznie szerszym zakresie) w strefie rezonansu wystarczy brać pod uwagę tylko pierwszą harmonikę. Rozwiązanie możemy więc napisać w postaci

$$x = (c_{01} + \beta c_{11} + \beta^2 c_{12}) \sin \nu t + (d_{01} + \beta d_{11} + \beta^2 d_{21}) \cos \nu t$$

lub

$$x = D \sin(\nu t + \delta),$$

gdzie

$$D = \sqrt{(c_{01} + \beta c_{11} + \beta^2 c_{12})^2 + (d_{01} + \beta d_{11} + \beta^2 d_{21})^2}$$

oraz

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{d_{01} + \beta d_{11} + \beta^2 d_{21}}{c_{01} + \beta c_{11} + \beta^2 c_{12}}.$$

Ponieważ w zakresie rezonansu podstawowego  $c_{01} = 0$ ,  $c_{11} = 0$  i  $c_{21}$  jest bardzo małe w stosunku do  $d_{21}$ , możemy wzór na amplitudę jeszcze uprościć:

$$(3.2) \quad D = d_{01} + \beta d_{11} + \beta^2 d_{21}.$$

Uwzględniając związki jakie zachodzą między  $d_{01}$ ,  $d_{11}$  i  $d_{21}$  możemy wzór (3.2) przedstawić w postaci

$$D = d_{01} \left[ 1 - 0,75 \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{q}{\alpha} \right)^2 + 1,69 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{q}{\alpha} \right)^4 \right].$$

Zbadajmy, jak zmienia się amplituda  $D$  przy zmianie amplitudy siły wymuszającej  $q$ . Amplituda drgań liniowych zależy wprost proporcjonalnie od  $q$ . Przy drganiach nieliniowych zależność ta jest nieliniowa. Dla



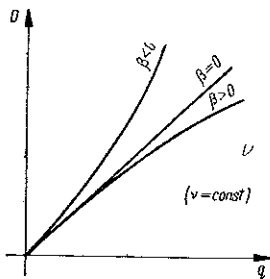
drgań liniowych ( $\beta = 0$ ) stosunek amplitudy drgań do amplitudy siły wymuszającej jest stały i niezależny od  $q$  (przy  $\nu = \text{const}$ )

$$\frac{D}{q} = \frac{d_{01}}{q} = \frac{1}{\alpha\nu} = \text{const}.$$

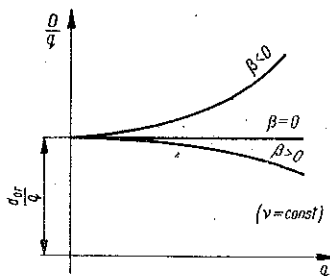
Natomiast w przypadku drgań nieliniowych stosunek ten jest zmienny

$$\frac{D}{q} = f(q).$$

Zależność  $D$  oraz  $D/q$  od  $q$  jest przedstawiona na rys. 2 i 3.



Rys. 1



Rys. 2

Energię rozproszoną wskutek tłumienia podczas jednego okresu obliczymy ze wzoru:

$$E = \int_T^{T_{n+1}} R(v)v dt.$$

Funkcja podcałkowa ma w naszym przypadku postać

$$R(v)v = \alpha v^2 + \beta v^4.$$

Biorąc pod uwagę rozwiązanie periodyczne obliczamy prędkość i przeprowadzamy całkowanie. Obliczamy w ten sposób wartość energii:

$$E = \pi\nu\alpha (c_{01}^2 + d_{01}^2) + \beta \left[ 2\pi\alpha\nu (c_{01}c_{11} + d_{01}d_{11}) + \frac{3}{4}\pi\nu^3 (c_{01}^4 + 2c_{01}^2d_{01}^2) \right] + \beta^2 \left[ 2\pi\nu\alpha (c_{01}c_{21} + d_{01}d_{21}) + \pi\nu\alpha (c_{11}^2 + d_{11}^2 + 9c_{13}^2 + 3\pi\nu^3 (c_{01}^3c_{11} + d_{11}^3 + c_{01}^2d_{01}d_{11} + c_{01}d_{01}^2c_{12})) \right].$$

W przypadku rezonansu podstawowego wykorzystując wyprowadzone poprzednio wzory oraz pomijając współczynniki  $c_{11}$  i  $d_{13}$ , jako bardzo małe w stosunku do  $d_{11}$  otrzymamy wzór:

$$E = \pi q d_{01} \left[ 1 - 0,75 \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{q}{\alpha} \right)^2 + 1,69 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{q}{\alpha} \right)^4 \right] = \pi q D.$$

Obliczamy pracę siły wymuszającej w czasie jednego okresu:

$$L = \int_{T_n}^{T_{n+1}} q \sin \nu t \nu dt.$$

Biorąc  $\nu$  w przypadku rezonansu otrzymamy po zcałkowaniu

$$L = -q\pi D.$$

Mamy więc

$$|L| = |E|$$

Średnia moc siły wymuszającej w czasie okresu

$$N = \frac{|L|}{T} = \frac{qD\nu}{2}.$$

W przypadku drgań liniowych mamy

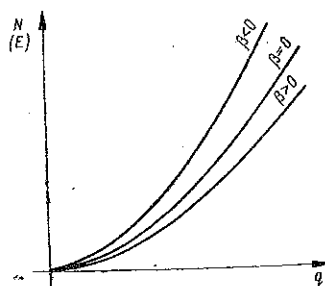
$$E = \pi q d_{01},$$

$$N = \frac{q\nu}{2} d_{01}.$$

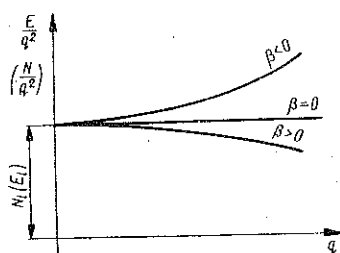
A więc

$$E = E_l \left[ 1 - 0,75 \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{q}{a} \right)^2 + 1,69 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{q}{a} \right)^4 \right],$$

$$N = N_l \left[ 1 - 0,75 \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{q}{a} \right)^2 + 1,69 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{q}{a} \right)^4 \right].$$



Rys. 4



Rys. 5

Widzimy, że dla liniowej charakterystyki ( $\beta = 0$ ) energia i moc średnia jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy siły wymuszającej. Przy drganiach nieliniowych zależność ta się zmienia. Wielkości  $N/q^2$  i  $E/q^2$  są przy  $\beta = 0$  stałe i niezależne od  $q$ . Natomiast w przypadku charakterystyki nieliniowej są zmienne i są funkcją  $q$ . Charakter tych zależności przedstawiają rys. 4 i 5.

#### 4. Wnioski

Na podstawie poprzednich rozważań dochodzimy do wniosku, że nieliniowość charakterystyki tłumienia ma wpływ na zależność amplitudy, energii dysypowanej oraz mocy średniej od amplitudy siły wymuszającej. Przy charakterystyce liniowej stosunki  $Dq$ ,  $Eq^2$ ,  $Nq^2$  są stałe, natomiast przy nieliniowej są zmienne i zależne od  $q$ . Przeprowadzając więc badanie tłumienia za pomocą drgań wymuszonych możemy wyciągnąć pewne wnioski co do postaci charakterystyki, ustalając doświadczalnie zależności między  $D/q$ ,  $E/q^2$ ,  $N/q^2$  a  $q$ .

Przy badaniu należy więc zmieniać amplitudę siły wymuszającej i sporządzić wykresy  $D/q$  ( $E/q^2$ ,  $N/q^2$ ) =  $f(q)$ . Wykresy te dadzą odpowiedź na pytanie czy charakterystyka jest liniowa, czy nieliniowa oraz czy tłumienie jest sztywne, czy miękkie. Charakter wykresu odpowie też na pytanie, na ile przedstawienie tłumienia za pomocą funkcji (1.1) jest ściśle.

Z wykresów powyższych można też określić wartości współczynnika  $\beta$ . Weźmy dla uproszczenia pierwsze przybliżenie wzoru na amplitudę:

$$D = d_{01} \left( 1 - 0,75 \beta \frac{q^2}{a^2} \right).$$

Możemy stąd obliczyć:

$$\beta = \left( 1 - \frac{D}{d_{01}} \right) \frac{a^2}{0,75 q^2}.$$

Musimy znać jednak wartość współczynnika  $a$ . Współczynnik ten określa liniową część tłumienia. Wyznaczyć go możemy doświadczalnie przeprowadzając badanie tłumienia za pomocą drgań swobodnych. Zauważymy zgodnie z rozwiązaniami Sansone, [6], i St. Ziembry, [3], czy drgania swobodne będą naprzemiennie, czy aperiodyczne zależne tylko od znaku wyrażenia

$$a^2 - 4\omega^2.$$

Gdy  $a^2 - 4\omega^2 > 0$ , to drgania są aperiodyczne, gdy  $a^2 - 4\omega < 0$ , to drgania są naprzemiennie.

Fakt ten jest więc niezależny od nieliniowej części funkcji tłumienia, w naszym przypadku od współczynnika  $\beta$ .

Możemy tak dobrać wartości  $\omega$ , aby tłumienie stało się krytyczne:

$$a = 2\omega.$$

Przeprowadzając szereg prób i doświadczeń i obserwując, czy drganie ma charakter aperiodyczny czy naprzemienny, możemy ustalić wartość  $a$ .

### Literatura cytowana w tekście

- [1] C. Zener, *Elasticity and Anelasticity of Metals*, Chicago 1948.
- [2] A. Gemant, *Frictional Phenomena*, Brooklyn 1950.
- [3] S. Ziemba, *Free Vibration with Damping of Marked Non-Linear Character*, Arch. Mech. stos., 5, 9 (1957), s. 525.
- [4] Н. Н. Боголюдов и Ю. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Moskwa, 1955.
- [5] И. Г. Малкин, *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний*, Moskwa 1955.
- [6] G. Sansone, *Equazioni differenziali el campo reale*, 1949.

### Резюме

#### ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕМПФИРОВАНИЯ ВНУТРЕННИМ ТРЕНИЕМ НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Автор пытается найти метод оценки характеристики демпфирования считаемой нелинейной. Для этой цели предполагает, что демпфирование является нелинейной функцией скорости, принимая эту зависимость в форме:

$$R(v) = av + \beta v^3.$$

Затем исследуется влияние такого нелинейного демпфирования на колебания, вынужденные периодической, синусоидальной силой системы с одной степенью свободы с линейной упругой характеристикой. Дифференциальное уравнение движения автор решает приближенным методом, являющимся обобщением метода малого параметра. Обобщение состоит в предположении, что малый параметр выступает только в нелинейной части демпфирования, а не выступает в линейной части демпфирования и вынуждающей силы. Автор исследует влияние нелинейности демпфирования на амплитуду колебаний  $D$  и рассеянную энергию  $E$ , а также на среднюю мощность  $N$  вынуждающей силы в случае основного резонанса. Констатируется влияние амплитуды вынуждающей силы  $q$  на отношения  $D/q$ ,  $E/q^2$ ,  $N/q^2$ . В связи с приведенным выше автор делает заключение о возможности констатирования нелинейности характеристики демпфирования путем исследования влияния вынуждающей силы на вынужденные колебания.

### Summary

#### THE INFLUENCE OF NON-LINEAR CHARACTERISTIC OF INTERNAL FRICTION DAMPING ON FORCED VIBRATION

The author sets out to find a method of a appraisal of a damping characteristic considered to be non-linear. For this purpose, he assumes that the damping is a non-linear function of velocity, the relation in question being:

$$R(v) = av + \beta v^3.$$

Next, examination is made of the influence of such a non-linear damping on the forced vibration of a system with one degree of freedom, and linear elastic characteristics provoked by a sinusoidal external force. The differential equation of motion is solved by approximate means constituting a generalization of the small parameter method. This generalization consists in assuming that only the non-linear part of damping is small, an assumption not made in relation to the linear part of damping and the external force. The influence of non-linearity of damping on the vibration amplitude  $D$ , the energy dispersed  $E$ , and the mean power  $N$ , of the external force, are examined in the case of basic resonance.

It is found that the ratios  $D/q$ ,  $E/q^2$ ,  $N/q^2$  are influenced by the amplitude of the external force  $q$ . This leads the author to the conclusion that the non-linearity of damping characteristic can be detected by examining the influence on the vibration of the amplitude of the external force.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 kwietnia 1958 r.*

---