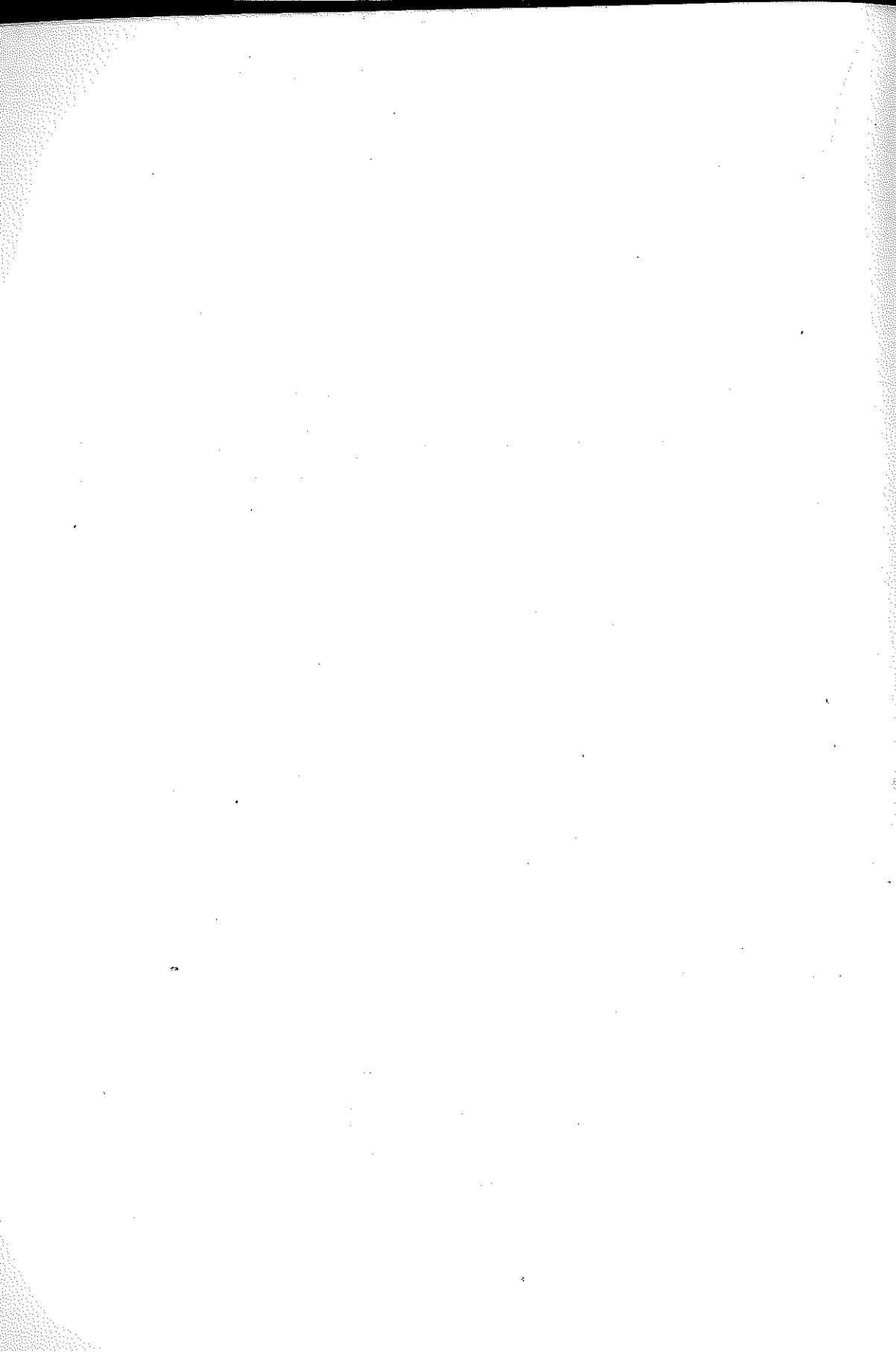


**ARTUR KACNER I ZBIGNIEW KĄCZKOWSKI**

**ZASTOSOWANIE STABELARYZOWANYCH FUNKCJI  
DO OBLICZANIA UGIĘĆ I WIELKOŚCI STATYCZNYCH  
W ORTOTROPOWYCH PASMACH I PÓLPASMACH PŁYTOWYCH**

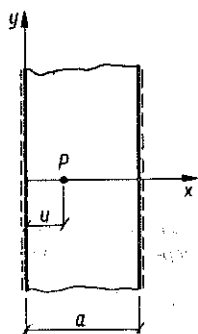
**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CLXXIX**

**TOM VIII • ZESZYT 4 • ROK 1960**

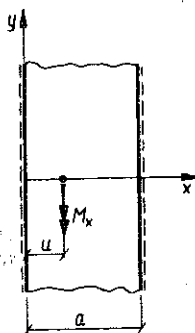


1. Zagadnienie pasma płytowego obciążonego skupioną siłą (rys. 1) lub momentem (rys. 2,3) jest przedmiotem dociekań od lat bez mała czterdziestu. W roku 1921 A. NÁDAI ([1], s. 11) stosując konforemne odwzorowanie płyty kołowej uzyskał rozwiązanie, w którym wszelkie wielkości statyczne wyrażone zostały wzorami zamkniętymi. Wielkości geometryczne wyraził on jednak za pomocą szeregów nieskończonych. W przypadku obciążenia pasma momentem skupionym  $M_y$  (rys. 3) A. STODOLA ([2], s. 299) otrzymał powierzchnię ugięcia wyrażoną wzorem zamkniętym.

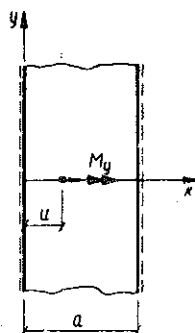
Uogólnienie rozwiązania NÁDAIA na pasmo ortotropowe uzyskał w 1951 r. W. NOWACKI, [3]. Dla wszystkich trzech typów ortotropii ( $\rho \geq 1$ ) wielkości statyczne wyrażone zostały wzorami zamkniętymi. Powierzchnie wpływowe



Rys. 1



Rys. 2



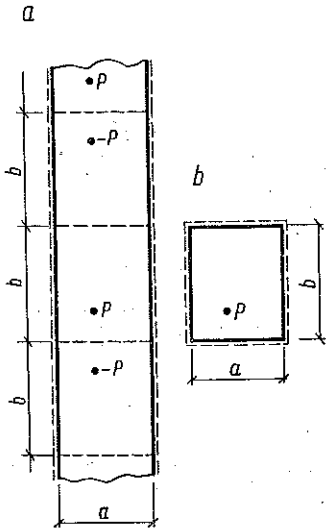
Rys. 3

wielkości statycznych dla ortotropowego półpasma płytowego o rozmaitych warunkach brzegowych na krawędzi poprzecznej otrzymali w 1954 roku Z. CYWIŃSKA i J. MOSSAKOWSKI, [4].

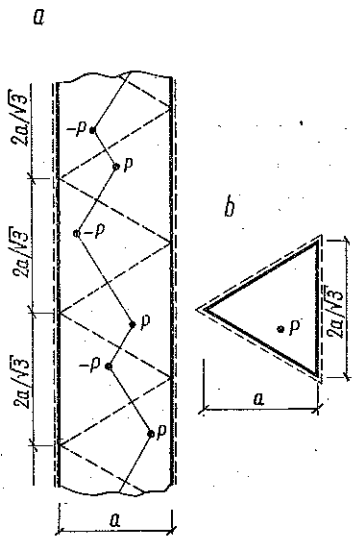
Z. KĄCZKOWSKI, [5], wyraził ugięcie izotropowego pasma płytowego obciążonego w sposób obrotowo symetryczny (w stosunku do dowolnego punktu płyty) pojedynczym szeregiem zawierającym wyrażenia logarytmiczne. Sumy tych szeregów dały się przedstawić w postaci funkcji zamkniętych A. NÁDAIA oraz w postaci pojedynczych całek oznaczonych. Wszystkie te funkcje stabelaryzowano w pracy [6].

Oczywiście obciążenie obrotowo symetryczne obejmuje jako przypadek szczególny obciążenie pasma siłą skupioną. Prócz tego funkcje stabelaryzowane

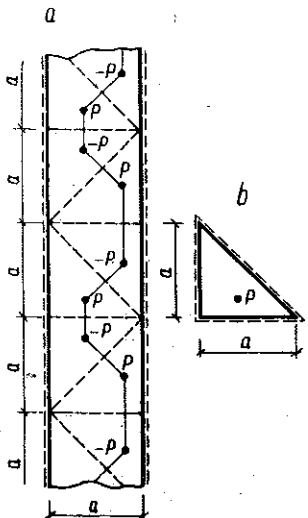
w pracy [6] umożliwiają znajdowanie ugięć, momentów i sił poprzecznych w pasmach i półpasmach płytowych, obciążonych momentami skupionymi lub obciążeniem rozłożonym liniowo wzdłuż odcinka równoległego do dłuższych brzegów płyty.



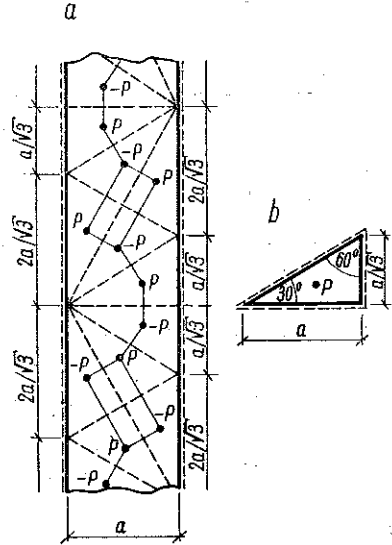
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

W pracy niniejszej pokażemy, iż za pomocą tych samych, stabelaryzowanych już funkcji wyrazić można zarówno wielkości geometryczne jak i statyczne w przypadku obciążeń skupionych, działających na ortotropowe pasmo lub pół-

pasmo płytowe. Również przypadek gęstożebrowego rusztu, [7], [8], [9], lub rusztu wzmocnionego płytą, [10], o kształcie pasma lub półpasma daje się rozwiązać przy użyciu tych samych funkcji. Funkcje te mogą także oddać pewne usługi w przypadku rozważania stanu naprężenia wywołanego polem termicznym, [11], [12], działającym na pasmo płytowe.

Warto dodać, że znajomość rozwiązań ścisłych dla swobodnie podpartego pasma umożliwia znalezienie przybliżonych rozwiązań dla swobodnie podpartych ortotropowych płyt prostokątnych, izotropowych płyt w kształcie trójkąta równobocznego, równoramiennego trójkąta prostokątnego, lub trójkąta o kątach  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ . Na rys. 4, 5, 6 i 7 pokazano, w jaki sposób należy obciążyć pasmo płytowe, aby na krawędziach prostokąta lub odpowiedniego trójkąta były spełnione warunki brzegowe swobodnego podparcia. Należy zaznaczyć, że zarówno ugięcia, jak i wszelkie wielkości statyczne wyrażają się tu za pomocą szybkozbieżnych naprzemiennych szeregów funkcyjnych, dzięki czemu ograniczyć się można do uwzględnienia niewielkiej liczby wyrazów.

2. Znajdźmy na wstępie ogólne związki zachodzące między nieskończonymi szeregami, za pomocą których nie trudno wyrazić wielkości geometryczne i statyczne w pasmach i półpasmach płytowych, a funkcjami stabelaryzowanymi w [6].

Wyjdźmy z rozwinięcia funkcji  $\ln(1-v)$ , gdzie  $v$  jest zmienną zespoloną, w szereg TAYLORA:

$$\ln(1-v) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m}{m}, \quad |v| < 1.$$

Przedstawiając zmienną  $v$  w postaci trygonometrycznej

$$v = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r < 1,$$

otrzymamy

$$(2.1) \quad \ln(1-v) = \ln|1-v| + i \arg(1-v) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m \cos m\varphi}{m} - i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m \sin m\varphi}{m}.$$

Dalej mamy

$$\ln|1-v| = \ln \sqrt{(1-r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} \ln(1-2r \cos \varphi + r^2),$$

$$\arg(1-v) = \arctg \frac{-r \sin \varphi}{1-r \cos \varphi} = -\arctg \frac{r \sin \varphi}{1-r \cos \varphi}.$$

Przyrównując w (2.1) części rzeczywiste i urojone po obu stronach znaku równości znajdziemy

$$(2.2) \quad \frac{1}{2} \ln(1-2r \cos \varphi + r^2) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m \cos m\varphi}{m},$$

$$(2.3) \quad \arctg \frac{r \sin \varphi}{1-r \cos \varphi} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m \sin m\varphi}{m}.$$

Wobec  $r < 1$  przyjmijmy  $r = e^{-\pi|\eta|}$  i wyznaczmy dla dwóch liczb zespolonych

$$v_1 = re^{i\varphi_1} = e^{-\pi|\eta|} [\cos \pi(\xi + \alpha) + i \sin \pi(\xi + \alpha)],$$

$$v_2 = re^{i\varphi_2} = e^{-\pi|\eta|} [\cos \pi(\xi - \alpha) + i \sin \pi(\xi - \alpha)],$$

część rzeczywistą i urojoną funkcji

$$\ln \frac{1-v_1}{1-v_2} = \ln \left| \frac{1-v_1}{1-v_2} \right| + i [\arg(1-v_1) - \arg(1-v_2)].$$

Z związku (2.2) otrzymamy (por. [13] wzór 1.448.2):

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1-2e^{-\pi|\eta|} \cos \pi(\xi + \alpha) + e^{-2\pi|\eta|}}{1-2e^{-\pi|\eta|} \cos \pi(\xi - \alpha) + e^{-2\pi|\eta|}} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi|\eta|}}{m} [\cos m\pi(\xi + \alpha) - \cos m\pi(\xi - \alpha)].$$

Mnożąc pod znakiem logarytmu licznik i mianownik przez  $e^{\pi|\eta|}$  a także przyjmując

$$e^{\pi|\eta|} + e^{-\pi|\eta|} = 2 \operatorname{ch} \pi \eta$$

po elementarnych przekształceniach trygonometrycznych dojdziemy do następującej zależności:

$$(2.4) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi|\eta|}}{m} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi = \frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{ch} \pi \eta - \cos \pi(\xi + \alpha)}{\operatorname{ch} \pi \eta - \cos \pi(\xi - \alpha)} = \frac{1}{4} \Phi(\xi, \eta; \alpha),$$

$$(2.5) \quad \Phi(\xi, \eta, \alpha) = \ln \frac{\operatorname{ch} \pi \eta - \cos \pi(\xi + \alpha)}{\operatorname{ch} \pi \eta - \cos \pi(\xi - \alpha)}.$$

Z zależności (2.3) mamy (por. [13], wzór 1.448.1)

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{e^{-\pi|\eta|} \sin \pi(\xi + \alpha)}{1 - e^{-\pi|\eta|} \cos \pi(\xi + \alpha)} - \operatorname{arctg} \frac{e^{-\pi|\eta|} \sin \pi(\xi - \alpha)}{1 - e^{-\pi|\eta|} \cos \pi(\xi - \alpha)} &= \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi|\eta|}}{m} [\sin m\pi(\xi + \alpha) - \sin m\pi(\xi - \alpha)], \end{aligned}$$

czyli

$$(2.6) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi|\eta|}}{m} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\sin \pi(\xi + \alpha)}{e^{\pi|\eta|} - \cos \pi(\xi + \alpha)} - \operatorname{arctg} \frac{\sin \pi(\xi - \alpha)}{e^{\pi|\eta|} - \cos \pi(\xi - \alpha)} \right] = \frac{1}{4} \theta(\xi, \eta; \alpha),$$

$$(2.7) \quad \theta(\xi, \eta; \alpha) = 2 \left[ \operatorname{arctg} \frac{\sin \pi(\xi + \alpha)}{e^{\pi|\eta|} - \cos \pi(\xi + \alpha)} - \operatorname{arctg} \frac{\sin \pi(\xi - \alpha)}{e^{\pi|\eta|} - \cos \pi(\xi - \alpha)} \right].$$

Pomiędzy funkcjami  $\Phi$  i  $\theta$ , określonymi wzorami (2.5) i (2.7), zachodzą proste związki, dzięki którym pierwsza z tych funkcji może być wyrażona przez drugą i na odwrót. Różniczkując, przy  $\eta > 0$ , (2.4) względem  $\xi$  oraz (2.6) względem  $\eta$  zauważymy, że

$$(2.8) \quad \pi \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi\eta} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi = \frac{1}{4} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = - \frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}.$$

Podobnie łatwo uzyskujemy

$$(2.9) \quad -\pi \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi\eta} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi = \frac{1}{4} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \frac{1}{4} \frac{\partial\theta}{\partial\xi}.$$

Zależności (2.8)-(2.9) są znanymi związkami CAUCHY-RIEMANNA, które zachodzą pomiędzy częścią rzeczywistą a częścią urojoną funkcji analitycznej. Zanotujemy jeszcze jako prostą konsekwencję tych związków zależność

$$(2.10) \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} = 0.$$

Wreszcie, wobec

$$(2.11) \quad \int_{|\eta|}^{\infty} e^{-m\pi\sigma} d\sigma = -\frac{e^{-m\pi\sigma}}{\pi m} \Big|_{\sigma=|\eta|}^{\sigma=\infty} = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-m\pi|\eta|}}{m},$$

możemy znaleźć, zgodnie z (2.6) i (2.8)

$$(2.12) \quad \theta = 4\pi \int_{|\eta|}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi\sigma} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi d\sigma = \int_{|\eta|}^{\infty} \frac{\partial\Phi(\xi, \sigma; \alpha)}{\partial\xi} d\sigma.$$

W oparciu o wyprowadzone wyżej wzory znajdziemy inne zależności całkując obie strony każdego z równań względem zmiennej  $\sigma$  w granicach od  $\sigma = \eta > 0$  do  $\infty$ . I tak z równości (2.4) otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_{\eta>0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\sigma}}{m} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi d\sigma &= \frac{1}{4} \int_{\eta>0}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma, \\ -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\sigma}}{m^2} \Big|_{\eta>0}^{\infty} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi &= \frac{1}{4} \int_{\eta>0}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma. \end{aligned}$$

Ostatecznie więc

$$(2.13) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\tau m\eta}}{m^2} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi = \frac{\pi}{4} \int_{\eta}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma, \quad \eta > 0.$$

Całkując powtórnie otrzymamy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi = \frac{\pi^2}{4} \int_{\eta}^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma, \quad \eta > 0, \quad \tau > 0.$$

Ponieważ jednak

$$(2.14) \quad \int_c^{\eta} d\tau \int_c^{\tau} \Phi(\sigma) d\sigma = \int_c^{\eta} d\tau \int_{\tau}^{\eta} \Phi(\sigma) d\sigma = \int_c^{\eta} (\eta - \sigma) \Phi(\sigma) d\sigma = \int_{\eta}^c (\sigma - \eta) \Phi(\sigma) d\sigma,$$

przeto

$$(2.15) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi = \frac{\pi^2}{4} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta) \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma, \quad \eta > 0.$$

Wreszcie całkując po raz trzeci znajdziemy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^4} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi = \frac{\pi^3}{4} \int_{\eta}^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} (\sigma-\tau) \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma$$

lub korzystając z zależności (2.14)

$$(2.16) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^4} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi = \frac{\pi^3}{8} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta)^2 \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma, \quad \eta > 0.$$

Zupełnie podobnie całkując równość (2.6) otrzymamy kolejno:

$$(2.17) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^2} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi = \frac{\pi}{4} \int_{\eta}^{\infty} \theta(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma, \quad \eta > 0;$$

$$(2.18) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi = \frac{\pi^2}{4} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta) \theta(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma, \quad \eta > 0.$$

Wzory (2.17) i (2.18) możemy również zapisać w innej postaci różniczkując względem  $\xi$  równania (2.15) i (2.16):

$$(2.19) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^2} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi = \frac{\pi}{4} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta) \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; \alpha)}{\partial \xi} d\sigma, \quad \eta > 0;$$

$$(2.20) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi = \frac{\pi^2}{8} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta)^2 \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; \alpha)}{\partial \xi} d\sigma, \quad \eta > 0.$$

Zmieniając  $\xi$  na  $\alpha$  i odwrotnie znajdziemy bez trudu:

$$(2.21) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m} \cos m\pi\alpha \sin m\pi\xi = \frac{1}{4} \theta(\alpha, \eta; \xi) = \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\infty} \frac{\partial \Phi(\alpha, \sigma; \xi)}{\partial \alpha} d\sigma,$$

$$(2.22) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^2} \cos m\pi\alpha \sin m\pi\xi = \frac{\pi}{4} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta) \frac{\partial \Phi(\alpha, \sigma; \xi)}{\partial \alpha} d\sigma,$$

$$(2.23) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^3} \cos m\pi\alpha \sin m\pi\xi = \frac{\pi^2}{8} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta)^2 \frac{\partial \Phi(\alpha, \sigma; \xi)}{\partial \alpha} d\sigma,$$

Ponieważ w zagadnieniach dotyczących płyt ortotropowych będziemy mieli często do czynienia z szeregami, w których występują iloczyny trzech funkcji



trygonometrycznych, przeto dla porządku zapiszemy dalsze zależności (opierając się na elementarnych związkach:

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin m\pi\tau \sin m\pi\xi = \frac{1}{2} [\cos m\pi(\xi-\tau) - \cos m\pi(\xi+\tau)], \\ \cos m\pi\tau \sin m\pi\xi = \frac{1}{2} [\sin m\pi(\xi-\tau) + \sin m\pi(\xi+\tau)], \\ \sin m\pi\tau \cos m\pi\xi = -\frac{1}{2} [\sin m\pi(\xi-\tau) - \sin m\pi(\xi+\tau)], \\ \cos m\pi\tau \cos m\pi\xi = \frac{1}{2} [\cos m\pi(\xi-\tau) + \cos m\pi(\xi+\tau)]. \end{array} \right.$$

A zatem mamy

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\tau \sin m\pi\xi = \frac{1}{8} [\theta(\xi-\tau, \eta; a) - \theta(\xi+\tau, \eta; a)] = \\ = \frac{1}{8} \int_{\eta}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} [\Phi(\xi-\tau, \sigma; a) - \Phi(\xi+\tau, \sigma; a)] d\sigma, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\tau \sin m\pi\xi = \frac{1}{8} [\Phi(\xi-\tau, \eta; a) + \Phi(\xi+\tau, \eta; a)], \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\tau \cos m\pi\xi = -\frac{1}{8} [\Phi(\xi-\tau, \eta; a) - \Phi(\xi+\tau, \eta; a)], \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\tau \cos m\pi\xi = \frac{1}{8} [\theta(\xi-\tau, \eta; a) + \theta(\xi+\tau, \eta; a)] = \\ = \frac{1}{8} \int_{\eta}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} [\Phi(\xi-\tau, \sigma; a) + \Phi(\xi+\tau, \sigma; a)] d\sigma; \end{array} \right.$$

(2.26)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^2} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\tau \sin m\pi\xi = \frac{\pi}{8} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} [\Phi(\xi-\tau, \sigma; a) - \Phi(\xi+\tau, \sigma; a)] d\sigma,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^2} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\tau \sin m\pi\xi = \frac{\pi}{8} \int_{\eta}^{\infty} [\Phi(\xi-\tau, \sigma; a) + \Phi(\xi+\tau, \sigma; a)] d\sigma,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^2} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\tau \cos m\pi\xi = -\frac{\pi}{8} \int_{\eta}^{\infty} [\Phi(\xi-\tau, \sigma; a) - \Phi(\xi+\tau, \sigma; a)] d\sigma,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^2} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\tau \cos m\pi\xi = \frac{\pi}{8} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} [\Phi(\xi-\tau, \sigma; a) + \Phi(\xi+\tau, \sigma; a)] d\sigma;$$

(2.27)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\tau \sin m\pi\xi = \frac{\pi^2}{16} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta)^2 \frac{\partial}{\partial\xi} [\Phi(\xi-\tau, \sigma; \alpha) - \Phi(\xi+\tau, \sigma; \alpha)] d\sigma,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\tau \sin m\pi\xi = \frac{\pi^2}{8} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta) [\Phi(\xi-\tau, \sigma; \alpha) + \Phi(\xi+\tau, \sigma; \alpha)] d\sigma,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\tau \cos m\pi\xi = -\frac{\pi^2}{8} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta) [\Phi(\xi-\tau, \sigma; \alpha) - \Phi(\xi+\tau, \sigma; \alpha)] d\sigma,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \cos m\pi\tau \cos m\pi\xi = \frac{\pi^2}{16} \int_{\eta}^{\infty} (\sigma-\eta)^2 \frac{\partial}{\partial\xi} [\Phi(\xi-\tau, \sigma; \alpha) + \Phi(\xi+\tau, \sigma; \alpha)] d\sigma.$$

Związki pomiędzy wyprowadzonymi wyżej funkcjami a funkcjami tabelaryzowanymi oraz sposób posługiwania się tablicami podane są w pracy [6].

3. Rozpatrzmy swobodnie podparte pasmo ortotropowe. W przypadku gdy w rozpatrywanym obszarze płyty ortotropowej nie działają żadne obciążenia, jej powierzchnia ugięcia spełnia jak wiadomo jednorodne równanie różniczkowe ([14], s. 248)

$$(3.1) \quad D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0,$$

które po wprowadzeniu oznaczeń

$$(3.2) \quad \varepsilon^4 = \frac{D_{11}}{D_{22}}, \quad \varrho = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}$$

zapiszemy w następujący sposób

$$(3.3) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\varrho\varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0,$$

Pojedynczy szereg spełniający warunki brzegowe swobodnego podparcia na krawędziach  $x=0$  i  $x=a$

$$(3.4) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \alpha_m x, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}$$

będzie całą ogólną równania (3.3), jeśli każda z funkcji  $Y_m(y)$  spełni jednorodne równanie różniczkowe zwyczajne

$$(3.5) \quad \frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2\varrho\varepsilon^2 \alpha_m^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \varepsilon^4 \alpha_m^4 Y_m = 0.$$

Cztery pierwiastki równania charakterystycznego

$$(3.6) \quad r^4 - 2\varrho\varepsilon^2 \alpha_m^2 r^2 + \varepsilon^4 \alpha_m^4 = 0$$

wyrażają się wzorem

$$(3.7) \quad r_{1,2,3,4} = \pm \alpha_m \varepsilon \sqrt{\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - 1}}$$

w zależności od tego, czy parametr  $\varrho$  jest większy, równy lub mniejszy od jedności, całka ogólna równania (2.5) przyjmuje rozmaite postaci. Zajmiemy się kolejno każdym z trzech przypadków.

4. W przypadku  $\varrho > 1$  wszystkie cztery pierwiastki (3.7) są liczbami rzeczywistymi

$$(4.1) \quad r_{1,2} = \pm \alpha_m \kappa, \quad r_{3,4} = \pm \alpha_m \lambda, \quad \kappa, \lambda = \varepsilon \sqrt{\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - 1}},$$

a całka równania (3.5) wyraża się funkcją

$$(4.2) \quad Y_m(y) = A_m e^{\alpha_m \kappa y} + B_m e^{-\alpha_m \kappa y} + C_m e^{\alpha_m \lambda y} + D_m e^{-\alpha_m \lambda y}.$$

Z warunku, iż wszelkie wielkości geometryczne i statyczne dla  $y \rightarrow \infty$  mają być ograniczone, wynika

$$(4.3) \quad A_m = C_m = 0.$$

Jeśli w punkcie  $(u, 0)$  działa na płytę siła  $P$  (rys. 1), wówczas dla  $y = 0$  muszą być spełnione dwa warunki

$$(4.4) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad Q_y = -D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{P}{2} \delta(x-u),$$

gdzie  $\delta(x-u)$  oznacza funkcję DIRACA. Wyrazić ją można pojedynczym szeregiem FOURIERA:

$$(4.5) \quad \delta(x-u) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m u \sin \alpha_m x.$$

Podstawiając do warunków (4.4) funkcję  $w$  wyrażoną szeregiem (3.4) znajdujemy pozostałe dwie stałe występujące w (4.2):

$$(4.6) \quad B_m = -\frac{P}{a D_{22}} \frac{1}{\kappa (\kappa^2 - \lambda^2)} \frac{\sin \alpha_m u}{\alpha_m^3}, \quad D_m = \frac{P}{a D_{22}} \frac{1}{\lambda (\kappa^2 - \lambda^2)} \frac{\sin \alpha_m u}{\alpha_m^3}.$$

Ostatecznie więc powierzchnię ugięcia pasma płytowego obciążonego w punkcie  $(u, 0)$  siłą skupioną  $P$  wyrazi szereg

$$w = \frac{P}{a D_{22}} \frac{1}{\kappa \lambda (\kappa^2 - \lambda^2)} \sum_{m=1}^{\infty} (\kappa e^{-\alpha_m \lambda y} - \lambda e^{-\alpha_m \kappa y}) \frac{\sin \alpha_m u \sin \alpha_m x}{\alpha_m^3}$$

lub też po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych:

$$(4.7) \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \alpha = \frac{u}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a},$$

$$(4.8) \quad w = \frac{P a^2}{\pi^3 D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left[ \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m \lambda \eta}}{m^3} \sin m \pi \alpha \sin m \pi \xi - \frac{1}{\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m \kappa \eta}}{m^3} \sin m \pi \alpha \sin m \pi \xi \right], \quad \eta > 0.$$

Korzystając zaś z (2.15) napiszemy

$$(4.9) \quad w = \frac{Pa^2}{4\pi D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left[ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda\eta}^{\infty} (\sigma - \lambda\eta) \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa\eta}^{\infty} (\sigma - \kappa\eta) \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right]$$

albo

$$(4.10) \quad w = \frac{Pa^2}{4\pi D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left[ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda\eta}^{\infty} \sigma \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa\eta}^{\infty} \sigma \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma - \eta \int_{\lambda\eta}^{\kappa\eta} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right].$$

W przypadku, gdy siła  $P$  obciąża pasmo w punkcie  $(u, v)$  (rys. 8), funkcja ugięcia wyrazi się oczywiście wzorem

$$(4.11) \quad w = \frac{Pa^2}{4\pi D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left[ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta-\beta)}^{\infty} \sigma \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma - \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta-\beta)}^{\infty} \sigma \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma - \right. \\ \left. - (\eta - \beta) \int_{\lambda(\eta-\beta)}^{\kappa(\eta-\beta)} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right], \quad \beta = \frac{v}{a}.$$

Bez trudu znajdziemy już teraz powierzchnię ugięcia pasma ortotropowego wywołaną momentem skupionym  $M_x$  (rys. 9) lub momentem  $M_y$  (rys. 10) przyłożonymi w punkcie  $(u, v)$ . Wystarczy w tym celu funkcję (4.11) różniczkować odpowiednio względem  $a$  lub  $\beta$  przyjmując jednocześnie  $Pa = M_x$  lub  $Pa = M_y$ . I tak przy działaniu momentu  $M_x$

$$(4.12) \quad w = \frac{M_x a}{4\pi D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left[ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta-\beta)}^{\infty} \sigma \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial a} d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta-\beta)}^{\infty} \sigma \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial a} d\sigma - (\eta - \beta) \int_{\lambda(\eta-\beta)}^{\kappa(\eta-\beta)} \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial a} d\sigma \right],$$

zaś dla momentu  $M_y$  (rys. 10) mamy

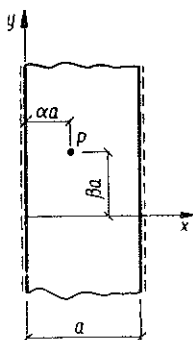
$$(4.13) \quad w = \frac{M_y a}{4\pi D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \int_{\lambda(\eta-\beta)}^{\kappa(\eta-\beta)} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma.$$

Wszelkie wielkości statyczne jak również kąty nachylenia powierzchni znajdziemy wykonując odpowiednie różniczkowanie powierzchni ugięcia  $w$ . Pa-

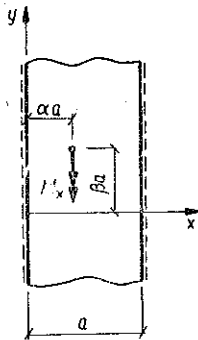
miętać przy tym należy o związkach (2.10) oraz o ogólnych zasadach różniczkowania wyrażeń całkowych

$$(4.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{f_1(\eta)}^{f_2(\eta)} F(\xi, \sigma) d\sigma = \frac{df_2}{d\eta} F(\xi, f_2) - \frac{df_1}{d\eta} F(\xi, f_1), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{f_1(\eta)}^{f_2(\eta)} F(\xi, \sigma) d\sigma = \int_{f_1(\eta)}^{f_2(\eta)} \frac{\partial F}{\partial \xi} d\sigma. \end{cases}$$

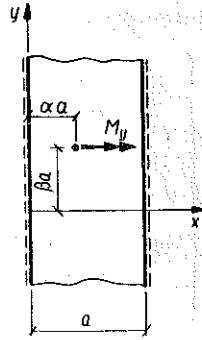
5. W celu znalezienia powierzchni ugięcia półpasma płytowego o dowolnych jednorodnych warunkach brzegowych na krawędzi  $y = 0$  wyrazimy najpierw



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

za pomocą szeregów pojedynczych ugięcie  $w$ , kąt  $\varphi_y$ , moment  $m_y$  oraz siłę poprzeczną  $q_y$  w przekroju  $y = 0$ , wywołane obciążeniem siłą skupioną, działającą w punkcie  $(u, v)$  (rys. 8). Skorzystamy tu z funkcji (4.8), która dla  $\eta < 0$  przyjmie postać

$$(5.1) \quad w = \frac{Pa^2}{\pi^3 D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left[ \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m\pi\lambda\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi - \frac{1}{\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m\pi\kappa\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi \right], \quad \eta < 0.$$

Zatem

$$(5.2) \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{a \partial \eta} = \frac{Pa}{\pi^2 D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m\pi\lambda\eta} - e^{m\pi\kappa\eta}}{m^2} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi,$$

$$(5.3) \quad m_y = -D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \eta^2} + \frac{D_{12}}{D_{22}} \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \xi^2} \right) = -\frac{P}{\pi} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left[ \left( \lambda - \frac{\nu_1}{\lambda} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m\pi\lambda\eta}}{m} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi - \left( \kappa - \frac{\nu_1}{\kappa} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m\pi\kappa\eta}}{m} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi \right], \quad \nu_1 = \frac{D_{12}}{D_{22}},$$

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad q_y &= -D_{22} \left\{ \frac{\partial^3 w}{a^3 \partial \eta^3} + \left[ \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} - \nu_1 \right] \frac{\partial^3 w}{a^3 \partial \xi^2 \partial \eta} \right\} = \\
 &= -\frac{D_{22}}{a^3} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + (2\nu e^2 - \nu_1) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] = \\
 &= \frac{P}{a} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left[ (\kappa^2 - \nu_1) \sum_{m=1}^{\infty} e^{m\pi\lambda\eta} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi - \right. \\
 &\quad \left. - (\lambda^2 - \nu_1) \sum_{m=1}^{\infty} e^{m\pi\kappa\eta} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi \right].
 \end{aligned}$$

Przyjmując  $\eta = -\beta$ , otrzymamy następujące funkcje:

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \bar{w} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin m\pi\xi, & a_m &= \frac{Pa^2}{\pi^3 D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left( \frac{e^{-m\pi\lambda\beta}}{\lambda} - \frac{e^{-m\pi\kappa\beta}}{\kappa} \right) \frac{\sin m\pi\alpha}{m^3}, \\
 \bar{\varphi}_y &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\pi\xi, & b_m &= \frac{Pa}{\pi^2 D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} (e^{-m\pi\lambda\beta} - e^{-m\pi\kappa\beta}) \frac{\sin m\pi\alpha}{m^2}, \\
 \bar{m}_y &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin m\pi\xi, & c_m &= -\frac{P}{\pi} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left[ \left( \lambda - \frac{\nu_1}{\lambda} \right) e^{-m\pi\lambda\beta} + \right. \\
 & & & \left. + \left( \kappa - \frac{\nu_1}{\kappa} \right) e^{-m\pi\kappa\beta} \right] \frac{\sin m\pi\alpha}{m}, \\
 \bar{q}_y &= \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sin m\pi\xi, & d_m &= \frac{P}{a} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} [(\kappa^2 - \nu_1) e^{-m\pi\lambda\beta} - \\
 & & & - (\lambda^2 - \nu_1) e^{-m\pi\kappa\beta}] \sin m\pi\alpha.
 \end{aligned} \right.$$

Wróćmy teraz do całki ogólnej równania różniczkowego (3.1), która zgodnie z (4.2) dla dodatnich  $\eta$  wyraża się następującym wzorem:

$$(5.6) \quad \bar{w}(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} (B_m e^{-m\pi\kappa\eta} + D_m e^{-m\pi\lambda\eta}) \sin m\pi\xi, \quad \eta > 0.$$

Dla  $\eta = 0$  funkcja ta spełnia następujące warunki brzegowe:

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \bar{w}(\xi, 0) &= \sum_{m=1}^{\infty} (B_m + D_m) \sin m\pi\xi, \\
 \bar{\varphi}_y(\xi, 0) &= -\frac{\pi}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (\kappa B_m + \lambda D_m) m \sin m\pi\xi, \\
 \bar{m}_y(\xi, 0) &= -\frac{\pi^2 D_{22}}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} [(\kappa^2 - \nu_1) B_m + (\lambda^2 - \nu_1) D_m] m^2 \sin m\pi\xi, \\
 \bar{q}_y(\xi, 0) &= -\frac{\pi^3 D_{22}}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} [(\lambda^2 - \nu_1) \kappa B_m + (\kappa^2 - \nu_1) \lambda D_m] m^3 \sin m\pi\xi.
 \end{aligned} \right.$$

Chcąc teraz, by na brzegu  $\eta = 0$  spełnione były np. warunki swobodnego podparcia (rys. 11), stałe  $B_m$  i  $D_m$  obliczymy z dwóch związków:

$$(5.8) \quad \bar{w} + \bar{\bar{w}} = 0, \quad \bar{m}_y + \bar{\bar{m}}_y = 0.$$

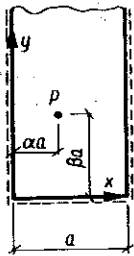
Dla płyty utwierdzonej (rys. 12) mamy

$$(5.9) \quad \bar{w} + \bar{\bar{w}} = 0, \quad \bar{\varphi}_y + \bar{\bar{\varphi}}_y = 0,$$

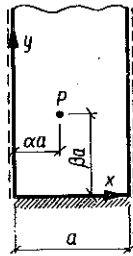
a w przypadku brzegu swobodnego (rys. 13)

$$(5.10) \quad \bar{m}_y + \bar{\bar{m}}_y = 0, \quad \bar{q}_y + \bar{\bar{q}}_y = 0.$$

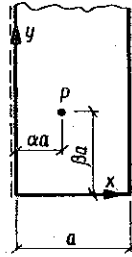
Możemy jednak uzyskać rozwiązanie w inny, prostszy sposób. Np. w przypadku przedstawionym na rys. 11 rozwiązanie otrzymamy ustawiając na pasmie



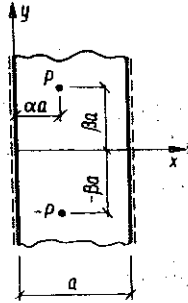
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

płytowym dwie siły działające antysymetrycznie względem osi  $x$  (rys. 14). Korzystając więc ze wzoru (4.11) napiszemy dla półpasma swobodnie podpartego (rys. 11)

$$(5.11) \quad w(\xi, \eta) = \frac{Pa^2}{4\pi D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left[ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta-\beta)}^{\lambda(\eta+\beta)} \sigma \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma - \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta-\beta)}^{\kappa(\eta+\beta)} \sigma \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma - \right. \\ \left. - (\eta - \beta) \int_{\lambda(\eta-\beta)}^{\kappa(\eta-\beta)} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma + (\eta + \beta) \int_{\lambda(\eta+\beta)}^{\kappa(\eta+\beta)} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right].$$

Funkcja (5.11) spełnia na brzegu  $\eta = 0$  następujące warunki brzegowe:

$$(5.12) \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{\varphi}_y = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\pi\xi, \quad \bar{m}_y = 0, \quad \bar{q}_y = 2 \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sin m\pi\xi,$$

gdzie  $b_m$  i  $d_m$  wyrażone są wzorami (5.5). Dodając funkcje (5.11) i (5.6) uzyskamy rozwiązanie dla przypadków przedstawionych na rys. 12 i 13, jeśli spełnimy warunki

$$(5.13) \quad \bar{\bar{w}} = 0, \quad \bar{\bar{\varphi}}_y + \bar{\bar{\bar{\varphi}}}_y = 0$$

lub odpowiednio

$$(5.14) \quad \bar{m}_y = 0, \quad \bar{q}_y + \bar{\bar{q}}_y = 0.$$

Z warunków (5.13) obliczymy

$$(5.15) \quad B_m = -D_m = \frac{2Pa^2}{\pi^3 D_{22}} \frac{1}{(\kappa^2 - \lambda^2)(\kappa - \lambda)} (e^{-m\pi\lambda\beta} - e^{-m\pi\kappa\beta}) \frac{\sin m\pi\alpha}{m^3}.$$

Podstawiając obliczone stałe do funkcji (5.6) otrzymujemy

$$(5.16) \quad \bar{w}(\xi, \eta) = \frac{2Pa^2}{\pi^3 D_{22}} \frac{1}{(\kappa^2 - \lambda^2)(\kappa - \lambda)} \sum_{m=1}^{\infty} [e^{-m\pi(\lambda\eta + \kappa\beta)} - e^{-m\pi\lambda(\eta + \beta)} + e^{-m\pi(\kappa\eta + \lambda\beta)} - e^{-m\pi\kappa(\eta + \beta)}] \frac{\sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi}{m^3},$$

zaś po wyrażeniu szeregów występujących w (5.6) przez funkcję  $\Phi$  i zsumowaniu (5.11) i (5.16) dla półpasma o utwierdzonym brzegu  $\eta = 0$  otrzymujemy ostatecznie następującą funkcję powierzchni ugięcia:

$$(5.17) \quad w(\xi, \eta) = \frac{Pa^2}{4\pi D_{22}(\kappa^2 - \lambda^2)} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \lambda(\eta - \beta)] \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma - \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \kappa(\eta - \beta)] \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma - \frac{\kappa + \lambda}{\kappa - \lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta + \beta)}^{\infty} [\sigma - \lambda(\eta + \beta)] \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma + \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta + \beta)}^{\infty} [\sigma - \kappa(\eta + \beta)] \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma \right\} + \frac{2}{\kappa - \lambda} \left\{ \int_{\kappa\eta + \lambda\beta}^{\infty} [\sigma - (\kappa\eta + \lambda\beta)] \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma + \int_{\lambda\eta + \kappa\beta}^{\infty} [\sigma - (\lambda\eta + \kappa\beta)] \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma \right\} \right\}.$$

Chcąc znaleźć ugięcie płyty o brzegu  $\eta = 0$  swobodnym skorzystamy z warunków (5.14). Po obliczeniu stałych  $B_m$  i  $D_m$  i podstawieniu ich do funkcji (5.6) znajdziemy

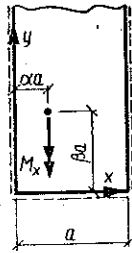
$$(5.18) \quad \bar{w}(\xi, \eta) = \frac{2Pa^2}{\pi^3 D_{22}} \frac{1}{(\kappa^2 - \lambda^2)} \frac{1}{(\kappa^2 - \nu_1)^2 \lambda - (\lambda^2 - \nu_1)^2 \kappa} \sum_{m=1}^{\infty} [(\lambda^2 - \nu_1)^2 e^{-m\pi\kappa(\eta + \beta)} + (\kappa^2 - \nu_1)^2 e^{-m\pi\lambda(\eta + \beta)} - (\kappa^2 - \nu_1)(\lambda^2 - \nu_1) (e^{-m\pi(\kappa\eta + \lambda\beta)} + e^{-m\pi(\lambda\eta + \kappa\beta)})] \frac{\sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi}{m^3}.$$



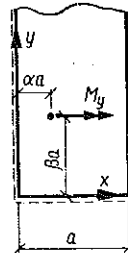
Wystarczy teraz szeregi występujące w (5.18) wyrazić przez funkcję  $\Phi$  oraz dodać funkcje (5.11) i (5.18), aby otrzymać ugięcie płyty przedstawionej na rys. 13:

$$(5.19) \quad w = \frac{Pa^2}{4\pi D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta-\beta)}^{\infty} [\sigma - \lambda(\eta-\beta)] \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta-\beta)}^{\infty} [\sigma - \kappa(\eta-\beta)] \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma + \frac{(\kappa^2 - \nu_1)^2 \lambda + (\lambda^2 - \nu_1)^2 \kappa}{(\kappa^2 - \nu_1)^2 \lambda - (\lambda^2 - \nu_1)^2 \kappa} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta+\beta)}^{\infty} [\sigma - \lambda(\eta+\beta)] \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma + \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta+\beta)}^{\infty} [\sigma - \kappa(\eta+\beta)] \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right\} - \right. \\ \left. - \frac{2(\kappa^2 - \nu_1)(\lambda^2 - \nu_1)^{3/2}}{(\kappa^2 - \nu_1)^2 \lambda - (\lambda^2 - \nu_1)^2 \kappa} \left\{ \int_{\kappa\eta + \lambda\beta}^{\infty} [\sigma - (\kappa\eta + \lambda\beta)] \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\lambda\eta + \kappa\beta}^{\infty} [\sigma - (\lambda\eta + \kappa\beta)] \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right\} \right\}.$$

Różniczkując funkcję (5.11) raz względem  $\alpha$  drugi raz względem  $\beta$  i podstawiając  $Pa = M_x$  lub  $Pa = M_y$  otrzymamy powierzchnię ugięcia półpasma



Rys. 15



Rys. 16

swobodnie podpartego na całym obwodzie i obciążonego momentami skupionymi  $M_x$  (rys. 15) lub  $M_y$  (rys. 16). W przypadku przedstawionym na rys. 15 otrzymamy

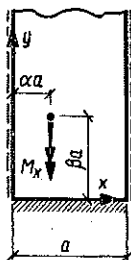
$$(5.20) \quad w = \frac{M_x a}{4\pi D_{22}} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda^2} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta-\beta)}^{\infty} [\sigma - \lambda(\eta-\beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta-\beta)}^{\infty} [\sigma - \kappa(\eta-\beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma - \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta+\beta)}^{\infty} [\sigma - \lambda(\eta+\beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma + \right. \\ \left. + \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta+\beta)}^{\infty} [\sigma - \kappa(\eta+\beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma \right\}.$$

Ugięcie płyty obciążonej w sposób pokazany na rys. 16 wyraża się funkcją

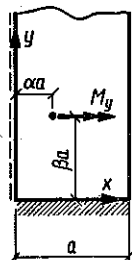
$$(5.21) \quad w = \frac{M_y a}{4\pi D_{22}(\kappa^2 - \lambda^2)} \left[ \int_{\lambda(\eta - \beta)}^{\kappa(\eta - \beta)} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma + \int_{\lambda(\eta + \beta)}^{\kappa(\eta + \beta)} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right].$$

Postępując podobnie z funkcją (5.17) znajdziemy ugięcie półpasma utwierdzonego na brzegu poprzecznym przy działaniu momentu  $M_x$  (rys. 17)

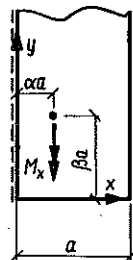
$$(5.22) \quad w = \frac{M_x a}{4\pi D_{22}(\kappa^2 - \lambda^2)} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \lambda(\eta - \beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \kappa(\eta - \beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{\kappa + \lambda}{\kappa - \lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta + \beta)}^{\infty} [\sigma - \lambda(\eta + \beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta + \beta)}^{\infty} [\sigma - \kappa(\eta + \beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma \right\} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\kappa - \lambda} \left\{ \int_{\kappa\eta + \lambda\beta}^{\infty} [\sigma - (\kappa\eta + \lambda\beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma + \int_{\lambda\eta + \kappa\beta}^{\infty} [\sigma - (\lambda\eta + \kappa\beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma \right\} \right\},$$



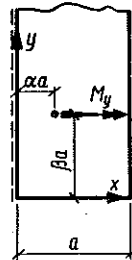
Rys. 17



Rys. 18



Rys. 19



Rys. 20

oraz przy działaniu momentu  $M_y$  (rys. 18)

$$(5.23) \quad w = \frac{M_y a}{4\pi D_{22}(\kappa^2 - \lambda^2)} \left\{ \int_{\lambda(\eta - \beta)}^{\kappa(\eta - \beta)} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma + \frac{\kappa + \lambda}{\kappa - \lambda} \left[ \int_{\lambda(\eta + \beta)}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\kappa(\eta + \beta)}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right] - \frac{2}{\kappa - \lambda} \left[ \lambda \int_{\kappa\eta + \lambda\beta}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma + \kappa \int_{\lambda\eta + \kappa\beta}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right] \right\}.$$

Wykonując analogiczne różniczkowania funkcji (5.19) znajdziemy dla płyty przedstawionej na rys. 19

$$\begin{aligned}
 (5.24) \quad w = & \frac{M_x a}{4\pi D_{22}(\kappa^2 - \lambda^2)} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \lambda(\eta - \beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial a} d\sigma - \right. \\
 & - \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \kappa(\eta - \beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial a} d\sigma + \frac{(\kappa^2 - \nu_1)^2 \lambda + (\lambda^2 - \nu_1)^2 \kappa}{(\kappa^2 - \nu_1)^2 \lambda - (\lambda^2 - \nu_1)^2 \kappa} \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda(\eta + \beta)}^{\infty} [\sigma - \lambda(\eta + \beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial a} d\sigma + \frac{1}{\kappa} \int_{\kappa(\eta + \beta)}^{\infty} [\sigma - \kappa(\eta + \beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial a} d\sigma \right\} - \\
 & - \frac{2(\kappa^2 - \nu_1)(\lambda^2 - \nu_1)}{(\kappa^2 - \nu_1)^2 \lambda - (\lambda^2 - \nu_1)^2 \kappa} \left\{ \int_{\kappa\eta + \lambda\beta}^{\infty} [\sigma - (\kappa\eta + \lambda\beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial a} d\sigma + \right. \\
 & \left. + \int_{\lambda\eta + \kappa\beta}^{\infty} [\sigma - (\lambda\eta + \kappa\beta)] \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial a} d\sigma \right\} \Bigg\},
 \end{aligned}$$

oraz dla płyty z rys. 20

$$\begin{aligned}
 (5.25) \quad w = & \frac{M_y a}{4\pi D_{22}(\kappa^2 - \lambda^2)} \left\{ \int_{\lambda(\eta - \beta)}^{\kappa(\eta - \beta)} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma - \right. \\
 & - \frac{(\kappa^2 - \nu_1)^2 \lambda + (\lambda^2 - \nu_1)^2 \kappa}{(\kappa^2 - \nu_1)^2 \lambda - (\lambda^2 - \nu_1)^2 \kappa} \left[ \int_{\lambda(\eta + \beta)}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma + \int_{\kappa(\eta + \beta)}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right] + \\
 & \left. + \frac{2(\kappa^2 - \nu_1)(\lambda^2 - \nu_1)}{(\kappa^2 - \nu_1)^2 \lambda - (\lambda^2 - \nu_1)^2 \kappa} \left[ \lambda \int_{\kappa\eta + \lambda\beta}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma + \kappa \int_{\lambda\eta + \kappa\beta}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

6. Znacznie prostszą postać przyjmują funkcje powierzchni ugięcia w przypadku  $\varrho = 1$ . Wówczas równanie charakterystyczne (3.6) ma dwa pierwiastki podwójne

$$(6.1) \quad r_{1,2,3,4} = \pm \varepsilon,$$

a całka ogólna równania (3.5) przyjmuje postać

$$(6.2) \quad Y_m(y) = A_m e^{\alpha_m \varepsilon y} + B_m \alpha_m \varepsilon y e^{\alpha_m \varepsilon y} + C_m e^{-\alpha_m \varepsilon y} + D_m \alpha_m \varepsilon y e^{-\alpha_m \varepsilon y}.$$

Z warunku znikania ugięcia, gdy  $y \rightarrow \infty$  wynika, że stałe  $A_m = B_m = 0$ .

Spełniając warunki (4.4) obliczymy dwie następne stałe

$$C_m = D_m = \frac{P}{2D_{22} a \varepsilon^3} \frac{\sin \alpha_m u}{\alpha_m^3} = \frac{P a^2}{2\pi^3 D_{22} \varepsilon^3} \frac{\sin m\pi a}{m^3}$$

i wyrażamy ugięcie płyty obciążonej siłą skupioną (rys. 1) pojedynczym szeregiem

$$(6.3) \quad w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D_{22} \varepsilon^3} \sum_{m=1}^{\infty} (1 + m\pi\varepsilon\eta) \frac{e^{-m\pi\varepsilon\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi, \quad \eta > 0$$

lub korzystając ze związków (2.13) i (2.15), przy sile stojącej w punkcie ( $u = \alpha a$ ,  $v = \beta a$ ) (rys. 8), całką

$$(6.4) \quad w = \frac{Pa^2}{8\pi D_{22} \varepsilon^3} \int_{\varepsilon(\eta-\beta)}^{\infty} \sigma \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma.$$

Różniczkując funkcję (6.4) raz względem  $\alpha$ , drugi raz względem  $\beta$  i podstawiając  $Pa = M_x$  lub  $Pa = M_y$ , otrzymamy powierzchnię ugięcia pasma płytowego obciążonego momentem  $M_x$  (rys. 9) i momentem  $M_y$  (rys. 10)

$$(6.5) \quad w = \frac{M_x a}{8\pi D_{22} \varepsilon^3} \int_{\varepsilon(\eta-\beta)}^{\infty} \sigma \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma,$$

$$(6.6) \quad w = \frac{M_y a}{8\pi D_{22} \varepsilon} (\eta - \beta) \Phi[\xi, \varepsilon(\eta - \beta); \alpha].$$

Postępując w analogiczny sposób jak w punkcie poprzednim znajdziemy powierzchnię ugięcia półpasma płytowego o rozmaitych warunkach brzegowych. I tak dla półpasma płytowego swobodnie podpartego na całym obwodzie i obciążonego kolejno siłą skupioną  $P$  (rys. 11), momentem skupionym  $M_x$  (rys. 15), momentem  $M_y$  (rys. 16) otrzymamy odpowiednio

$$(6.7) \quad w = \frac{Pa^2}{8\pi D_{22} \varepsilon^3} \int_{\varepsilon(\eta-\beta)}^{\varepsilon(\eta+\beta)} \sigma \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma,$$

$$(6.8) \quad w = \frac{M_x a}{8\pi D_{22} \varepsilon^3} \int_{\varepsilon(\eta-\beta)}^{\varepsilon(\eta+\beta)} \sigma \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma,$$

$$(6.9) \quad w = \frac{M_y a}{8\pi D_{22} \varepsilon} \{(\eta - \beta) \Phi[\xi, \varepsilon(\eta - \beta); \alpha] + (\eta + \beta) \Phi[\xi, \varepsilon(\eta + \beta); \alpha]\}.$$

W przypadku płyty utwierdzonej na brzegu poprzecznym, obciążonej siłą skupioną  $P$  (rys. 12), momentem  $M_x$  (rys. 17) i momentem  $M_y$  (rys. 18) otrzymamy

$$(6.10) \quad w = \frac{Pa^2}{8\pi D_{22} \varepsilon^3} \left\{ \int_{\varepsilon(\eta-\beta)}^{\varepsilon(\eta+\beta)} \sigma \Phi(\xi, \sigma; a) d\sigma - 2\varepsilon^2 \beta \eta \Phi[\xi, \varepsilon(\eta + \beta); \alpha] \right\},$$

$$(6.11) \quad w = \frac{M_x a}{8\pi D_{22} \varepsilon^3} \left\{ \int_{\varepsilon(\eta-\beta)}^{\varepsilon(\eta+\beta)} \sigma \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; a)}{\partial \alpha} d\sigma - 2\varepsilon^2 \beta \eta \frac{\partial \Phi[\xi, \varepsilon(\eta + \beta); \alpha]}{\partial \alpha} \right\},$$

$$(6.12) \quad w = \frac{M_y a}{8\pi D_{22} \varepsilon} \left\{ (\eta - \beta) \{ \Phi[\xi, \varepsilon(\eta - \beta); \alpha] - \Phi[\xi, \varepsilon(\eta + \beta); \alpha] \} - \right. \\ \left. - 2\beta\eta \frac{\partial \Phi[\xi, \varepsilon(\alpha + \beta); \alpha]}{\partial \beta} \right\}.$$

Wreszcie dla półpasma o swobodnej krawędzi  $y = 0$  dla obciążeń przedstawionych na rys. 13, 19 i 20 otrzymamy

$$(6.13) \quad w = \frac{Pa^2}{8\pi D_{22} \varepsilon^3} \left\{ \int_{\varepsilon(\eta - \beta)}^{\varepsilon(\eta + \beta)} \sigma \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma + \frac{8\varepsilon^4}{(3\varepsilon^2 + \nu_1)(\varepsilon^2 - \nu_1)} \int_{\varepsilon(\eta + \beta)}^{\infty} \sigma \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{4\varepsilon^2(\varepsilon^2 + \nu_1)}{(3\varepsilon^2 + \nu_1)(\varepsilon^2 - \nu_1)} \varepsilon(\eta + \beta) \int_{\varepsilon(\eta + \beta)}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma + 2 \frac{\varepsilon^2 - \nu_1}{3\varepsilon^2 + \nu_1} \varepsilon^2 \beta \eta \Phi[\xi, \varepsilon(\eta + \beta); \alpha] \right\},$$

(6.14)

$$w = \frac{M_x a}{8\pi D_{22} \varepsilon^3} \left\{ \int_{\varepsilon(\eta - \beta)}^{\varepsilon(\eta + \beta)} \sigma \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; \alpha)}{\partial \alpha} d\sigma + \frac{8\varepsilon^4}{(3\varepsilon^2 + \nu_1)(\varepsilon^2 - \nu_1)} \int_{\varepsilon(\eta + \beta)}^{\infty} \sigma \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; \alpha)}{\partial \alpha} d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{4\varepsilon^2(\varepsilon^2 + \nu_1)}{(3\varepsilon^2 + \nu_1)(\varepsilon^2 - \nu_1)} \varepsilon(\eta + \beta) \int_{\varepsilon(\eta + \beta)}^{\infty} \frac{\partial \Phi(\xi, \sigma; \alpha)}{\partial \alpha} d\sigma + \right. \\ \left. + 2 \frac{\varepsilon^2 - \nu_1}{3\varepsilon^2 + \nu_1} \varepsilon^2 \beta \eta \frac{\partial \Phi[\xi, \varepsilon(\eta + \beta); \alpha]}{\partial \alpha} \right\},$$

$$(6.15) \quad w = \frac{M_y a}{8\pi D_{22} \varepsilon} \left\{ (\eta - \beta) \{ \Phi[\xi, \varepsilon(\eta - \beta); \alpha] + \frac{\varepsilon^2 - \nu_1}{3\varepsilon^2 + \nu_1} \Phi[\xi, \varepsilon(\eta + \beta); \alpha] - \right. \\ \left. - 4\varepsilon \frac{\varepsilon^2 + \nu_1}{(3\varepsilon^2 + \nu_1)(\varepsilon^2 - \nu_1)} \int_{\varepsilon(\eta + \beta)}^{\infty} \Phi(\xi, \sigma; \alpha) d\sigma + 2 \frac{\varepsilon^2 - \nu_1}{3\varepsilon^2 + \nu_1} \beta \eta \frac{\partial \Phi[\xi, \varepsilon(\eta + \beta); \alpha]}{\partial \beta} \right\}.$$

Nie trudno zauważyć, że wzory dla płyty izotropowej podane w pracy [5] otrzymuje się z powyższych ogólniejszych wzorów po podstawieniu  $\varepsilon = 1$ .

7. Najwięcej trudności nastęrcza przypadek  $\varrho < 1$ . Pierwiastki równania charakterystycznego (3.6) stają się wówczas liczbami zespolonymi:

$$(7.1) \quad r_{1,2,3,4} = \pm \alpha_m (\mu \pm i\omega),$$

gdzie

$$(7.2) \quad \mu = \varepsilon \sqrt{\frac{1 + \varrho}{2}}, \quad \omega = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - \varrho}{2}}.$$

Całkę ogólną równania różniczkowego (3.3) dla dodatnich  $\eta$  przy uwzględnieniu warunków brzegowych dla  $x = 0$ ,  $x = a$  i  $y \rightarrow \infty$  wyraża następujący szereg:

$$(7.3) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\pi\omega\eta + B_m \sin m\pi\omega\eta) e^{-m\mu\eta} \sin m\pi\xi.$$

Korzystając z warunków (4.4) znajdujemy wartości stałych

$$(7.4) \quad A_m = \frac{Pa^2}{2\pi^3(\mu^2 + \omega^2)\mu D_{22}} \frac{\sin m\pi\alpha}{m^3}, \quad B_m = \frac{Pa^2}{2\pi^3(\mu^2 + \omega^2)\omega D_{22}} \frac{\sin m\pi\alpha}{m^3}.$$

Zatem ugięcie pasma płytowego przedstawionego na rys. 1 wyraża się w tym przypadku funkcją

$$(7.5) \quad w = \frac{Pa^2}{2\pi^3(\mu^2 + \omega^2)D_{22}} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\mu} \cos m\pi\omega\eta + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega} \sin m\pi\omega\eta \right) \frac{e^{-m\pi\mu\eta}}{m^3} \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi, \quad \eta > 0,$$

lub na podstawie zależności (2.27)

$$(7.6) \quad w = \frac{Pa^2}{32\pi(\mu^2 + \omega^2)D_{22}} \left\{ 2 \int_{\mu}^{\infty} (\sigma - \mu\eta) [\Phi(\xi - \omega\eta, \sigma; \alpha) + \Phi(\xi + \omega\eta, \sigma; \alpha)] d\sigma + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega} \int_{\mu}^{\infty} (\sigma - \mu\eta)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} [\Phi(\xi - \omega\eta, \sigma; \alpha) - \Phi(\xi + \omega\eta, \sigma; \alpha)] d\sigma \right\}.$$

Siła skupiona  $P$  obciążająca płytę w punkcie ( $u = \alpha a$ ,  $v = \beta a$ ) (rys. 8) wywołuje ugięcie wyrażone funkcją

$$(7.7) \quad w = \frac{Pa^2}{32\pi(\mu^2 + \omega^2)D_{22}} \left\{ 2 \int_{\mu(\eta-\beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta-\beta)] \{ \Phi[\xi - \omega(\eta-\beta), \sigma; \alpha] + \right. \\ \left. + \Phi[\xi + \omega(\eta-\beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma + \frac{1}{\omega} \int_{\mu(\eta-\beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta-\beta)]^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta-\beta), \sigma; \alpha] - \right. \\ \left. - \Phi[\xi + \omega(\eta-\beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma \right\}.$$

Chcąc znaleźć powierzchnię ugięcia wywołanego momentem skupionym  $M_x$  (rys. 9) różniczkujemy funkcję (7.7) względem  $\alpha$  i podstawiamy  $Pa = M_x$

$$(7.8) \quad w = \frac{M_x a}{16\pi D_{22}(\mu^2 + \omega^2)} \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{\mu(\eta-\beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta-\beta)] \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta-\beta), \sigma; \alpha] + \right. \\ \left. + \Phi[\xi + \omega(\eta-\beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega} \int_{\mu(\eta-\beta)}^{\infty} \{ \Phi[\xi, \sigma; \alpha - \omega(\eta-\beta)] - \Phi[\xi, \sigma; \alpha + \omega(\eta-\beta)] \} d\sigma \right\}.$$

Skorzystalismy tu z następującej zależności:

$$\begin{aligned}
 (7.9) \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \alpha} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] - \Phi[\xi + \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] \} &= \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \{ \Phi[\xi, \sigma; \alpha - \omega(\eta - \beta)] - \Phi[\xi, \sigma; \alpha + \omega(\eta - \beta)] \} = \\
 &= - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \{ \Phi[\xi, \sigma; \alpha - \omega(\eta - \beta)] - \Phi[\xi, \sigma; \alpha + \omega(\eta - \beta)] \}.
 \end{aligned}$$

Aby uniknąć kłopotliwego różniczkowania funkcji (7.7) względem  $\beta$ , wyrazimy najpierw powierzchnię ugięcia płyty obciążonej momentem  $M_y$  (rys. 10) szeregiem pojedynczym. Ponieważ ugięcie wywołane siłą skupioną działającą w punkcie  $(a, \beta)$ , zgodnie z (7.5) wyraża szereg

$$\begin{aligned}
 (7.10) \quad w &= \frac{Pa^2}{2\pi^2 D_{22}(\mu^2 + \omega^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\mu} \cos m\pi\omega(\eta - \beta) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\omega} \sin m\pi\omega(\eta - \beta) \right] \frac{e^{-m\pi\mu(\eta - \beta)}}{m^3} \sin m\pi a \sin m\pi\xi, \quad \eta < \beta,
 \end{aligned}$$

przeto różniczkując (7.10) względem  $\beta$  i przyjmując  $Pa = M_y$  otrzymamy

$$(7.11) \quad w = \frac{M_y a}{2\pi^2 D_{22} \mu \omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\mu(\eta - \beta)}}{m^2} \sin m\pi\omega(\eta - \beta) \sin m\pi a \sin m\pi\xi.$$

W oparciu o (2.26) możemy więc napisać

$$\begin{aligned}
 (7.12) \quad w &= \frac{M_y a}{16\pi D_{22} \mu \omega} \int_{\mu(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta - \beta)] \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] - \\
 &\quad - \Phi[\xi + \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma.
 \end{aligned}$$

Ustawiając obciążenie antysymetrycznie względem osi  $\eta = 0$  otrzymujemy ugięcie półpasma płytowego swobodnie podpartego na obwodzie. I tak w przypadku działania siły skupionej (rys. 11) znajdziemy

$$\begin{aligned}
 (7.13) \quad w &= \frac{Pa^2}{32\pi D_{22}(\mu^2 + \omega^2)} \left\{ \frac{2}{\mu} \int_{\mu(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta - \beta)] \{ \Phi[\xi - \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] + \right. \\
 &\quad \left. + \Phi[\sigma + \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma - \frac{2}{\mu} \int_{\mu(\eta + \beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta + \beta)] \{ \Phi[\xi - \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Phi[\xi + \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma + \frac{1}{\omega} \int_{\mu(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta - \beta)]^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] - \\
 & - \Phi[\xi + \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma - \frac{1}{\omega} \int_{\mu(\eta + \beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta + \beta)]^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] - \\
 & \quad - \Phi[\xi + \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma \}.
 \end{aligned}$$

Powierzchnię ugięcia półpasma obciążonego momentem  $M_x$  (rys. 15) wyraża funkcja

$$\begin{aligned}
 (7.14) \quad w = & \frac{M_x a}{16\pi D_{22}(\mu^2 + \omega^2)} \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{\mu(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta - \beta)] \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] + \right. \\
 & + \Phi[\xi + \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma - \frac{1}{\mu} \int_{\mu(\eta + \beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta + \beta)] \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] + \\
 & + \Phi[\xi + \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma - \frac{1}{\omega} \int_{\mu(\eta - \beta)}^{\infty} \{ \Phi[\xi, \sigma; \alpha - \omega(\eta - \beta)] - \Phi[\xi, \sigma; \alpha + \\
 & \left. + \omega(\eta - \beta)] \} d\sigma + \frac{1}{\omega} \int_{\mu(\eta + \beta)}^{\infty} \{ \Phi[\xi, \sigma; \alpha - \omega(\eta + \beta)] - \Phi[\xi, \sigma; \alpha + \omega(\eta + \beta)] \} d\sigma \}.
 \end{aligned}$$

Moment  $M_y$  (rys. 16) wywołuje ugięcie

$$\begin{aligned}
 (7.15) \quad w = & \frac{M_y a}{16\pi D_{22} \mu \omega} \left\{ \int_{\mu(\eta - \beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta - \beta)] \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] - \right. \\
 & - \Phi[\xi + \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma + \int_{\mu(\eta + \beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta + \beta)] \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] - \\
 & \left. - \Phi[\xi + \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma \}.
 \end{aligned}$$

Aby otrzymać powierzchnię ugięcia półpasma o brzegu  $\eta = 0$  utwierdzonym (rys. 12), należy do funkcji wyrażonej wzorem (7.13) dodać funkcję (5.16) po podstawieniu  $\kappa = \mu + i\omega$ ,  $\lambda = \mu - i\omega$ . Przekształcając w ten sposób (5.16) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (7.16) \quad w = & \frac{Pa^2}{2\pi^3 D_{22} \mu \omega^2} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi\mu(\eta + \beta)} [\cos m\pi\omega(\eta + \beta) - \\
 & - \cos m\pi\omega(\eta - \beta)] \frac{\sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi}{m^3}
 \end{aligned}$$



i dalej, zgodnie ze wzorami (2.27),

$$(7.17) \quad w = \frac{Pa^2}{16\pi D_{22}\mu\omega^2} \int_{\mu(\eta+\beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta + \beta)] \{ \Phi[\xi + \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] + \\ + \Phi[\xi - \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] - \Phi[\xi + \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] - \Phi[\xi - \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma.$$

Powierzchnia ugięcia półpasma przedstawionego na rys. 12, przy  $\varrho < 1$ , jest zatem sumą funkcji określonych wzorami (7.13) i (7.17).

W celu uzyskania funkcji GREENA dla półpasma o brzegu  $\eta = 0$  swobodnym (rys. 13) podstawimy  $\kappa = \mu + i\omega$  oraz  $\lambda = \mu - i\omega$  w związku (5.18) i doprowadzimy go tą drogą do postaci

$$(7.18) \quad w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D_{22}\mu\omega^2 [(2\varrho + 1)\varepsilon^4 - 2\nu_1\varepsilon^2 - \nu_1^2]} \left\{ 4\mu\omega(\varrho\varepsilon^2 - \nu_1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\mu(\eta+\beta)}}{m^3} \sin m\pi\omega(\eta + \right. \\ \left. + \beta) \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi - [(\varrho\varepsilon^2 - \nu_1)^2 - \varepsilon^4(1 - \varrho^2)] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\mu(\eta+\beta)}}{m^3} \cos m\pi\omega(\eta + \right. \\ \left. + \beta) \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi - [(\varrho\varepsilon^2 - \nu_1)^2 + \varepsilon^4(1 - \varrho^2)] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\mu(\eta+\beta)}}{m^3} \cos m\pi\omega(\eta - \right. \\ \left. - \beta) \sin m\pi\alpha \sin m\pi\xi \right\}.$$

Następnie na podstawie (2.27) otrzymamy

$$(7.19) \quad w = \frac{Pa^2}{16\pi D_{22}\mu\omega^2 [(2\varrho + 1)\varepsilon^4 - 2\nu_1\varepsilon^2 - \nu_1^2]} \left\{ 2\mu\omega(\varrho\varepsilon^2 - \nu_1) \int_{\mu(\eta+\beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta + \right. \\ \left. + \beta)]^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \Phi[\xi - \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] - \Phi[\xi + \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma - [(\varrho\varepsilon^2 - \nu_1)^2 - \right. \\ \left. - \varepsilon^4(1 - \varrho^2)] \int_{\mu(\eta+\beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta + \beta)] \{ \Phi[\xi + \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] + \Phi[\xi - \omega(\eta + \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma - \right. \\ \left. - [(\varrho\varepsilon^2 - \nu_1)^2 + \varepsilon^4(1 - \varrho^2)] \int_{\mu(\eta+\beta)}^{\infty} [\sigma - \mu(\eta + \beta)] \{ \Phi[\xi + \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] + \right. \\ \left. + \Phi[\xi - \omega(\eta - \beta), \sigma; \alpha] \} d\sigma \right\}.$$

Powierzchnia ugięcia półpasma o brzegu  $\eta = 0$  swobodnym, obciążonego siłą skupioną  $P$ , działającą w punkcie  $(u, v)$  (rys. 13), przy  $\varrho < 1$  jest sumą funkcji określonych wzorami (7.13) i (7.19).

### Литература цитована в текście

- [1] A. NÁDAI, *Über die Spannungsverteilung in einer durch eine Einzelkraft belasteten rechteckigen Platte*, Bauing, 1, 1921.
- [2] A. NÁDAI *Über die Biegung der rechteckigen Platte durch Einzellasten*, Bauing., 11 (1921).
- [3] W. NOWACKI, *Pasma płytowe ortotropowe*, Arch. Mech. stos., 3-4, 3 (1951), s. 259.
- [4] Z. CYWIŃSKA i J. MOSSAKOWSKI, *Powierzchnie wpływowe ortotropowego półpasma płytowego*, Arch. Mech. stos., 1, 6 (1954), s. 33.
- [5] Z. KĄCZKOWSKI, *Pewne zamknięte postaci funkcji ugięcia pasma płytowego*, Arch. Mech. stos., 4, 5 (1953), s. 589.
- [6] Z. KĄCZKOWSKI i M. ŻÓRAWSKI, *Tablice do obliczania powierzchni wpływowych dla pasma płytowego*, Rozpr. inżyn., 1, 7 (1959) s. 39.
- [7] S. TIMOSCHENKO, *Über die Biegung von Trägerrosten*, ZAMM, 1933.
- [8] W. NOWACKI, *Z zagadnień teorii rusztów płaskich (I)*, Arch. Mech. stos., 1, 6 (1954), s. 101.
- [9] W. NOWACKI, *Statyka rusztów płaskich*, Rozpr. inżyn., 1 2 (1954).
- [10] W. NOWACKI i A. KACNER, *Stateczność rusztów wzmocnionych płytą*, Arch. Inżyn. lądow. 1-2, (1955)
- [11] W. NOWACKI, *The Stresses in a Thin Plate Due to a Nucleus of Thermoelastic Strain*, Arch. Mech. stos., 1, 9 (1957), s. 89.
- [12] W. NOWACKI, *Ustalone naprężenia cieplne w płytach*, Rozpr. inżyn., 1, 7 (1959).
- [13] И. М. РЫЖИК и И. С. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Москва - Ленинград 1951.
- [14] С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ, *Анизотропные пластики*, изд. 2, Москва 1957.

### Резюме

#### ПРИМЕНЕНИЕ ТАБЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРОГИБОВ И СТАТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В ОРТОТРОПНЫХ ПОЛОСАХ И ПОЛУПОЛОСАХ ПЛАСТИНКАХ

Рассматривается полоса пластинка свободно опертая на краях и полу-полоса — свободно опертая на двух противоположных бесконечно длинных краях, а на поперечном краю удовлетворяющая одному из трех основных типов краевых условий: (5.8), (5.9) или (5.10). Пластинка изготовлена из ортотропного материала, главные направления упругости которого совпадают с направлениями осей принятой прямоугольной координатной системы (рис. 1). Рассматриваются три случая нагрузки: сосредоточенная сила  $P$  и сосредоточенные моменты  $M_x$  и  $M_y$ .

Поверхности прогиба и статические величины выражаются с помощью одинарных тригонометрических рядов, которые для каждого из трех видов ортотропии можно представить при помощи пятнадцати функций протабулированных в работе [6].

## Summary

### APPLICATION OF TABULATED FUNCTIONS TO THE COMPUTATION OF DEFLECTIONS AND MECHANICAL QUANTITIES OF ORTHOTROPIC PLATE STRIPS AND SEMI-STRIPS

A plate strip simply supported on the edges and a semi-strip simply supported on the infinite edges, one of the three fundamental boundary conditions (5.8), (5.9) or (5.10) being satisfied at the transverse edge, are considered. The material of the plate is orthotropic, the principal directions of elasticity coinciding with those of Cartesian coordinate axes (Fig. 1). Three types of load are considered: a concentrated force  $P$  and two concentrated moments  $M_x$  and  $M_y$ .

The deflection surfaces and the mechanical quantities are expressed by simple trigonometric series, which can be represented for each of the three types of orthotropy by means of fifteen functions tabulated in Ref. [6].

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 28 maja 1960 r.*