

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

WYTEŻENIE MATERIAŁU W STANACH PODKRYTYCZNYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CLXXIV

TOM VIII • ZESZYT 4 • ROK 1960

## SPIS TREŚCI

1. Elementarna miara wyężenia materiału	727
2. Przegląd powierzchni granicznych	730
3. Krytyka elementarnej miary wyężenia materiału i propozycja ogólnej miary wyężenia materiału	737
4. Przykłady obliczania wyężenia materiału w przypadku trójwymiarowej przestrzeni czynników wyężenia	744
5. Przykłady obliczania wyężenia materiału w przypadku dwuwymiarowej przestrzeni czynników wyężenia	748
6. Obliczanie wyężenia materiału w przypadku jednowymiarowej przestrzeni czynników wyężenia	753
7. Uwagi końcowe	756

## 1. Elementarna miara wyężenia materiału

Wyężenie materiału rozumie się w pracy jako stopień zbliżenia stanu fizykalnego w określonym punkcie ciała do stanu niebezpiecznego. Gdy dany stan fizykalny jest już stanem niebezpiecznym, to będziemy mówić o wyężeniu krytycznym. Stanem niebezpiecznym lub granicą niebezpieczną — oznaczaną ogólnie przez  $K$  — nazywamy granicę sprężystości  $S$ , granicę plastyczności  $Q$  (w tym przypadku wyężenie krytyczne związane jest z warunkiem plastyczności), lub granicę wytrzymałości  $R$ . Dla uniknięcia nieporozumień można przy tym dodawać, względem jakiego stanu granicznego mamy wyężenie na myśli.

Wyężenie materiału jest więc pojęciem wyraźnie lokalnym, jednak w przypadku istnienia w jednorodnym ciele jednorodnego stanu naprężenia, odkształcenia, temperatury itp., posiada ono zarazem znaczenie integralne.

Do czynników, wpływających na wyężenie materiału, należą w pierwszym rzędzie składowe stanu naprężenia, których wpływ w ciele izotropowym można zasadniczo wyrazić przez trzy naprężenia główne  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (w ciele anizotropowym muszą odgrywać rolę również kierunki główne stanu naprężenia). Uwzględnienie tylko tych trzech czynników odpowiada wprowadzeniu trójwymiarowej przestrzeni  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ , zwanej przestrzenią naprężeń HAIGHA-WESTERGAARDA, [19] i [69]. Czasami korzystniej jest posługiwać się sześciowymiarową przestrzenią składowych stanu naprężenia, która w przypadku braku wpływu naprężenia średniego  $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$  na wyężenie redukuje się do pięciowymiarowej przestrzeni składowych dewiatora naprężeń (przestrzenią taką posługuje się np. A.A. ILIUSZIN, [25]). Za czynniki wyężenia można również uważać składowe stanu odkształcenia; w zakresie sprężystym (a więc przy analizie wyężenia względem granicy sprężystości) są to jednoznaczne funkcje składowych stanu naprężenia, ale w zakresie niesprężystym zależą one nie tylko od końcowego stanu naprężenia, ale i od drogi w przestrzeni naprężeń. Często właśnie składowe stanu odkształcenia wygodniej jest uważać za wielkości niezależne, a naprężenia wyrażać jako ich funkcję. Innym bardzo ważnym czynnikiem wyężenia jest temperatura — w ostatnich czasach poświęcono wiele uwagi wpływowi temperatury na własności wytrzymałościowe materiałów. Spośród szeregu innych, czasami mniej ważnych czynników wyężenia, wymienimy wilgotność (np. drewna), czas od chwili wykonania elementu (np. z betonu),

gradient naprężeń itp. Tak więc powierzchnie równego wyężenia — w szczególności wyężenia krytycznego — mogą i powinny na ogół być budowane w przestrzeni o większej ilości wymiarów niż trójwymiarowa przestrzeń naprężeń głównych ( $n$ -wymiarowa przestrzeń czynników wyężenia).

Istniejące aktualnie w nauce hipotezy w zakresie wyężenia materiału zajmują się z reguły jedynie sformułowaniem równania samego stanu niebezpiecznego — na przykład równania powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń — a nie oceną zbliżenia się do tej powierzchni. Tak należy rozumieć ich istotną treść, i jeżeli np. M.T. HUBER w swej pracy [23] (p.6) pisał «wyężenie materiału mierzy się właściwą pracą odkształcenia», to niewątpliwie miarę tę odnosił tylko do stanów krytycznych (niebezpiecznych), a nie podkrytycznych (zdanie to wyraża równość właściwej pracy odkształcenia w stanach krytycznych). Istotnie, w p. 8 znajdujemy sformułowanie «naprężenie zredukowane (zastępcze) może służyć za wygodną miarę wyężenia materiału», co stoi ze zdaniem poprzednim w sprzeczności o tyle, że właściwa praca odkształcenia jest proporcjonalna nie do naprężenia zredukowanego, lecz do kwadratu tego naprężenia. Przy rozpatrywaniu tylko stanów niebezpiecznych ta rzecz jest oczywiście bez znaczenia, ale w stanach podkrytycznych należy zdawać sobie sprawę z różnic występujących w obu sformułowaniach. Właściwa praca odkształcenia stanowi w sformułowaniu M.T. HUBERA jedynie kryterium wyężenia krytycznego, a nie miarę wyężenia w stanach podkrytycznych.

Ocena wyężenia w stanach podkrytycznych jest co najmniej tak samo ważna, jak znajomość stanów krytycznych, bowiem w projektowanych przez nas konstrukcjach wyężenie materiału powinno być właśnie dostatecznie odległe od krytycznego. Za miarę wyężenia w stanach podkrytycznych uważa się dziś z reguły naprężenie zastępcze, obliczone w myśl jednej z hipotez wyężeniowych. Załóżmy, że czynnikami wyężenia są tylko naprężenia główne, i że powierzchnia graniczna w przestrzeni naprężeń określona jest równaniem

$$(1.1) \quad F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C$$

(na ogół dla każdego stanu niebezpiecznego powierzchnia graniczna będzie inna). Wielkość  $C$  nazywamy kryterium wyężenia (np. właściwa energia odkształcenia postaciowego, największe naprężenie styczne, największe wydłużenie lub inne; czasem kryterium wyężenia nie posiada prostej interpretacji fizycznej). Przy jednoosiowym rozciąganiu, gdy  $\sigma_1 = \sigma_0$ , spełniona jest w stanie granicznym równość

$$(1.2) \quad F(\sigma_0, 0, 0) = C,$$

a porównanie (1.1) i (1.2) i wyrugowanie kryterium wyężenia  $C$  pozwala określić naprężenia zastępcze  $\sigma_0$  jako funkcję naprężeń głównych lub składowych stanu naprężenia.

J. WALCZAK i S. ZIEMBA w pracy [66] zaproponowali, by przez wyteżenie materiału rozumieć stosunek naprężenia zastępczego do odpowiedniego naprężenia niebezpiecznego przy jednoosiowym rozciąganiu:

$$(1.3) \quad w_0 = \frac{\sigma_0}{K_r},$$

gdzie  $K$  oznacza w sposób ogólny granicę sprężystości, plastyczności lub wytrzymałości, natomiast wskaźnik  $r$  odnosi się do jednoosiowego rozciągania. Wielkością  $w_0 \cdot 100\%$  posługuje się również M. ZAKRZEWSKI, [72], nazywając ją stopniem wyteżenia. Wielkość  $w_0$  będziemy nazywać elementarną miarą wyteżenia materiału; w przeciwieństwie do samego naprężenia zredukowanego  $\sigma_0$  jest to wielkość bezwymiarowa, w pewien sposób «unormowana».

J. WALCZAK, [66], wspomina, że wielkość  $w_0$  przedstawia odwrotność stopnia bezpieczeństwa  $n$  względem rozpatrywanej granicy niebezpiecznej  $K$ . Wyteżenie  $w \leq 1$  jest jednak wygodniejsze w rozważaniach od stopnia bezpieczeństwa  $n \geq 1$ , w szczególności możliwe jest przejście przez zero do wartości ujemnych, które są łatwiejsze do interpretacji od ujemnych wartości stopnia bezpieczeństwa.

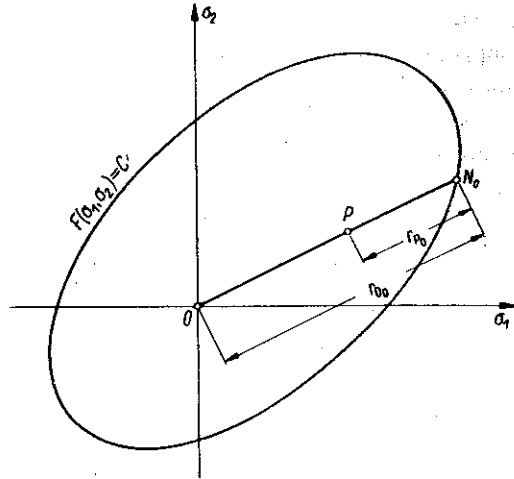
Również tabelaryzacja i interpolacja wielkości  $w$  są łatwiejsze w porównaniu ze stopniem bezpieczeństwa  $n$ .

Elementarna miara wyteżenia materiału  $w_0$  posiada prostą interpretację geometryczną (rys. 1). Jeżeli przez  $P$  oznaczmy punkt, reprezentujący dany stan naprężenia, przez  $O$  początek układu współrzędnych (stan naturalny, nienaprzężony), a przez  $N_0$  punkt przebicia półprostej  $OP$  z powierzchnią graniczną, to  $w_0$  jest stosunkiem odległości punktu  $P$  od początku układu do odległości punktu  $N_0$  od początku układu:

$$(1.4) \quad w_0 = \frac{OP}{ON_0}.$$

Oznaczając przez  $r_{P_0}$  odległość punktu  $P$  od punktu granicznego  $N_0$ , a przez  $r_{0_0}$  odległość punktu  $O$  od punktu  $N_0$ , możemy zamiast (1.4) napisać

$$(1.5) \quad w_0 = 1 - \frac{PN_0}{ON_0} = 1 - \frac{r_{P_0}}{r_{0_0}} = 1 - \frac{1/r_{0_0}}{1/r_{P_0}}.$$



Rys. 1. Wyteżenie materiału przy obciążeniu prostym

Elementarna miara wyężenia (1.3) lub (1.5) związana jest z procesem obciężania «prostym» w sensie ILIUSZINA, mianowicie z proporcjonalnie rosnącymi wszystkimi składowymi stanu naprężenia. Słuszna jest ona wtedy, gdy dla danego punktu  $P$  stan niebezpieczny może być osiągnięty tylko w punkcie  $N_0$ , to jest na przedłużeniu odcinka  $OP$  poza punkt  $P$ . W wielu przypadkach możemy się jednak spodziewać osiągnięcia stanu granicznego w innym punkcie niż punkt  $N_0$ , a wtedy elementarna miara wyężenia zawodzi. Miara elementarna nie uwzględnia również możliwości zmiany innych czynników wyężenia (temperatury, wilgotności itp.), a zmiana taka z reguły posiada poważny wpływ na niebezpieczeństwo osiągnięcia stanu granicznego.

Zanim poddamy obszerniejszej krytyce elementarną miarę wyężenia (1.3) i zaproponujemy jej uogólnienie, słuszne przy obciężeniach różnych od prostego, dokonamy wpiery krótkiego przeglądu powierzchni granicznych, budowanych w oparciu o istniejące hipotezy wyężeniowe. Trzeba tu od razu zaznaczyć, że proponowana ogólna miara wyężenia materiału w stanach podkrytycznych nie będzie nową hipotezą wyężenia, wręcz przeciwnie, celem naszym będzie jedynie wyciągnięcie pewnych wniosków w oparciu o znane hipotezy.

## 2. Przegląd powierzchni granicznych

Najpiew zajmiemy się krótką analizą jednoznaczności powierzchni granicznych. Istniejące hipotezy wyężeniowe określają z reguły powierzchnie graniczne w przestrzeni samych tylko naprężeń głównych (trójwymiarowej przestrzeni HAIGHA-WESTERGAARDA), więc wpływ innych czynników będziemy chwilowo pomijać.

Najmniej wątpliwości budzi powierzchnia graniczna odnosząca się do granicy sprężystości; ponieważ wewnątrz tej powierzchni wszelkie procesy są sprężyste, a więc odwracalne, zatem osiągnięcie granicy sprężystości zależy tylko od panującego stanu naprężenia, a nie od drogi w przestrzeni naprężeń. Takie samo sformułowanie w odniesieniu do granicy plastyczności  $Q$  jest o tyle uzasadnione, o ile jest uzasadnione pomijanie odkształceń plastycznych w zakresie  $S < \sigma < Q$ . Odkształcenia te pomijamy np. przy zastąpieniu rzeczywistego wykresu rozciągania wykresem dla ciała idealnie sprężysto-plastycznego typu PRANDTLA lub dla ciała o liniowym wzmocnieniu plastycznym; wiadomo, że dla pewnych materiałów i znacznej większości przypadków obciężień podejście takie nie powoduje większych błędów.

Natomiast w przypadku powierzchni granicznej, odnoszącej się do granicy wytrzymałości, sprawa ulega z reguły znacznej komplikacji. Utrata wytrzymałości poprzedzona bywa zazwyczaj dość znacznymi odkształceniami plastycznymi, nieodwracalnymi, tak że zaczyna tu poważną rolę odgrywać nie tylko stan naprężenia, ale i droga w przestrzeni naprężeń, po której stan ten został osiągnięty. Na ogół nie można więc zbudować jednoznacznej powierzchni granicznej zniszczenia w przestrzeni naprężeń. Natomiast można ją zbudować

wać przy ściśle określonych drogach w tej przestrzeni, na przykład — w najprostszym przypadku — przy proporcjonalnie rosnących wszystkich składowych stanu naprężenia (obciążenie proste). Z reguły przy takim właśnie założeniu określano powierzchnie graniczne odnoszące się do utraty wytrzymałości.

Jeżeli ograniczymy się do materiałów izotropowych, to powierzchnia graniczna musi wykazywać symetrię względem kierunków  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , co nasuwa myśl przedstawienia jej w stosownie wprowadzonych współrzędnych walcowych lub kulistych, mianowicie o osi równo nachylonej do wszystkich trzech osi naprężeń głównych. Istotnie, szczególnie we współrzędnych walcowych równania powierzchni granicznych przybierają z reguły prostą postać, a ponieważ współrzędne te — będące oczywiście niezmiennikami stanu naprężenia — posiadają szereg ważnych interpretacji fizycznych, przeto w nowszych pracach w takiej lub innej formie wprowadzają je niemal wszyscy autorzy (np. J. MAJER [34], W. W. SOKOŁOWSKI, [59], T. PEŁCZYŃSKI, [49], J. MURZEWSKI, [42]).

Dokonyamy najpierw obrotu osi układu, tak by nowa oś  $r$  była osią równo nachyloną do wszystkich trzech osi naprężeń głównych

$$(2.1) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{6}}, & x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} = \sigma_m \sqrt{3}, \\ \sigma_2 = \frac{x}{\sqrt{3}} - z \sqrt{\frac{2}{3}}, & y = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{2}}, \\ \sigma_3 = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{6}}, & z = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sqrt{6}} - \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{3}}, \end{cases}$$

a następnie wprowadzimy przy ustalonym  $x$ , czyli ustalonym naprężeniu średnim  $\sigma_m$ , współrzędne biegunowe płaskie

$$(2.2) \quad \begin{cases} y = \varrho \cos \omega = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i \cos \omega, \\ z = \varrho \sin \omega = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i \sin \omega, \end{cases}$$

czyli

$$(2.3) \quad \begin{cases} \varrho = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \\ \omega = \arctg \frac{z}{y} = \arcsin \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma_m - \sigma_2}{\sigma_i} \right). \end{cases}$$

Współrzędne  $x$ ,  $\varrho$ ,  $\omega$  są poszukiwanymi współrzędnymi walcowymi o osi równo nachylonej do wszystkich trzech osi naprężeń głównych. Niezmiennik  $x = \sigma_m \sqrt{3}$  związany jest (dla ciała liniowo-sprężystego) z energią odkształcenia objętościowego, niezmiennik  $\varrho = (2/3)^{1/2} \sigma_i$  — z energią odkształcenia posta-

ciowego. Trzeci występujący tu niezmiennik, kąt  $\omega$ , nie posiada tak prostej interpretacji fizycznej, ale jest znacznie wygodniejszy i posiada prostszą interpretację geometryczną od stosowanego czasami niezmiennika  $u = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  lub  $u' = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)$ . Ponadto w zakresie liniowo-sprężystym dla ciała izotropowego obowiązuje pomiędzy wprowadzonym przy pomocy równania (2.3) niezmiennikiem  $\omega = \omega_\sigma$  a analogicznym niezmiennikiem stanu odkształcenia  $\omega_\epsilon$  bardzo prosty związek  $\omega_\sigma = \omega_\epsilon$ ; równość tę postuluje się często również i dla zakresu niesprężystego. Z warunków symetrii — przy założeniu izotropii materiału — wynika, że zasadniczo wystarczy rozpatrywać powierzchnię graniczną dla  $-\pi/6 \leq \omega \leq \pi/6$ , wtedy  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ ; dla innych zakresów mają zastosowanie wzory redukcyjne, np.  $F(\pi/6 + \omega) = F(\pi/6 - \omega)$ ,  $F(\pi/2 + \omega) = F(-\pi/6 + \omega)$  itd.

Obszerny przegląd powierzchni granicznych, budowanych w oparciu o hipotezy wyteżeniowe, proponowane przed r. 1928, podaje W. BURZYŃSKI, [4]. Powierzchnie te posiadają często postać dość skomplikowaną — jest rzeczą charakterystyczną, że nowszym hipotezom wyteżeniowym odpowiada z reguły prostsza interpretacja geometryczna w przestrzeni naprężeń. Praca [4] oraz praca A. MEHLDAHLA, [36], podają fotografie modeli powierzchni granicznych, odpowiadających różnym hipotezom. Przypomnimy tu krótko, że hipotezie największego naprężenia normalnego (GALILEUSZA) odpowiada nieograniczony ostrosłup trójścienny, którego przekrojem  $\sigma_m = \text{const}$  jest trójkąt równoboczny; modyfikowanej hipotezie GALILEUSZA (A. CLEBSCH, [7], W. J. M. RANKINE, [52]) — sześciian; hipotezie największych naprężeń stycznych (H. TRESCA, [63], J. GUEST, [18]) — graniastosłup, którego przekrojem  $\sigma_m = \text{const}$  jest sześciobok umiarowy; hipotezie największego wydłużenia (de SAINT VENANTA-PONCELETA) — nieograniczony ostrosłup trójścienny, przechodzący w przypadku zerowania się współczynnika POISSONA w ostrosłup GALILEUSZA; modyfikowanej hipotezie największego wydłużenia (GRASHOFA) — części powierzchni dwóch ostrosłupów trójściennych, ograniczone krzywą przenikania; hipotezie całkowitej energii odkształcenia (E. BELTRAMI, [2]) — elipsoida; hipotezie energii odkształcenia postaciowego (M. T. HUBER, [23], R. MISES, [39], H. HENCKY, [20]) — walec kołowy o osi równo nachylonej do wszystkich trzech osi naprężeń głównych.

Przejdziemy do omówienia nowszych hipotez wyteżeniowych. Dzięki zamianie współrzędnych (2.1), (2.2) i (2.3) można zawsze równanie powierzchni granicznej  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C$  przedstawić w postaci

$$(2.4) \quad F(\sigma_m, \sigma_i, \omega) = C$$

(ewentualnie kilkoma równaniami tego typu słusznymi w poszczególnych zakresach). Duża grupa hipotez wyteżeniowych przyjmuje postać funkcji (2.4) niezależną od niezmiennika  $\omega$ , mianowicie

$$(2.5) \quad F(\sigma_m, \sigma_i) = C;$$



geometrycznie oznacza to, iż powierzchnia graniczna jest powierzchnią obrotową, natomiast fizycznie — że w zakresie liniowo-sprężystym energia właściwa odkształcenia postaciowego  $\Phi_f$  jest pewną funkcją energii właściwej odkształcenia objętościowego  $\Phi_v$ . Hipotezy typu (2.5) można więc zaliczyć do grupy hipotez energetycznych, jakkolwiek w zakresie odkształceń nieliniowych, a w szczególności niesprężystych, interpretacja energetyczna z reguły staje się niemożliwa (zwrócił na to uwagę R. MISES w komentarzu do pracy F. F. SCHLEICHERA, [58]).

W postaci (2.5) dadzą się zapisać hipotezy: BELTRAMIEGO i HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO. Pierwszą hipotezą typu (2.5), która miałaby obowiązywać dla materiałów kruchych, była hipoteza F. SCHLEICHERA, [58]. Według tej hipotezy, nawiązującej do hipotezy BELTRAMIEGO, całkowita właściwa energia odkształcona  $\Phi$  jest funkcją naprężenia średniego  $\sigma_m$ :

$$(2.6) \quad \Phi = f(\sigma_m).$$

Jakkolwiek energię całkowitą  $\Phi$  można rozłożyć na energię postaciową i objętościową i zamiast (2.6) napisać

$$(2.7) \quad \Phi_f = f(\sigma_m) - \Phi_v,$$

lub, dla liniowo-sprężystego ciała izotropowego

$$(2.8) \quad \frac{\sigma_i^2}{6G} = f(\sigma_m) - \frac{\sigma_m^2}{2K}$$

[otrzymujemy równanie typu (2.5)], to jednak z ujęciem fizycznym hipotezy SCHLEICHERA trudno się zgodzić. Proponowane przez funkcje  $f(\sigma_m)$  posiadały postać dość skomplikowaną, a przy  $K_c = K_r$  (wskaźnik  $c$  odnosi się do jednoosiowego ściskania) hipoteza ta przechodzi w hipotezę BELTRAMIEGO, która nie została potwierdzona doświadczalnie.

Natomiast pierwszą hipotezą, posługującą się konsekwentnie równaniem (2.5), była zaproponowana w r. 1928 hipoteza W. BURZYŃSKIEGO, [4], [5] i [6]. Propozycję ogólną  $\sigma_i = f(\sigma_m)$  ograniczył BURZYŃSKI, ze względów praktycznych do trójparametrowej funkcji typu

$$(2.9) \quad A\sigma_i^2 + B\sigma_m^2 + C\sigma_m - 1 = 0.$$

Przy założeniu, że parametry  $A$ ,  $B$  i  $C$  wyznaczone są przy próbach rozciągania, ściskania i skręcania, czyli wyrażone przez  $K_r$ ,  $K_c$  i  $K_s$ , równanie (2.9) przybiera postać

$$(2.10) \quad \frac{K_c K_r}{3K_s^2} \sigma_i^2 + \left(9 - \frac{3K_c K_r}{K_s^2}\right) \sigma_m^2 + 3(K_c - K_r) \sigma_m - K_c K_r = 0.$$

Równanie to przedstawia w przestrzeni naprężeń głównych zasadniczo elipsoidę lub hiperboloidę. W przypadku szczególnym

$$(2.11) \quad K_s = \sqrt{\frac{K_c K_r}{3}}$$

otrzymujemy paraboloidę

$$(2.12) \quad \sigma_i^2 + 3(K_c - K_r)\sigma_m - K_c K_r = 0,$$

natomiast w przypadku szczególnym

$$(2.13) \quad K_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{K_c K_r}{K_c + K_r}$$

otrzymujemy powierzchnię stożka kołowego

$$(2.14) \quad \sigma_i + 3 \frac{K_c - K_r}{K_c + K_r} \sigma_m - 2 \frac{K_c K_r}{K_c + K_r} = 0$$

(po wykonaniu pierwiastkowania). Gdy  $K_c = K_r$  oraz  $K_s = K_r/\sqrt{3}$ , to równanie (2.10) przechodzi w hipotezę HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO, a więc powierzchnia graniczna staje się walcem.

Należy tu wspomnieć, że również W. LODE, [33], w tym samym roku wysunął koncepcję równania (2.5), nie przywiązując jednak do niej większej wagi i nie analizując możliwych powierzchni granicznych.

Prace W. BURZYŃSKIEGO, [4], [5] i [6], widocznie uszły uwadze nauki światowej, gdyż cytowane są niezmiernie rzadko, a natomiast szereg autorów na nowo proponuje hipotezę (2.10) lub jej przypadki szczególne. Tak np. równanie (2.10) zaproponował w r. 1931 Ju. I. JAGN, [26], w r. 1938 L. RENDULIC, [53], a w r. 1954 M. M. FIŁONIENKO-BORODICZ, [11]; równanie (2.12) zaproponował w r. 1930 G. D. SANDEL, [57], w r. 1937 P. P. BALANDIN, [1], w r. 1958 G. A. GENIEW, [17]; wreszcie równanie (2.14) zaproponował w r. 1953 I. N. MIROLUBOW, [38]. Inna propozycja G. A. GENIEWA, [16], jest również szczególnym przypadkiem (2.10); odpowiednia powierzchnia graniczna jest wtedy elipsoidą obrotową. C. TORRE, [60], [61] i [62], posługuje się paraboloidą (2.12), powołując się na autorstwo SANDELA.

Przystosowaniu hipotezy BURZYŃSKIEGO do obliczeń inżynierskich wiele uwagi poświęcił Z. KLĘBOWSKI. W swej pracy [28] zaproponował on równanie (2.14); w pracy [29] zaproponował, by powierzchnię (2.10) zastąpić (z błędem na korzyść pewności) dwoma powierzchniami stożkowymi i powierzchnią walcową — wtedy dla stanów pomiędzy jednoosiowym a trójosiowym ściskaniem stosuje się równanie  $\sigma_i = K_c$ , dla stanów pomiędzy jednoosiowym rozciąganiem a jednoosiowym ściskaniem — równanie (2.14), wreszcie dla stanów pomiędzy jednoosiowym a trójosiowym rozciąganiem — równanie liniowe

$$(2.15) \quad \sigma_i + 3 \left( \frac{K_c}{K_r} - 1 \right) \sigma_m - K_c = 0.$$

Odpowiednia powierzchnia graniczna posiada wtedy kształt »podwójnie zastruganego walcowego ołówka«. Wreszcie propozycja, [30], zaleca zastąpienie równania  $\sigma_i = K_c$  i równania (2.15) przez odpowiednie części paraboloidy (2.12).

Pewne uzasadnienie hipotez BURZYŃSKIEGO i SCHLEICHERA, oparte o rozważania z zakresu fizyki ciał stałych, podał J. ZAWADZKI, [73]<sup>1</sup>. Obie alternatywy hipotezy ZAWADZKIEGO prowadzą w zasadzie do równania typu (2.9) i odnośna powierzchnia graniczna może być elipsoidą, hiperboloidą, paraboloidą, stożkiem lub walcem.

Wspomniana już praca M. M. FIŁONIENKO-BORODICZA, [11], daje przegląd powierzchni granicznych, wykraczający poza równanie (2.9). Badał on powierzchnie graniczne typu (2.5) stopnia wyższego niż drugi, a ponadto powierzchnie typu ogólniejszego (2.4), zwracając szczególną uwagę na powierzchnie walcowe  $F(\sigma_i, \omega) = \text{const}$ .

N. N. DAWIDIENKOW i Ja. B. FRIDMAN, [14], zwrócili uwagę na fakt, że budowanie oddzielnych powierzchni dla granicy sprężystości, plastyczności i wytrzymałości nie zawsze jest możliwe. Pewnym stanom naprężenia odpowiada uplastycznienie przed utratą wytrzymałości, innym natomiast — złom kruchy bez odkształceń plastycznych. W takim przypadku powierzchnię graniczną dla granicy sprężystości lub granicy plastyczności należałoby w pewnym zakresie (w szczególności dla stanów bliskich trójosiowemu równomiernemu rozciąganiu) zidentyfikować z powierzchnią dla granicy wytrzymałości. W każdym razie powierzchnie graniczne są wtedy w różnych zakresach przedstawiane różnymi — co najmniej dwoma — równaniami.

W ujęciu DAWIDIENKOWA i FRIDMANA powierzchnia graniczna składa się z części powierzchni TRESCHI-GUESTA i części powierzchni de SAINT VENANTA-PONCELETA, zatem graniastosłupa sześciokątnego ściętego trójkątnym ostrosłupem (zastrugany ołówek sześciokątny). T. PEŁCZYŃSKI, [49] i [50], zastąpił hipotezę TRESCHI-GUESTA przez lepiej zgodną z doświadczeniami hipotezę HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO; odpowiednia powierzchnia ma kształt zastruganego ołówka walcowego. M. ZAKRZEWSKI, [72], zaproponował inną, dwuparametrową hipotezę złomu kruchego, której odpowiada stożkowa powierzchnia graniczna o dość skomplikowanym kształcie przekroju  $\sigma_m = \text{const}$  :

$$(2.16) \quad \left[ \sqrt{9 \sin^2 \left( \omega - \frac{\pi}{3} \right) + 3\psi \cos^2 \left( \omega - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \sin \left( \omega - \frac{\pi}{3} \right)} \right] \sigma_i - \frac{3(1-2\nu)}{1+\nu} (\sigma_0 - \sigma_m) = 0, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq \frac{\pi}{6}.$$

Parametrami podlegającymi wyznaczeniu są tu  $\sigma_0$  i  $\psi$ .

J. MAJER, [34], zaproponował pięcioparametrową hipotezę, której równanie można zapisać w postaci

$$(2.17) \quad \sigma_i = (A + B \sin 3\omega) (C - \sigma_m)^{n_1 + n_2 \sin 3\omega}.$$

<sup>1</sup> W równaniu (6.4) na s. 377 pracy [73] wkradł się błąd, mianowicie omyłkowo figuruje współczynnik 3 przy ostatnim składniku po lewej stronie. Po sprostowaniu tego błędu pierwsza alternatywa hipotezy ZAWADZKIEGO pokrywa się z paraboliczną hipotezą SCHLEICHERA, cytowaną zresztą w pracy [73] na s. 380.

Dość skomplikowana powierzchnia, określona równaniem (2.17), przechodzi w walec HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO przy  $B = n_1 = n_2 = 0$ .

Należy wspomnieć, że w ostatnich latach spotyka się coraz więcej hipotez wyteżeniowych, które swym zasięgiem mają obejmować ciała anizotropowe. Ogólny kwadratowy warunek plastyczności dla ciał anizotropowych podał R. MISES, [40]; do podobnych wyników doszedł I. E. MILEJKOWSKI, [37], a R. HILL, [21], zajmował się szczególną postacią tego warunku dla ciał ortotropowych. Uogólnienie warunku MISESA na przypadek anizotropii krzywoliniowej i niejednorodności materiału podali W. OLSZAK i W. URBANOWSKI, [47] i [48]. Jeżeli kierunki główne stanu naprężenia pokrywają się z kierunkami ortotropii, to omawiany warunek przybiera postać

$$(2.18) \quad F(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + G(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + H(\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2$$

i w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń przedstawia walec eliptyczny (przy założeniu  $FG + GH + HF > 0$ ). Jeżeli kierunki główne stanu naprężenia nie pokrywają się z kierunkami ortotropii, to powierzchnia graniczna musi być budowana w przestrzeni sześć- lub pięciowymiarowej.

Bardzo istotną sprawą jest uwzględnienie temperatury jako czynnika wyteżenia. Skąpe badania nad tym zagadnieniem ograniczają się z reguły do analizy zależności granicy niebezpiecznej przy rozciąganiu  $K_r$  od temperatury:  $K_r = f(T)$  (A. KELLY, C. CHIOU, [27], G. B. UZIK, [65], E. L. ROBINSON, [54], B. E. GATEWOOD, [15], P. DUWEZ, [10]). Zakłada się przy tym mierzając, że budowana w przestrzeni naprężeń powierzchnia graniczna wraz ze zmianą temperatury zmienia jedynie rozmiar bez zmiany kształtu. Jest to zapewne stanowisko błędne: jeżeli np. w temperaturze pokojowej mamy dla żeliwa  $K_c > K_r$ , to w dostatecznie podwyższonej temperaturze, przy zwiększeniu wpływu odkształceń plastycznych, możemy się raczej spodziewać  $K_c \approx K_r$ . Tak więc w przypadku możliwości zmiany temperatury powierzchnię graniczną należałoby budować co najmniej w czterowymiarowej przestrzeni  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 T$ . Jednak w braku dokładniejszych danych wspomniane podejście uproszczone daje przecież pewną orientację o zachowaniu się elementów w temperaturach podwyższonych.

Wpływ szeregu innych czynników na wyteżenie jest jeszcze mniej zbadany. Prace J. CZECHOWICZA, [9] i J. ODERFELDA, [45], zajmują się bardzo istotnym wpływem wilgotności na wytrzymałość drewna. Praca H. NAKAZAWA, [44], związana jest z wpływem gradientu naprężenia na wytrzymałość. A. M. FREUDENTHAL, [13], który zdecydowanie podkreśla znaczenie temperatury jako czynnika wyteżenia, zwraca również uwagę na wpływ mocy odkształcenia plastycznego  $\dot{W}$  na granicę wytrzymałości. Prace te nie pozwalają wprawdzie zbudować powierzchni granicznej w odpowiedniej wielowymiarowej przestrzeni czynników wyteżenia, ale dają pewien pogląd na to, jak taka powierzchnia mogłaby wyglądać.

### 3. Krytyka elementarnej miary wyężenia materiału i propozycja ogólnej miary wyężenia materiału

Określona wzorem (1.3) lub (1.5) wielkość  $w_0$  ma przedstawiać matematyczne ujęcie podanej na początku pracy definicji wyężenia materiału. Przy obciążeniach prostych i przy braku zmiany innych czynników wyężenia jak temperatura, wilgotność itp., istotnie odpowiada ona tej definicji. Jednak łatwo podać szereg przykładów obciążeń różnych od prostego, gdy posługiwanie się wielkością  $w_0$  prowadzi do wyników wyraźnie niezgodnych z przyjętą definicją.

Jako pierwszy, bardzo ważny technicznie przykład, posłuży nam wstępne sprężanie materiałów kruchych, w szczególności betonu. W myśl niemal wszystkich stosowanych obecnie hipotez naprężenie zastępcze w stanie naturalnym, nienaprężonym, równe jest zeru, natomiast po sprężeniu rośnie do pewnej wartości dodatniej. Oczywiście to samo stwierdzenie odnosi się do wielkości  $w_0$ . Sugerowałoby to, iż sprężanie jest czynnością wytrzymałościowo niekorzystną, bowiem zbliża stan fizyczny ciała do stanu niebezpiecznego. Wiemy wszyscy, że tak na ogół nie jest, a zatem tylko naprężenie zredukowane jako miara wyężenia jest miarą niedoskonałą. Sprężamy jednak tylko te elementy, które bądź będą następnie poddane rozciąganiu, bądź ścisłaniu w innych płaszczyznach. Natomiast sprężanie elementu, który byłby w czasie pracy poddany takim samym naprężeniom ścisłającym — czyli byłby obciążany w dalszym ciągu w sposób prosty w sensie ILIUSZINA, lub zbliżony do prostego — byłoby błędne. Tak więc naprężenie zastępcze może być miarą wyężenia przy obciążeniu prostym, natomiast na ogół zawodzi przy obciążeniach nieprostych. Miara wyężenia powinna zatem zależeć od przewidywanego sposobu obciążania (lub przeciążania), a nie być jednoznaczna funkcją samych tylko naprężeń lub czynników wyężenia w szerszym sensie.

Wypada tu od razu zająć się kwestią, czy wyężenie powinno być wielkością nieujemną, czy też może być ujemne. Tradycyjnie stanowi nienaprężonemu przypisuje się wyężenie zerowe. Jeżeli jakiś inny stan jest wytrzymałościowo korzystniejszy niż stan nienaprężony, to — logicznie biorąc — należy uznać, że odpowiadające mu wyężenie jest ujemne. Często uważa się, że naprężenie zastępcze, a więc i wielkość  $w_0$ , mogą być tylko nieujemne. Tak jest wtedy, gdy każda prosta, przechodząca przez początek układu, przebija powierzchnię graniczną w dwóch punktach, właściwych lub niewłaściwych (w nieskończoności). Niektóre z wymienionych hipotez wyężeniowych nie posiadają tej własności, np. hipoteza największego wydłużenia SAINT VENANTA-PONCELETA (bez modyfikacji GRASHOFA), niektóre przypadki hipotezy BURZYŃSKIEGO (w szczególności powierzchnia stożkowa (2.14), proponowana również przez I. N. MIROLUBOWA, [38]). S. D. PONOMARIEW, [51], przy obliczonym w myśl wzoru (2.14) ujemnym naprężeniu zastępczym dla  $\sigma_1 = \sigma_2 = -a$ ,  $\sigma_3 = 0$ ,  $\nu = K_c/K_r = 4$ , postawił znak zapytania, nie formu-

jąc wyraźnie sądu w tej sprawie. Wydaje się jednak, że nie powinniśmy dyskutować na temat, czy takie powierzchnie jak (2.14) mogą być powierzchniami granicznymi. Jeżeli ogólnie przyjęto, że niektórych materiałów nie można uplastyczyć ani zniszczyć wszechstronnym równomiernym ściskaniem, to można się spodziewać, że istnieją również materiały, które nie będą ulegały zniszczeniu i przy innych typach stanów naprężenia, w szczególności bliskich wszechstronnemu równomiernemu ściskaniu. W takim razie niektóre proste nie będą przebijały powierzchni granicznej w dwóch punktach, a natychmiastową konsekwencją tego jest występowanie ujemnych wartości naprężenia zastępczego, a więc i wyteżenia  $w_0$ . Tak więc jeżeli  $w_0$  zwiemy miarą wyteżenia, to słowo «miara» zostało tu zastosowane w sensie potocznym, a nie w sensie przyjętym w matematyce.

Hipotezy wyteżeniowe o wspomnianych własnościach należą jednak do wyjątków. G. A. GENIEW, [17], proponuje zastosowanie do betonu hipotezy (2.12), której odpowiada powierzchnia graniczna o kształcie paraboloidy, a więc odpowiednie naprężenie zredukowane jest zawsze nieujemne. W oparciu o tę hipotezę (i większość innych) nie potrafilibyśmy ani wytłumaczyć korzyści wstępnego sprężania, ani też dobrać optymalnego sprężenia. W niektórych prostych przypadkach optymalne sprężenie można obliczyć w sposób całkiem elementarny, nie posługując się bezpośrednio teorią wyteżenia. Bardziej złożone przypadki były czasem rozpatrywane oddzielnie (W. OLSZAK, [46]). Natomiast ogólna teoria doboru obciążeń wstępnych w zależności od przewidywanych obciążeń roboczych — opierająca się na teorii wyteżenia materiału — nie została dotychczas sformułowana.

Innym przypadkiem, w którym elementarna miara wyteżenia  $w_0$  może prowadzić do błędnych wniosków — tym razem zbyt optymistycznych — jest przypadek możliwości zmian temperatury elementu. W przypadku podwyższonej temperatury przyjęto odnosić naprężenie zastępcze do odpowiedniej granicy niebezpiecznej w danej temperaturze. Pojęcie «obciążenia prostego» nie uwzględnia zmian temperatury. Temperatura jest więc traktowana «na innej płaszczyźnie», tak jakby tylko wzrost naprężeń mógł spowodować uplastycznienie lub zniszczenie. Tymczasem pomimo, iż obliczona w ten sposób wartość  $w_0$  może być niewielka, to mały wzrost temperatury może już spowodować zniszczenie, a więc rozpatrywany stan fizyczny ciała nie jest tak daleki od stanu niebezpiecznego, jak sugerowałaby odpowiednia wielkość  $w_0$ .

Zaproponujemy jako miarę wyteżenia wielkość  $w$ , stanowiącą uogólnienie wielkości  $w_0$ , określonej wzorem (1.5). Wykorzystamy przy tym wnioski, nawiązujące się z przeprowadzonych rozważań.

Wspomnieliśmy, że elementy kruche sprężamy tylko wtedy, gdy przewidujemy, iż naprężenia robocze będą naprężeniami rozciągającymi. A więc ten sam stan — odpowiadający wstępnemu sprężeniu — w jednym przypadku należy uważać za daleki od stanu niebezpiecznego (gdy przewidujemy obciąż-

zenia rozciągające), natomiast w drugim przypadku za bliższy stanu niebezpiecznego od stanu naturalnego (gdy przewidujemy obciążenia ściskające). Wobec tego miara wyężenia, która posiadałaby znaczenie techniczne, powinna nie być jednoznaczną funkcją składowych stanu napężenia, temperatury itp., lecz powinna zależeć od przewidywanych obciążeń roboczych lub przeciążeń — mianowicie od prawdopodobieństwa «ruchu» punktu w przestrzeni naprężeń (lub, ogólniej, w przestrzeni czynników wyężenia) w poszczególnych kierunkach.

W ostatnich latach zaproponowano szereg hipotez wyężenia i metod określania współczynnika bezpieczeństwa, opartych o analizę prawdopodobieństwa pewnych zjawisk (W. WIERZBICKI, [70], W. WEIBULL, [68], J. MURZEWSKI, [42], S. D. WOŁKOW, [71]). Krótko mówiąc, autorzy uwzględniają prawdopodobieństwo, iż granica niebezpieczna może być różna od założonej, oraz prawdopodobieństwo, iż naprężenia (i inne czynniki wyężenia) są różne od obliczonych. Wydaje się, że istnieje pewna różnica w traktowaniu tych wielkości. Jeżeli się ograniczymy do rozpatrywania wyężenia w jednym tylko punkcie, to brana pod uwagę granica niebezpieczna, a więc i powierzchnia graniczna, są ściśle określone w tym punkcie (inna sprawa, że mogą czasem wystąpić trudności pomiarowe). Natomiast wielkość naprężeń i innych czynników wyężenia i charakter ich zmiany są w pewnym stopniu przypadkowe, a zatem na ogół można mówić tylko o prawdopodobieństwie osiągnięcia powierzchni granicznej w tym lub innym punkcie. Będziemy więc uwzględniali tylko prawdopodobieństwo osiągnięcia powierzchni granicznej w poszczególnych punktach, uważając samą powierzchnię za ściśle określoną i znaną.

Odnosnie powierzchni granicznej będziemy zakładać, że jest ona zbudowana w  $n$ -wymiarowej przestrzeni wszystkich czynników wyężenia, które w danym przypadku mogą odgrywać rolę (hiper-powierzchnia graniczna). Oznaczmy te czynniki przez  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Posiadają one na ogół różne wymiary; ponieważ chcemy uogólnić wzór (1.5), w którym wielkości  $r$  posiadają znaczenie odległości między punktami przestrzeni, więc przede wszystkim wprowadzimy bezwymiarowe czynniki wyężenia

$$(3.1) \quad x_i = \frac{X_i}{A_i},$$

gdzie  $A_i$  są pewnymi wielkościami porównawczymi. Należy je dobierać tak, by prawdopodobieństwo zmian wielkości  $x_i$  było równe (np. gdy równe jest prawdopodobieństwo przyrostu naprężeń o 100 kg/cm<sup>2</sup> i wzrostu temperatury o 10°C, to stosunek odpowiednich wielkości porównawczych winien wynieść 10 kg/°C cm<sup>2</sup>; same wartości  $A_i$  są bez znaczenia, gdyż ulegają następnie uproszczeniu). W takim razie równanie powierzchni granicznej zapiszemy w postaci

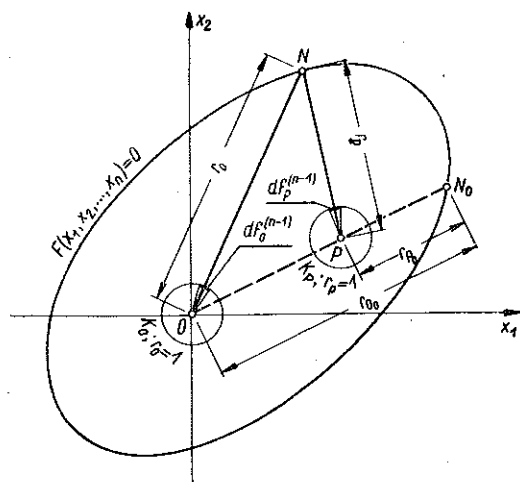
$$(3.2) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

W przestrzeni czynników wyteżenia wielkości  $x_i$  będziemy uważać za współrzędne kartezjańskie punktu, reprezentującego dany stan fizyczny.

Uogólnimy teraz wzór (1.5) przez wprowadzenie miary wyteżenia w wzorem

$$(3.3) \quad w = 1 - \frac{\mathfrak{M}(1/r_0)}{\mathfrak{M}(1/r_P)},$$

gdzie odległości  $r_0$  i  $r_P$  są tym razem odległościami punktów  $O$  i  $P$  nie od ustalonego punktu powierzchni granicznej  $N_0$ , lecz od zmiennego, dowolnego punktu  $N$ , czyli funkcjami punktu  $N$  (rys. 2). Symbol  $\mathfrak{M}$  oznacza pewną wartość średnią tych funkcji, którą zaraz dokładniej sprecyzujemy. Określimy ją mianowicie wzorem



Rys. 2. Wyteżenie materiału w przypadku ogólnym

We wzorze tym symbol  $\mathfrak{SS}$  oznacza całkę powierzchniową po powierzchni  $(n-1)$ -wymiarowej w zapisie HADAMARDA,  $K_P$  jest  $n$ -wymiarową kulą jednostkową o środku w punkcie  $P$ ,  $df_P^{(n-1)}$  jest elementem  $(n-1)$ -wymiarowej powierzchni tej kuli; średnią oblicza się przy tym z wagą  $p$ , która jest na ogół funkcją kierunku i odpowiada prawdopodobieństwu osiągnięcia powierzchni granicznej w tym kierunku (gęstości prawdopodobieństwa). Funkcję tę należy określić w zależności od charakteru pracy danego elementu; nie musi ona być normowana, ponieważ występuje i w liczniku i w mianowniku wzoru (3.4) i ewentualny stały czynnik ulega uproszczeniu. Jeżeli  $p \equiv 1$ , to wówczas wszystkie kierunki w przestrzeni czynników wyteżenia są równouprawnione — w ogólnym przypadku funkcja  $p$  zmienia to początkowe równouprawnienie kierunków, wynikające z całkowania po powierzchni kuli jednostkowej. Jeżeli  $p = 0$  dla wszystkich kierunków za wyjątkiem kierunku odpowiadającego punktowi  $N_0$ , wówczas obciążenie ogranicza się do obciążenia prostego (w przestrzeni naprężeń, przy braku wpływu temperatury i innych czynników), a wzór (3.3) przechodzi wprost we wzór (1.5).

Tak więc wzór (3.3) z podstawieniem (3.4) jest uogólnieniem wzoru elementarnego (1.5) na przypadek obciążeń nieprostych, a przynajmniej na przy-

$$(3.4) \quad \mathfrak{M}(1/r_P) = \frac{\mathfrak{SS}(1/r_P) p df_P^{(n-1)}}{\mathfrak{SS} p df_P^{(n-1)}};$$

wzór dla  $\mathfrak{M}(1/r_0)$  można uważać za szczególny przypadek wzoru (3.4), gdy punkt  $P$  znajduje się w początku układu  $O$ .

We wzorze tym symbol  $\mathfrak{SS}$  o-



padek obciążeń «łamanych», gdy droga obciążenia w przestrzeni czynników wyteżenia składa się z dwóch odcinków nachylonych do siebie pod kątem. Tego typu drogi często występują w praktyce bądź w postaci nakładania się obciążeń na przyjęty stan naprężeń wstępnych, bądź w postaci nakładania się przeciążeń na obciążenia robocze. Np. M. T. HUBER, [23], zwraca uwagę na fakt, iż w przypadku obciążenia konstrukcji siłami zewnętrznymi i ciężarem własnym zniszczenie może nastąpić jedynie wskutek wzrostu sił zewnętrznych. Gdy np. ciężar własny wywołuje zginanie, a obciążenie robocze — skręcanie, to kompletna linia obciążenia jest wtedy linią łamaną.

Musimy ograniczyć się do obciążeń wzdłuż łamanej szczególnie w przypadku analizy wyteżenia względem granicy wytrzymałości. Jak ustaliliśmy w p. 2, powierzchnia graniczna dla granicy wytrzymałości nie jest na ogół jednoznaczna i zależy od drogi obciążenia. Precyzujemy więc tę drogę jako łamaną  $OP-PN$  (rys. 2) tak, że dla ustalonego punktu  $P$  powierzchnia ta jest ściśle określona. Inna sprawa, że dotychczas brak doświadczeń nad ustaleniem takich powierzchni, i że ustalanie takie — dla każdego punktu  $P$  z osobna — będzie żmudne i skomplikowane. Pewne przybliżenie może tu dać powierzchnia graniczna, zbudowana dla obciążeń prostych.

Łatwo sprawdzić, że określona wzorem (3.3) wielkość  $w$  spełnia zasadnicze wymagania, jakie stawiamy mierze wyteżenia. Jeżeli punkt  $P$  znajduje się w początku układu  $O$ , to licznik jest równy mianownikowi i wyteżenie przyjmuje tradycyjną wartość 0. Samo ustalenie początku układu może tu budzić pewne wątpliwości i powinno być dokonane w oparciu o przesłanki logiczne: odnośnie naprężeń lub odkształceń będzie to stan naturalny, nienaprężony, na osi temperatury należy  $O$  umieścić bądź w temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$ , bądź w temperaturze pokojowej (przyjęcie absolutnego zera nie byłoby chyba uzasadnione). Jeżeli punkt  $P$  leży na powierzchni granicznej, to wartość średnia  $\mathfrak{M}(1/r_p)$  rośnie nieograniczenie i otrzymujemy  $w = 1$  (tak mogłoby nie być tylko wtedy, gdyby danemu punktowi powierzchni przypisać gęstość prawdopodobieństwa  $p = 0$ , ale te dwa fakty się wzajemnie wykluczają). Należy tu podkreślić różnicę w stosunku do potencjału warstwy pojedynczej, który jest określony całą, podobną do występującej w liczniku wzoru (3.4); we wzorze na potencjał występuje jednak element powierzchni  $dF$ , natomiast w naszym przypadku — element powierzchni kuli jednostkowej  $df_p^{(n-1)}$  (element kąta). Ta różnica wpływa w sposób istotny na zachowanie się badanych ciałek.

W innych punktach  $P$ , leżących wewnątrz powierzchni granicznej, wyteżenie  $w$  może przybierać dowolne wartości mniejsze od jedności, w tym również wartości ujemne. Wynik ten wydaje się znajdować pełne uzasadnienie logiczne, ponieważ np. dla materiałów kruchych punkt  $O$  nie jest na ogół punktem optymalnym; ponieważ punktowi temu umówiliśmy się przypisywać wartość  $w = 0$ , zatem w punkcie optymalnym w przestrzeni czynników wyteżenia musi zachodzić  $w < 0$ . Poszukując minimum funkcji  $w$  możemy więc

znaleźć punkt optymalny (np. określić optymalne sprężenie wstępne), a sama minimalna wartość  $w_{min}$  stanowi ocenę korzyści zastosowania takiego sprężania.

Gęstość prawdopodobieństwa  $p$  może być funkcją punktu powierzchni granicznej  $N$ , albo funkcją kierunku w przestrzeni czynników wyteżenia. W tym ostatnim, częściej występującym przypadku, mianowniki obu średnich określonych wzorem (3.4) są równe i po podstawieniu do wzoru (3.3) ulegają uproszczeniu, a wzór ten przybiera postać

$$(3.5) \quad w = 1 - \frac{\int_{K_0} (1/r_0) p df_0^{(n-1)}}{\int_{K_P} (1/r_P) p df_P^{(n-1)}}.$$

Iterację całek we wzorze (3.5) najłatwiej przeprowadzić we współrzędnych kulistych o środku w punkcie  $P$ ; punkt  $O$  można uważać za szczególny przypadek punktu  $P$ . Wprowadźmy współrzędne  $r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ , tak, że

$$(3.6) \quad \begin{cases} x_m = x_{mP} + r \cos \varphi_m \prod_{i=1}^{m-1} \sin \varphi_i & \text{dla } m = 1, 2, \dots, n-1, \\ x_n = x_{nP} + r \prod_{i=1}^{n-1} \sin \varphi_i, \end{cases}$$

przy czym  $0 \leq \varphi_m \leq \pi$  dla  $m = 1, 2, \dots, n-2$ , oraz  $0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi$ . Podstawiając (3.6) do (3.2) obliczamy promień jako funkcję kierunku, mianowicie  $r = r_P = r_P(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ . Element powierzchni kuli jednostkowej (elementarny kąt bryłowy) określony jest wtedy wzorem

$$(3.7) \quad df_P^{(n-1)} = \prod_{i=1}^{n-1} \sin^{n-i-1} \varphi_i d\varphi_i,$$

i jeżeli gęstość prawdopodobieństwa jest tylko funkcją kierunku, czyli jest określona tą samą funkcją  $p = p(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$  dla każdego punktu  $P$ , to ostatecznie, po przeprowadzeniu iteracji,

$$(3.8) \quad w = 1 - \frac{\int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \dots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} \frac{p(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_{n-1}}{r_0(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}}{\int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \dots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} \frac{p(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_{n-1}}{r_P(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}}.$$

Dotychczas nie rozważaliśmy zagadnienia, ile wymiarów winna posiadać przestrzeń czynników wyteżenia. Kwestię tę rozwiązuje następujące twierdzenie.

**Twierdzenie.** Jeżeli powierzchnia (hiperpowierzchnia) graniczna w  $n$ -wymiarowej przestrzeni o współrzędnych kartezjańskich  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jest powierzchnią walcową o osi równoległej do osi jednego z czynników wyteżenia

$x_m$ , czyli odpowiedni czynnik  $x_m$  nie figuruje w równaniu tej powierzchni, oraz gęstość prawdopodobieństwa  $p$  nie jest funkcją tej zmiennej, to wówczas można wyteżenie obliczać w przestrzeni  $n-1$ -wymiarowej, nie posiadającej osi  $x_m$  (przekrój przestrzeni  $n$ -wymiarowej płaszczyzną  $x_m = \text{const}$ ).

*Dowód.* Ustalmy kolejność zmiennych  $x_i$  tak, by równanie powierzchni granicznej nie zależało od  $x_1$ , czyli posiadało postać

$$(3.9) \quad F(x_2, x_3, \dots, x_n) = 0.$$

Wprowadzając współrzędne kuliste (3.6) otrzymujemy

$$(3.10) \quad F(x_{2P} + r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, x_{3P} + r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \dots) = 0.$$

Promień  $r$  i zmienna  $\varphi_1$  występują tu wyłącznie w postaci iloczynu  $r \sin \varphi_1$ , zatem rozwiązanie równania (3.10) ze względu na  $r$  będzie posiadało postać

$$(3.11) \quad r = r_P = \frac{1}{\sin \varphi_1} G(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}).$$

Funkcja  $G(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1})$  określa promień  $r$  w przekroju  $x_1 = x_{1P}$ ; istotnie, wtedy  $\varphi_1 = \pi/2$  oraz  $r = G$ . Promień ten oznaczymy przez  $\tilde{r}_P$ . Iterując występujące we wzorze (3.4) całki i podstawiając (3.11) otrzymujemy

$$(3.12) \quad \mathfrak{M}(1/r_P) = \frac{\int_0^\pi \sin^{n-1} \varphi_1 d\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^{n-4} \varphi_3 d\varphi_3 \dots \int_0^{2\pi} \frac{p(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_{n-1}}{\tilde{r}_P(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1})}}{\int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^{n-4} \varphi_3 d\varphi_3 \dots \int_0^{2\pi} p(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_{n-1}}.$$

Każdą z występujących w liczniku i mianowniku całek  $n-1$ -krotnych można rozbić na iloczyn całki pojedynczej po  $\varphi_1$  i całki  $n-2$ -krotnej po pozostałych zmiennych; całki pojedyncze można efektywnie obliczyć wyrażając je np. przez funkcje EULERA (por. M. ŻYCZKOWSKI, [74],) i zamiast (3.12) uzyskujemy

$$(3.13) \quad \mathfrak{M}(1/r_P) = \frac{\int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^{n-4} \varphi_3 d\varphi_3 \dots \int_0^{2\pi} \frac{p(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_{n-1}}{\tilde{r}_P(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1})}}{\int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^{n-4} \varphi_3 d\varphi_3 \dots \int_0^{2\pi} p(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_{n-1}} = C \frac{\mathfrak{SS}(1/\tilde{r}_P) p df_P^{(n-2)}}{\tilde{K}_P \mathfrak{SS} p df_P^{(n-2)}},$$

gdzie kula  $\tilde{K}_p$  jest kulą jednostkową w przestrzeni  $n-1$ -wymiarowej  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , element  $df_p^{(n-2)}$  jest elementem powierzchni kuli, a stała  $C$  wynosi

$$(3.14) \quad C = \frac{\left[ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^2}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Ta sama stała  $C$  występuje przy obliczaniu średniej  $\mathfrak{M}(1/r_0)$  i po podstawieniu do (3.3) stałe te ulegają uproszczeniu. Tym samym wypowiedziane twierdzenie jest udowodnione.

Wniosek z dowiedzionego twierdzenia jest oczywisty: przestrzeń czynników wyteżenia powinna mieć tyle wymiarów, ile wielkości istotnie wpływa na wyteżenie. Wielkości, które nie wpływają na nie, można po prostu pomijać. Podanie takiego twierdzenia było koniecznością: bez niego nie byłoby wiadomo, w ilu-wymiarowej przestrzeni powinna być budowana powierzchnia graniczna, a uwzględnianie zawsze wszystkich możliwych czynników wyteżenia byłoby z jednej strony niemożliwe, z drugiej strony bezsensowne. Tak np. wilgotność wpływa w istotny sposób na wytrzymałość drewna i musi na ogół być uwzględniana, ale oczywiście trudno mówić o wilgotności stali i jej wpływie na wytrzymałość — wykazane twierdzenie dowodzi, że taki czynnik można pomijać bez wpływu na wynik.

Należy jednak zwrócić uwagę, że pomijać wolno tylko te wielkości, którym w przestrzeni czynników wyteżenia odpowiadają współrzędne kartezjańskie. Jeżeli np. równanie powierzchni granicznej ma postać (2.5), to nie można bezpośrednio przejść z przestrzeni  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ , czyli  $\sigma_m\sigma_l\omega$  na płaszczyznę  $\sigma_m\sigma_p$ , ponieważ pomijalibyśmy wtedy kąt  $\omega$ , który nie jest współrzędną kartezjańską (a badana powierzchnia nie jest na ogół powierzchnią walcową). Istotnie, można sprawdzić, że takie przejście powodowałoby różnicę w wynikach.

Niezależnie od redukcji wymiarów, wynikającej z wykazanego twierdzenia, inna redukcja może nastąpić przy szczególnej postaci funkcji  $p$ , mianowicie wtedy, gdy prawdopodobieństwo zmiany jakiegoś czynnika wyteżenia (np. temperatury) jest znikome, i gdy można przyjąć, że gęstość prawdopodobieństwa  $p$  jest różna od zera tylko przy pewnej określonej, stałej wartości tego czynnika.

#### 4. Przykłady obliczania wyteżenia materiału w przypadku trójwymiarowej przestrzeni czynników wyteżenia

Podamy teraz kilka przykładów obliczania wyteżenia  $w$  w oparciu o wprowadzone wzory ogólne i przeprowadzimy analizę uzyskanych wyników.

Zajmiemy się najpierw powierzchniami (2.5) — są to powierzchnie obrotowe w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń głównych HAIGHA-WESTERGAARDA, odpowiadające energetycznym hipotezom wyteżenia. Nie musimy tu wpro-

wadzać bezwymiarowych wielkości (3.1), ponieważ na wszystkich osiach odcinamy wielkości o tym samym wymiarze; tym niemniej wielkości bezwymiarowe skracają zapis i korzystniej jest przy dokonywaniu obrotu układu osi  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  zamiast (2.1) napisać

$$(4.1) \quad x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{K_r \sqrt{3}}, \quad y = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{K_r \sqrt{2}}, \quad z = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2}{K_r \sqrt{6}},$$

gdzie  $K_r$  oznacza granicę niebezpieczną przy jednoosiowym rozciąganiu. Równanie (2.5) przybierze tu postać

$$(4.2) \quad F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = C;$$

wprowadzając teraz współrzędne kuliste

$$(4.3) \quad \begin{cases} x = x_p + r \cos \varphi_1, \\ y = y_p + r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ z = z_p + r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \end{cases}$$

zapiszemy to równanie w postaci

$$(4.4) \quad F[(x_p + r \cos \varphi_1), \sqrt{y_p^2 + z_p^2 + 2y_p r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + 2z_p r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + r^2 \sin^2 \varphi_1}] = C.$$

Szczególnie prostym wzorem określone będzie wyteżenie materiału na osi symetrii  $y_p = z_p = 0$ . Wprowadzając współrzędne kuliste o środku w takim punkcie otrzymujemy

$$(4.5) \quad F[(x_p + r \cos \varphi_1), r \sin \varphi_1] = C;$$

stąd  $r = r_p = r_p(\varphi_1)$ , a jeżeli także gęstość prawdopodobieństwa «ruchu» punktu w przestrzeni naprężeń zależy tylko od  $\varphi_1$ , to ostatecznie, po iteracji całek i uproszczeniu,

$$(4.6) \quad w = 1 - \frac{\int_0^\pi [\rho(\varphi_1)/r_0(\varphi_1)] \sin \varphi_1 d\varphi_1}{\int_0^\pi [\rho(\varphi_1)/r_p(\varphi_1)] \sin \varphi_1 d\varphi_1}.$$

Dla przykładu weźmiemy pod uwagę paraboloidę obrotową BURZYŃSKIEGO (2.12); jak już wspomnieliśmy, w ostatnich czasach G. A. GENIEW zaproponował ją do określania własności wytrzymałościowych betonu, [17]. Wprowadzając zmienne (4.1) oraz stosowane przez BURZYŃSKIEGO oznaczenie

$$(4.7) \quad \frac{K_c}{K_r} = \kappa,$$

zapiszemy najpierw jej równanie w postaci

$$(4.8) \quad \frac{3}{2}(y^2 + z^2) + (\kappa - 1)x\sqrt{3} - \kappa = 0.$$

Odległość wierzchołka paraboloidy od początku układu współrzędnych wynosi

$$(4.9) \quad \xi_0 = \frac{\kappa}{(\kappa-1)\sqrt{3}};$$

wprowadzając «przesunięte» naprężenie średnie

$$(4.10) \quad \xi = \xi_0 - x = \frac{\kappa}{(\kappa-1)\sqrt{3}} - x$$

i oznaczając przez  $m$  odległość ogniska paraboloidy od jej wierzchołka

Tablica 1. Wartości funkcji  $m = m(\kappa)$  i  $\xi_0 = \xi_0(\kappa)$  dla paraboloidy Burzyńskiego

$\kappa = K_c/K_r$	$m$	$\xi_0$
1	0	$\infty$
2	0,2887	1,1547
3	0,5774	0,8660
4	0,8660	0,7698
5	1,1547	0,7217

$$(4.11) \quad m = \frac{\kappa-1}{2\sqrt{3}},$$

zapiszemy równanie (4.8) w postaci normalnej

$$(4.12) \quad y^2 + z^2 - 4m\xi = 0.$$

Wartości funkcji  $m = m(\kappa)$  i  $\xi_0 = \xi_0(\kappa)$  podaje tablica 1. Są one sobie równe dla  $\kappa = 2 + \sqrt{3} = 3,732$ ; wtedy ognisko paraboli znajduje się w początku układu współrzędnych.

Wprowadzając współrzędne kuliste (4.3) (przy zastąpieniu  $x$  przez  $\xi$ ) określimy odwrotność promienia  $1/r = 1/r_P$  wzorem

$$(4.13) \quad \frac{1}{r_P} = \frac{1}{4m\xi_P - y_P^2 - z_P^2} [(y_P \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + z_P \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - 2m \cos \varphi_1) + \sqrt{\Delta}],$$

gdzie

$$(4.14)$$

$$\Delta = (y_P \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + z_P \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - 2m \cos \varphi_1)^2 + (4m\xi_P - y_P^2 - z_P^2) \sin^2 \varphi_1.$$

Załóżmy, dla przykładu, że gęstość prawdopodobieństwa «ruchu» w przestrzeni naprężeń jest równomierna we wszystkich kierunkach,  $p \equiv 1$ ; napiszemy wtedy krótko

$$(4.15) \quad w = 1 - \frac{J(0)}{J(P)},$$

gdzie

$$(4.16) \quad J(P) = \frac{1}{4m\xi_P - y_P^2 - z_P^2} \int_0^\pi \sin \varphi_1 d\varphi_1 \int_0^{2\pi} [(y_P \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + z_P \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - 2m \cos \varphi_1) + \sqrt{\Delta}] d\varphi_2,$$

a  $J(0)$  jest szczególnym przypadkiem  $J(P)$ . Ponieważ

$$(4.17) \quad \int_0^\pi \sin \varphi_1 d\varphi_1 \int_0^{2\pi} (y_P \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + z_P \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - 2m \cos \varphi_1) d\varphi_2 = 0,$$

więc ostatecznie

$$(4.18) \quad J(P) = \frac{1}{4m\xi_P - y_P^2 - z_P^2} \int_0^\pi \sin \varphi_1 d\varphi_1 \int \sqrt{\Delta} d\varphi_2.$$

Występująca tu całka podwójna daje się wprawdzie sprowadzić do całki pojedynczej z całki eliptycznej, jednak w ogólnym przypadku posiada postać dość skomplikowaną. Ograniczymy się do obliczenia wyężenia materiału w punktach przestrzeni naprężeń, leżących na osi paraboloidy; przyjmiemy mianowicie  $y_P = z_P = 0$ . Wtedy

$$(4.19) \quad \Delta = 4m^2 \cos^2 \varphi_1 + 4m\xi_P \sin^2 \varphi_1,$$

a ponadto ma zastosowanie wzór ogólny (4.6); po wprowadzeniu pomocniczej zmiennej  $v = \cos \varphi_1$  otrzymujemy

$$(4.20) \quad J(P) = \frac{2\pi}{\sqrt{m\xi_P}} \int_0^1 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{m}{\xi_P}\right) v^2} dv.$$

Musimy rozważyć dwie możliwości. Jeżeli  $\xi_P > m$  (punkt leży poza ogniskiem), czyli, wobec (4.10), (4.9) i (4.11),

$$(4.21) \quad \kappa_P < \frac{-\kappa^2 + 4\kappa - 1}{2(\kappa - 1)\sqrt{3}},$$

$$(4.22) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < \frac{-\kappa^2 + 4\kappa - 1}{6(\kappa - 1)} K_r,$$

to całka (4.20) posiada postać

$$(4.23) \quad J(P) = \frac{\pi}{\xi_P} \left[ 1 + \sqrt{\frac{\xi_P}{m}} \frac{\arcsin \sqrt{1 - \frac{m}{\xi_P}}}{\sqrt{1 - \frac{m}{\xi_P}}} \right].$$

Jeżeli natomiast  $\xi_P < m$  (punkt leży pomiędzy ogniskiem a wierzchołkiem), czyli nierówności (4.21) i (4.22) są spełnione ze znakami przeciwnymi, to wtedy

$$(4.24) \quad J(P) = \frac{\pi}{\xi_P} \left[ 1 + \sqrt{\frac{\xi_P}{m}} \frac{\operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{m}{\xi_P} - 1}}{\sqrt{\frac{m}{\xi_P} - 1}} \right],$$

gdzie symbol  $\operatorname{Arsh}$  oznacza funkcję odwrotną względem sinusa hiperbolicznego. Całka  $J(0)$  określona jest wzorem (4.23) dla  $\kappa < 2 + \sqrt{3}$ , natomiast wzorem (4.24) dla  $\kappa > 2 + \sqrt{3}$ . Podstawienie odpowiednich wartości  $J(P)$  i  $J(0)$  do wzoru (4.15) określa wyężenie materiału w dowolnym punkcie osi: między początkiem układu współrzędnych a wierzchołkiem paraboloidy jest ono dodatnie, na pozostałej części osi — ujemne.

Szczególnie proste wzory otrzymuje się w przypadku  $m = \xi_0$ , czyli  $\kappa = 2 + \sqrt{3} = 3,732$ . Jest to przypadek ważny praktycznie, ponieważ tę wartość  $\kappa$  posiada np. duża ilość gatunków żeliwa. Wtedy

$$(4.25) \quad J(0) = \frac{2\pi}{\xi_0} = \frac{2\pi(\kappa-1)\sqrt{3}}{\kappa} = 2\pi\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$$

oraz

$$(4.26) \quad w = 1 - \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\xi_p}{1 + \sqrt{\frac{\xi_p}{m}} \frac{\text{Ar sh} \sqrt{\frac{m}{\xi_p} - 1}}{\sqrt{\frac{m}{\xi_p} - 1}}}$$

dla  $\xi_p < m$ , czyli  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ , oraz

$$(4.27) \quad w = 1 - \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\xi_p}{1 + \sqrt{\frac{\xi_p}{m}} \frac{\text{arc sin} \sqrt{1 - \frac{m}{\xi_p}}}{\sqrt{1 - \frac{m}{\xi_p}}}}$$

dla  $\xi_p > m$ , czyli  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$ .

#### 5. Przykłady obliczania wyężenia materiału w przypadku dwuwymiarowej przestrzeni czynników wyężenia

W oparciu o wzór ogólny (3.3) obliczymy teraz wyężenie materiału w przypadku często stosowanej walcowej powierzchni granicznej HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO

$$(5.1) \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2K_r^2.$$

Będziemy więc zasadniczo posługiwać się trójwymiarową przestrzenią naprężeń, ale wobec wykazanego w p. 3 twierdzenia przestrzeń ta redukuje się do płaszczyzny, o ile gęstość prawdopodobieństwa  $p$  jest tylko funkcją kierunku w tej płaszczyźnie.

Zamiast bezwymiarowych zmiennych (4.1) wygodniej tu będzie wprowadzić nieco inne wielkości, różniące się od tamtych stałym współczynnikiem  $\sqrt{2/3}$ :

$$(5.2) \quad x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{K_r \sqrt{2}}, \quad y = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{3}}{2K_r}, \quad z = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2}{2K_r};$$

wtedy równanie (5.1) przybiera szczególnie prostą postać

$$(5.3) \quad y^2 + z^2 = 1.$$

To równanie walca kołowego w przestrzeni  $xyz$  można uważać zarazem za równanie okręgu koła w płaszczyźnie  $yz$ . Wprowadzimy współrzędne biegunowe płaskie (grające tu rolę współrzędnych kulistych)

$$(5.4) \quad y = y_p + r \cos \varphi, \quad z = z_p + r \sin \varphi,$$



skąd

(5.5)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_p} = \frac{1}{1 - y_p^2 - z_p^2} [y_p \cos \varphi + z_p \sin \varphi + \sqrt{(y_p \cos \varphi + z_p \sin \varphi)^2 + 1 - y_p^2 - z_p^2}].$$

Zgodnie z oznaczeniami, stosowanymi w p. 3, ta wielkość  $r$  powinna być oznaczana przez  $\tilde{r}$ , ponieważ odnosi się do przekroju powierzchni walcowej płaszczyną prostopadłą; dla uproszczenia węzyk u góry został tu jednak pominięty.

Założymy najpierw, że  $p \equiv 1$ , czyli że prawdopodobieństwo «ruchu» punktu we wszystkich kierunkach przestrzeni naprężeń jest równe. Wtedy

$$(5.6) \quad w = 1 - \frac{2\pi(1 - y_p^2 - z_p^2)}{\int_0^{2\pi} [y_p \cos \varphi + z_p \sin \varphi + \sqrt{(y_p \cos \varphi + z_p \sin \varphi)^2 + 1 - y_p^2 - z_p^2}] d\varphi}$$

i ostatecznie, po sprowadzeniu występującej w mianowniku całki eliptycznej do postaci normalnej przez zastosowanie wzoru

$$(5.7) \quad y_p \cos \varphi + z_p \sin \varphi = \sqrt{y_p^2 + z_p^2} \cos \left( \varphi - \arctg \frac{z_p}{y_p} \right)$$

napiszemy krótko

$$(5.8) \quad w = 1 - \frac{\pi(1 - w_0^2)}{2\mathbf{E}(w_0)},$$

gdzie  $\mathbf{E}(k)$  oznacza pełną całkę eliptyczną drugiego rodzaju, natomiast

$$(5.9) \quad w_0 = \sqrt{y_p^2 + z_p^2} = \frac{\sigma_0}{K_r}$$

jest elementarną miarą wyteżenia (1.3), czyli wyteżeniem materiału przy obciążeniu prostym. Tak więc wyteżenie  $w$  można w tym przypadku uważać za funkcję jednej tylko zmiennej  $w_0$ . Wartości tej funkcji zebrane są w tablicy 2; przy jej zestawianiu posługiwano się tablicą całek eliptycznych  $\mathbf{E}(k)$  A. FLETCHERA, [12], która jest tu wygodniejsza od spotykanych zazwyczaj tablic  $\mathbf{E}(k^2)$ .

Wartości  $w$  są w rozważanym przypadku na ogół dość znacznie mniejsze od  $w_0$ . Jest to oczywiste, ponieważ przybliżając się do pewnej części powierzchni granicznej zarazem oddalamy się od innych części tej powierzchni; przy obliczaniu  $w_0$  uwzględnia się tylko jeden punkt powierzchni granicznej i zbliżanie się do tego punktu. Minimum wyteżenia materiału występuje na osi walca i wynosi 0; przy równomiernym

Tablica 2. Wyteżenie materiału w przypadku walcowej powierzchni granicznej Hubera oraz równomiernym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa  $p$

$w_0$	$w$	$w_0$	$w$
0	0	0,5	0,1972
0,1	0,0075	0,6	0,2911
0,2	0,0302	0,7	0,4091
0,3	0,0687	0,8	0,5569
0,4	0,1238	0,9	0,7453
0,5	0,1972	1,0	1,0000

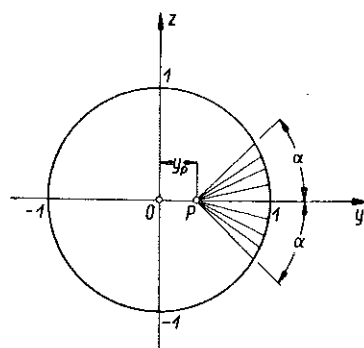
prawdopodobieństwie osiągnięcia poszczególnych punktów powierzchni granicznej, oś walca jest miejscem geometrycznym punktów najmniej wyteżonych.

Korzystając z tego, że we wprowadzonych przez nas współrzędnych (5.2) równanie walcowej powierzchni granicznej HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO posiada szczególnie prostą postać (5.3), przeprowadzimy teraz pewną analizę wpływu rozkładu gęstości prawdopodobieństwa  $p$  na uzyskiwane wyniki przy ustalonej powierzchni granicznej. Będziemy przy tym — ze względów czysto praktycznych — zakładać taki rozkład gęstości prawdopodobieństwa, by występujące całki dały się efektywnie obliczyć w sposób możliwie prosty.

Przyjmijmy najpierw, że

$$(5.10) \quad \begin{cases} p \equiv 1 & \text{dla } 0 < \varphi < a \quad \text{i dla } 2\pi - a < \varphi < 2\pi, \\ p \equiv 0 & \text{dla } a < \varphi < 2\pi - a. \end{cases}$$

Tym samym dopuścimy «*ruch*» tylko w pewnych kierunkach przestrzeni naprężeń, przyjmując, że rozkład prawdopodobieństwa jest w tych kierunkach



Rys. 3. Przekrój walcowej powierzchni granicznej Hubera-Misesa-Hencky'ego

równomierny. Ograniczymy się przy tym do badania wyteżenia na osi  $y$ , przyjmując  $z_p = 0$  (rys. 3). Wzór (5.5) znajduje zastosowanie oczywiście nadal, a po zastąpieniu granic całkowania we wzorze ogólnym (3.8)  $0 < \varphi < 2\pi$  przez  $0 < \varphi < a$  (z uwagi na występującą symetrię przedziału  $2\pi - a < \varphi < 2\pi$  nie trzeba już rozpatrywać) otrzymujemy ostatecznie

$$(5.11) \quad w = 1 - \frac{a(1-y^2)}{E(a, y) + y \sin a},$$

gdzie  $E(a, k)$  oznacza niepełną całkę eliptyczną drugiego rodzaju, a przy  $y$  opuszczono wskaźnik  $P$  bez obawy nieporozumień. Jeżeli  $a = \pi$ , to otrzymujemy wzór (5.8); jeżeli natomiast  $a \rightarrow 0$ , to  $E(a, y) \rightarrow a$ ,  $\sin a \rightarrow a$  i otrzymujemy w granicy  $w = y$ , czyli  $w = w_0$  ale tylko dla dodatnich  $y$  [wzór (5.9)].

W zastosowaniach praktycznych spotkamy się raczej z innym, mianowicie ciągłym rozkładem prawdopodobieństwa o największej gęstości na osi symetrii. Dla przykładu przyjmijmy

$$(5.12) \quad \begin{cases} p = \cos \varphi - \cos a & \text{dla } 0 < \varphi < a \quad \text{i dla } 2\pi - a < \varphi < 2\pi; \\ p \equiv 0 & \text{dla } a < \varphi < 2\pi - a. \end{cases}$$

Jak już wspomnieliśmy, ewentualne unormowanie funkcji  $p$  nie posiada żadnego znaczenia. Podstawiając (5.5) i (5.12) do wzoru ogólnego (3.8) otrzymujemy

$$(5.13) \quad w = 1 - \frac{2(1-y^2)(\sin a - a \cos a)}{\sin a \sqrt{1-y^2 \sin^2 a} + \frac{1}{y} \arcsin(y \sin a) + ya - y \sin a \cos a - 2E(a, y) \cos a}$$

Wzór ten oczywiście również daje  $w = y$  w przypadku granicznym obciążenia prostego  $\alpha = 0$  (choć przejście do granicy jest tu bardziej skomplikowane).

Dotychczas uzależnialiśmy gęstość prawdopodobieństwa  $p$  tylko od kąta  $\varphi$ , niezależnie od położenia punktu  $P$ . Przyjmując je np. w postaci (5.10) lub (5.12) zakładaliśmy, że tylko część powierzchni granicznej odpowiadająca ustalonemu kątowi  $\alpha$  może być osiągnięta, przy czym część ta zależała od położenia punktu  $P$  i na ogół zmniejszała się z przesuwaniem punktu  $P$  w kierunku osi  $y$ . Innym ważnym praktycznie przypadkiem jest ustalenie części powierzchni granicznej, która może być osiągnięta, co odpowiada uzależnieniu kąta  $\alpha$  od położenia punktu  $P$  (rys. 3). Przyjmijmy, dla przykładu, że osiągnięta może być część powierzchni granicznej, odpowiadająca półokręgowi  $y^2 + z^2 = 1$ ,  $y \geq 0$ , przy czym gęstość prawdopodobieństwa  $p$  rozłożona jest równomiernie. Wtedy

$$(5.14) \quad \alpha = \arctg \left( \frac{-1}{y_P} \right) = \operatorname{arctg}(-y_P), \quad \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}\pi.$$

Ponieważ prawdopodobieństwo zależy tu nie tylko od kąta  $\varphi$ , ale i od położenia punktu  $P$ , więc nie możemy posłużyć się wzorem (3.8), lecz skorzystamy ze wzorów ogólnych (3.3) i (3.4). W naszym przypadku

$$(5.15) \quad \mathfrak{M}(1/r_P) = \frac{\int_0^{2\pi} (1/r_P) p \, d\varphi}{\int_0^{2\pi} p \, d\varphi} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} (1/r_P) \, d\varphi,$$

$$(5.16) \quad \mathfrak{M}(1/r_0) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} d\varphi = 1$$

i ostatecznie, po scałkowaniu i opuszczeniu wskaźnika  $P$ ,

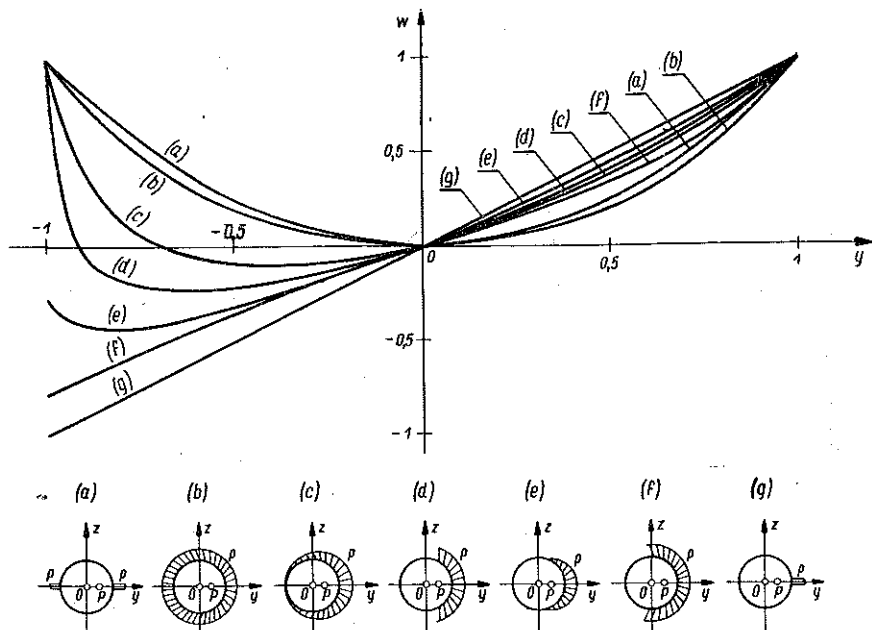
$$(5.17) \quad w = 1 - \frac{\alpha(1-y^2)}{E(\alpha, y) + y \sin \alpha} = 1 - \frac{(1-y^2) \operatorname{arctg}(-y)}{E[\operatorname{arctg}(-y), y] + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}.$$

Porównanie wyników wzorów (5.11), (5.13) i (5.17) podaje tablica 3 i wykres 4. Przyjęto następujące oznaczenia; (a) — «dwupunktowy» równomierny rozkład prawdopodobieństwa, który zostanie bardziej szczegółowo omówiony w p. 6; (b) — wzór (5.11),  $\alpha = \pi$ , czyli wzór (5.8) — równomierne prawdopodobieństwo we wszystkich kierunkach; (c) — wzór (5.13),  $\alpha = \pi$  — nierównomierne prawdopodobieństwo we wszystkich kierunkach; (d) — wzór (5.11),  $\alpha = \pi/2$  — równomierne prawdopodobieństwo w zakresie kąta półpełnego; (e) — wzór (5.13),  $\alpha = \pi/2$  — nierównomierne prawdopodobieństwo w zakresie kąta półpełnego; (f) — wzór (5.17) — równomierne prawdopodobieństwo na półkolu; (g) — wzory (5.11) i (5.13),  $\alpha = 0$  — prawdopodobieństwo «jedno-

Tablica 3. Wyjęcie materiału przy różnych rozkładach gęstości prawdopodobieństwa  $p$

$y$	(a) (6.4) $\kappa = \mu = 1$	(b) (5.11) $a = \pi$	(c) (5.13) $a = \pi$	(d) (5.11) $a = \pi/2$	(e) (5.13) $a = \pi/2$	(f) (5.17)	(g) (5.11)i(5.13) $a = 0$
-1,0	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	-0,2732	-0,7822	-1,0000
-0,8	+0,6400	+0,5569	+0,1274	-0,1871	-0,4329	-0,6028	-0,8000
-0,6	+0,3600	+0,2911	-0,0618	-0,2289	-0,3763	-0,4329	-0,6000
-0,4	+0,1600	+0,1238	-0,1071	-0,1931	-0,2756	-0,2756	-0,4000
-0,2	+0,0400	+0,0302	-0,0787	-0,1126	-0,1480	-0,1319	-0,2000
0	0	0	0	0	0	0	0
+0,2	+0,0400	+0,0302	+0,1192	+0,1408	+0,1655	+0,1273	+0,2000
+0,4	+0,1600	+0,1238	+0,2751	+0,3077	+0,3472	+0,2643	+0,4000
+0,6	+0,3600	+0,2911	+0,4679	+0,5019	+0,5453	+0,4313	+0,6000
+0,8	+0,6400	+0,5569	+0,7031	+0,7277	+0,7613	+0,6562	+0,8000
+1,0	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000

punktowe», obciążenie proste. Okazuje się, że dla niewielkich kątów  $\alpha$  różnice pomiędzy nieciągłym rozkładem prawdopodobieństwa (5.10) i ciągłym (5.12)



Rys. 4. Wyjęcie materiału przy różnych rozkładach gęstości prawdopodobieństwa  $p$

nie są wielkie; ze wzrostem  $\alpha$  różnice te oczywiście rosą. W każdym razie niewielkie różnice w rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa wpływają z reguły nieznacznie na zmianę wyjęcia. Jest to wniosek o dużym znaczeniu prak-

tycznym, ponieważ w zastosowaniach trudno dokładnie określić rozkład gęstości prawdopodobieństwa «ruchu» w przestrzeni czynników wyężenia w poszczególnych kierunkach.

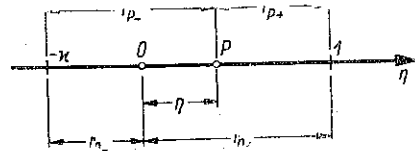
### 6. Obliczanie wyężenia materiału w przypadku jednowymiarowej przestrzeni czynników wyężenia

Zajmiemy się teraz bardzo prostym, a ważnym technicznie przypadkiem, gdy przestrzeń czynników wyężenia redukuje się do przestrzeni jednowymiarowej, czyli osi. W najprostszym przypadku dzieje się tak np. wtedy, gdy w rozpatrywanym punkcie ciała możliwy jest tylko jednoosiowy stan naprężenia, scharakteryzowany naprężeniem  $\sigma_1$ , a inne czynniki wyężenia są ustalone; wtedy przypadkom  $\sigma_2 \neq 0$  lub  $\sigma_3 \neq 0$  przypiszemy gęstość prawdopodobieństwa  $p = 0$  i całki powierzchniowe we wzorze (3.4) redukują się do sumowania wartości w jednym lub dwu punktach. Jednak należy tu i znacznie bardziej ogólny przypadek przestrzennego stanu naprężenia, jeżeli tylko stosunek naprężeń głównych jest ustalony: wtedy tylko stanom

$$(6.1) \quad \sigma_1 = a\eta, \quad \sigma_2 = b\eta, \quad \sigma_3 = c\eta,$$

(gdzie  $a, b, c$  są stałymi,  $\eta$  parametrem) przypiszemy  $p \neq 0$ , natomiast innym stanom przypisujemy  $p = 0$ . W takim przypadku każdy możliwy stan scharakteryzowany jest wartością parametru  $\eta$  i przestrzeń czynników wyężenia można zredukować do osi  $\eta$  (oś ta jest nachylona wtedy pod pewnym kątem do osi naprężeń głównych).

Na ogół stan niebezpieczny odpowiada dwom wartościom parametru  $\eta$ : pewnej wartości dodatniej i pewnej ujemnej. Dobierzemy parametr  $\eta$  w ten sposób, by dodatnią wartością było  $\eta = 1$ , natomiast ujemną oznaczymy wtedy — analogicznie do (4.7) — przez  $\eta = -\varkappa$ ; dodatnie wartości  $\eta$  są wtedy identyczne z elementarnym wyężeniem materiału  $w_0$ . Powierzchnia graniczna redukuje się do dwóch punktów, gęstość prawdopodobieństwa — do prawdopodobieństwa przypisanemu każdemu z dwóch możliwych zdarzeń. Jeżeli prawdopodobne jest osiągnięcie tylko jednej z tych dwóch granicznych wartości  $\eta$ , to wówczas mamy do czynienia z prostym procesem obciążania, całka (3.4) przechodzi wprost w odpowiednią wartość funkcji  $1/r_p$ , a wzór (3.3) przechodzi w (1.5). Natomiast bardzo interesujący i wymagający dalszego badania jest



Rys. 5. Jednowymiarowa przestrzeń czynników wyężenia

przypadek, gdy możliwe jest osiągnięcie obu punktów granicznych: punktowi  $\eta = 1$  przypiszemy prawdopodobieństwo  $p = 1$ , natomiast punktowi  $\eta = -\varkappa$  prawdopodobieństwo  $p = \mu$ . Przypadki graniczne  $\mu = 0$  i  $\mu = \infty$  odnoszą się wtedy do obciążenia prostego, odpowiednio po stronie dodatnich  $\eta$  i ujemnych  $\eta$ . W rozpatrywanym przypadku ogólnym odległości  $r$  wynoszą (rys. 5):

$$(6.2) \quad r_{p+} = 1 - \eta, \quad r_{p-} = \eta + \varkappa, \quad r_{0+} = 1, \quad r_{0-} = \varkappa,$$

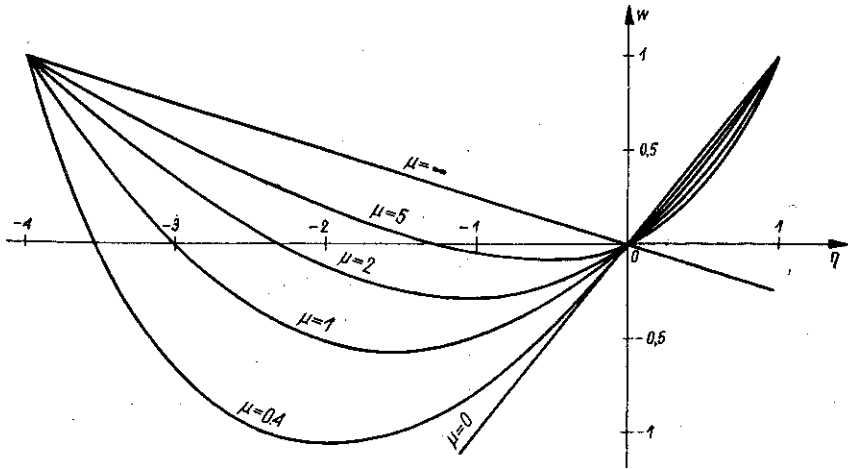
zatem

$$(6.3) \quad w = 1 - \frac{1 + \frac{\mu}{\kappa}}{\frac{1}{1-\eta} + \frac{\mu}{\eta + \kappa}},$$

lub po przekształceniu

$$(6.4) \quad w = \frac{\eta^2(\kappa + \mu) + \eta(\kappa^2 - \mu)}{\kappa[\eta(1 - \mu) + (\kappa + \mu)]}.$$

W przypadku szczególnym  $\kappa = \mu = 1$  otrzymujemy  $w = \eta^2$ , zatem wtedy wyężenie materiału jest proporcjonalne do energii sprężystej. W przypadku ogólnym wyężenie  $w$  jest pewną funkcją  $\eta$  przy parametrach  $\kappa$  i  $\mu$ , przyjmującą wartości  $w = 1$  dla  $\eta = 1$  i  $\eta = -\kappa$  oraz wartość  $w = 0$  dla  $\eta = 0$ . Przebieg tej funkcji dla  $\kappa = 4$  oraz różnych  $\mu$  podaje rysunek 6.



Rys. 6. Wyężenie materiału w przypadku jednowymiarowym,  $\kappa = 4$

Zbadamy minimum funkcji  $w = w(\eta)$ , ustalając w ten sposób optymalne napężenie wstępne przy przewidywanych prawdopodobieństwach osiągnięcia obu punktów granicznych. Różniczkując (6.4) względem  $\eta$  i przyrównując pochodną do zera otrzymujemy równanie kwadratowe

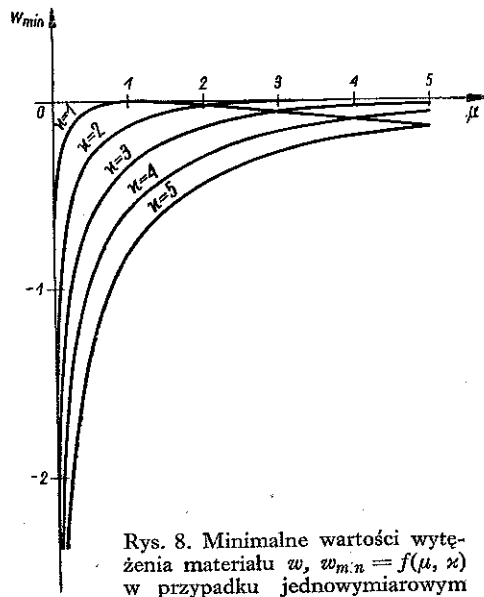
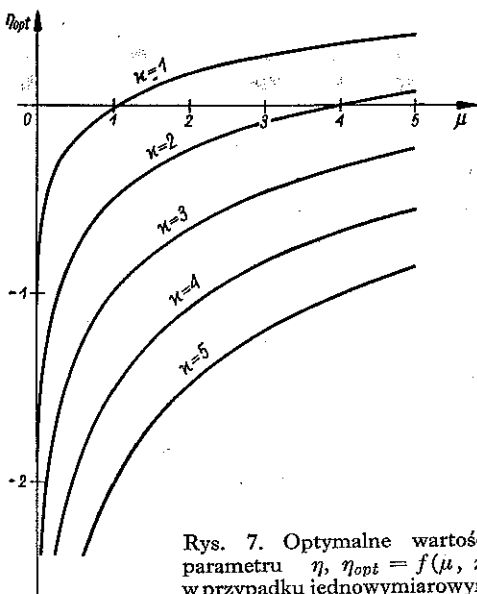
$$(6.5) \quad (1 - \mu)\eta^2 + 2(\kappa + \mu)\eta + (\kappa^2 - \mu) = 0,$$

skąd

$$(6.6) \quad \eta = \eta_{opt} = -\frac{\kappa - \sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}}$$

Tablica 4. Optymalne wartości parametru  $\eta$ ,  $\eta_{opt} = f(\mu, \kappa)$  przy «dwupunktowym» rozkładzie prawdopodobieństwa w przypadku jednowymiarowym

$\mu = \backslash \kappa =$	1	2	3	4	5
0	-1,0000	-2,0000	-3,0000	-4,0000	-5,0000
0,1	-0,5195	-1,2792	-2,0390	-2,7987	-3,5585
0,2	-0,3820	-1,0729	-1,7639	-2,4549	-3,1459
0,4	-0,2251	-0,8377	-1,4503	-2,0629	-2,6754
0,6	-0,1270	-0,6905	-1,2540	-1,8175	-2,3811
0,8	-0,0557	-0,5836	-1,1114	-1,6393	-2,1672
1,0	0	-0,5000	-1,0000	-1,5000	-2,0000
1,2	+0,0456	-0,4317	-0,9089	-1,3861	-1,8633
1,4	+0,0839	-0,3741	-0,8322	-1,2902	-1,7482
1,6	+0,1170	-0,3246	-0,7661	-1,2076	-1,6491
1,8	+0,1459	-0,2812	-0,7082	-1,1353	-1,5623
2,0	+0,1716	-0,2426	-0,6569	-1,0711	-1,4853
3,0	+0,2679	-0,0981	-0,4641	-0,8301	-1,1961
4,0	+0,3333	0	-0,3333	-0,6667	-1,0000
5,0	+0,3820	+0,0730	-0,2361	-0,5451	-0,8541
10,0	+0,5195	+0,2792	+0,0390	-0,2013	-0,4415
$\infty$	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000



(drugi pierwiastek nie leży w przedziale  $-\kappa < \eta < 1$ ). Podstawiając (6.6) do (6.4) określimy minimalną wartość wyteżenia; po prostych przekształceniach znajdziemy

$$(6.7) \quad w_{min} = -\frac{(\kappa - \sqrt{\mu})^2}{\kappa(1 + \sqrt{\mu})^2} = -\frac{\eta_{opt}^2}{\kappa}.$$

Wartości  $\eta_{opt}$  zebrane są w tablicy 4, wartości  $w_{min}$  — w tablicy 5; ponadto przebieg funkcji (6.6) i (6.7) przedstawiono graficznie na rysunkach 7 i 8.

Tablica 5. Minimalne wartości wyteżenia materiału  $w$ ,  $w_{min} = f(\mu, \kappa)$  przy «dwupunktowym» rozkładzie prawdopodobieństwa w przypadku jednowymiarowym

$\kappa =$ $\mu =$	1	2	3	4	5
0	-1,0000	-2,0000	-3,0000	-4,0000	-5,0000
0,1	-0,2699	-0,8182	-1,3858	-1,9582	-2,5326
0,2	-0,1459	-0,5756	-1,0371	-1,5066	-1,9793
0,4	-0,0507	-0,3509	-0,7011	-1,0638	-1,4315
0,6	-0,0161	-0,2384	-0,5242	-0,8258	-1,1340
0,8	-0,0031	-0,1703	-0,4117	-0,6718	-0,9394
1,0	0	-0,1250	-0,3333	-0,5625	-0,8000
1,2	-0,0021	-0,0932	-0,2753	-0,4803	-0,6944
1,4	-0,0070	-0,0700	-0,2309	-0,4162	-0,6112
1,6	-0,0137	-0,0527	-0,1956	-0,3646	-0,5439
1,8	-0,0213	-0,0395	-0,1672	-0,3223	-0,4881
2,0	-0,0294	-0,0294	-0,1438	-0,2868	-0,4412
3,0	-0,0718	-0,0048	-0,0718	-0,1723	-0,2861
4,0	-0,1111	0	-0,0370	-0,1111	-0,2000
5,0	-0,1459	-0,0027	-0,0186	-0,0743	-0,1459
10,0	-0,2699	-0,0390	-0,0005	-0,0101	-0,0390
$\infty$	-1,0000	-0,5000	-0,3333	-0,2500	-0,2000

## 7. Uwagi końcowe

Podanych w punktach 4-6 kilka prostych przykładów obliczania wyteżenia materiału może dać tylko ogólne pojęcie o stosowaniu zaproponowanej ogólnej miary wyteżenia (3.3). W wielu przypadkach musimy stosować numeryczne metody obliczania występujących tam całek; szereg dalszych przykładów będzie podanych w oddzielnej publikacji. W każdym razie widoczna jest możliwość znalezienia optymalnych naprężeń wstępnych, i — przez obliczenie samej wartości minimalnego wyteżenia materiału  $w_{min}$  — ocena korzyści stosowania takich naprężeń.



### Literatura cytowana w tekście

- [1] П.П. БАЛАНДИН, *К вопросу о гипотезах прочности*, Вестн. Инж. Техн., 1937.
- [2] E. BELTRAMI, *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici*, Opere Matematiche, Rend. Ist. Lomb., **81** (1885).
- [3] M. L. P. BRICE, *Etude d'un critère de limite élastique des solides*, Annales des Ponts et Chaussées, 1956, 423-444 i 573-608.
- [4] W. BURZYŃSKI, *Studium nad hipotezami wyężenia*, Akademia Nauk Technicznych, Lwów 1928.
- [5] W. BURZYŃSKI, *Über die Anstrengungshypothesen*, Schweiz. Bauzeitung, nr. 21, 1929.
- [6] W. BURZYŃSKI, *Teoretyczne podstawy hipotez wyężenia*, Czasop. Techn., Lwów 1929.
- [7] A. CLEBSCH, *Theorie der Elastizität fester Körper*, Leipzig 1862.
- [8] L. F. COFFIN, *The Flow and Fracture of a Brittle Material*, J. Appl. Mech., **3**, **17** (1950), 233-248.
- [9] J. CZESHOWICZ, *Zależność wytrzymałości drewna sosny na ściskanie wzdłuż włókien od ciężaru właściwego*, Inżyn. Budown., **10**, **11** (1954), 303-306.
- [10] P. DUWEZ, *Materials for High Temperature Aircraft Structures, High Temperature Effects in Aircraft Structures*, Pergamon Press, 1958, 58-79.
- [11] М.М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ, *Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию*, Инж. Сборник, **19** (1954), 13-16.
- [12] A. FLETCHER, *A Table of Complete Elliptic Integrals*, Philos. Magazine, seventh series, **30** (1940/2), 516-519.
- [13] A. M. FREUDENTHAL, *The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures*, Wiley, New York 1950.
- [14] Я.Б. ФРИДМАН, *Механические свойства материалов*, Оборонгиз, 1946.
- [15] В. Е. GATEWOOD, *Thermal Stresses*, McGraw-Hill, New York 1957.
- [16] Г.А. ГЕНИЕВ, *К вопросу об условиях пластичности*, Иссл. по вопросам строит. механики и т. пластичности, ЦНИИПС, Москва 1956, 180-187.
- [17] Г.А. ГЕНИЕВ, *К вопросу об условиях прочности бетона*, Иссл. по вопросам теории пласт. и прочности строит. конструкций, ЦНИИСК, Москва 1958.
- [18] J. GUEST, *Strength of Ductile Materials under Combined Stresses*, Phil. Mag., **50** (1900), 69-132.
- [19] В. Т. HAIGH, *The Strain Energy Function and the Elastic Limit*, Engineering, **109** (1920) 158-160.
- [20] H. HENCKY, *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen*, Zeitsch. Angew. Math. Mech., **4** (1924), 323-334.
- [21] R. HILL, Proc. Roy. Soc., series A, **193** (1948), 281.
- [22] L. W. HU, *An Experimental Study on the Fracture of Metals under Hydrostatic Pressure*, J. Mech. Phys. Solids, **2**, **4** (1956), 96-103.
- [23] M. T. HUBER, *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału*, Czasop. Techn. **22** (1904), 38-40, 49-50, 61-62, 80-81; Pisma, t. 2, PWN Warszawa 1956, 3-20.
- [24] M. T. HUBER, *Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej*, IW SIMP, Warszawa 1948.
- [25] А.А. ИЛЬЮШИН, *О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред*, ПММ, **18** (1954), 641-666.
- [26] Ю. И. ЯГН, *Новые методы расчета на прочность*, Вестн. Инж. Техн., **6**, 1931.
- [27] A. KELLY, C. CHIOU, *The Temperature Dependence of Flow Stress of an Age-Hardened Alloy*, Acta Metallurgica, **9**, **6** (1958), 565-571.
- [28] Z. KLĘBOWSKI, *Obecny stan wytrzymałościowego obliczenia materiałów o własnościach uogólnionych*, Przegl. Techn., **11** (1934).

- [29] Z. KLĘBOWSKI, *Warunek wytrzymałościowy na tle hipotez wyteżenia*, PZWS Warszawa 1950.
- [30] Z. KLĘBOWSKI, *Energetyczne hipotezy wyteżenia a możliwość opracowania ogólnej teorii wyteżenia*, Księga Jubil. M. T. Hubera, Gdańsk 1950, 165-180.
- [31] Z. KLĘBOWSKI, *O nowej uogólnionej teorii wytrzymałości* N. N. Dawidienkowa i J. B. Fridmana, *Przegl. Techn.*, 1952, s. 157.
- [32] W. KUNTZE, *Zur Frage der Festigkeit bei räumlichen Spannungszuständen*, *Stahlbau*, 10 (1937), 177.
- [33] W. LODE, *Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle*, Forschungsarbeiten auf d. Gebiete des Ing., Heft 303, 1928.
- [34] J. MAJER, *Beitrag zu den dreiachsigen Spannungs-Dehnungs Beziehungen Fester Stoffe*, *Öster. Ing.-Archiv*, 2, 4 (1950), 140-153.
- [35] J. MARIN, *Failure Theories of Materials Subjected to Combined Stresses*, *Proc. ASCE* 61 (1935), 851-867.
- [36] A. MEHLDAHL, *Brown Boveri Rev.*, Zurich 1944, 260.
- [37] И.Е. МИЛЕЙКОВСКИЙ, *О возможном условии пластичности анизотропного тела*, Иссл. по вопросам строят. механики и т. пластичности, ЦНИИПИС, Москва 1956, 169-179.
- [38] И.Н. МИРОЛЮБОВ, *К вопросу об обобщении теории прочности, октаэдрических касательных напряжений на хрупкие материалы*, *Труды Лен. Техн. Инст.*, 25 (1953).
- [39] R. MISES, *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*, Göttingen Nachrichten, *Math. Phys. Kl.*, 1913, 582-592.
- [40] R. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, *Zeit. Angew. Math.*, 8 (1928), 161-185.
- [41] O. MOHR, *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials*, *Ver. Deutsch. Ing.*, 44 (1900), 1524.
- [42] J. MURZEWSKI, *Probabilistic Theory of Plastic and Brittle Behaviour of Quasi-Homogeneous Materials*, *Bull. Acad. Polon., Sc. Techn.*, 7 (1959), 641-650.
- [43] A. NADAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York 1950.
- [44] H. NAKAZAWA, *On The Correlation Between Stress Gradient and Elastic Fatigue Failure*, *Mem. Fac. Technol. Tokyo, Metrop. Univ.*, 1, 1951, 1-10.
- [45] J. ODERFELD, *Nomogram wytrzymałości drewna sosnowego*, *Zast. Matematyki*, 1 (1954), 138-148.
- [46] W. OLSZAK, *Prestressing Applied to Bound Columns*, *Arch. Mech. stos.*, 1 (1949), 80-98.
- [47] W. OLSZAK i W. URBANOWSKI, *Ortotropia i niejednorodność w teorii plastyczności*, *Arch. Mech. stos.*, 8 (1958), 85-110.
- [48] W. OLSZAK i W. URBANOWSKI, *The Plastic Potential and the Generalized Distortion Energy in the Theory of Non-Homogeneous Anisotropic Elastic-Plastic Bodies*, *Arch. Mech. stos.*, 8 (1958), 671-694.
- [49] T. PEŁCZYŃSKI, *Wpływ stanu napięcia na przejście materiału w stan plastyczny*, *Przegl. Mech.*, 10(1951), 175-179, 204-208.
- [50] T. PEŁCZYŃSKI, *Plaszczyzny poślizgów i pęknięcia poślizgowego*, *Arch. Bud. Maszyn*, 1 (1954), 445-457.
- [51] С.Д. ПОНОМАРЕВ и др., *Расчеты на прочность в машиностроении*, т. 1, Машгиз, Москва 1956.
- [52] W. J. M. RANKINE, *Applied Mechanics*, London 1856.
- [53] L. RENDULIC, *Eine Betrachtung zur Frage der plastischen Grenzzustände*, *Bauingenieur*, 19 (1938), 159-164.
- [54] E. L. ROBINSON, *Effect of Temperature Variation on the Long-Time Rupture Strength of Steels*, *Ann. Meeting ASME, Atlantic City, Nov. 1951, Pap. 51-A-33.*

- [55] M. ROŠ, A. EICHINGER, *Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr*, EMPA Berichte 14, Zurich 1926.
- [56] M. ROŠ, *Sollicitation déterminante d'après Huber des corps solides dont le mécanisme de déformation est engendré par des glissements*, Księga Jubil. M. T. Hubera, Gdańsk 1950, 339-362.
- [57] G. D. SANDEL, Schweiz. Bauzeitung, **95** (1930), 335.
- [58] F. SCHLEICHER, *Der Spannungszustand an der Fließgrenze*, Zeitschr. Angew. Math. Mech. **6** (1926), 199-216.
- [59] В.В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1950.
- [60] C. TORRE, *Die Grenzzustände statisch beanspruchter Stoffe*, Schweiz. Archiv Angew. Wiss. Techn., **15** (1949), 116-145.
- [61] C. TORRE, *Die Mechanik der Grenzbeanspruchungen*, Öster. Ing.-Archiv, **1, 4** (1950), 93-108.
- [62] C. TORRE, *Grenzbedingungen für spröden Bruch und plastisches Verhalten bildsamer Metalle*, Öster. Ing.-Archiv, **2, 4** (1950), 174-189.
- [63] H. TRESCA, *Mémoire sur l'écoulement des corps solides*, Mémoires par divers savants, Paris, **18** (1868), **20** (1872).
- [64] Г.В. УЖИК, *О сопротивлении отрыву как новом критерии прочности*, Изв. АН СССР, **4**, 1950, с. 605 и 1716.
- [65] Г.В. УЖИК, *Прочность и пластичность металлов при низких и весьма низких температурах*, Изв. АН СССР, ОТН, **1**, 1955, 57-66.
- [66] J. WALCZAK, *Nowoczesna miara wytrzymałości materiału*, Arch. Mech. stos., **1, 3** (1951), 5-26.
- [67] А.Н. ВАСИЛЬКОВ, *О прочности материалов в условиях сложного напряженного состояния*, Науч. Труды Казан. Инст. Инж. Стр. Нефт. Пром., **3**, 1955, 73-108.
- [68] W. WEIBULL, *A Survey of «Statistical Effects» in the Field of Material Failure*, App. Mech. Rev., **11, 5** (1952).
- [69] H. M. WESTERGAARD, *On the Resistance of Ductile Materials to Combined Stresses in Two or Three Directions Perpendicular to one another*, J. Franklin Inst., **189**, 1920, 627.
- [70] W. WIERZBIŃSKI, *Probabilistic and Semi-Probabilistic Method for the Investigation of Structure Safety*, Arch. Mech. stos., **9** (1957), 685-694.
- [71] С.Д. ВОЛКОВ, *Основы статистической теории прочности. Некоторые проблемы прочности твердого тела*, АН СССР, Москва-Ленинград 1959, 325-333.
- [72] M. ZAKRZEWSKI, *Hipoteza złomu kruchego*, Prace Wrocław. Tow. Nauk., Wrocław 1958.
- [73] J. ZAWADZKI, *Cisnienie zredukowane jako jeden z parametrów wytrzymałości*, Rozpr. inżyn., **3, 5** (1957), 357-398.
- [74] M. ŻYCZKOWSKI, *Tablice funkcji Eulera i pokrewnych*, PWN Warszawa 1954.

## Резюме

### «НАТУГА» МАТЕРИАЛА В ПОДКРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЯХ

В настоящей работе под словом «натуга» материала подразумевается степень приближения физического состояния в определенной точке тела к опасному состоянию (пределу упругости, пластичности или прочности). Уравнение этого состояния определяет предельную поверхность (гиперповерхность) в пространстве факторов натуги (напряжений, температуры и т.д.); эта поверхность считается известной. В качестве меры натуги в подкритических состояниях принимается теперь как правило редуцированное напряжение  $\sigma_0$ , или отношение этого напряжения к опасной границе при одноосном растяжении  $K$ , [рис. 1, формулы (1.3) и (1.5)]. Эта мера

называемая в статье «элементарной мерой» предполагает возможность достижения граничной поверхности только в одной точке  $N_0$ , справедливой таким образом при пропорционально увеличивающихся компонентах напряженного состояния (простая нагрузка). Эта мера подвергается критике приводя ряд примеров, в которых она приводит к ошибочным результатам.

В работе предлагается общая мера натуги материала  $w$ , определенная формулами (3.3) и (3.4) и рисунком 2. Она учитывает вероятность «движения» точки в отдельных направлениях пространства натуги  $p$  и таким образом не является однозначной функцией факторов натуги. Только такое представление может иметь техническое значение, так как тоже самое состояние — напр. предварительное напряжение бетона — считается часто более далеким от опасного состояния (если не предусматривать растягивающей нагрузки), либо в другом случае более близком к опасному состоянию (если предусматривать сжимающую нагрузку). В частном случае, когда вероятно «движение» только в одном направлении в пространстве напряжений, тогда общая формула (3.3) переходит в элементарную формулу (1.5). Эта мера учитывает кроме того и другие факторы натуги, непринимаемые во внимание при исчислении элементарной меры  $w_0$ , и поэтому выступающие в формуле (3.4) интегралы, записанные при использовании символики Адамара, относятся к  $n$ -мерному пространству. В случае когда вероятность  $p$  не зависит от положения точки  $P$ , тогда общая формула (3.3) принимает вид (3.5), а после итерации в сферических координатах — вид (3.8).

В главах 4-6 дается несколько методов определения натуги при помощи общей формулы (3.3). Принимается предельная поверхность в виде цилиндра Губера-Мизеса-Генки (5.1) и параболоида Бужинского (2.12); исследуется также натуга в случае «двухточечного» распределения вероятности в одномерном пространстве факторов натуги (гл. 6). Полученные результаты представлены с помощью таблиц и диаграмм, обращая при этом внимание на определение оптимальных предварительных напряжений и минимальной натуги материала, которые дают некоторую оценку выгоды применения такого рода напряжений.

#### Summary

#### «EXERTION» OF MATERIAL IN SUBCRITICAL STATES

Under the name of «exertion» of the material at a given point we shall understand the degree in which the physical state of the material approaches the dangerous state (elastic limit, yield point or strength). The equation of this state describes a limit surface (or hypersurface) in the space of exertion factors (stresses, temperature, etc.). This surface is assumed to be known. As a measure of

exertion in subcritical states we assume as a rule the effective stress or the ratio of this stress to the dangerous limit for simple tension  $K$ , [Fig. 1, Eqs. (1.3) and (1.5)]. This measure, called by us «elementary», implies the possibility of reaching the limit surface at one point,  $N_0$ , only, thus being valid for proportional loading. This measure is subjected to a critical analysis, a number of examples being given in which it leads to erroneous results.

A general measure of exertion  $w$  is proposed. This is defined by the Eqs. (3.3) and (3.4) and Fig. 2. In this measure the probability of «motion» of a point in various directions of the space of exertion factors is taken into consideration. Thus it is not a one-valued function of exertion factors. Only such an approach can have a practical importance, because the same state (prestressing of concrete, for instance) can be considered to be more or less distant from the dangerous state depending on whether tensile or compressive load is expected. In the particular case where the «motion» is likely to take place in only one direction of the space of stresses, the general formula (3.3) becomes the elementary one (1.5). In the measure  $w$  other factors, disregarded in the computation of the elementary measure  $w_0$ , are also taken into account, therefore the integrals appearing in the Eq. (3.4) and written using HADAMARD'S notation concern a  $n$ -dimensional space. In the case where the probability  $p$  depends on the direction in the space of exertion factors only and does not depend on the location of the point  $P$ , the general formula (3.3) takes the form (3.5) and, after iteration in spherical coordinates — the form (3.8).

In Secs. 4-6 several examples of computing the exertion are given, by means of the general formula (3.3). The limit surface is assumed in the form of the HUBER-MISES-HENCKY cylinder (5.1) and the BURZYŃSKI paraboloid (2.12). The exertion is also investigated in the case of two-point distribution of probability in a one-dimensional space of exertion factors (Sec. 6). The results obtained are represented by means of tables and graphs. The problem of investigation of optimum initial stresses and minimum material exertion giving a certain appraisal of the advantages of using such stresses, is also treated.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
IPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 kwietnia 1960 r.*

---