

ZBIGNIEW PEŁKA

POWŁOKA KATENOIDALNA

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXXIII

TOM VIII • ZESZYT 4 • ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Zależności podstawowe	699
2. Rozwiązanie dla obciążenia równomiernego	702
2.1. Wyprowadzenie równań	703
2.2. Macierz dla obliczania pochodnych parzystych funkcji naprężeń	705
2.3. Obliczenie wartości S_1 i S_2	707
2.4. Obliczenie wartości T	710
2.5. Siły błonowe w narożu powłoki	712
3. Rozwiązanie dla obciążenia ciężarem własnym	714
4. Zagadnienie uogólnienia rozwiązania numerycznego	720
5. Uwagi końcowe	722

1. Zależności podstawowe

Jak wiadomo, utwierdzona przegubowo w dwóch punktach i swobodnie zwisająca lina przybiera pod działaniem ciężaru własnego kształt linii łańcuchowej. W odniesieniu do układu współrzędnych, mającego początek w najniższej położonym punkcie liny, równanie łańcuchowej przybiera postać:

$$y = m \left(\operatorname{ch} \frac{x}{m} - 1 \right),$$

gdzie m jest parametrem krzywej. Przez przesuwanie jednej łańcuchowej (ruchomej) po drugiej (prowadzącej) otrzymamy powłokę translacyjną, [1]. Nazwijmy ją powłoką katenoidalną. Można przypuszczać, że z punktu widzenia mechaniki budowli powłoka tego rodzaju będzie miała w porównaniu z innymi powłokami translacyjnymi podobne zalety, jak linia łańcuchowa w stosunku do innych krzywych przy obciążeniu ciężarem własnym. Powłoka katenoidalna stanowi nowy, dotychczas nie rozpatrywany typ powłoki translacyjnej.

Równanie powłoki translacyjnej ma postać:

$$z = f_1(x) + f_2(y).$$

Dla przypadku powłoki katenoidalnej, rozpostartej nad rzutem kwadratowym (rys. 1), mamy:

$$f_1(x) = m \left(\operatorname{ch} \frac{x}{m} - 1 \right),$$

$$f_2(y) = m \left(\operatorname{ch} \frac{y}{m} - 1 \right).$$

Stąd

$$(1.1) \quad z = m \left(\operatorname{ch} \frac{x}{m} - 1 \right) + m \left(\operatorname{ch} \frac{y}{m} - 1 \right).$$

Obciążenie pionowe powłoki, odniesione do jednostki płaszczyzny rzutu xy , oznaczamy przez Z . Przyjmujemy, że powłoka znajduje się w błonowym stanie naprężeń, zaś podtrzymujące ją przepony są doskonale sztywne tylko w swej płaszczyźnie i nie mogą przenosić sił do tej płaszczyzny prostopadłych.

mamy ostatecznie

$$(1.8) \quad \operatorname{ch} \frac{x}{m} \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} F + \operatorname{ch} \frac{y}{m} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} F = \\ = \frac{\Delta x^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Z_m$$

Przyjmujemy (rys. 1) $a = 1$, $h = 0,1$ $l = 0,2$. Parametr m linii łańcuchowej

$$z = m \left(\operatorname{ch} \frac{x}{m} - 1 \right)$$

w przekroju $y = 0$ obliczamy na podstawie warunków brzegowych

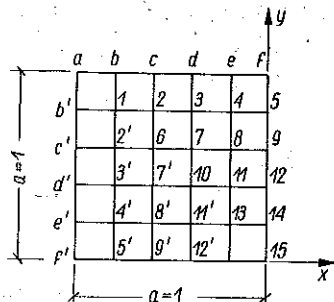
- 1) $x = 0$, $z = 0$,
- 2) $x = 1$, $z = h$.

Otrzymujemy

$$m = 2,53267, \quad \frac{1}{m} = 0,394840.$$

2. Rozwiązanie dla obciążenia równomiernego

Przyjmujemy obciążenie równomiernie rozłożone $Z = p = \text{const}$ na całej powierzchni powłoki, rozpostartej nad kwadratem o boku 2. Całkowite wzniesienie wierzchołka powłoki w stosunku do naroży $f = h + h = 0,2 + 0,2 = 0,4$. Grubość powłoki jest stała i równa δ . Każdy z boków kwadratu dzielimy na



Rys. 3

$n = 10$ części, skąd $\Delta x = \Delta y = 0,2$. Numerację punktów siatki podaje rys. 3, przy czym wobec symetrii obejmuje on tylko czwartą część powierzchni kwadratu. W ostatniej kratce kwadratu ma być 14'. Wartości funkcji hiperbolicznych dla poszczególnych punktów siatki zestawiono w tabelcy 1.

Tablica 1. Wartości funkcji hiperbolicznych

x	$\frac{x}{m}$	$\operatorname{ch} \frac{x}{m}$	$\operatorname{sh} \frac{x}{m}$	$\operatorname{sh}^2 \frac{x}{m}$
0	0	1,0	0	0
0,2	0,07897	1,00312	0,0790521	0,00624923
0,4	0,15794	1,01250	0,1585976	0,02515320
0,6	0,23690	1,02820	0,2391221	0,05717938
0,8	0,31587	1,05030	0,3211489	0,10313662
1,0	0,39484	1,07897	0,4051794	0,16417035

2.1. Wyprowadzenie równań. Dzieląc równanie (1.8) przez $\operatorname{ch}(x/m)$ i podstawiając $Z = p$ doprowadzimy je do postaci:

$$(2.1) \quad \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} F + \frac{\operatorname{ch} \frac{y}{m}}{\operatorname{ch} \frac{x}{m}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} F = \\ = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{m}} \frac{\Delta x^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} pm.$$

Wobec $p = \text{const}$ mamy

$$\frac{\Delta x^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} pm = \frac{(0,2)^2}{12} 144p \cdot 2,53267 = 1,21568p;$$

mnożąc tę wartość przez 1: $\operatorname{ch}(x/m)$ otrzymujemy wyrazy wolne, zestawione w tablicy 2.

Tablica 2. Obliczanie wyrazów wolnych

Punkty	$\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{m}}$	Wyraz wolny/ p
1	0,952109	1,15746
2, 6	0,972573	1,18233
3, 7, 10	0,987654	1,20067
4, 8, 11, 13	0,996890	1,21190
5, 9, 12, 14, 15	1,0	1,21568

Tablica 3 zawiera wartości ilorazu

$$\operatorname{ch} \frac{y}{m} : \operatorname{ch} \frac{x}{m},$$

będącego mnożnikiem drugiego składnika lewej strony równania (2.1). Rachunki prowadzące do ustalenia sumy obu wyrazów lewej strony tego równania, choć obszerne, są proste, toteż zostały pominięte.

Tablica 3. Wartości $\text{ch} \frac{y}{m} / \text{ch} \frac{x}{m}$

Punkt	$\text{ch} \frac{y}{m}$	$\text{ch} \frac{x}{m}$	$\frac{\text{ch } y/m}{\text{ch } x/m}$
1, 6, 10, 13, 15			1,0
2	1,05030	1,02820	1,02149
3	1,05030	1,01250	1,03733
4	1,05030	1,00312	1,04703
5	1,05030	1,0	1,05030
7	1,02820	1,01250	1,01551
8	1,02820	1,00312	1,02500
9	1,02820	1,0	1,02820
11	1,01250	1,00312	1,00935
12	1,01250	1,0	1,01250
14	1,00312	1,0	1,00312

Układ piętnastu równań z taką liczbą niewiadomych wartości funkcji naprężeń F_1 do F_{15} podaje tablica 4, zaś tablica 5 zawiera wartości F_i otrzymane po rozwiązaniu tego układu.

Tablica 4.* Układ równań. Obciążenie $Z = p = \text{const}$

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
1	40,00000	-16,00000				-2,00000		
2	-8,21490	38,40831	-8,21490			-7,95702	-2,02149	
3		-8,37330	40,74660	-8,37330		-2,03733	-7,92534	-2,03733
4			-8,47030	40,94060	-8,47030		-2,04703	-7,90594
5				-17,00600	41,00600			-4,10060
6	-2,00000	-16,00000	-4,00000			40,00000	-16,00000	
7		-2,01551	-7,96898	-2,01551		-8,15510	38,29469	-8,15510
8			-2,02500	-7,95000	-2,02500		-8,25000	40,50000
9				-4,05640	-7,94360			-16,56400
10						-2,00000	-16,00000	-4,00000
11							-2,00935	-7,98130
12								-4,02500
13								
14								
15								
	29,78510	-3,98050	10,06742	1,53939	22,56710	17,85055	-15,95852	-14,26927

* Uwaga: ciąg dalszy tabl. 4 na stronie nast..

C. d. tabl. 4

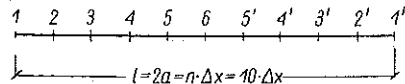
	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	Wyraz wolny/ p
1								1.15746
2								1.18233
3								1.20067
4	-2,04703							1.21190
5	-7,89940							1.21568
6		-2,00000						1.18233
7		-7,96898	-2,01551					1.20067
8	-8,25000	-2,02500	-7,95000	-2,02500				1.21190
9	40,56400		-4,05640	-7,94360				1.21568
10		40,00000	-16,00000		-2,00000			1.20067
11	-2,00935	-8,09350	38,17765	-8,09350	-7,98130	-2,00935		1.21190
12	-7,97500		-16,25000	40,25000	-4,02500	-7,97500		1.21568
13		-2,00000	-16,00000	-4,00000	40,00000	-16,00000	-2,00000	1.21190
14			-4,00624	-7,99376	-16,06240	36,05616	-7,99376	1.21568
15					-8,00000	-32,00000	40,00000	1.21568
	12,38322	17,91252	-28,10050	10,19414	1,93130	-21,92819	30,00624	

Tablica 5. Wartości F_i

Punkt	F/p	Punkt	F/p
1	0,129189	9	0,498103
2	0,207467	10	0,549152
3	0,255785	11	0,614616
4	0,282422	12	0,635785
5	0,290958	13	0,689900
6	0,345337	14	0,714322
7	0,433240	15	0,739830
8	0,482309		

2.2. Macierz dla obliczania pochodnych parzystych funkcji naprężeń. Rozpatrujemy jedną z linii siatki dla przypadku podziału na 10 części (rys. 4). Przyjmujemy symetryczny schemat obciążenia i zakładamy, zgodnie z ustalonymi warunkami brzegowymi, że wartości F''_1 i $F''_{1'}$ są znane, zaś $F_1 = F_{1'} = 0$.

Równanie wieloboku sznurowego w przypadku parabolicznej zmienności obciążenia przybiera postać, [1]:



Rys. 4

$$F''_{m-1} + 10F''_m + F''_{m+1} = \frac{12}{\Delta x^3} (F_{m-1} - 2F_m + F_{m+1}).$$

Wprowadzając $\Delta x = l/n$, $\Delta x^2 = l^2/n^2$ mamy

$$F''_{m-1} + 10F''_m + F''_{m+1} = \frac{n^2}{l^2} (12F_{m-1} - 24F_m + 12F_{m+1}).$$

Stosując ostatnią zależność do punktów 2-6 otrzymujemy układ równań, podany w tablicy 6.

Tablica. 6 Układ równań wiążących F i F''

Punkt	Niewiadome					Wartości dane						
	F''_2	F''_3	F''_4	F''_5	F''_6	$F_1=1$	$F_2=1$	$F_3=1$	$F_4=1$	$F_5=1$	$F_6=1$	$F''_1 = \frac{1}{l^2}$
2	10	1				$12n^2$	$-24n^2$	$12n^2$				-1
3	1	10	1				$12n^2$	$-24n^2$	$12n^2$			
4		1	10	1				$12n^2$	$-24n^2$	$12n^2$		
5			1	10	1				$12n^2$	$-24n^2$	$12n^2$	
6				1	5					$12n^2$	$-12n^2$	

U w a g a: wszystkie wartości w kolumnach F_1 - F_6 mnożone przez $1/l^2$.

Szukamy rozwiązania tego równania za pomocą rachunku krakowianowego według następującego schematu, [2]:

$$L = AB,$$

$$L^{-1} = A^{-1} : B,$$

$$X = PL^{-1}.$$

W wyniku tych działań otrzymujemy macierz odwrotną układu równań w przypadku ogólnym (tablica 7).

Tablica 7. Macierz odwrotna w przypadku ogólnym

	$F'_1 = F''_1 = 0$						$F = 0$
	$F_1 = F_1 = 1$	$F_2 = F_2 = 1$	$F_3 = F_3 = 1$	$F_4 = F_4 = 1$	$F_5 = F_5 = 1$	$F_6 = F_6 = 1$	$F''_1 = \frac{1}{l^2}$
F''_2	121,224624	-254,695440	146,954256	-14,846940	1,515000	-0,151500	-0,101021
F''_3	-12,246192	146,954244	-269,542344	148,469220	-15,149928	1,515000	0,010205
F''_4	1,237248	-14,846928	148,469220	-269,845332	149,984208	-14,998416	-0,001031
F''_5	-0,126252	1,515000	-15,149928	149,984220	-284,692260	148,469220	0,000105
F''_6	0,025248	-0,303000	3,029988	-29,996832	296,938440	-269,693844	-0,000021

U w a g a: wszystkie kolumny (oprócz ostatniej) mnożone przez $1/l^2$.

W rozpatrywanym przykładzie powłoki katenuoidalnej $l = 2$ i $F_1 = F_1 = 0$. Po opuszczeniu pierwszej kolumny macierzy odwrotnej w przypadku ogólnym (tablica 7), po pomnożeniu wyrazów w kolumnach F_2 do F_6 przez $1/l^2 = 1/2^2 =$

$= 0,25$ oraz zmianie następnie oznaczeń F w kolejnych punktach na przyjęte na linii b' — 5 siatki podziału (rys. 2) otrzymamy przedstawioną w tabelicy 8 macierz odwrotną, przystosowaną do omawianego przypadku.

Tabela 8. Macierz odwrotna dla $l = 2$ i $F_1 = F_1' = 0$.
Numeracja punktów według linii b' -5 siatki podziału powłoki

	$F''_{b'} = 0$					$F = 0$
	$F_1 = 1$	$F_2 = 1$	$F_3 = 1$	$F_4 = 1$	$F_5 = 1$	$F''_{b'} = 1$
F''_1	-63,673860	36,738564	-3,711735	0,378750	-0,037875	-0,101021
F''_2	36,738561	-67,385586	37,117305	-3,787482	0,378750	0,010205
F''_3	-3,711732	37,117305	-67,461333	37,496052	-3,749604	-0,001031
F''_4	0,378750	-3,787482	37,496055	-71,173065	37,117305	0,000105
F''_5	-0,075750	0,757497	-7,499208	74,234610	-67,423461	-0,000021

2.3. Obliczenie wartości S_1 i S_2 . Wartości n_x i n_y dla punktów brzegowych obliczamy z równania różniczkowego funkcji naprężeń:

$$\operatorname{ch} \frac{x}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \operatorname{ch} \frac{y}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -pm,$$

w którym dla $y = \pm b$ $n_y = \partial^2 F / \partial x^2 = 0$ oraz dla $x = \pm a$ $n_x = \partial^2 F / \partial y^2 = 0$. Wobec tego na linii $x = \pm a$:

$$\operatorname{ch} \frac{y}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -pm$$

oraz

$$n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{m}{\operatorname{ch} \frac{y}{m}} p.$$

Wyniki odpowiednich rachunków zawarte są w tabelicy 9. Symetria powłoki względem przekątnej zwalnia od obliczania n_x dla brzegu $y = \pm b$.

Tabela 9. Wartości n_y i n_x na brzegu $x = -a = -1$

Punkt	n_y/p	n_x/p
	0	-2,34730
a	-2,34730	0
b'	-2,41138	0
c'	-2,46321	0
d'	-2,50140	0
e'	-2,52479	0
f'	-2,53267	0

Znając już wartości funkcji naprężeń F we wszystkich punktach siatki oraz $\partial^2 F / \partial y^2$ w punktach brzegowych możemy obliczyć przy użyciu macierzy odwrotnej (tablica 8) wartości n_y w pozostałych punktach. Zestawiono je w tablicy 10.

Tablica 10. Wartości n_y w wewnętrznych punktach siatki

Punkt	n_y/p	Punkt	n_y/p
1	-1,21376	4'	-2,05541
2	-0,72408	8'	-1,68021
3	-0,53359	11'	-1,41659
4	-0,44705	13	-1,26305
5	-0,42299	14	-1,21263
2'	-1,71856	5'	-2,08858
6	-1,23132	9'	-1,72762
7	-0,95935	12'	-1,47035
8	-0,82422	14'	-1,31685
9	-0,78256	15	-1,26723
3'	-1,94743		
7'	-1,52640		
10	-1,25067		
11	-1,09890		
12	-1,05042		

Symetria powierzchni naprężeń względem przekątnej zwalnia od obliczenia wartości n_x dla wewnętrznych punktów siatki. Łatwo się przekonać, że dla punktów siatki położonych symetrycznie względem przekątnej wartości n_x i n_y zamieniają się miejscami, znając więc wartości n_y dla wszystkich punktów możemy na tej właśnie zasadzie wypisać także wartości n_x . Zostało to wykorzystane do obliczenia siły S_1 .

Potrzebne do znalezienia S_1 i S_2 wartości

$$\mu = \sqrt{\frac{1 + (df_1/dx)^2}{1 + (df_2/dy)^2}} = \sqrt{\left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m}\right) \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{m}\right)}$$

oraz $1/\mu$ zestawiono w tablicy 11.

Siły działające w przekroju

$$S_1 = n_x \mu, \quad S_2 = n_y \frac{1}{\mu}$$

znajdujemy na podstawie obliczonych wyżej wielkości. Zestawiono je w tablicy 12.

Tablica 11. Wartości μ oraz $1/\mu$

Punkt	μ	$\frac{1}{\mu}$	Punkt	μ	$\frac{1}{\mu}$
<i>a</i>	1	1	<i>d'</i>	1,06565	0,93839
<i>b</i>	0,97344	1,02729	<i>3'</i>	1,03734	0,96400
<i>c</i>	0,95294	1,04938	<i>7'</i>	1,01550	0,98473
<i>d</i>	0,93839	1,06565	10	1	1
<i>e</i>	0,92970	1,07561	11	0,99074	1,00935
<i>f</i>	0,92681	1,07897	12	0,98766	1,01250
<i>b'</i>	1,02729	0,97344	<i>e'</i>	1,07561	0,92970
1	1	1	<i>4'</i>	1,04704	0,95508
2	0,97894	1,02150	<i>8'</i>	1,02499	0,97561
3	0,96400	1,03734	<i>11'</i>	1,00935	0,99074
4	0,95508	1,04704	13	1	1
5	0,95210	1,05030	14	0,99689	1,00312
<i>c'</i>	1,04938	0,95294	<i>f'</i>	1,07897	0,92681
<i>2'</i>	1,02150	0,97894	<i>5'</i>	1,05030	0,95210
6	1	1	<i>9'</i>	1,02819	0,97258
7	0,98473	1,01550	<i>12'</i>	1,01250	0,98766
8	0,97561	1,02499	<i>14'</i>	1,00312	0,99689
9	0,97258	1,02819	15	1	1

Tablica 12. Wartości sil S_1 i S_2

Punkt	S_1/p	S_2/p	Punkt	S_1/p	S_2/p
	0	-2,347			
<i>a</i>	-2,347	0	<i>d'</i>	0	-2,347
<i>b</i>	-2,347	0	<i>3'</i>	-0,554	-1,877
<i>c</i>	-2,347	0	<i>7'</i>	-0,974	-1,502
<i>d</i>	-2,347	0	10	-1,251	-1,251
<i>e</i>	-2,347	0	11	-1,403	-1,109
<i>f</i>	-2,347	0	12	-1,452	-1,064
<i>b'</i>	0	-2,347	<i>e'</i>	0	-2,347
1	-1,214	-1,214	<i>4'</i>	-0,499	-1,963
2	-1,682	-0,740	<i>8'</i>	-0,845	-1,639
3	-1,877	-0,554	<i>11'</i>	-1,109	-1,403
4	-1,963	-0,499	13	-1,263	-1,263
5	-1,989	-0,444	14	-1,313	-1,216
<i>c'</i>	0	-2,347	<i>f'</i>	0	-2,347
<i>2'</i>	-0,740	-1,683	<i>5'</i>	-0,444	-1,989
6	-1,231	-1,231	<i>9'</i>	-0,805	-1,680
7	-1,502	-0,974	<i>12'</i>	-1,064	-1,452
8	-1,639	-0,845	<i>14'</i>	-1,216	-1,313
9	-1,680	-0,805	15	-1,267	-1,267

2.4. Obliczenie wartości T . Jak wiadomo

$$T = n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}$$

Znajdujemy najpierw wartości $\partial F/\partial x$ z podanych dalej w postaci ogólnej wzorów (4.1), które dla $\Delta x = 0,2$ przyjmują postać:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_m = 2,5(F_{m+1} - F_{m-1}) - 0,0166667 \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{m+1} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{m-1} \right]$$

dla punktów wewnętrznych oraz

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{m-1} = 5(F_m - F_{m-1}) - 0,00833333 \left[7\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{m-1} + 6\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_m - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{m+1} \right]$$

dla punktów na krawędzi zewnętrznej. Rachunki są proste, więc tu ich nie przytaczamy. Wyniki obliczeń podaje tablica 13.

Tablica 13. Wartości $\partial F/\partial x$

Punkt	$\frac{\partial F}{\partial x}/p$	Punkt	$\frac{\partial F}{\partial x}/p$
<i>a</i>	0	<i>d'</i>	1,50951
<i>b</i>	0	3'	1,06685
<i>c</i>	0	7'	0,72197
<i>d</i>	0	10	0,44632
<i>e</i>	0	11	0,21326
<i>f</i>	0	12	0
<i>b'</i>	0,84127	<i>e'</i>	1,64815
1	0,49055	4'	1,19170
2	0,30516	8'	0,81985
3	0,18276	11'	0,51203
4	0,08609	13	0,24585
5	0	14	0
<i>c'</i>	1,25671	<i>f'</i>	1,69257
2'	0,84282	5'	1,23183
6	0,55178	9'	0,85178
7	0,33564	12'	0,53370
8	0,15920	14'	0,25671
9	0	15	0

Przechodzimy teraz do określenia wartości

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}$$

Wzory ogólne (4.2) przybierają tu wobec $\Delta y = 0,2$ postać

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_m = 0,4166667 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{m-2} - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{m+2} \right] + 3,3333333 \times \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{m+1} - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{m-1} \right]$$

dla wewnętrznych linii siatki,

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{m+1} = 1,25 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{m+2} + 5 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{m+1} - 6,25 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_m - 0,5 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_m$$

dla punktów na linii $b'-5$ oraz

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{m+2} = 12,5 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{m+2} - 10 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{m+1} - 2,5 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_m - 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{m+1}$$

dla punktów na linii brzegowej. Z uwagi na budowę wzorów rozpoczynamy obliczenia od punktów środkowych i następnie przechodzimy ku brzegowi. Pomijając proste rachunki podajemy tylko ich wyniki w tabelicy 14, przedstawiającej wartości

$$T = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Tabela 14. Wartości T

Punkt	T/p	Punkt	T/p
a	5,799	d'	0,950
b	2,807	$3'$	0,854
c	1,633	$7'$	0,666
d	0,964	10	0,442
e	0,451	11	0,218
f	0	12	0
b'	2,878	e'	0,447
1	2,103	$4'$	0,405
2	1,399	$8'$	0,321
3	0,851	11'	0,218
4	0,404	13	0,109
5	0	14	0
c'	1,541	f'	0
$2'$	1,424	$5'$	0
6	1,048	$9'$	0
7	0,665	12'	0
8	0,321	14'	0
9	0	15	0

2.5. Siły błonowe w narożu powłoki. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia rozkładu sił wewnętrznych w samym narożu powłoki (punkt a) nie jest możliwe bez uwzględnienia jej sztywności zginania. Z przyjętych warunków brzegowych rozwiązania błonowego wynika, że w punkcie a musi być spełniony warunek

$$S_1 = S_2 = 0,$$

wobec czego na nieskończenie małym odcinku obciążenie p może zostać zrównoważone tylko przez siły T , które wzrastają teoretycznie do nieskończoności. Dla S_1 i S_2 otrzymuje się po dwie wartości.

W rozwiązaniu numerycznym możemy ustalić wartość siły T w narożu z równania $\Sigma Z = 0$, zastosowanego do całej powłoki. Jednocześnie sprawdzimy, czy otrzymana bezpośrednio z obliczeń metody wieloboku sznurowego wartość $T_a = -5,799p$ równanie to spełnia. Na obliczeniach tych musiał się odbić wpływ nieregularności występujących w narożu.

Rzut siły T na kierunek pionowy wynosi

$$(2.2) \quad \begin{cases} T_z dx = T ds \sin \varphi = T \frac{dx}{\cos \varphi} \sin \varphi = T dx \operatorname{tg} \varphi, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df_1}{dx} = \operatorname{sh} \frac{x}{m}, \\ T_z dx = T \operatorname{sh} \frac{x}{m} dx. \end{cases}$$

Tablica 15. Wartości T_z

Punkt	T_z/p
a	2,370
b	0,902
c	0,391
d	0,153
e	0,036
f	0

Symbol φ oznacza tu kąt między brzegiem elementu powłoki a osią x (por. rys. 2).

Składowe pionowe siły T dla punktów siatki na brzegu $y = 1$ podaje tablica 15.

Całkowanie numeryczne przeprowadzimy według reguły SIMPSONA. Dla całego brzegu $y = 1$ mamy:

$$b - a = 2, \quad 2n = 10, \quad n = 5.$$

Równanie $\Sigma Z = 0$ przyjmuje postać

$$4 \cdot \frac{2}{6 \cdot 5} [2T_{za} + 4(2T_{zc} + 2T_{ze}) + 2(2T_{zb} + 2T_{za} + T_{zf})] = 4p,$$

skąd

$$T_{za} = 3,686p$$

oraz

$$T_a = \frac{T_{za}}{\operatorname{sh} \frac{x}{m}} = \frac{3,686p}{0,405} = 9,098p.$$

Nie można nie uwzględnić w obliczeniach faktu, iż przepony łukowe w narożu wobec wzajemnej prostopadłości posiadają pewną sztywność w kie-

runkach prostopadłych do swoich płaszczyzn. W powłoce kwadratowej wobec symetrii możemy napisać $n_x = n_y$, czyli

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Wobec tego z równania różniczkowego funkcji naprężeń

$$\operatorname{ch} \frac{x}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \operatorname{ch} \frac{y}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -pm$$

dla $y = x = 1$ otrzymujemy

$$\operatorname{ch} \frac{1}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \operatorname{ch} \frac{1}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -pm,$$

$$2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \operatorname{ch} \frac{1}{m} = -pm,$$

skąd

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{pm}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{m}}.$$

W narożu $\mu = 1/\mu = 1$, a zatem

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = n_x \mu = n_x \cdot 1 = n_x, \\ S_2 = n_y \frac{1}{\mu} = n_y \cdot 1 = n_y, \\ S_1 = S_2 = n_y = n_x = \frac{-pm}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{m}}. \end{array} \right.$$

Ponieważ $\operatorname{ch} 1/m = 1,07897$, $m = 2,53267$, więc

$$S_1 = S_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{2,53267}{2 \cdot 1,07897} p = -1,174p.$$

Na podstawie drugiego z równań równowagi (1.2) sił zrzutowanych w powłoce mamy

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} = -\frac{\partial n_{yx}}{\partial y}.$$

Wynika stąd, że zmianie $S_1 = n_x$ od zera do wartości, określonej wzorem (2.3), odpowiada zmiana $T = n_{yx}$ w narożu o wartość

$$(2.4) \quad \Delta T = -\frac{\rho m}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{m}}$$

w stosunku do obliczonej z równania całej powłoki w kierunku pionowym. ΔT jest dodatnie, gdy T jest ujemne i na odwrót. Tak więc z dostateczną dla potrzeb praktyki dokładnością możemy ustalić wartości sił w narożu powłoki:

$$S_1 = S_2 = -1,174p, \\ T = 9,098p - 1,174p = 7,924p.$$

W pozostałej części powłoki stan sił wewnętrznych jest regularny i — jak można mniemać w oparciu o niektóre doświadczenia — teoria błonowa powłok translacyjnych oddaje go z praktycznie wystarczającą dokładnością, [3].

3. Rozwiązanie dla obciążenia ciężarem własnym

Oznaczając przez g_0 rzędną obciążenia ciężarem własnym w kluczu powłoki o stałej grubości otrzymamy dla Z następujące wyrażenie:

$$(3.1) \quad Z = \frac{g_0 dA}{dx dy} = g_0 \sqrt{1 + \left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_2}{dy}\right)^2} = g_0 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m} + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{m}}$$

Równanie różniczkowe funkcji naprężeń przybiera postać

$$(3.2) \quad \operatorname{ch} \frac{x}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \operatorname{ch} \frac{y}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -mg_0 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m} + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{m}}$$

Odpowiednie równanie metody wieloboku sznurowego ma postać

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} F + \frac{\operatorname{ch} \frac{y}{m}}{\operatorname{ch} \frac{x}{m}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} F = \\ = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{m}} \frac{\Delta x^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} mg_0 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m} + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{m}}$$

Ponieważ równanie (3.3) stosujemy do rozwiązania powłoki katoidalnej, omówionej w p. 2, możemy więc wykorzystać wyprowadzony tam i podany w tablicy 4 układ równań, w którym trzeba zmienić tylko zależną od obciążenia kolumnę wyrazów wolnych.

Obliczamy najpierw wartości pierwiastka występującego jako czynnik po prawej stronie równania (3.3) (tablica 16). Jak już ustalono $\Delta x = 0,2$, $m = 2,53267$.

Szczegółów dalszych rachunków nie przytaczamy tutaj, podajemy tylko ich wyniki w tablicy 16.

Tablica 16. Wartości $\sqrt{1 + \text{sh}^2 \frac{x}{m} + \text{sh}^2 \frac{y}{m}}$ i wyrazy wolne układu równań

Punkt	$\sqrt{1 + \text{sh}^2 \frac{x}{m} + \text{sh}^2 \frac{y}{m}}$	Wyraz wolny/ g_0	Punkt	$\sqrt{1 + \text{sh}^2 \frac{x}{m} + \text{sh}^2 \frac{y}{m}}$	Wyraz wolny/ g_0
a	1,15254	—	6	1,05563	1,24932
b	1,12575	—	7	1,04035	1,25035
c	1,10515	—	8	1,03123	1,25099
d	1,09056	—	9	1,02819	1,25120
e	1,08186	—	10	1,02484	1,23173
f	1,07897	—	11	1,01558	1,23203
1	1,09831	1,27245	12	1,01250	1,23212
2	1,07718	1,27481	13	1,00623	1,22069
3	1,06221	1,27660	14	1,00312	1,22072
4	1,05328	1,27771	15	1	1,21693
5	1,05030	1,27808			

Rozwiązanie układu równań daje wartości funkcji naprężeń F_i w wewnętrznych węzłach siatki i jest podane w tablicy 17.

Tablica 17. Wartości F_i

Punkt	F/g_0	Punkt	F/g_0
1	0,136737	9	0,513252
2	0,217405	10	0,565858
3	0,266203	11	0,631605
4	0,292758	12	0,652760
5	0,301205	13	0,707278
6	0,359290	14	0,731717
7	0,448354	15	0,757253
8	0,497521		

Teraz możemy przystąpić do obliczenia sił przekrojowych S_1 , S_2 i T . Jak w poprzednim rozdziale rozpoczynamy od ustalenia wartości n_x i n_y dla punktów na brzegu $x = -a = -1$ (tablica 18) według wzorów:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

$$n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{m}{\text{ch} \frac{x}{m}} Z = -\frac{m}{\text{ch} \frac{x}{m}} \sqrt{1 + \text{sh}^2 \frac{x}{m} + \text{sh}^2 \frac{y}{m}} g_0.$$

Z kolei przystępujemy do obliczenia wartości $n_y = \partial^2 F / \partial x^2$ dla punktów wewnętrznych siatki podziału powłoki w znany już sposób za pomocą podanej w tablicy 8 macierzy odwrotnej. Jak już poprzednio wspomniano, symetria powłoki względem przekątnej pozwala na podstawie wartości n_y (zawiera je tablica 19) wypisać także wartości n_x , których tu nie przytaczamy.

Tablica 18. Wartości n_x i n_y na brzegu $x = -a = -1$

Punkt	$\frac{m}{\operatorname{ch} \frac{y}{m}}$	Z/g_0	n_y/g_0	n_x/g_0
			0	-2,70536
<i>a</i>	2,34730	1,15254	-2,70536	0
<i>b'</i>	2,41138	1,12575	-2,71461	0
<i>c'</i>	2,46321	1,10515	-2,72222	0
<i>d'</i>	2,50140	1,09056	-2,72793	0
<i>e'</i>	2,52479	1,08186	-2,73147	0
<i>f'</i>	2,53267	1,07897	-2,73267	0

Tablica 19. Wartości n_y w wewnętrznych punktach siatki

Punkt	n_y/g_0	Punkt	n_y/g_0
1	-1,33387	4'	-2,19127
2	-0,76776	8'	-1,75599
3	-0,54670	11'	-1,44993
4	-0,44627	13	-1,27069
5	-0,41775	14	-1,21227
2'	-1,86374	5'	-2,22150
6	-1,29947	9'	-1,80340
7	-0,98469	12'	-1,50357
8	-0,82659	14'	-1,32589
9	-0,77849	15	-1,26663
3'	-2,08941		
7'	-1,60209		
10	-1,28179		
11	-1,10503		
12	-1,04800		

Teraz możemy już określić siły przekrojowe

$$S_1 = n_x \mu \quad \text{i} \quad S_2 = \frac{n_y}{\mu},$$

gdyż μ oraz $1/\mu$ zostały już obliczone w rozdziale poprzednim (tablica 11). Zestawiono je w tablicy 20.

Tablica 20. Wartości sił S_1 i S_2

Punkt	S_1/g_0	S_2/g_0	Punkt	S_1/g_0	S_2/g_0
	0	-2,705			
<i>a</i>	-2,705	0	<i>d'</i>	0	-2,560
<i>b</i>	-2,643	0	3'	-0,567	-2,014
<i>c</i>	-2,594	0	7'	-1,000	-1,578
<i>d</i>	-2,560	0	10	-1,282	-1,282
<i>e</i>	-2,539	0	11	-1,437	-1,115
<i>f</i>	-2,533	0	12	-1,485	-1,061
<i>b'</i>	0	-2,643	<i>e'</i>	0	-2,539
1	-1,334	-1,334	4'	-0,467	-2,093
2	-1,824	-0,784	8'	-0,847	-1,713
3	-2,014	-0,567	11'	-1,115	-1,437
4	-2,093	-0,467	13	-1,271	-1,271
5	-2,115	-0,439	14	-1,322	-1,216
<i>c'</i>	0	-2,594	<i>f'</i>	0	-2,533
2'	-0,784	-1,824	5'	-0,439	-2,115
6	-1,299	-1,299	9'	-0,800	-1,754
7	-1,578	-1,000	12'	-1,061	-1,485
8	-1,713	-0,847	14'	-1,216	-1,322
9	-1,754	-0,800	15	-1,267	-1,267

Tablica 21. Wartości T

Punkt	T/g_0	Punkt	T/g_0	Punkt	T/g_0
<i>a</i>	6,312	<i>c'</i>	1,548	<i>e'</i>	0,438
<i>b</i>	2,935	2'	1,459	4'	0,405
<i>c</i>	1,653	6	1,069	8'	0,324
<i>d</i>	0,958	7	0,674	11'	0,220
<i>e</i>	0,443	8	0,324	13	0,110
<i>f</i>	0	9	0	14	0
<i>b'</i>	3,016	<i>d'</i>	0,942	<i>f'</i>	0
1	2,181	3'	0,862	5'	0
2	1,430	7'	0,675	9'	0
3	0,858	10	0,447	12'	0
4	0,404	11	0,220	14'	0
5	0	12	0	15	0

Pozostaje jeszcze obliczyć siły styczne

$$T = n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}$$

według wzorów podanych w p. 2.4, które zachowują swą moc i w tym przypadku, gdyż Δx i Δy nie ulegają zmianie. Znajdujemy najpierw wartości $\partial F/\partial x$,

Tablica 22. Wartości T_z

Punkt	T_z/g_0
a	2,558
b	0,943
c	0,395
d	0,152
e	0,035
f	0

a następnie na ich podstawie — wartości T , które zestawiono w tablicy 21.

Zajmiemy się jeszcze określeniem sił błonowych w narożu powłoki według zasad, omówionych w p. 2.5. Ustalamy najpierw wartości składowych pionowych siły T dla punktów siatki na brzegu $y = 1$ na podstawie równania (2.2). Zestawiono je w tablicy 22.

Wyprowadzamy równanie $\Sigma Z = 0$ dla całej powłoki. Suma składowych pionowych sił stycznych na obwodzie powłoki, którą obliczamy za pomocą wzoru SIMPSONA, musi być równa ciężarowi powłoki. Ten ostatni otrzymamy mnożąc pole powierzchni powłoki równe

$$\iint_A dA = \iint_A \sqrt{1 + \text{sh}^2 \frac{x}{m} + \text{sh}^2 \frac{y}{m}} dx dy$$

przez rzędną obciążenia ciężarem własnym w kluczcu powłoki g_0 .

Równanie $\Sigma Z = 0$ przybiera w związku z powyższym postać

$$4 \cdot \frac{2}{6 \cdot 5} [2T_{za} + 4(2T_{zc} + 2T_{ze}) + 2(2T_{zb} + 2T_{zd} + T_{zf})] = \\ = g_0 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \text{sh}^2 \frac{x}{m} + \text{sh}^2 \frac{y}{m}} dx dy.$$

Po podstawieniu wartości T_z mamy

$$\frac{8}{15} (T_{za} + 3,910 g_0) = g_0 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \text{sh}^2 \frac{x}{m} + \text{sh}^2 \frac{y}{m}} dx dy,$$

skąd

$$T_{za} = \frac{15}{8} g_0 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \text{sh}^2 \frac{x}{m} + \text{sh}^2 \frac{y}{m}} dx dy - 3,910 g_0.$$

Wobec symetrii funkcji podcałkowej możemy napisać

$$\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m} + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{m}} dx = 2 \int_0^1 dy \cdot 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m} + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{m}} dx =$$

$$= 4 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m} + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{m}} dx dy = 4J.$$

Całka ta nie da się scałkować elementarnie, musimy się więc uciec przy ustalaniu jej wartości do aproksymacji. Wartości

$$\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m} + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{m}}$$

zostały obliczone już poprzednio (tablica 16); wszystkie one są większe od jedności. Interpretujemy więc całkę na obszarze kwadratu o boku 1 jako sumę objętości sześciana jednostkowego J_1 i bryły, znajdującej się nad nim J_2 :

$$J = J_1 + J_2, \quad J_1 = 1.$$

Wartość J_2 ustalamy następująco: każde z pól siatki podziału $0,2 \cdot 0,2 = 0,04$ mnożymy przez średnią czterech wysokości narożnych i sumujemy iloczyny uwzględniając symetrię względem przekątnej. Otrzymujemy w ten sposób wartość $J_2 = 0,05279$ oraz $J = 1,05279$.

Ostatecznie więc

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m} + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{m}} dx dy = 4J = 4,21116.$$

Teraz możemy już określić wartość rzutu pionowego siły stycznej w narożu a T_{za} i następnie samej siły stycznej T_a :

$$T_{za} = \frac{15}{8} g_0 \cdot 4,211 - 3,910 g_0 = 3,986 g_0,$$

$$T_a = \frac{T_{za}}{\operatorname{sh} \frac{x}{m}} = \frac{3,986 g_0}{0,405} = 9,836 g_0.$$

Równanie (2.3), na podstawie którego ustalamy wartości sił podłużnych w narożu, przybiera w tym przypadku postać

$$(3.4) \quad S_1 = S_2 = n_x = n_y = - \frac{Zm}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{m}}.$$

Wobec $\operatorname{ch} 1/m = 1,07897$, $m = 2,53267$, $Z = 1,15254 g_0$ mamy

$$S_{1a} = S_{2a} = n_{xa} = n_{ya} = - \frac{1,15254 \cdot 2,53267}{2 \cdot 1,07897} g_0 = -1,35268 g_0 = -1,353 g_0.$$

W narożu zmianie $S_1 = n_x$ od zera do wartości określonej wzorem (3.4) odpowiada zmiana $T = n_{xy}$ w stosunku do obliczonej z równania równowagi całej powłoki w kierunku pionowym:

$$(3.5) \quad \Delta T = \frac{Zm}{2 \operatorname{ch} \frac{l}{m}}$$

Ustalamy więc z dokładnością wystarczającą dla potrzeb praktyki wartości sił w narożu powłoki następujące:

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 &= -1,353 g_0, \\ T &= 9,836 g_0 - 1,353 g_0 = 8,483 g_0. \end{aligned}$$

Jak już wyżej zauważono, w pozostałej części powłoki stan sił wewnętrznych jest regularny i można mniemać, że teoria błonowa oddaje go z praktycznie dostateczną dokładnością, [3].

4. Zagadnienie uogólnienia rozwiązania numerycznego

Zastanówmy się nad możliwością uogólnienia omówionych wyżej rozwiązań powłoki katoidalnej o wymiarze $a = 1$ na geometrycznie podobną przy dowolnym wymiarze a , lecz tej samej siatce podziału na n części. Opatrując wskaźnikiem 1 wielkości odnoszące się do tej ostatniej możemy napisać

$$\begin{aligned} x_1 &= xa, & \Delta x_1 &= \Delta xa, & h_1 &= ha, \\ y_1 &= ya, & \Delta y_1 &= \Delta ya, & m_1 &= ma, \\ l_1 &= 2a = la, & \Delta x &= \frac{l}{n}, & \Delta x_1 &= \frac{l_1}{n} = \frac{2a}{n}, \\ \operatorname{ch} \frac{x_1}{m_1} &= \operatorname{ch} \frac{xa}{ma} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Zatem lewa strona równania (1.8)

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{x}{m} \begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \\ -1 & -10 & -1 \end{bmatrix} F + \operatorname{ch} \frac{y}{m} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -10 & 20 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} F = \\ = \frac{\Delta x^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} Zm \end{aligned}$$

nie ulegnie zmianie przy zwiększeniu wymiaru a . Rozpatrzmy teraz prawą stronę tego równania. Zakładamy oczywiście, że obciążenie pionowe Z jest niezależne od a i wyłączamy z rozważań macierz w nawiasach kwadratowych. Dla pozostałych wyrazów prawej strony równania (1.8) możemy napisać

$$\frac{\Delta x_1^2}{12} m_1 = \frac{(\Delta xa)^2}{12} ma = \frac{\Delta x^2}{12} ma^3 = \frac{1}{12} \frac{l^2}{n^2} ma^3.$$

A więc prawa strona równania, a w konsekwencji i wartości funkcji naprężeń F_i w wewnętrznych węzłach siatki podziału są proporcjonalne do trzeciej potęgi a . Wynika stąd, że w przypadku dowolnej wartości a można uniknąć w rozwiązaniu numerycznym powłoki katenoidalnej metodą wieloboku sznurowego powtarzania czynności najbardziej pracochłonnej, tj. układania i rozwiązywania równań i wystarczy uzyskane dla $a = 1$ wartości funkcji naprężeń pomnożyć przez a^3 .

Zastanówmy się, czy nie można zastosować tego uogólnienia do obliczenia sił przekrojowych S_1 , S_2 i T . Rozważymy najpierw zagadnienie skośnej siły podłużnej S_1 , przy czym wyniki tych rozważań dotyczyć będą także siły S_2 . Otóż

$$S_1 = n_x \mu = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \mu.$$

Oczywiście wartości

$$\mu = \sqrt{\left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m}\right) \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{m}\right)}$$

dla powłoki geometrycznie podobnej wobec

$$\frac{x_1}{m_1} = \frac{xa}{ma} = \frac{x}{m} \quad \text{oraz} \quad \frac{y_1}{m_1} = \frac{ya}{ma} = \frac{y}{m}$$

nie ulegną zmianie. Obliczenie $\partial^2 F / \partial y^2$ za pomocą macierzy odwrotnej wymaga pomnożenia wartości F_i dla punktów wewnętrznych odpowiedniej linii siatki przez stałe współczynniki i podzielenia przez l_1^2 oraz pomnożenia znanych wartości $\partial^2 F / \partial y^2$ dla punktów brzegowych przez stałe współczynniki, przy czym wszystkie te iloczyny ulegają zsumowaniu:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_1 = \sum c_i F_{1i} \frac{1}{l_1^2} + d_i \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{1\text{brzeg}}$$

Rozważmy pierwszy wyraz prawej strony powyższej zależności

$$F_{1i} = F_i a^3, \quad l_1 = la,$$

$$\sum c_i F_{1i} \frac{1}{l_1^2} = \sum c_i F_i a^3 \frac{1}{(la)^2} = a \sum c_i F_i \frac{1}{l^2}.$$

Dla drugiego wyrazu możemy napisać na podstawie równania różniczkowego funkcji naprężeń

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{1\text{brzeg}} = -\frac{m_1}{\operatorname{ch} \frac{y_1}{m_1}} Z = -\frac{ma}{\operatorname{ch} \frac{ya}{ma}} Z = -a \frac{m}{\operatorname{ch} \frac{y}{m}} Z = -a \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{\text{brzeg}}$$

A zatem oba wyrazy są liniowo zależne od wymiaru a . Wynika stąd, że skośne siły podłużne S_1 i S_2 też są proporcjonalne do a .

Przechodzimy z kolei do sił stycznych

$$T = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x},$$

przy czym, [1],

$$(4.1) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_m = \frac{1}{2\Delta x} (F_{m+1} - F_{m-1}) - \frac{\Delta x}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{m+1} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{m-1} \right].$$

W ostatniej zależności wyrazy w pierwszym nawiasie po prawej stronie znaku równości są proporcjonalne do a^3 , zaś wyrazy w nawiasie kwadratowym — do a . Jednak pierwsze z nich są w przypadku powłoki geometrycznie podobnej dzielone, drugie zaś mnożone przez $\Delta x_1 = \Delta x a$. W konsekwencji i jedno i drugie są proporcjonalne do a^2 . Jeśli teraz zastosujemy z kolei wzory, [1],

$$(4.2) \quad \begin{cases} F'_m = \frac{1}{12\Delta y} (F_{m-2} - 8F_{m-1} + 8F_{m+1} - F_{m+2}), \\ F'_{m+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{F_{m+2} + 4F_{m+1} - 5F_m}{2\Delta y} - F'_m \right), \\ F'_{m+2} = \frac{5F_{m+2} - 4F_{m+1} - F_m}{2\Delta y} - 2F'_{m+1} \end{cases}$$

do obliczenia $(\partial/\partial y) \cdot (\partial F/\partial x)$, to będziemy musieli wartość $\partial F/\partial x$ podzielić przez $\Delta y_1 = \Delta y a$. Ostatecznie więc wartości sił stycznych T zależą będą od wymiaru a w sposób liniowy, analogicznie jak siły podłużne.

Istnieje jeszcze możliwość obrania innej drogi obliczenia sił T : mianowicie zamiast stosować kolejne wzory (4.1) i (4.2), można użyć dwukrotnie tych ostatnich. Oczywiście trzeba tu mieć na uwadze, że wzory (4.2) są mniej dokładne niż (4.1). Wobec dzielenia kolejno przez Δx_1 i Δy_1 , wartości funkcji naprężeń F_i , proporcjonalnych do trzeciej potęgi wymiaru a , dochodzimy do wniosku, że zależność będzie liniowa.

Z rozważań powyższych wypływa wniosek, że wyniki rozwiązania numerycznego powłoki katoidalnej o wymiarze $a = 1$ opisaną tu metodą można, respektując poczynione na początku tego rozdziału założenia, uogólnić na powłokę geometrycznie podobną. Wartości funkcji naprężeń w węzłach siatki podziału są proporcjonalne do trzeciej potęgi wymiaru a , zaś wartości sił podłużnych i stycznych — do potęgi pierwszej.

5. Uwagi końcowe

Należy tu jeszcze dodać, że DUBAS, [4], na podstawie znacznej liczby rozwiązanych przypadków płyt i tarcz stwierdza, że metoda wieloboku sznurowego w porównaniu z metodą różnic skończonych daje większą dokładność

przy tej samej siatce podziału (szczególnie dla obciążeń nierównomiernych) oraz szybsze zmniejszenie się wielkości błędów w miarę zagęszczenia siatki. Przeprowadzone w pracy [1] obliczenia porównawcze pozwalają sądzić, iż stwierdzenie powyższe można rozszerzyć także na powłoki translacyjne.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Z. PEŁKA, *Obliczanie powłok translacyjnych metodą wieloboku sznurowego*, Rozpr. inżyn. 4, 7 (1959).
[2] T. KOCHMAŃSKI, *Zarys rachunku krakowianowego*, Warszawa 1945.
[3] F. LEVI, *Esperienze su volte e doppia curvatura eseguite nello Stabilimento RDB di Pontenure*, II Laterizio, 39, 1956.
[4] P. DUBAS, *Calcul numerique des plaques et parois minces*, Leemann, Zurich 1955.

Резюме

КАТЕНОИДАЛЬНАЯ ОБОЛОЧКА

Передвигая один катеноид на другом в случае, когда обе кривые расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях, получается трансляционная оболочка, которой дается название катеноидальной. Дается уравнение этой оболочки и рассматривается способ определения безмоментных сил при вертикальной нагрузке и при опоре по окружности диафрагмами, жесткими только в своей плоскости.

Дифференциальное уравнение напряжений для оболочки, расположенной над квадратом, решается методом веревочного многоугольника. Рассматриваются два случая: равномерно распределенной нагрузки и нагрузки собственным весом оболочки постоянной толщины. Решения закончены определением значений продольных и касательных сил, при чем найдена также обратная матрица, позволяющая перейти от значения функции напряжений F_i к значениям вторых производных F_i'' при разделении отрезка на 10 частей.

Затем рассматривается вопрос распределения безмоментных сил в углу оболочки и способ оценки влияния поперечной жесткости диафрагм на эти силы. Обсуждается также возможность обобщения результатов решения оболочки, размером половины стороны проекции $a = 1$ на геометрически подобную оболочку. Значения функции напряжений в узлах сетки пропорциональны третьей степени размера a , а продольные и касательные силы зависят от a линейно.

Summary

CATENOIDAL SHELL

By moving one catenary along another both curves lying in mutually perpendicular vertical planes, a translational shell is obtained called here the catenoidal shell. The equation of this shell is given and the method of calculating

the membrane forces under vertical load, the shell being supported along the contour on diaphragms rigid in their planes only.

The differential equation of the stress function for a shell covering a square is solved by means of the method of funicular polygon. Two cases are considered: a shell acted on by a uniform load and a constant thickness shell loaded by its own weight. Normal and tangential forces are determined, the inverse matrix being also obtained thus enabling the passage from the values of the stress function F_i to those of the second derivatives F_i'' , the segment being divided into ten parts.

Next, the problem of distribution of the forces in a corner is considered and the way of appraising the influence on these forces of the transversal rigidity of the diaphragms. Also the possibility of generalizing the results obtained for the shell, of which the projection has the half-side length $a = 1$, to a geometrically similar shell is considered. It is found that the values of the stress function in the nodes of the net are proportional to the third power of a and the normal and tangential forces depend linearly on a .

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 kwietnia 1960 r.