

ZBIGNIEW WESOŁOWSKI

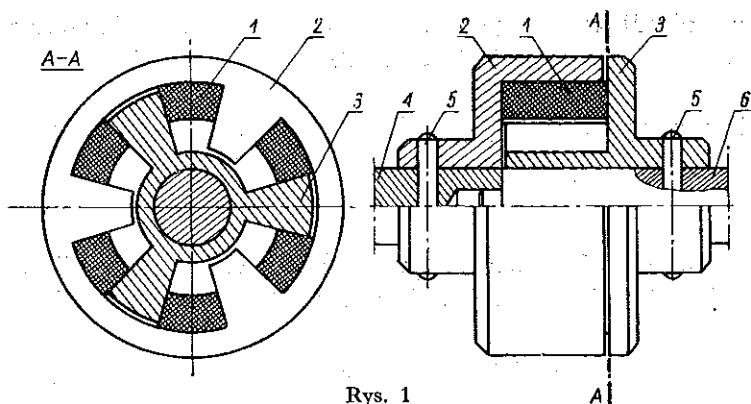
ODKSZTAŁCENIA SKOŃCZONE ELEMENTÓW SPRĘŻYSTYCH  
SPRZĘGŁA ELASTYCZNEGO

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CLXXII

TOM VIII . ZESZYT 4 . ROK 1960

W pracy niniejszej rozważamy stan naprężenia w elementach sprężystych sprężła elastycznego przedstawionego na rys. 1.

1. O elementach sprężystych zakładamy, że są wykonane z materiału jednorodnego izotropowego i nieściśliwego. Nie robimy poza tym żadnych założeń



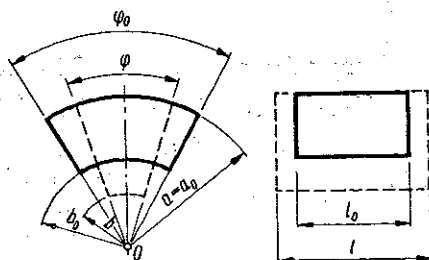
Rys. 1

co do jego fizycznych właściwości. Zakładamy ponadto, że współczynnik tarcia między elementami sprężystymi a obudową jest równy zero. Pozwala to uzyskać rozwiązanie ściśle w postaci zamkniętej.

Przy obliczeniach będziemy się posługiwać teorią odkształceń skończonych, co jest konieczne ze względu na duże odkształcenia elementów sprężystych. Stosować będziemy metodę i oznaczenia przyjęte przez A.E. GREENA i jego współpracowników, [1].

Kształt elementów sprężystych przed i po odkształceniu przedstawia rys. 2.

Zakładamy, że w czasie odkształcenia powierzchnia walcowa o promieniu początkowym  $b_0$  pozostaje po odkształceniu powierzchnią walcową o promieniu  $b$ . O powierzchniach czołowych zakładamy, że w czasie odkształcenia pozostają płaskie. Dalsze rozważania wykażą, czy takie założenia są statycznie dopuszczalne.



— linia ciągła — przed odkształceniem  
 - - - linia przerywana — po odkształceniu

Rys. 2

2. W ciele odkształconym budujemy walcowy układ współrzędnych

$$(2.1) \quad \theta^1 \equiv r, \quad \theta^2 \equiv \vartheta, \quad \theta^3 \equiv z.$$

Wszystkie wielkości wyrażać będziemy właśnie w tym układzie. Odpowiedni tensor metryczny kowariantny i kontrawariantny ma następujące współrzędne:

$$(2.2) \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy kowariantnego tensora metrycznego oznaczony przez  $G$  wynosi

$$(2.3) \quad G = |G_{ij}| = r^2.$$

Ze stanu nieodkształconego ciało przechodzi w stan odkształcony przez (1)  $\lambda$ -krotne rozciągnięcie wzdłuż osi  $z$ , (2)  $1/k$ -krotne zwiększenie kąta rozwarcia.

Zgodnie z powyższym przy wymiarach uwidoczonych na rys. 2 mamy:

$$(2.4) \quad \lambda = \frac{l}{l_0}, \quad \frac{1}{k} = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad k = \frac{\varphi_0}{\varphi}.$$

Walcowe współrzędne punktu  $(r, \vartheta, z)$  są więc przed odkształceniem  $(\rho, k\vartheta, z/\lambda)$ . Współrzędne kartezjańskie punktu  $(r, \vartheta, z)$  przed odkształceniem określają wzory:

$$(2.5) \quad x_1 = \rho \cos k\vartheta, \quad x_2 = \rho \sin k\vartheta, \quad x_3 = z/\lambda,$$

przy czym  $\rho$  jest pewną, na razie nie znaną, funkcją  $r$ .

Kowariantny tensor metryczny układu nieodkształconego jest równy:

$$(2.6) \quad g_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial \theta^i} \frac{\partial x_m}{\partial \theta^j}.$$

Korzystając z zależności (2.5) możemy go wyznaczyć efektywnie, a następnie znanymi sposobami obliczyć tensor metryczny kontrawariantny, co daje

$$(2.7) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1/\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznikiem macierzy  $g_{ij}$  jest:

$$(2.8) \quad g = |g_{ij}| = \left( \frac{\rho_r \rho k}{\lambda} \right)^2,$$

gdzie indeksem  $r$  oznaczono różniczkowanie względem  $r$ :

$$(2.9) \quad \rho_r \equiv \frac{d\rho}{dr}.$$

Niezmienniki stanu odkształcenia są odpowiednio równe:

$$(2.10) \quad \begin{cases} I_1 = g^{rs} G_{rs} = \frac{1}{\varrho_r^2} + \frac{r^2}{\varrho^2 k^2} + \lambda^2, \\ I_2 = g_{rs} G^{rs} I_3 = \left( \varrho_r^2 + \frac{\varrho^2 k^2}{r^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{r\lambda}{\varrho \varrho_r k} \right)^2, \\ I_3 = G/g = \left( \frac{r\lambda}{\varrho \varrho_r k} \right)^2. \end{cases}$$

3. W dalszych rozważaniach rozpatrywać będziemy materiał nieściśliwy. Dla takiego materiału trzeci niezmiennik stanu odkształcenia, będący stosunkiem objętości elementu odkształconego do objętości elementu nieodkształconego, spełnia warunek

$$(3.1) \quad I_3 = 1.$$

Wykorzystując (3.1) z równania trzeciego grupy (2.10) otrzymamy

$$(3.2) \quad \varrho \varrho_r = \frac{\lambda}{k} r.$$

Jest to równanie, jakie przy naszych założeniach musi spełniać funkcja  $\varrho(r)$ .

Rozwiązaniem równania różniczkowego (3.2) jest funkcja

$$(3.3) \quad \varrho = \sqrt{\frac{\lambda}{k} r^2 + C},$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania. Ponieważ na powierzchni walcowej  $r = a_0$  punkty ciała nie doznają przemieszczenia promieniowego, to

$$(3.4) \quad a = a_0.$$

Pozwala to wyznaczyć stałą  $C$ :

$$(3.5) \quad C = a_0^2 \left( 1 - \frac{\lambda}{k} \right).$$

Ostatecznie funkcja  $\varrho(r)$  po podstawieniu (3.5) do (3.3) wyrazi się wzorem:

$$(3.6) \quad \varrho = \sqrt{\frac{\lambda}{k} r^2 + a_0^2 \left( 1 - \frac{\lambda}{k} \right)}.$$

Promień wewnętrzny  $b_0$  zmienia się w czasie odkształcenia na  $b$ , gdzie  $b_0$  i  $b$  muszą spełniać równanie (3.6):

$$(3.7) \quad b_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{k} b^2 + a_0^2 \left( 1 - \frac{\lambda}{k} \right)}.$$

Stąd

$$(3.8) \quad b = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \sqrt{b_0^2 - a_0^2 \left( 1 - \frac{\lambda}{k} \right)}.$$

Podstawiając wyrażenie (3.6) do (2.10) otrzymamy

$$(3.9) \quad \begin{cases} I_1 = \frac{\lambda^2 r^4 + k^4 \varrho^4 + k^2 \lambda^2 \varrho^2 r^2}{(k\lambda\varrho r)^2}, \\ I_2 = \frac{\lambda^4 r^4 + k^4 \lambda^2 \varrho^4 + k^2 \varrho^2 r^2}{(k\lambda\varrho r)^2}, \\ I_3 = 1. \end{cases}$$

Jak to wynika ze wzorów (2.6) i (3.9) tensor metryczny jak również niezmienniki stanu odkształcenia nie zależą od zmiennych  $\vartheta$  i  $z$ . Stan odkształcenia jest więc kołowo-symetryczny i pseudopłaski.

4. Tensor naprężenia w punkcie  $(r, \vartheta, z)$  wyraża się wzorem

$$(4.1) \quad \tau^{ij} = \Phi g^{ij} + \Psi B^{ij} + p G^{ij},$$

gdzie funkcje  $\Phi$  i  $\Psi$  oraz tensor  $B^{ij}$  są określone wzorami:

$$(4.2) \quad \begin{cases} \Phi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}, & \Psi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}, \\ B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ir} g^{js} G_{rs}, \end{cases}$$

przy czym  $W(I_1, I_2, I_3)$  jest potencjałem sprężystości, odniesionym do jednostki objętości ciała nieodkształconego, a  $p$  pewną funkcją skalarną.

Obliczając tensor  $B^{ij}$  otrzymujemy

$$(4.3) \quad \begin{cases} B^{11} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{k^2 \varrho^2}{\lambda^2}, & B^{22} = \frac{\lambda^2}{k^2 \varrho^2} + \frac{1}{\lambda^2 r^2}, \\ B^{33} = \frac{k^2 \varrho^2}{r^2} + \frac{\lambda^2 r^2}{k^2 \varrho^2}, & B^{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j. \end{cases}$$

Korzystając z (4.3) obliczamy ze wzoru (4.1) naprężenia:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \tau^{11} = \Phi \left( \frac{k\varrho}{\lambda r} \right)^2 + \Psi \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\varrho^2 k^2}{r^2} \right) + p, \\ r^2 \tau^{22} = \Phi \left( \frac{r}{k\varrho} \right)^2 + \Psi \left( \frac{\lambda^2 r^2}{k^2 \varrho^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) + p, \\ \tau^{33} = \Phi \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 + \Psi \left( \frac{\lambda^2 r^2}{k^2 \varrho^2} + \frac{k^2 \varrho^2}{r^2} \right) + p, \\ \tau^{ij} = 0 \quad \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Nie znając funkcję  $p$  dobierzemy tak, żeby naprężenia te spełniały warunki równowagi.

5. Warunki równowagi

$$(5.1) \quad \tau^{ij} |_{,i} = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

dają się napisać w następującej postaci:

$$(5.2) \quad \tau^{ij} + F_{ir}^i \tau^{rj} + F_{jr}^j \tau^{ir} = 0.$$

Dwie pionowe linie oznaczają różniczkowanie kowariantne, przecinek różniczkowanie zwykłe, a  $F_{jk}^i$  są symbolami CHRISTOFFELA II-rodzaju. Dla układu współrzędnych walcowych wynoszą one

$$(5.3) \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r},$$

a pozostałe są równe zeru.

Podstawiając naprężenia  $\tau^{ij}$  ze wzorów (4.4) do (5.2) otrzymujemy

$$(5.4) \quad \begin{cases} \left[ p + \Phi \left( \frac{k\rho}{\lambda r} \right)^2 + \Psi \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{k^2 \rho^2}{r^2} \right) \right]_{,r} + \\ + \Phi \left( \frac{k^2 \rho^2}{\lambda^2 r^3} - \frac{r}{k^2 \rho^2} \right) + \lambda^2 \Psi \left( \frac{k^2 \rho^2}{\lambda^2 r^3} - \frac{r}{k^2 \rho^2} \right) = 0, \\ p_{, \vartheta} = 0, \quad p_{, z} = 0. \end{cases}$$

Z ostatnich dwu równań wynika, że  $p$  zależy tylko od  $r$ .

Całkując równanie pierwsze (5.4) otrzymamy

$$(5.5) \quad p = - \int_{r_1}^r \left( \frac{k^2 \rho^2}{\lambda^2 r^3} - \frac{r}{k^2 \rho^2} \right) (\Phi + \lambda^2 \Psi) dr - \Phi \left( \frac{k\rho}{\lambda r} \right)^2 - \Psi \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{k^2 \rho^2}{r^2} \right),$$

gdzie  $r_1$  jest dowolną liczbą.

Współrzędne tensora naprężenia po podstawieniu (5.5) do (5.4) wyrażą się ostatecznie wzorami:

$$(5.6) \quad \begin{cases} \tau^{11} = - \int_{r_1}^r \left( \frac{k^2 \rho^2}{\lambda^2 r^3} - \frac{r}{k^2 \rho^2} \right) (\Phi + \lambda^2 \Psi) dr, \\ \tau^{22} = \Phi \left( \frac{r^2}{k^2 \rho^2} - \frac{k^2 \rho^2}{\lambda^2 r^2} \right) + \Psi \left( \frac{\lambda^2 r^2}{k^2 \rho^2} - \frac{k^2 \rho^2}{r^2} \right) + \tau^{11}, \\ \tau^{33} = \Phi \left( \frac{1}{\lambda^2} - \frac{k^2 \rho^2}{\lambda^2 r^2} \right) + \Psi \left( \frac{\lambda^2 r^2}{k^2 \rho^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \tau^{11}. \end{cases}$$

Do wzorów powyższych należy podstawić  $\rho$  z wyrażenia (3.6). W równaniach tych jest jedna stała dowolna. Możemy więc spełnić jeden naprężeniowy warunek brzegowy.

6. Żądając, aby siła  $P$  działająca na powierzchnię walcową o promieniu  $b$  (po odkształceniu) była równa zeru, otrzymamy następujący warunek brzegowy:

$$(6.1) \quad P^k = \tau^{ik} n_i = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

przy czym  $n_i$  są współrzędnymi jednostkowego wektora  $\mathbf{n}$  normalnego do tej powierzchni w układzie współrzędnych  $r, \vartheta, z$ .

Ponieważ  $n = (1, 0, 0)$ , przeto trzy równania (6.1) redukują się do jednego

$$(6.2) \quad \tau^{11} = 0 \quad \text{na } r = b.$$

Równanie to jest spełnione, jeśli

$$(6.3) \quad r_1 = b.$$

Fizyczne składowe tensora naprężeń  $\tau^{ij}$  są  $\sigma_{ij}$ :

$$(6.4) \quad \sigma_{ij} = \tau^{ij} \sqrt{G_{jj}/G^{ii}};$$

stąd

$$(6.5) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \tau^{11}, & \sigma_{22} = r^2 \tau^{22}, & \sigma_{33} = \tau^{33}, \\ \sigma_{ij} = 0 & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Moment jaki należy przyłożyć do sprzęgła, aby odkształcić w opisany sposób jeden element sprężysty o końcowej długości  $l$ , wynosi

$$(6.6) \quad M = -l \int_b^a \sigma_{22} r dr = -l \int_b^a r^3 \tau^{22} dr,$$

przy czym  $a$  i  $b$  są wielkościami mierzonymi po odkształceniu i należy je podstawić jako funkcje danych  $a_0$  i  $b_0$  ze wzorów (3.4) i (3.8). Ostateczną zależność można stąd otrzymać po wyspecyfikowaniu funkcji  $W$ .

7. Moment ten znajdziemy, gdy materiałem elementów sprężystych jest guma, dla której funkcja  $W$  wyraża się wzorem (tzw. materiał MOONEYA)

$$(7.1) \quad W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3),$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  są stałymi materiałowymi.

Funkcje  $\Phi$  i  $\Psi$  zgodnie z (4.2) są następujące:

$$(7.2) \quad \Phi = 2C_1, \quad \Psi = 2C_2.$$

Założymy, że elementy sprężyste nie mogą wydłużać się w kierunku osi  $z$ , co daje

$$(7.3) \quad l = l_0, \quad \lambda = 1.$$

Naprężenie  $\sigma_{22}$  obliczymy według (5.6) po wykorzystaniu wzorów (7.2) i (3.6) przy  $\lambda = 1$ :

$$(7.4) \quad \sigma_{22} = r^2 \tau^{22} = 2(C_1 + C_2) \left\{ \frac{r^2}{kr^2 + a_0^2(k^2 - k)} - \frac{kr^2 + a_0^2(k^2 - k)}{r^2} - k \ln \frac{r}{b} + \frac{1}{2} a_0^2(k^2 - k) \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{2k} \ln \frac{r^2 + a_0^2(k-1)}{kb_0^2} \right\}.$$

Po podstawieniu funkcji (7.4) do wzoru (6.6) otrzymujemy moment, który da się przedstawić w postaci następującej:

$$(7.5) \quad M = \frac{l}{2} (C_1 + C_2) a_0^2 K,$$

gdzie  $K$  jest funkcją tylko współczynnika  $k$  charakteryzującego zmianę kątów i stosunku promieni  $b_0/a_0$  przed odkształceniem:

$$(7.6) \quad K = k-1 - (k^2-1) \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 + \left(3 - \frac{2}{k}\right) \ln \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 + \\ + \frac{k^2-k}{k \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 - k+1} - k \ln \left[ k \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 - k+1 \right].$$

Współczynnik  $k$  zgodnie ze wzorem (2.4) jest stosunkiem kątów rozwarcia sprężystego przed i po odkształceniu. Ważny dla praktyki stosunek  $(\varphi_0 - \varphi)/\varphi_0$  wyraża się za pomocą współczynnika  $k$  w sposób następujący:

$$(7.7) \quad \delta = \frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi_0} = 1 - \frac{1}{k}.$$

Związek (7.5) daje poszukiwaną zależność momentu przenieszonego przez jeden element sprężysty od kąta.

większych trudności wyznaczenie efektywne momentu również dla materiału, dla którego potencjał  $W$  wyraża się wzorem

$$(7.8) \quad W = C_1(I_1-3) + C_2(I_2-3) + C_3(I_1^2-9)$$

podanym przez S. ZAHORSKIEGO w pracy [4].

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1949.
- [2] L. TRELCAR, *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford 1949.
- [3] J. E. ADKINS, *Some General Results in the Theory of Large Elastic Deformations*, Proc. Royal Society, A 231, 1955, 75-90.
- [4] S. ZAHORSKI, *A Form of the Elastic Potential for Rubber-like Materials*, Arch. Mech. stos., 5, 11 (1959).

#### Резюме

#### КОНЕЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛАСТИЧЕСКОГО СЦЕПЛЕНИЯ

Определяется статическая характеристика эластического сцепления. Относительно упругих элементов предполагается, что они подвергаются большим деформациям, принимая при этом, что они изготовлены из материала, обладающего первоначально изотропными свойствами и несжимаемостью. С помощью подробного метода, приведенного в работе [1], определяется напряженное и деформированное состояние в упругих элементах.

Момент по отношению к оси сцепления в функции угла кручения  $\varphi_0 - \varphi$  дается в интегральном виде, а для материала Муниа в алгебраическом.



## FINITE DEFORMATION OF ELASTIC ELEMENTS OF A COUPLING

The object of this paper is to find the characteristic of an elastic coupling. Of the elastic elements of the coupling it is assumed that they are made of an incompressible, originally isotropic material. The state of stress and strain in the elastic elements is determined by the method described in detail in the Ref. [1]. The torque, in function of the length of twist, is given in the integral form and, for the MOONEY material, in the algebraic form.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1960 r.*