WIESŁAW ZAPAŁOWICZ

SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU W KSZTAŁCIE WIELOKĄTA FOREMNEGO WZORY OBLICZENIOWE

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXX

TOM VIII • ZESZYT 4 • ROK 1960

SPIS TREŚCI

Ścisłe rozwiązanie zagadnienia skręcania prętów pryzmatycznych o przekroju w kształcie wielokąta foremnego daje wyniki mało przydatne do bezpośrednich obliczeń praktycznych, ponieważ zarówno sztywność skręcania jak i maksymalne naprężenie styczne wyrażone zostały za pomocą szeregów nieskończonych. Wyznaczając sumy cząstkowe tych szeregów w artykule niniejszym podano wartości odpowiednich współczynników obliczeniowych z dokładnością wystarczającą dla praktycznych celów.

1. Sztywność skręcania

Sztywność skręcania dla dowolnej ilości boków n wielokąta przekroju podaje wzór (4.39) w pracy [1]. Wyrażenie przedstawione tym wzorem składa się z dwóch części, z których jedna obejmuje biegunowy moment bezwładności przekroju I_0, druga zaś podwójny szereg nieskończony.

Dla uproszczenia wprowadzimy następujące podstawienie:

$$D = Ga^4(\mu_1 - \mu_2), \tag{1.1}$$

gdzie zgodnie z oznaczeniami pracy [1] a jest promieniem koła opisanego na wielokącie przekroju oraz

$$\mu_1 = \frac{I_0}{a^4}, \qquad \mu_2 = \frac{\pi n^4}{\left[B\left(\frac{n-2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right]^4} \sum_{s=1}^{k} sn\left(\sum_{t=0}^{p} A_{t+s} A_t\right)^2,$$

przy tym

$$S_1 = \sum_{s=1}^{k} sn\left(\sum_{t=0}^{p} A_{t+s} A\ \right)^2 \tag{1.2}$$

jest sumą cząstkową szeregu podwójnego

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} kn\left(\sum_{p=0}^{\infty} A_{p+k} A_p\right)^2 \tag{1.3}$$

przy odpowiednio do każdego n dobranych wskaźnikach k i p dla uzyskania wystarczającego stopnia dokładności.

Pomijając przekrój trójkątny, dla którego [ze względu na powolną zbieżność szeregu (1.3) dla $n = 3$] ilość wyrazów sumy cząstkowej musiałaby być dosyć wysoka odpowiednio do żądanej dokładności, dobrano dla kolejnych n wartości wskaźników k i p przytoczone w tablicy 1.

Tablica 1

n	4	5	6	7	8	10
k	10	10	10	6	4	4
p	8	8	8	2	2	1

Tablica 2

n	4	5	6	7	8	10
μ_1	0,66667	0,9269	1,0825	1,1836	1,2762	1,3759
μ_1-μ_2	0,5742	0,8603	1,0465	1,1530	1,2549	1,3640

Sumy cząstkowe szeregu (1.3) obliczone przy tych wskaźnikach dają wartości współczynników μ_1 i μ_2 przytoczone w tablicy 2.

Dzięki przeprowadzonym w pracy [1] rozważaniom możliwe jest określenie górnej granicy błędu, popełnionego przy przybliżonym określaniu wartości współczynników tablicy 2, na podstawie wyprowadzonych tam wzorów (4.33) i (4.41). Tę górną granicę błędu b w procentach prawdziwej wartości $\mu_1-\mu_2$ podaje tablica 3.

Tablica 3

n	4	5	6	7	8	10
b%	4,79	0,835	0,168	0,217	0,104	0,0405

Tablica 4

n	3	4
μ_1	0,3247	0,6667
μ_1-μ_2	0,1948	0,5624

Na podstawie klasycznych rozwiązań podanych w literaturze, [2] i [3], przytoczyć można dokładne wartości współczynników z tablicy 2, dla $n = 3$ i $n = 4$ (por. tablica 4).

Przedstawmy teraz sztywność skręcania za pomocą biegunowego momentu bezwładności. Otrzymamy

$$D = \alpha G I_0. \tag{1.4}$$

Wartości współczynnika α dla różnych n przedstawia tablica 5, w której α dla $n = 4$ obliczono na podstawie wartości $\mu_1-\mu_2$ według tablicy 4.

Tablica 5

n	3	4	5	6	7	8	10
α	0,6001	0,8436	0,9282	0,9667	0,9742	0,9833	0,9913

Górna granica błędu g współczynnika podanego w tablicy 5 w stosunku do jego wartości prawdziwej podana jest w tablicy 6.

Tablica 6

n	5	6	7	8	10
g%	0,828	0,168	0,216	0,104	0,0405

Z tablicy 5 widać, że wzór (1.4) można dla pewnych odpowiednio wysokich n zastąpić wzorem

$$D = GI_0. \tag{1.5}$$

Jest to zresztą zrozumiałe, gdyż jak wykazano w pracy [1] dla $n \to \infty$ wartość sumy szeregu (1.3) zdąża do zera. Wielkość popełnionego błędu jest wtedy dla celów praktycznych bez znaczenia. Górna granica tego błędu g_i przy uwzględnieniu niedokładności obliczenia współczynników tablicy 2 podana jest w tablicy 7.

Tablica 7

n	5	6	7	8	10
g_i%	8,645	3,608	2,875	1,803	0,906

Ponieważ dla $n > 10$ jest $g_i < 0{,}906$, zatem w dalszych obliczeniach będziemy dla takich n stosować wzór (1.5).

2. Maksymalne naprężenia styczne

Wartość maksymalnych naprężeń stycznych ujęto w pracy [1] wzorem (5.14). Zachowując te same oznaczenia wzór ten przedstawić możemy nieco inaczej:

$$\tau_{max} = G\beta a\left[\cos\frac{\pi}{n} - \frac{C}{a}\sqrt[n]{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k kn \sum_{r=0}^{\infty} A_{k+r}A_r\right]. \tag{2.1}$$

Szereg przemienny

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k kn \sum_{r=0}^{\infty} A_{k+r}A_r \tag{2.2}$$

posiada sumę ujemną, której jednak nie udało się autorowi wyznaczyć i która wobec tego może być obliczona tylko w sposób przybliżony.

Można jednak wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k kn \sum_{r=0}^{\infty} A_{k+r}A_r = 0. \tag{2.3}$$

W miarę wzrostu n (liczba boków wielokąta przekroju) szereg (2.2) będzie więc coraz szybciej zbieżny i wobec tego przy obliczaniu sumy cząstkowej posłużyć się możemy coraz mniejszą liczbą wyrazów, byle liczba ich była parzysta, co jak wykazano w pracy [1] konieczne jest z punktu widzenia możliwości oceny błędu aproksymacji. Wskaźniki k i r przybliżonego sumowania dobrano więc dla poszczególnych n następująco:

Tablica 8

n	3	4	5	6	7	8	10	15	18	19	20	25	40
k	10	10	10	10	6	4	4	4	4	4	4	4	4
r	10	8	8	8	2	2	1	0	0	0	0	0	0

Przedstawmy naprężenia maksymalne w postaci

$$\tau_{max} = \alpha_1 G\beta a, \tag{2.4}$$

gdzie

$$\alpha_1 = \cos\frac{\pi}{n} - \frac{C}{a}\sqrt[n]{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k kn \sum_{r=0}^{\infty} A_{k+r}A_r. \tag{2.5}$$

Tablica 9

n	3	4	5	6	7	8
$\cos\frac{\pi}{n}$	0,50000	0,70711	0,80902	0,86603	0,90120	0,92388
$\frac{1}{n}B\left(\frac{n-2}{n}, \frac{1}{n}\right)$	1,7666	1,3110	1,1720	1,1129	1,0792	1,0590

c.d. tabl. 9

n	10	15	18	19	20	25	40
$\cos\frac{\pi}{n}$	0,95106	0,97815	0,98481	0,98635	0,98769	0,99212	0,99692
$\frac{1}{n}B\left(\frac{n-2}{n}, \frac{1}{n}\right)$	1,0364	1,0158	1,0107	1,0095	1,0086	1,0054	1,0020

Biorąc pod uwagę wartości przedstawione w tabl. 9 po odpowiednich przeliczeniach otrzymamy przybliżone wartości współczynnika α_1 (tabl. 10).

Tablica 10

n	3	4	5	6	7	8	10
α_1	0,5579	0,8530	0,9645	1,0185	1,0282	1,0309	1,0440

c.d. tabl. 10

n	15	18	19	20	25	40
α_1	1,0462	1,0430	1,0419	1,0405	1,0352	1,0249

Górną granicę błędu procentowego $b_{\alpha_1}\%$ dla współczynnika α_1, obliczoną na podstawie wzoru (5.22) pracy [1], podaje tablica 11.

Tablica 11

n	3	4	5	6	7	8	10
$b_{\alpha_1}\%$	33,51	13,14	7,07	4,69	5,48	5,86	3,25

c.d. tabl. 11

n	15	18	19	20	25	40
$b_{\alpha_1}\%$	2,03	1,58	1,47	1,42	1,09	0,61

Rozwiązania klasyczne (por. np. [2] i [3]) dostarczają dla $n = 3$ i $n = 4$ następujących wartości współczynnika α_1:

Tablica 12

n	3	4
α_1	0,7500	0,9551

Współczynnik α_1 zdąża do 1 dla $n \to \infty$. Ponieważ jednak dla $3 \leqslant n < 15$, suma szeregu wchodzącego w wyrażenie (2.5) maleje wolniej niż rośnie $\cos(\pi/n)$, zatem α_1 zdąża do 1 nie monotonicznie, lecz posiada maksimum dla pewnego n leżącego, jak można się spodziewać, między 10 i 15.

Zastąpmy formułę (2.4) przybliżonym wzorem

$$\tau_{max} = G\beta a. \tag{2.6}$$

Górną granicę popełnionego przy tym błędu g_τ w procentach w stosunku do prawdziwej wartości α_1, dla poszczególnych wielokątów przekroju, przedstawia tablica 13.

Tablica 13

n	5	6	7	8	10	15	18	19	20	25	40
g_τ %	3,66	6,42	8,07	7,71	7,33	6,36	5,64	5,43	5,26	4,45	3,02

Wyznaczymy teraz wzory obliczeniowe dla τ_{max} wyrażonych przy pomocy momentu skręcającego. Pamiętając, że

$$|M_0| = D\beta, \tag{2.7}$$

mamy

$$\tau_{max} = \frac{|M_0|}{\alpha_2 a^3}, \tag{2.8}$$

gdzie

$$\alpha_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\alpha_1}. \tag{2.9}$$

Przybliżoną wartość α_2 (dokładną dla $n = 3$ i $n = 4$) dla różnych n podano w tablicy 14.

Tablica 14

n	3	4	5	6	7	8
α_2	0,25973	0,58884	0,89192	1,0275	1,1214	1,2173

c.d. tabl. 14.

n	10	15	18	19	20	25	40
α_2	1,3064	1,4158	1,4459	1,4534	1,4621	1,4857	1,5200

a_2 dla $n = 3$ i $n = 4$ wyrażono z dokładnością do 0,0001. Górną granicę błędu dla współczynnika a_2 przy pozostałych n, w procentach w stosunku do jego wartości prawdziwej, b_{a_2} przedstawia tablica 15.

Tablica 15

n	5	6	7	8	10	15	18	19	20	25	40
b_{a_2} %	6,71	4,74	5,57	5,00	3,32	2,11	1,60	1,50	1,44	1,10	0,61

Należy sobie przy tym zdać sprawę z faktu, że błąd, którego górną granicę podano w tablicy 15, został popełniony na niekorzyść pewności, tzn. rzeczywiste naprężenia w obciążonym momentem M_0 przekroju są nieco większe, przy czym rząd wielkości błędu łatwo określić z dotychczasowych rozważań.

Literatura cytowana w tekście

[1] W. Zapałowicz, *Torsion of Prismatic Bars of Regular Polygonal Cross-section*, Arch. Mech. stos., 5, **11** (1959).

[2] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 1, PAU, Kraków 1948.

[3] Л.С. Лейбенсон, *Курс теории упругости*, Огиз-Гостехиздат, Москва, 1947.

Р е з ю м е

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ С СЕЧЕНИЕМ В ФОРМЕ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА. ФОРМУЛЫ РАСЧЕТА

Точное решение вопроса кручения стержней с сечением правильного многоугольника выражается с помощью бесконечных рядов и поэтому оно непригодно для практических целей. Поэтому составляются формулы для жесткости при кручении и для максимальных касательных напряжений, которые можно уже непосредственно применить ко всем инженерным расчетам.

Приближенные выражения для жесткости при кручении выражают ее с помощью радиуса, описанного в многоугольнике (1.1), или при помощи полярного момента инерции сечения (1.4). Численные коэффициенты, выступающие в этих формулах, даются соответственно в таблицах 2 и 5. Процентные величины ошибок, сделанных в следствие приближения этих численных значений, даны соответственно в таблицах 3 и 6.

Из собранных численных величин коэффициента, выступающего в формуле (1.4) вытекает, что для $n \geqslant 10$ — жесткость при кручении можно выразить как произведение полярного момента инерции сечения и модуля упругости Кирхгоффа, при чем сделанная ошибка будет меньше $0{,}906\%$.

Для расчетов максимальных касательных напряжений, предлагается формула (2.4), при чем приближенные значения численного коэффициента для различных n даются в таблице 10, а верхний предел сделанной ошибки в таблице 11. Ири этом оказывается, что для $n \to \infty$, численный коэффи-

циент формулы (2.4) стремится к 1 через некоторый максимум достигаемый для n расположенного между 10 и 15.

В таблице 13 дается верхний предел ошибки, сделанной в случае замены в расчетах формулы (2.4) формулой (2.6).

Зависимость между τ_{max} и скручивающим моментом выражает формула (2.8). Соответственно приближенные численные коэффициенты даются в таблице 14, а сделанная, в следствие приближения, ошибка приводится в таблице 15 для различных n.

Все исчисления приближенных значений соответствующих коэффициентов и оценка величины сделанных ошибок проводились на основании зависимостей выведенных в работе [1].

Summary

THE TORSION OF REGULAR POLYGONAL BARS. COMPUTATION FORMULAE

The accurate solution of the problem of torsion of a regular polygonal bar is expressed by means of infinite series, inconvenient for practical purposes. In this connection formulae for torsional rigidity and maximum shear stresses have been worked out such as to allow the direct use in any practical computation.

These approximate formulae express the torsional rigidity in terms of the radius of the circumscribed circle [Eq. (1.1)] or the polar moment of inertia [Eq.(1.4)]. The numerical coefficients appearing in the formulae are given in Tabs. 2 and 5, respectively. The relative errors due to the approximate character of these values are collated in Tabs. 3 and 6, respectively.

From the numerical values of the coefficients appearing in the Eq. (1.4) it follows that for $n \geqslant 0$ the torsional rigidity may be expressed in the form of the product of the polar moment of inertia and the shear modulus, the error thus committed being less than 0,906%.

For the maximum shear stress the Eq. (2.4) is proposed, where the approximate values of the numerical coefficient are given for various n in Table 11. It is seen that for $n \to \infty$ the numerical coefficient of the Eq. (2.4) tends to 1 and passes through a certain maximum which is reached for one lying between 10 and 15.

Table 13 gives the upper bound of the error that is committed by using the Eq. (2.6) instead of (2.4).

The relation between τ_{max} and the torque is expressed by Eq. (2.8). The relevant approximate values of the coefficients are collated in Table 14, the approximation error being given for various n in Table 15.

The computation of all the approximate values of the coefficients and the appraisal of the errors are based on the relations derived in Ref. [1].

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 marca 1960 r.